PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE
MANUEL OJANGUREN

Espaces principaux homogènes localement triviaux

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 75 (1992), p. 97-122.
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__75__97_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESPACES PRINCIPAUX HOMOGÈNES LOCALEMENT TRIVIAUX

par Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE *et* Manuel OJANGUREN

Dans le séminaire Chevalley de 1958, Serre ([Se], Remarque, p. 31) et Grothendieck ([Gr_1], Remarque 3, p. 26-27) émettent, pour un corps k algébriquement clos, la

Conjecture **1.** — *Si* X *est une variété algébrique intègre et lisse sur un corps* k, *et si* G *est un groupe algébrique réductif et connexe, défini sur* k, *tout espace principal homogène sur* X *sous le groupe* G *qui admet une section rationnelle (c'est-à-dire définie sur un ouvert) est partout localement trivial pour la topologie de Zariski.*

Grothendieck ([Gr_1], *ibid.*; [Gr_2], Remarque 1.11 *a)*) suggère plus généralement la

Conjecture **2.** — *Si* A *est un anneau local régulier, et* G *un* A-*schéma en groupes réductif, tout espace principal homogène sur* Spec(A) *sous le groupe* G *qui est trivial au point générique de* Spec(A) *est trivial*, i.e. *isomorphe à* G. *En d'autres termes, l'application d'ensembles de cohomologie étale*

$$H^1(A, G) \to H^1(K, G_K)$$

(où K *est le corps des fractions de* A*) a un noyau trivial.*

Ctte conjecture a reçu une réponse affirmative dans des cas particuliers : [C-T] et [C-T/S_2] (G est un A-tore), [Nis_1] (A est de valuation discrète), [Nis_2] (A est de dimension deux et G est un A-groupe réductif quasi-déployé), [Nis_3] (Nisnevich note l'analogie de la conjecture ci-dessus avec la conjecture de Gersten en K-théorie), [Oj_2] (A de type géométrique, *i.e.* anneau local d'une variété lisse sur un corps k, et G le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur A), [Oj_3] (A est de dimension deux, et G est soit le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur A, soit le groupe spécial linéaire d'une algèbre d'Azumaya sur A).

Dans cet article, nous établissons la conjecture initiale de Serre et Grothendieck sur un corps de base algébriquement clos.

Lorsque le corps de base est arbitraire, nous établissons la conjecture 1 sous quelques hypothèses supplémentaires :

1) *Sur un corps parfait infini, la conjecture* 1 *vaut pour tout groupe linéaire lisse* G;
2) *Sur un corps infini, la conjecture* 1 *vaut pour tout groupe réductif lisse* G *tel que chacune des omposantes* k-*simples de son groupe dérivé est isotrope sur* k.

Cette hypothèse est satisfaite si le groupe G est déployé, par exemple si k est séparablement clos : la conjecture initiale de Serre et Grothendieck vaut donc aussi sur un tel corps.

Comme mentionné plus haut, les conjectures 1 et 2 ont des aspects communs avec la conjecture de Gersten en K-théorie (Quillen [Qu]) et son analogue en cohomologie étale [Bl/O], dont on sait qu'elles ont été prouvées dans le cas des anneaux locaux de variétés lisses sur un corps grâce à la présentation de Quillen de tels anneaux. Mais le mécanisme des démonstrations fait intervenir des foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens et des propriétés d'additivité, et il semble impossible d'utiliser ceci pour le foncteur $A \mapsto H^1(A, G)$, à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés.

Or, en 1980, Ojanguren [Oj_2] établit la conjecture 1 lorsque le groupe G est le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée. La démonstration de [Oj_2] repose sur une présentation des anneaux locaux de variétés lisses différente de celle de Quillen, présentation qui permet une réduction du problème au cas des anneaux locaux d'un espace affine, puis à un théorème de Karoubi, qui assure l'invariance homotopique du groupe de Witt $W(A) \xrightarrow{\sim} W(A[t])$ pour un anneau A (avec 2 inversible).

L'idée principale du présent article est que, sur un corps de base infini k, cette démonstration s'étend aux foncteurs contravariants sur les k-schémas à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés satisfaisant trois propriétés « formelles » : commutation aux limites inductives (propriété satisfaite par tout foncteur raisonnable), une forme faible de l'invariance homotopique et une propriété de recollement dans des situations du type excision (voir § 1 pour les énoncés précis).

Pour le foncteur $X \mapsto H^1(X, G)$ qui classifie les espaces principaux homogènes sur un k-schéma X sous un k-groupe algébrique linéaire G, on a la propriété de recollement (proposition 2.6).

Mais, sans hypothèse supplémentaire, la propriété d'homotopie faible n'est pas toujours satisfaite. D'après un résultat récent de Raghunathan [Ra_2], elle l'est lorsque le groupe G, réductif, connexe et lisse, satisfait la propriété mentionnée en 2) ci-dessus. C'est ce qui nous permet d'obtenir 2).

Sur un corps infini quelconque, on peut en déduire la validité de la conjecture 1 lorsque le groupe G est le groupe spécial linéaire (anisotrope) $\mathbf{SL}(1, D)$ d'une algèbre à division D sur le corps k (corollaire 2.3), ceci grâce à un plongement convenable de $\mathbf{SL}(1, D)$ dans le groupe isotrope $\mathbf{SL}(2, D)$. Lorsque A est de type géométrique, la même idée de plongement dans un groupe isotrope permet d'établir la conjecture 2 pour le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur A (corollaire 2.4), résultat déjà essentiellement contenu dans [Oj_2].

Dans une première version de cet article, sur un corps k parfait infini, nous avons réussi à établir la conjecture 1 pour une variété de base X de dimension au plus 2, sans hypothèse d'isotropie sur G. Trois ingrédients de cette démonstration sont les suivants : d'une part la propriété de recollement, qui permet de ramener le problème au cas d'anneaux locaux de l'espace affine (cette réduction vaut en toute dimension), d'autre part le théorème de rigidité de Raghunathan [Ra_1], enfin le théorème de Raghunathan et Ramanathan [Ra/Ra] sur les espaces principaux homogènes sur la droite affine. Pour établir la conjecture 1 pour une surface lisse, nous avions aussi recours à des propriétés d'extension des espaces principaux homogènes sous un groupe réductif au-dessus d'un schéma régulier de dimension deux ([Gr_2]; [C-T/S_1], théorème 6.13), qui nous permettaient de nous ramener à des espaces principaux homogènes au-dessus du plan affine tout entier. M. S. Raghunathan nous a fait remarquer que nous n'avions nul besoin d'une telle extension globale à tout l'espace affine pour appliquer son théorème de rigidité, et que l'approche proposée s'étend aux anneaux locaux de variétés lisses de dimension quelconque (résultat 1) énoncé ci-dessus). Nous lui sommes très reconnaissants de cette remarque, et de sa proposition généreuse d'intégrer sa démonstration dans le présent article, en lieu et place de notre résultat particulier. Ceci fait l'objet du § 3.

A titre d'illustration de notre méthode générale, nous décrivons au § 4 comment retrouver l'injectivité de l'application $F(A) \to F(K)$ dans le cas géométrique, lorsque F est un foncteur K_n de la K-théorie de Quillen (où le résultat est dû à Quillen [Qu]), ou un foncteur $H^n(-, S)$ de cohomologie étale à coefficients dans un k-groupe S de type multiplicatif. Lorsque S est fini, ce résultat est dû à Bloch et Ogus [Bl/O]; le cas général, qui comprend celui où S est le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, n'est pas, à notre connaissance, dans la littérature.

Au dernier paragraphe (§ 5), par une technique très différente de celle employée aux paragraphes précédents, nous étudions la conjecture 2 pour le groupe spécial linéaire $\mathbf{SL}(1, D)$ d'une algèbre d'Azumaya D sur l'anneau local régulier A. Nous reformulons la conjecture comme un cas spécial d'une conjecture de Gersten pour la K-théorie des A-modules cohérents équipés d'une action de D (conjecture 5.1). Ceci nous permet d'établir :

La conjecture 2 *vaut pour* $G = \mathbf{SL}(1, D)$ *pour tout anneau local régulier* A *de dimension* 2, *et pour tout anneau local* A *de dimension* 3 *essentiellement lisse sur un corps.*

Le résultat en dimension 2 avait été déjà établi dans [Oj_3], dont provient l'idée ici développée. C'est le seul cas où nous obtenons des résultats sur la conjecture 2 pour un A-schéma en groupes « variable » sans réduction au cas d'un schéma en groupes plus simple (par exemple déployé).

Dans le cas géométrique, *i.e.* lorsque A est de type géométrique et que D provient du corps de base k, on peut établir la conjecture 5.1 en suivant la démonstration de Quillen, et donc obtenir dans ce cas une nouvelle démonstration de la conjecture 1 pour $G = \mathbf{SL}(1, D)$ (déjà obtenue au § 2).

Rappelons que, pour toute k-algèbre centrale simple Λ et tout entier naturel n, $\mathbf{GL}(n, \Lambda)$ est le schéma en groupes qui à toute k-algèbre commutative A associe le groupe des éléments inversibles de $M_n(\Lambda \otimes_k A)$; et $\mathbf{SL}(n, \Lambda)$ celui qui associe à A le groupe des éléments de $M_n(\Lambda \otimes_k A)$ dont la norme réduite vaut 1. De plus, comme de coutume, $\mathbf{GL}(1, k)$ est noté $\mathbf{G}_m$, le quotient de $\mathbf{GL}(n, \Lambda)$ par le sous-groupe $\mathbf{G}_m$ des matrices scalaires est noté $\mathbf{PGL}(n, \Lambda)$ et le groupe additif est noté $\mathbf{G}_a$. Le groupe des éléments inversibles d'un anneau R sera noté R^*. On note $\mathbf{A}^d_R$ l'espace affine de dimension d sur l'anneau commutatif R et $\mathbf{P}^d_R$ l'espace projectif de dimension d sur R. Enfin on emploiera le mot « torseur » pour désigner un espace principal homogène.

Le premier auteur remercie l'Université de Lausanne et Katia pour leur hospitalité.

1. Un formalisme général

Dans ce paragraphe, nous étudions des foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés. Rappelons que cette catégorie consiste en celle des ensembles équipés d'un point, qu'il sera commode de désigner par 0, les morphismes n'étant autres que les applications d'ensembles envoyant 0 sur 0. Une application a un noyau trivial si l'image réciproque de 0 est réduite à 0.

Théorème **1.1.** — *Soit k un corps infini et soit* F *un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbres commutatives dans la catégorie des ensembles pointés. Supposons que* F *satisfasse les propriétés suivantes :*

P1. *Le foncteur* F *commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux à morphismes de transition plats.*

P2. *Pour tout corps* L *contenant k et tout $n \geqslant 0$, la flèche*

$$F(L[t_1, \ldots, t_n]) \to F(L(t_1, \ldots, t_n))$$

induite par l'inclusion a un noyau trivial.

P3. *Pour tout diagramme de k-algèbres*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \longrightarrow & B_f \end{array}$$

avec $A \to B$ *une inclusion plate et de type fini d'anneaux nœthériens intègres et f non nul dans* A, *tel que la flèche induite* $A/Af \to B/Bf$ *soit un isomorphisme (un tel diagramme sera appelé diagramme de recollement), la flèche induite*

$$\mathrm{Ker}[F(A) \to F(A_f)] \to \mathrm{Ker}[F(B) \to F(B_f)]$$

est une surjection.

Alors, pour tout corps L *contenant k et toute* L*-algèbre locale* A *essentiellement lisse (*i.e. *qui est l'anneau local d'une variété algébrique lisse sur* L*), l'application* $F(A) \to F(K_A)$ *induite par l'inclusion de* A *dans son corps des fractions* K_A *a un noyau trivial.*

Pour établir ce résultat, nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes.

Lemme **1.2** (Ojanguren). — *Soit k un corps infini,* S *une k-algèbre affine lisse intègre de dimension d et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de* S. *Soit* B *le localisé de* S *en $\mathfrak{m}$, et soit g non nul dans l'idéal maximal de* B. *Alors il existe un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de l'anneau de polynômes* $R = k[t_1, \ldots, t_d]$, *un k-homomorphisme local essentiellement étale φ du localisé* $A = R_{\mathfrak{n}}$ *dans* B *et un élément* f *de l'idéal maximal de* A *tel que* $\varphi(f)$ *soit associé à* g, *et que* φ *induise un isomorphisme de* A/Af *dans* B/Bg.

Références : [Oj_2], p. 114, [Knus], chap. 8, § 3, cor. 3.2.5.

Remarque **1.3.** — H. Lindel [Li] a utilisé un lemme analogue pour étudier la conjecture de Bass-Quillen sur les anneaux réguliers de type géométrique. Mais chez lui l'élément $g \in B$ n'est pas fixé à l'avance.

Lemme **1.4.** — *Soit k un corps infini,* A *une k-algèbre de polynômes de dimension d et* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* A. *Soit f un polynôme de* A *qui n'est pas dans* $\mathfrak{m}$ *et g un polynôme non nul de* $\mathfrak{m}$. *Supposons que f et g n'ont pas de facteurs communs. On peut alors choisir les d variables de* $A = k[t_1, \ldots, t_d]$ *de telle façon que*

a) f et g sont unitaires en t_d;

b) Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap k[t_1, \ldots, t_{d-1}]$, *les images de f et g dans* $A/\mathfrak{n}$ *sont des polynômes en t_d premiers entre eux.*

Si, de plus, k est parfait, on peut faire en sorte que

c) $\mathfrak{m} = (t_1, \ldots, t_{d-1}, \varphi(t_d))$, *où φ est un polynôme irréductible de $k[t_d]$.*

Démonstration. — Les points *a)* et *b)* sont immédiats par projection générique de $\mathbf{A}_k^d$ sur $\mathbf{A}_k^{d-1}$. Le point *c)* est démontré dans [Oj_2] et dans [Knus], chap. 8, § 3.

Démonstration du théorème 1.1 :

Première réduction. — Soit B une k-algèbre affine et lisse, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B et $A = B_{\mathfrak{p}}$. Soit ξ un élément de F(A) qui devient nul dans $F(K_A)$. D'après **P1**, ξ est l'image d'un $\zeta \in F(B_f)$ pour un $f \in B\backslash\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B qui contient $\mathfrak{p}$ et évite f. Pour démontrer que ξ est nul il suffit de démontrer la trivialité de $\ker(F(B_{\mathfrak{m}}) \to F(K_B))$. Nous pouvons donc supposer que A est l'anneau local d'un point *fermé* d'une variété lisse.

Deuxième réduction. — On peut supposer que A est l'anneau local d'une k-algèbre de polynômes $L[t_1, \ldots, t_d]$ en un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit en effet à démontrer le théorème pour le localisé B d'une L-algèbre affine lisse intègre de dimension d en un idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps des fractions K_B. Soit $\xi \in \mathrm{Ker}[F(B) \to F(K_B)]$. D'après **P1**, il existe g non nul dans l'idéal maximal de B tel que $\xi \in \mathrm{Ker}[F(B) \to F(B_g)]$. D'après le lemme 1.2, on peut trouver un diagramme de L-algèbres

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_f \arrow[r] & B_g \end{tikzcd}$$

où A est l'anneau local d'un anneau de polynômes $R = L[t_1, \ldots, t_d]$ en un idéal maximal $\mathfrak{n}$. L'homomorphisme $\varphi : A \to B$ est local, f est dans l'idéal maximal de A,

$\varphi(f)$ est associé à g, et φ induit un isomorphisme de A/Af dans B/Bg. D'après **P3**, il existe $\eta \in \mathrm{Ker}[F(A) \to F(A_f)]$ tel que $F(\varphi)$ envoie η sur ξ. L'élément η appartient au noyau de l'application $F(A) \to F(K_A)$. Si l'on connaît le théorème pour l'anneau A, on voit que $\eta = 0$. Alors $\xi = 0$.

Fin de la démonstration. — Il suffit d'utiliser le cas $n = 0$ de l'énoncé suivant, que nous établirons par récurrence sur d.

Proposition **1.5.** — *Soit* L *un corps infini,* F *un foncteur satisfaisant les propriétés* **P1**, **P2** *et* **P3** *du théorème* 1.1. *Soit* $d \geqslant 0$ *un entier, et soit* A *un anneau local d'un anneau de polynômes* $L[x_1, \ldots, x_d]$ *en un idéal maximal. Alors pour tout entier* $n \geqslant 0$, *et* $t_1, \ldots, t_n$ *des variables indépendantes, l'application* $F(A[t_1, \ldots, t_n)] \to F(K_A(t_1, \ldots, t_n))$ *a un noyau trivial.*

Démonstration. — Le cas $d = 0$, *i.e.* $A = L$, n'est autre que **P2**. Supposons le théorème démontré à l'ordre $d - 1$, et soit A un anneau local de $L[x_1, \ldots, x_d]$ en un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $\xi_0 \in \mathrm{Ker}[F(A[t_1, \ldots, t_n]) \to F(K_A(t_1, \ldots, t_n))]$. D'après **P1**, on peut trouver f dans $L[x_1, \ldots, x_d]$, $f \notin \mathfrak{m}$, tel que ξ_0 provienne d'un élément ξ de $F(L[x_1, \ldots, x_d]_f[t_1, \ldots, t_n])$. Par ailleurs, l'image de ξ dans $F(K_A[t_1, \ldots, t_n])$ est un élément d'image nulle dans $F(K_A(t_1, \ldots, t_n))$. Appliquant la proposition pour $d = 0$, avec K_A au lieu de L, on voit que l'image de ξ dans $F(K_A[t_1, \ldots, t_n])$ est nulle. Utilisant encore une fois **P1**, on voit qu'il existe g dans $L[x_1, \ldots, x_d]$ tel que l'élément ξ de $F(L[x_1, \ldots, x_d]_f[t_1, \ldots, t_n])$ ait une image nulle dans $F(L[x_1, \ldots, x_d]_{fg}[t_1, \ldots, t_n])$. Quitte à remplacer g par un facteur de g, on peut supposer que f et g n'ont pas de facteur commun. Les hypothèses du lemme 1.4 étant satisfaites, nous pouvons supposer que f et g satisfont les conditions *a)* et *b)*.

Soit $h \in L[x_1, \ldots, x_{d-1}]$ le résultant de f et g par rapport à la variable x_d. D'après *b)*, h n'appartient pas à l'idéal maximal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap k[x_1, \ldots, x_{d-1}]$. Ainsi, c'est une unité dans l'anneau local $C = L[x_1, \ldots, x_{d-1}]_{\mathfrak{n}}$. Dans l'anneau $L[x_1, \ldots, x_d]$, on peut trouver une égalité $h = f_1 f + g_1 g$, donc f est une unité de $C[x_d]/C[x_d]\,g$; ceci assure que la flèche

$$C[x_d]/C[x_d]\,g \to C[x_d]_f/(C[x_d]_f)\,g$$

est un isomorphisme. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C[x_d] & \longrightarrow & C[x_d]_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ C[x_d]_g & \longrightarrow & C[x_d]_{fg} \end{array}$$

est donc un diagramme de recollement, et il en est de même du diagramme obtenu en ajoutant les variables $(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\begin{array}{ccc} C[x_d][t_1, \ldots, t_n] & \longrightarrow & C[x_d]_f[t_1, \ldots, t_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ C[x_d]_g[t_1, \ldots, t_n] & \longrightarrow & C[x_d]_{fg}[t_1, \ldots, t_n]. \end{array}$$

Comme ξ a une image nulle dans $F(L[x_1, \ldots, x_d]_{fg}[t_1, \ldots, t_n])$, il donne, par localisation, un élément ξ_1 de $F(C[x_d]_f[t_1, \ldots, t_n])$ d'image nulle dans $F(C[x_d]_{fg}[t_1, \ldots, t_n])$. La propriété **P3** assure alors l'existence d'un élément η dans $F(C[x_d][t_1, \ldots, t_n])$, dont l'image est nulle dans $F(C[x_d]_g[t_1, \ldots, t_n])$ et égale à ξ_1 dans $F(C[x_d]_f[t_1, \ldots, t_n])$. Cet élément η de $F(C[x_d][t_1, \ldots, t_n]) = F(C[x_d, t_1, \ldots, t_n])$ a donc une image nulle dans $F(K_C(x_d, t_1, \ldots, t_n))$. Comme C est un anneau local d'un espace affine de dimension $d-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et l'on conclut que η est nul. Il en est donc de même de ξ_1. *Via* l'homomorphisme $C[x_d]_f \to A$, qui induit $C[x_d]_f[t_1, \ldots, t_n] \to A[t_1, \ldots, t_n]$, on voit alors que ξ_0 lui-même est nul.

2. Application à la trivialité locale de torseurs

Pour les propriétés élémentaires des torseurs et les outils cohomologiques employés nous renvoyons à [Mi], chap. III, § 4, et à [D/G], chap. III, § 4.

Nous introduisons d'abord une « condition d'isotropie » pour tout k-groupe G linéaire lisse.

(**I**) *Chacune des composantes k-simples du groupe dérivé du groupe réductif* $G_{\text{réd}}$ *associé à* G *est isotrope sur k. Si k n'est pas parfait* G *est, de plus, réductif.*

L'hypothèse (**I**) signifie, plus précisément, ceci : on considère le quotient $G_{\text{réd}}$ de G par son radical unipotent, puis sa composante neutre $G^0_{\text{réd}}$, ensuite le groupe dérivé $G_{\text{dér}} = [G^0_{\text{réd}}, G^0_{\text{réd}}]$ de celle-ci, et enfin le revêtement simplement connexe G_{sc} de $G_{\text{dér}}$; ce groupe G_{sc} s'écrit comme un produit, sur k, de k-groupes presque-k-simples, auxquels on demande d'être isotropes.

Lorsque le corps de base k est algébriquement clos, le théorème suivant s'applique à tout k-groupe linéaire lisse, et répond ainsi affirmativement à la question initiale de Serre et Grothendieck.

Théorème **2.1.** — *Soit k un corps infini, et soit* G *un k-groupe algébrique linéaire lisse satisfaisant l'hypothèse* (**I**). *Supposons, de plus, que si k n'est pas parfait* G *est réductif. Alors, sur toute k-variété algébrique lisse intègre* X, *tout torseur sur* X *sous* G *qui est rationnellement trivial,* i.e. *qui admet une section sur un ouvert, est partout localement trivial pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. — On utilise ici le foncteur F de la catégorie des k-algèbres dans celle des ensembles pointés qui à une k-algèbre A associe l'ensemble de cohomologie étale $H^1(A, G)$ qui classifie les torseurs sur Spec(A) sous G (en fait, sous G_A), le point 0 correspondant à la classe des torseurs qui admettent une section. D'après le théorème 1.1, il suffit d'établir les propriétés **P1**, **P2** et **P3** pour F. Pour la propriété **P1**, on se reportera à [SGA_4], exposé VII (Grothendieck), cor. 5.9 et remarque 5.14. Plus simplement, on observera que tout torseur sur un anneau A sous un A-schéma en groupes G affine, plat et de présentation finie, est lui-même affine et de présentation finie sur A ([D/G], III, § 4, proposition 1.9)).

Passons à la propriété **P2**. C'est ici que l'hypothèse d'isotropie pour les composantes simples est utilisée : sur le plan affine, des contre-exemples ont été donnés, en l'absence d'isotropie, par Kopeiko [Ko], Ojanguren, Sridharan, Parimala, et Raghunathan [Ra_2]. Démontrons d'abord que le cas général se déduit du cas connexe.

Soit G^0 la composante de l'élément neutre. On a une suite exacte de k-groupes

$$1 \to G^0 \to G \to \mu \to 1$$

où μ est un k-schéma en groupes fini étale ([D/G], II, § 5). On en déduit un diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} \mu(\mathbf{A}^n_L) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbf{A}^n_L, G^0) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(\mathbf{A}^n_L, G) & \xrightarrow{\beta} & H^1(\mathbf{A}^n_L, \mu) \\ \simeq\downarrow & & \theta_1\downarrow & & \theta\downarrow & & \downarrow \\ \mu(k(\mathbf{A}^n_L)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(k(\mathbf{A}^n_L), G^0) & \xrightarrow{\bar\alpha} & H^1(k(\mathbf{A}^n_L), G) & \xrightarrow{\bar\beta} & H^1(k(\mathbf{A}^n_L), \mu), \end{array} \tag{1}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par l'évaluation au point générique. Le groupe $\mu(\mathbf{A}^n_L)$ agit à droite sur $H^1(\mathbf{A}^n_L, G^0)$ et les fibres de α coïncident avec les orbites de cette action ([D/G], p. 375). La première flèche verticale à gauche est un isomorphisme, car μ est fini étale et tout ouvert de $\mathbf{A}^n_L$ est géométriquement intègre. La dernière flèche à droite est injective : en effet, $H^1(-, \mu)$ classifie les revêtements galoisiens finis de groupe structural μ. Si B est une extension galoisienne finie de $L[t_1, \ldots, t_n]$ génériquement triviale, l'anneau total des fractions de B est un produit de copies de $L(t_1, \ldots, t_n)$ et B, étant normal, est un produit de copies de $L[t_1, \ldots, t_n]$. Une chasse au diagramme évidente montre alors que $\ker \theta_1 = \{0\}$ implique $\ker \theta = \{0\}$.

Vérifions maintenant que, si k est parfait, le cas d'un groupe linéaire connexe lisse G se déduit du cas connexe réductif lisse. Soit U le radical unipotent de G, défini comme k-groupe connexe géométriquement réduit puisque k est parfait, et $G_{\text{réd}}$ le quotient de G par U. On a, comme précédemment, un diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbf{A}^n_L, U) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(\mathbf{A}^n_L, G) & \xrightarrow{\beta} & H^1(\mathbf{A}^n_L, G_{\text{réd}}) \\ \downarrow & & \theta_1\downarrow & & \theta\downarrow \\ H^1(k(\mathbf{A}^n_L), U) & \xrightarrow{\bar\alpha} & H^1(k(\mathbf{A}^n_L), G) & \xrightarrow{\bar\beta} & H^1(k(\mathbf{A}^n_L), G_{\text{réd}}). \end{array} \tag{2}$$

Puisque k est parfait, le k-groupe unipotent connexe réduit U admet ([Bo], § 15.5) une suite de composition centrale dont les quotients sont isomorphes à $\mathbf{G}_a$. Puisque, pour tout k-schéma affine X, l'ensemble $H^1(X, \mathbf{G}_a)$ est trivial, on a $H^1(\mathbf{A}^n_L, U) = \{0\}$ et $H^1(k(\mathbf{A}^n_L), U) = \{0\}$. Les applications β et $\bar\beta$ sont donc injectives et $\ker \theta = \{0\}$ entraîne $\ker \theta_1 = \{0\}$.

Il suffit donc d'établir **P2** dans le cas d'un groupe G lisse, réductif et connexe satisfaisant (**I**). Démontrons d'abord le cas de dimension égale à 1.

Proposition **2.2.** — *Soit k un corps quelconque et* G *un k-groupe linéaire lisse, réductif et connexe. Le noyau de*

$$H^1(k[t], G) \to H^1(k(t), G)$$

est trivial.

Démonstration. — Supposons d'abord k séparablement clos. En ce cas G est déployé. Soit donc B un sous-groupe de Borel de G et soit E un G-torseur sur la droite affine $\mathbf{A}^1$, rationnellement trivial. On considère la suite

$$1 \to B \to G \to G/B \to 1.$$

Comme la droite affine est régulière de dimension 1 et que la projection

$$E \times^G G/B \to \mathbf{A}^1$$

est propre et admet une section rationnelle, cette section s'étend en une section sur toute la droite affine. Ceci entraîne ([D/G], III, § 4, 4.6) que E provient d'un B-torseur sur $\mathbf{A}^1$. Mais, par dévissage et réduction aux cas $\mathbf{G}_a$ et $\mathbf{G}_m$, un tel torseur est trivial.

Dans le cas d'un corps quelconque, ce qui précède nous assure que tout E rationnellement trivial devient trivial par extension des scalaires à la clôture séparable de k. D'après le principal résultat de [Ra/Ra], E est donc l'image réciproque d'un E_0 sur Spec(k). Un argument évident de spécialisation montre que si k est infini E_0 est trivial. D'autre part, si k est fini E_0 est trivial par un théorème de Lang ([D/G], III, § 5, 7.5).

Corollaire **2.3.** — *Soit k un corps parfait infini et* G *un groupe linéaire lisse sur k. Le noyau de*

$$H^1(k[t], G) \to H^1(k(t), G)$$

est trivial.

Démonstration. — On se ramène au cas d'un groupe connexe réductif à l'aide des diagrammes (1) et (2), comme on l'a fait au début de ce paragraphe.

Passons maintenant au cas de l'espace affine de dimension d quelconque sur un corps séparablement clos. La proposition suivante est essentiellement due à Raghunathan.

Proposition **2.4.** — *Soit k un corps séparablement clos,* G *un k-groupe linéaire lisse, réductif et connexe. Tout* G*-torseur rationnellement trivial sur $\mathbf{A}^d_k$ est trivial.*

Indications sur la démonstration. — Dans son article [Ra_1], Raghunathan appelle *acceptable* tout groupe G sur k tel que, pour toute extension de corps L de k, tout G-torseur E sur $\mathbf{A}^1_L$ provient d'un torseur sur Spec(L). En caractéristique nulle tout groupe est acceptable ([Ra/Ra]). Raghunathan démontre ([Ra_1], Theorem C) que si G est lisse, connexe, réductif et acceptable, tout G-torseur sur $\mathbf{A}^d_k$ est trivial. Sa démonstration est basée sur un argument de récurrence sur d et le passage de $d-1$ à d vaut sans changement si l'on remplace l'hypothèse que G est acceptable par l'hypothèse que E est rationnellement trivial. (A première vue son « Theorem B » conviendrait mieux à nos besoins, car l'hypothèse que G est acceptable n'y figure pas, mais il s'agit évidemment d'un oubli.)

La propriété **P2**, pour le foncteur qui nous intéresse ici, dit que pour tout corps L contenant k et tout n positif, la flèche

$$H^1(L[t_1, \ldots, t_n]) \to H^1(L(t_1, \ldots, t_n))$$

a un noyau trivial. Sous l'hypothèse (**I**), c'est maintenant une conséquence immédiate de la proposition 2.4 et du théorème suivant, démontré dans [Ra_2].

Théorème **2.5.** — *Soit* G *un groupe lisse, connexe et réductif sur un corps k et soit k_s la clôture séparable de k. Si* G *satisfait* (**I**), *tout* G-*torseur sur* $\mathbf{A}^d_k$ *qui devient trivial sur* $\mathbf{A}^d_{k_s}$, *et qui est trivial en un point k-rationnel, est trivial.*

Il reste à établir la propriété de recollement **P3** pour les (classes d'isomorphie de) torseurs. Nous l'établirons dans un cadre très général à la proposition suivante.

Proposition **2.6.** — *Soit* A *un anneau nœthérien et* $f: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux qui fait de* B *une* A-*algèbre de type fini. Soit s un élément de* A *tel que $f(s)$ ne divise pas zéro dans* B. *Supposons que f induise un isomorphisme* $A/As \xrightarrow{\sim} B/Bs$. *Soient* M *un* A_s-*module,* N *un* B-*module et* $\varphi : M \otimes_A B_s \xrightarrow{\sim} N \otimes_B B_s$ *un isomorphisme de* B_s-*modules. Définissons un* A-*module* $P(\varphi)$ *(le recollement de* M *et* N *par* φ*) par*

$$P(\varphi) = \{(x,y) \in M \times N \mid \varphi(x \otimes_A 1_{B_s}) = y \otimes_B 1_{B_s}\}$$

et soient $\sigma : P_s \to M$ *et* $\tau : P \otimes_A B \to N$ *les homomorphismes induits par les projections de* P *sur les deux facteurs de* $M \times N$. *Alors*

(i) σ *et* τ *sont des isomorphismes.*

(ii) *Le triplet* (P, σ, τ) *est déterminé à isomorphisme unique près par la condition que* σ *et* τ *soient des isomorphismes tels que*

$$\varphi \circ (\sigma \otimes_A \mathrm{id}_{B_s}) = \tau \otimes_B \mathrm{id}_{B_s}.$$

(iii) *Pour tout anneau commutatif* R, *soit* C(R) *une des catégories suivantes* : R-*modules,* R-*modules de type fini,* R-*modules projectifs de type fini,* R-*algèbres,* R-*algèbres de type fini. En associant à* φ *le* A-*module* $P(\varphi)$ *et à tout couple d'hormomorphismes* $\alpha : M \to M'$ *et* $\beta : N \to N'$ *compatibles avec* φ *l'homomorphisme* $(\alpha \times \beta) \mid P(\varphi)$, *on obtient une équivalence de catégories entre le produit de* $C(A_s)$ *et* C(B) *au-dessus de* $C(B_s)$ *d'une part, et* C(A) *d'autre part.*

(iv) *Soit* G *un* A-*schéma en groupes affine et plat, et, pour toute algèbre* R, *soit* E(R) *la catégorie opposée de la catégorie des torseurs sur* Spec(R) *sous* G_R. *L'équivalence de* (iii) *se restreint à une équivalence entre le produit de* $E(A_s)$ *et* E(B) *au-dessus de* $E(B_s)$ *d'une part, et* E(A) *d'autre part.*

Démonstration. — Les énoncés (i) et (ii) sont établis par Bhatwadekar [Bh] (voir aussi [F/R], Appendice) et les assertions de (iii) sont des variantes de celles établies dans [Bh] pour les deux premières catégories mentionnées. Pour démontrer (iv) il faut vérifier que la formation de $P(\varphi)$ est compatible avec le produit tensoriel. Mais si, pour $i = 1, 2$, $P(\varphi_i)$ est le recollement de M_i et N_i par φ_i, et σ_i et τ_i sont les isomorphismes associés à φ_i, et σ et τ sont ceux associés à $\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \varphi$, il existe un homomorphisme

$$\chi : P(\varphi_1) \otimes_A P(\varphi_2) \to P(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$$

qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (P(\varphi_1) \otimes_A P(\varphi_2)) \otimes_A B & \xrightarrow{\chi \otimes \mathrm{Id}_B} & P(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes_A B \\ \downarrow & & \downarrow \tau \\ (P(\varphi_1) \otimes_A B) \otimes_B (P(\varphi_2) \otimes_A B) & \xrightarrow{\tau_1 \otimes \tau_2} & N_1 \otimes_B N_2 \end{array}$$

ainsi qu'un diagramme semblable avec A_s et les M_i. Ainsi χ est un isomorphisme de $(P(\varphi_1) \otimes_A P(\varphi_2), \sigma_1 \otimes \sigma_2, \tau_1 \otimes \tau_2)$ sur $(P(\varphi), \sigma, \tau)$. Ce point étant acquis, le reste de la démonstration est fonctoriel.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.

Corollaire **2.7.** — *Soit k un corps infini et* D *une algèbre simple centrale sur k, de dimension finie d^2, et soit* Nrd *la forme, à coefficients dans k, de degré d en d^2 variables, définie par la norme réduite. Alors, pour toute k-algèbre* A *locale essentiellement lisse, de corps des fractions* K, *toute unité de* A *qui est représentée par la forme* Nrd *sur* K *l'est aussi sur* A.

Démonstration. — Soit $G = \mathbf{SL}(1, D)$ le groupe spécial linéaire de D. Ce groupe est précisément défini par la suite exacte de k-groupes algébriques

$$1 \longrightarrow \mathbf{SL}(1, D) \longrightarrow \mathbf{GL}(1, D) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1.$$

On sait que pour tout k-anneau local A, l'ensemble de cohomologie $H^1(A, \mathbf{GL}(1, D))$ est réduit à un élément : cet ensemble classifie en effet les D_A-modules projectifs de rang 1 et l'on sait qu'il n'y en a qu'un à isomorphisme près (voir par exemple [DeM]). La suite exacte courte de cohomologie associée à la suite exacte ci-dessus donne donc des bijections compatibles

$$\begin{array}{ccc} A^*/\mathrm{Nrd}(D_A^*) & = & H^1(A, \mathbf{SL}(1, D)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^*/\mathrm{Nrd}(D_K^*) & = & H^1(K, \mathbf{SL}(1, D)). \end{array}$$

Si l'algèbre D n'est pas un corps gauche, le groupe semi-simple $\mathbf{SL}(1, D)$ est k-simple et isotrope. Le théorème 2.1 assure donc que l'homomorphisme de groupes abéliens

$$A^*/\mathrm{Nrd}(D_A^*) \to K^*/\mathrm{Nrd}(D_K^*)$$

est une injection d'ensembles pointés, donc aussi de groupes.

Si l'algèbre D est un corps gauche, le groupe $G = \mathbf{SL}(1, D)$ est anisotrope. Observons cependant qu'on peut le plonger dans le groupe isotrope $\mathbf{SL}(2, D)$. Plus précisément, si l'on plonge $\mathbf{GL}(1, D)$ dans $\mathbf{GL}(2, D)$ *via* la flèche induite par

$$d \mapsto \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on dispose du diagramme commutatif de suites exactes de groupes algébriques

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{SL}(1, D) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(1, D) & \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_1} & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{=} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{SL}(2, D) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(2, D) & \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_2} & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où Nrd_i désigne la norme réduite de $M_i(D)$. Ce diagramme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^*/\mathrm{Nrd}_1(D_A^*) & = & H^1(A, \mathbf{SL}(1, D)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^*/\mathrm{Nrd}_2(D_A^*) & = & H^1(A, \mathbf{SL}(2, D)). \end{array}$$

Mais, sur l'anneau local A, si une unité est une norme réduite de l'algèbre $M_2(D_A)$, c'est aussi une norme réduite de l'algèbre D_A ([Ba], chap. V, § 9, theorem 9.1).

Le corollaire suivant est équivalent au théorème initial d'Ojanguren [Oj_2].

Corollaire **2.8.** — *Soit k un corps infini de caractéristique* $\neq 2$, *et soit* A *une k-algèbre locale essentiellement lisse, de corps des fractions* K. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces quadratiques non dégénérés sur* A. *Si* E_1 *et* E_2 *deviennent isomorphes sur* K, *alors ils le sont déjà sur* A.

Démonstration. — Soit n le rang des espaces E_1 et E_2, et soit $\varphi = n\mathscr{H}$ l'espace quadratique sur k, de rang $2n$, somme de n exemplaires du plan hyperbolique. Comme le groupe dérivé du groupe orthogonal $G = \mathbf{O}(\varphi)$ est simple et isotrope (il est même déployé), le théorème 2.1 assure que l'application

$$H^1(A, \mathbf{O}(\varphi)) \to H^1(K, \mathbf{O}(\varphi))$$

a un noyau trivial. Ainsi, tout espace quadratique sur A qui devient isomorphe à $n\mathscr{H}$ sur K est déjà isomorphe à $n\mathscr{H}$ sur A. Soient alors E_1 et E_2 comme dans l'énoncé, isomorphes sur K. L'espace quadratique $E = E_1 \perp (-E_2)$ (somme orthogonale) est alors isomorphe à $n\mathscr{H}$ sur K, donc à $n\mathscr{H}$ sur A. Mais $n\mathscr{H}$ est lui-même isomorphe à $E_2 \perp (-E_2)$ sur A. Par simplification des espaces quadratiques sur les anneaux semi-locaux ([Knus], VI, 5.7.5)) on conclut que E_1 est isomorphe à E_2 sur A.

Remarques **2.9.**

a) Compte tenu de la simplification des espaces quadratiques, ce corollaire est équivalent au théorème d'Ojanguren [Oj_2] affirmant que pour A comme ci-dessus, l'application de groupes de Witt $W(A) \to W(K)$ est injective. Le lecteur pourra comparer la présente démonstration avec la démonstration initiale, qui utilisait le théorème de Karoubi $W(A) \xrightarrow{\sim} W(A[t])$ (pour tout anneau A où 2 est inversible).

b) On aurait pu présenter la démonstration en utilisant le foncteur $A \mapsto F(A)$ décrivant les classes d'isomorphie de formes quadratiques de rang $2n$, pointé par la classe de la forme hyperbolique, la condition **P2** étant ici garantie par [Oj_1].

c) On observera que la méthode développée ici ne permet toujours pas de décider si une unité a de A qui est représentée sur K par une A-forme quadratique non dégénérée est aussi représentée par cette forme sur l'anneau local A, sauf bien sûr dans le cas particulier d'une forme de Pfister $\varphi = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, a_n \rangle$ (les a_i dans A^*), auquel cas la représentabilité de A par φ équivaut à l'isomorphie des formes $a\varphi$ et φ.

3. Le cas d'un corps de base parfait infini

Commençons par la dimension 1. Bien que Nisnevich [Ni_1] ait établi la validité du théorème suivant pour tout anneau de valuation discrète A et tout A-groupe réductif, il nous paraît instructif d'illustrer notre méthode dans ce cas très simple.

Théorème **3.1.** — *Soit k un corps parfait infini et* G *un k-groupe algébrique linéaire lisse. Alors pour tout anneau local* A *d'une courbe lisse sur k, de corps des fractions* K, *l'application naturelle* $H^1(A, G) \to H^1(K, G)$ *a un noyau trivial.*

Démonstration. — Soit E un torseur sous G sur Spec(A), trivial sur Spec(K). Le lemme de projection 1.2, ici très simple à établir puisqu'il s'agit de courbes, et la propriété de recollement **P3** pour les torseurs, qui vaut de manière très générale (proposition 2.6) permettent, comme dans la démonstration du théorème 1.1, de se ramener au cas d'un anneau local de la droite affine en un idéal maximal $\mathfrak{m}$, soit $A = k[t]_{\mathfrak{m}}$. Le torseur donné E sur Spec(A) provient d'un torseur E_1 sous G sur un ouvert $\mathrm{Spec}(k[t]_f)$, avec $f \notin \mathfrak{m}$, qui devient trivial sur un ouvert $\mathrm{Spec}(k[t]_{fg})$, où g non nul peut être pris premier à f. D'une égalité de Bézout $af + bg = 1$, on conclut que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} k[t] & \longrightarrow & k[t]_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[t]_g & \longrightarrow & k[t]_{fg} \end{array}$$

est un diagramme de recollement. La proposition 2.6 assure alors l'existence d'un torseur E_3 sur $\mathrm{Spec}(k[t])$ sous G, induisant E_2 sur $\mathrm{Spec}(k[t]_f)$, et de fibre générique triviale. D'après le corollaire 2.3, ce torseur est nécessairement trivial. Il en est donc de même du torseur E.

Passons au cas général. Comme expliqué dans l'introduction, nous devons à Raghunathan de pouvoir énoncer le théorème suivant en toute dimension.

Théorème **3.2.** — *Soit k un corps parfait infini et* G *un k-groupe algébrique linéaire lisse. Alors pour tout anneau local* A *d'une variété lisse sur k, de corps des fractions* K, *l'application naturelle* $H^1(A, G) \to H^1(K, G)$ *a un noyau trivial.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration du théorème 1.1 (première réduction) on se ramène d'abord au cas où A est l'anneau local d'un point fermé. Procédant comme dans la « deuxième réduction », on se ramène ensuite au cas où A est un anneau local $k[t_1, \ldots, t_d]_{\mathfrak{m}}$ de l'anneau des polynômes en d variables en un idéal maximal $\mathfrak{m} = (t_1, \ldots, t_{d-1}, \varphi(t_d))$, où φ est un polynôme irréductible de $k[t_d]$. Cette réduction utilise la proposition 2.6 (propriété de recollement **P3** pour les torseurs) et les lemmes de projection 1.2 et 1.4. C'est dans ce dernier lemme que l'hypothèse que k est parfait et infini est utilisée.

Soit donc E un torseur sur Spec(A) sous G, de fibre générique triviale. Ce torseur E provient par restriction d'un torseur E_1 sur un ouvert $\mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_d]_f)$, $f \notin \mathfrak{m}$, de l'espace affine $\mathbf{A}^d = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_d])$. Il devient trivial par restriction à un ouvert non vide $\mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_d]_{fg})$. D'après le lemme 1.4, quitte à changer les variables, on peut supposer f et g unitaires en t_d, et $\bar{f}(t_d) = f(0, \ldots, 0, t_d)$ et $\bar{g}(t_d) = g(0, \ldots, 0, t_d)$ premiers entre eux.

Soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $k[t_1, \ldots, t_{d-1}]$ à l'origine, et soit $B = k[t_1, \ldots, t_{d-1}]_{\mathfrak{n}}$. Soit E_2 la restriction de E_1 à $\mathrm{Spec}(B[t_d]_f)$. Puisque $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont premiers entre eux, les polynômes unitaires f et g engendrent $B[t]$. On peut donc recoller E_2 avec le torseur trivial sur $\mathrm{Spec}(B[t_d]_g)$. On obtient ainsi un torseur E_3 sur $\mathrm{Spec}(B[t_d])$, de restriction triviale sur $\mathrm{Spec}(B[t_d]_g)$. Si l'on sait que E_3 provient d'un torseur E_4 sur Spec(B), comme E_3 est rationnellement trivial, il en est de même, par spécialisation, de E_4. Par récurrence, ceci établit le théorème 3.2. Que E_3 provienne d'un torseur E_4 sur Spec(B) résulte de la variante suivante du « théorème de Horrocks » :

Théorème **3.3.** — *Soit k un corps et* B *une k-algèbre locale d'idéal maximal* $\mathfrak{n}$. *Supposons que l'inclusion de k dans* $B/\mathfrak{n}$ *est un isomorphisme. Soit t une indéterminée et g un polynôme unitaire de* $B[t]$. *Soit* G *un k-groupe algébrique linéaire lisse et* E *un torseur sous* G *sur* $\mathrm{Spec}(B[t])$, *trivial sur* $\mathrm{Spec}(B[t]_g)$. *Alors* E *provient d'un torseur sur* Spec(B).

Démonstration. — Soit $\bar{g}$ la réduction de g dans $k[t] \subset B[t]$. Soit X la droite projective $\mathbf{P}^1_B$, recollement de $U = \mathrm{Spec}(B[t])$ avec $\mathrm{Spec}(B[1/t])$. Soit V l'ouvert de $\mathbf{P}^1_B$ complémentaire du fermé défini par $g\bar{g} = 0$. Les ouverts U et V recouvrent X. La restriction de E à $U \cap V$ est triviale. Par recollement on peut donc étendre E sur U en un torseur sur X de restriction triviale à V, torseur qu'on notera encore E. Soit $Y \subset X$ le fermé isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$ image réciproque du point fermé de Spec(B). L'application $G(U \cap V) \to G(U \cap V \cap Y)$ est surjective, car l'application composée

$$k[t]_{\bar{g}} \to B[t]_{g\bar{g}} \to k[t]_{\bar{g}}$$

est l'identité. Par ailleurs, la restriction de E à $Y \cap U \simeq \mathbf{A}^1_k$ est rationnellement triviale et donc triviale d'après le corollaire 2.3. On est donc dans les conditions d'application du lemme 3.4 ci-dessous, et il existe un fibré F sur $X \simeq \mathbf{P}^1_B$ de restriction isomorphe à E sur U et de restriction triviale sur $Y \simeq \mathbf{P}^1_k$. Le théorème de rigidité de Raghunathan ([Ra$_1$], Theorem 1) assure alors que F provient de B.

Il ne reste plus qu'à établir le

Lemme **3.4.** — *Soit* X *un schéma et* G *un* X-*schéma en groupes. Supposons que* X *est la réunion de deux ouverts* U *et* V. *Soit* Y *un fermé dans* X. *Supposons que l'application de restriction des sections* $G(U \cap V) \to G(U \cap V \cap Y)$ *est surjective. Si* E *est un torseur sur* U *sous* G *qui a une restriction triviale à* $U \cap V$ *et une restriction triviale à* $U \cap Y$, *alors il existe un torseur sur* X *sous* G *dont la restriction à* U *est isomorphe à* E *et dont la restriction à* Y *est triviale.*

Démonstration. — Soient

$$\varphi : E_{U \cap V} \xrightarrow{\sim} G_{U \cap V} \qquad \text{et} \qquad \psi : E_{U \cap Y} \xrightarrow{\sim} G_{U \cap Y}$$

des isomorphismes de G-torseurs (à gauche). Par restriction à $U \cap V \cap Y$, on obtient deux isomorphismes de $G_{U \cap V \cap Y}$-torseurs à gauche de $E_{U \cap V \cap Y}$ avec $G_{U \cap V \cap Y}$, qui diffèrent donc l'un de l'autre par multiplication (à droite) par un élément de $G(U \cap V \cap Y)$. En relevant celui-ci en un élément de $G(U \cap V)$, ce qui est loisible par hypothèse, et en modifiant l'isomorphisme φ par multiplication (à droite) par cet élément, on voit qu'on peut maintenant supposer qu'on a, sur $U \cap V \cap Y$, l'égalité

$$\varphi_Y = \psi_{U \cap V \cap Y}.$$

Considérons alors le torseur F sur X, extension de E sur U, donné par le recollement des torseurs E sur U et G_V (torseur trivial) sur V, le recollement étant donné par φ sur $U \cap V$. La restriction F_Y de ce torseur à Y est donnée par l'isomorphisme φ_Y, qui est la restriction à $U \cap V \cap Y$ d'un isomorphisme $\psi : E_{Y \cap U} \to G_{Y \cap U}$. Les sections $\psi^{-1}(1_{U \cap Y}) \in E_Y(U \cap Y) = \Gamma(U \cap Y, F)$ et $1_{V \cap Y} \in G(V \cap Y) = \Gamma(V \cap Y, F)$ se recollent donc sur $U \cap V \cap Y$, puisque $\psi^{-1}(1_{U \cap Y})$ s'envoie *via* φ_Y sur $1_{U \cap V \cap Y}$, qui est clairement la restriction de $1_{U \cap Y}$. Ainsi le torseur F_Y admet une section globale : il est trivial.

Remarque **3.5.** — Le théorème de Horrocks classique ([La], V, § 2) concerne le cas du groupe linéaire et ne requiert pas que k soit égal à B/π. Dans le cas général on ne peut omettre cette hypothèse, comme le montre un exemple de Parimala ([Pa]; [La], VI, § 4).

4. Application à diverses théories (co)homologiques

La méthode développée ici nous donne une approche nouvelle du résultat suivant, dû à Quillen (sans restriction sur le corps de base), et qui est une conséquence de la conjecture de Gersten.

Théorème **4.1.** — *Soit* k *un corps infini et soit* A *un anneau local essentiellement lisse sur* k, *puis* K *son corps des fractions. Alors, pour tout entier* $n \geqslant 0$, *la flèche naturelle de groupes de* K-*théorie* $K_n(A) \to K_n(K)$ *est injective.*

Démonstration. — Il sera plus naturel de vérifier les propriétés **P1**, **P2** et **P3** sur la G-théorie (aussi appelée K'-théorie : elle est associée à la catégorie exacte des modules cohérents sur un anneau nœthérien). Cela suffit, car l'on sait que pour un anneau régulier, l'application naturelle $K_n(A) \to G_n(A)$ est un isomorphisme ([Qu], § 4, Corollary 2, p. 26). Le lecteur vérifiera qu'on peut aussi établir ces propriétés pour la K-théorie, à condition de limiter leur énoncé aux anneaux nœthériens réguliers.

D'après Quillen [Qu], le foncteur G_n satisfait la propriété **P1** de commutation aux limites inductives filtrantes plates ([Qu], § 2(9), p. 20 et § 7, proposition 2.2, p. 41). L'invariance homotopique $G_n(A) \xrightarrow{\sim} G_n(A[t])$ vaut pour tout anneau nœthérien A ([Qu], § 6, Theorem 8, p. 38) et donc en particulier (par spécialisation) la propriété **P2**. Pour établir la propriété de recollement **P3**, on observe que puisque sous les hypothèses de cette propriété, B est plat sur A, on dispose pour tout entier n d'un diagramme commutatif de suites exactes décrivant le comportement de la G-théorie par restriction à un fermé :

$$\begin{array}{ccccccc}
G_n(A/Af) & \longrightarrow & G_n(A) & \longrightarrow & G_n(A_f) & \longrightarrow & G_{n-1}(A/Af) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G_n(B/Bf) & \longrightarrow & G_n(B) & \longrightarrow & G_n(B_f) & \longrightarrow & G_{n-1}(B/Bf).
\end{array}$$

([Qu], § 7, Prop. 3.2 et Remark 3.4, p. 44). Ainsi $G_n(A)$ se surjecte sur le produit fibré P défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
P & \longrightarrow & G_n(A_f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_n(B) & \longrightarrow & G_n(B_f)
\end{array}$$

ce qui implique la propriété **P3**.

Le théorème suivant pourrait se déduire du travail de Bloch et Ogus [Bl/O]. Rappelons qu'un k-groupe de type multiplicatif est un k-groupe algébrique qui, après extension étale de k, se plonge dans un produit d'exemplaires du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.

Théorème **4.2.** — *Soit k un corps de caractéristique nulle et soit* A *un anneau local essentiellement lisse sur k, puis* K *son corps des fractions. Soit* S *un k-groupe algébrique (commutatif) de type multiplicatif. Alors pour tout entier naturel n, l'homomorphisme de groupes de cohomologie étale* $H^n(A, S) \to H^n(K, S)$ *est injectif.*

Démonstration. — D'après [SGA_4], t. 2, exposé VII (Grothendieck), corollaire 5.9, p. 362, la cohomologie étale à coefficients dans S satisfait la propriété **P1**. Montrons que pour tout anneau intègre régulier A contenant un corps de caractéristique zéro, la flèche

$$H^n(A, S) \to H^n(A[t], S)$$

est un isomorphisme, ce qui suffira à établir la propriété **P2** (*N.B.* : en caractéristique $p > 0$, on ne s'attend à des ennuis que pour la p-torsion).

Dans le cas où S est fini, ceci n'est autre que le corollaire 2.2 de [SGA_4], XV (voir aussi [Mi], VI.4.20, p. 240) qui dit que le morphisme structural $\mathrm{Spec}(A[t]) \to \mathrm{Spec}(A)$ est acyclique pour les faisceaux de torsion première aux caractéristiques résiduelles. En général, il existe une suite exacte de k-groupes de type multiplicatif

$$1 \to S_0 \to S \to \mu \to 1$$

avec S_0 connexe, et donc isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_m$ après extension finie étale de k, et μ un k-groupe fini, étale, commutatif. Par des arguments de suites spectrales de Hochschild-Serre, on se ramène donc à voir que pour tout entier naturel n, la flèche

$$H^n(A, \mathbf{G}_m) \to H^n(A[t], \mathbf{G}_m)$$

est un isomorphisme. Indiquons comment établir ce fait sous l'hypothèse que l'anneau nœthérien A est régulier (ce qui suffit pour le formalisme du § 1).

Montrons que pour tout anneau nœthérien régulier R et tout entier $p \geqslant 2$, les groupes de cohomologie étale $H^p(R, \mathbf{G}_m)$ sont de torsion (ceci nous a été signalé par O. Gabber il y a quelques années). Pour établir ce point, on peut supposer R intègre. Soit K son corps des fractions, et soit $i : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ l'inclusion évidente. Comme R est géométriquement localement factoriel (cette hypothèse suffirait), on a la suite exacte de faisceaux ([Gr_2], § 1)

$$1 \to \mathbf{G}_{m,R} \to i_* \mathbf{G}_{m,K} \to \bigoplus_{x \in R^{(1)}} i_{x*} \mathbf{Z} \to 1,$$

où $R^{(1)}$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de R, $k(x)$ le corps résiduel d'un $x \in R^{(1)}$, et i_x l'inclusion $\mathrm{Spec}(k(x)) \to \mathrm{Spec}(R)$. On en déduit que les groupes $H^p(\mathrm{Spec}(R), \mathbf{G}_m)$ sont de torsion pour $p \geqslant 2$. En effet, pour tout corps k, tout homomorphisme $R \to k$ et tout faisceau pour la topologie étale F sur k, de la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Spec}(R), R^q r_* F) \Rightarrow H^n(\mathrm{Spec}(k), F)$$

associée à $r : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(R)$ et du fait évident que les faisceaux $R^q r_* F$ sont de torsion pour $q \geqslant 1$ résulte que les groupes $H^p(\mathrm{Spec}(R), r_* F)$ sont, comme la cohomologie galoisienne, de torsion pour $p \geqslant 1$.

Pour tout anneau A, la flèche $H^n(A, \mathbf{G}_m) \to H^n(A[t], \mathbf{G}_m)$ est clairement injective. Si A est régulier, il en est de même de $A[t]$ et donc, pour tout $n \geqslant 2$, tout élément de $H^n(A[t], \mathbf{G}_m)$ est de q-torsion pour un $q > 0$. Si les caractéristiques résiduelles de A sont nulles (ce qui est le cas ici), un tel élément est, au vu de la suite de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_q \longrightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^q} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1,$$

dans l'image de $H^n(A[t], \mu_q)$. On sait déjà que la flèche $H^n(A, \mu_q) \to H^n(A[t], \mu_q)$ est un isomorphisme. Par fonctorialité des suites de cohomologie déduites de la suite de Kummer, on conclut que l'application $H^n(A, \mathbf{G}_m) \to H^n(A[t], \mathbf{G}_m)$ est surjective pour $n \geqslant 2$. Le cas $n = 0$ est facile; le cas $n = 1$, *i.e.* l'isomorphie des groupes de Picard Pic(A) et $\mathrm{Pic}(\mathrm{A}[t])$ pour un anneau régulier, et plus généralement localement factoriel, est bien connu.

Le théorème sera donc établi, une fois que l'on aura établi la propriété de recollement **P3**. Cela fera l'objet de la proposition 4.4, dont la démonstration complète celle de [Mi], III.1.27, p. 92, ou celle de [Ni_3], p. 275.

Proposition **4.3.** — *Soit* A *un anneau nœthérien et* $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme d'anneaux qui fait de* B *une* A-*algèbre de type fini. Soit* s *un élément de* A *tel que* $f(s)$ *ne divise pas zéro dans* B. *Supposons que* f *induise un isomorphisme*

$$f_1 : \mathrm{A}/\mathrm{A}s \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}/\mathrm{B}s.$$

Alors

(i) *Pour tout entier naturel* n, f *induit un isomorphisme*

$$f_1 : \mathrm{A}/\mathrm{A}s^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}/\mathrm{B}s^n.$$

(ii) *L'application* f *induit un isomorphisme*

$$\hat{f} : \hat{\mathrm{A}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathrm{B}}$$

entre les complétés s-*adiques de* A *et de* B.

(iii) *Il existe un* $t \in \mathrm{B}$ *tel que* $\mathrm{B}s + \mathrm{B}t = \mathrm{B}$ *et que* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}_t$ *soit étale. La* A-*algèbre* $\mathrm{A}_s \times \mathrm{B}_t$ *est fidèlement plate.*

(iv) *Soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B *qui contient* s *et soit* $\mathfrak{p}$ *son image dans* Spec(A). *L'homomorphisme local* $\mathrm{A}_\mathfrak{p} \to \mathrm{B}_\mathfrak{q}$ *induit un isomorphisme des hensélisés*

$$\mathrm{A}_\mathfrak{p}^h \to \mathrm{B}_\mathfrak{q}^h.$$

Démonstration. — (i) est démontré par Bhatwadekar [Bh] et (ii) en est une conséquence immédiate. Prouvons (iii). Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{A}s)$ et $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{B}/\mathrm{B}s)$ son unique préimage. Les isomorphismes f_n induisent des isomorphismes

$$\mathrm{A}/\mathfrak{p}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}/\mathfrak{q}^n.$$

Les complétés de $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ et $\mathrm{B}_\mathfrak{q}$ sont donc isomorphes, ce qui entraîne ([EGA_4], § 17, proposition 17.6.3) que B est étale sur A en $\mathfrak{q}$. On peut donc recouvrir Spec(B/Bs) par des ouverts principaux $\mathrm{D}(t_i)$ ($i = 1, \ldots, n$), tels que tous les $\mathrm{A} \to \mathrm{B}_{t_i}$ soient étales. On choisit alors $t = b_1 t_1 + \ldots + b_n t_n$ tel que $\mathrm{B}t + \mathrm{B}s = \mathrm{B}$. Il est clair que $\mathrm{A}_s \times \mathrm{B}_t$ est plate sur A. D'autre part l'image de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_t)$ contient Spec(A/As).

L'assertion (iv) est une conséquence du fait que $\mathrm{B}_\mathfrak{q}$ est essentiellement étale sur $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ (cf. [EGA_4], § 18, p. 137).

Proposition **4.4** (Excision pour la cohomologie étale). — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{A}_s & \longrightarrow & \mathrm{B}_s \end{array}$$

un diagramme de recollement avec f de type fini et soit F *un faisceau de groupes abéliens sur le (grand) site étale des* A-*schémas. Soit* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $Z = \mathrm{Spec}(A/As)$, $Z' = \mathrm{Spec}(B/Bs)$, $X_s = \mathrm{Spec}(A_s)$, $Y_s = \mathrm{Spec}(B_s)$, *et* $\pi : Y \to X$ *le morphisme induit par f, qui par hypothèse induit un isomorphisme de* Z' *sur* Z. *Alors, pour tout entier naturel n, l'homomorphisme de cohomologie étale à support*

$$\pi^* : H^n_Z(X, F) \to H^n_{Z'}(Y, F)$$

est un isomorphisme. Le groupe $H^n(A, F)$ *s'envoie surjectivement sur le produit fibré de* $H^n(B, F)$ *et* $H^n(A_s, F)$ *au-dessus de* $H^n(B_s, F)$; *en particulier, la propriété de recollement* **P3** *vaut.*

Démonstration. — Soit t comme dans la proposition 4.3 (iii) et $Y_t = \mathrm{Spec}(B_t)$. Par décalage, il suffit de traiter le cas $n = 0$. Considérons le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_Z(X, F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X_s, F) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^0_{Z'}(Y, F) \arrow[r] & H^0(Y, F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(Y_s, F) \\
 & & H^0(Y_t, F). &
\end{tikzcd}$$

Si $\sigma \in H^0_Z(X, F)$ est une section dans le noyau de π^*, ses images dans $H^0(X_s, F)$ et $H^0(Y_t, F)$ sont nulles. Puisque $U = X_s \amalg Y_t = \mathrm{Spec}(A_s \times B_t)$ est un recouvrement étale de $X = \mathrm{Spec}(A)$ (proposition 4.3), σ est nulle.

Soit maintenant $\sigma \in H^0_{Z'}(Y, F)$. Considérons le recouvrement étale $U \to X$ et vérifions que les deux images canoniques de σ dans $U \times_X U$ coïncident. Sur $X_s \times_X X_s$ elles coïncident de façon évidente, sur $X_s \times_X Y_t$ et $Y_t \times_X X_s$ par hypothèse, et il reste à démontrer qu'elles coïncident sur $Y_t \times_X Y_t$ (ce point est omis dans [Mi] et [Ni_3]). Il suffit de le vérifier dans la fibre de chaque point z' de Z'. Mais par la proposition 4.3 (iv), π induit un isomorphisme entre le hensélisé de Y en z' et celui de X en $z = \pi^{-1}(z')$. Ainsi il existe un $\tau \in H^0_Z(X, F)$ tel que $\pi^*(\tau)$ et σ vus dans $H^0(Y, F)$ coïncident sur Y_t mais aussi sur Y_s, puisque sur Y_s ces deux sections s'annulent. Comme Y_t et Y_s forment un recouvrement de Y, on conclut $\pi^*(\tau) = \sigma$.

Les dernières assertions de la proposition résultent alors immédiatement de la comparaison des longues suites exactes de cohomologie étale sur X et sur Y.

5. Une approche à la Quillen

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au noyau de l'application

$$H^1(A, G) \to H^1(K, G)$$

lorsque A est un anneau local régulier de corps des fractions K et que $G = \mathbf{SL}(1, D)$ est le A-schéma en groupes simple des éléments de norme réduite 1 dans une algèbre d'Azumaya D sur l'anneau A. Les ensembles $H^1(A, \mathbf{GL}(1, D))$ et $H^1(K, \mathbf{GL}(1, D))$ étant triviaux (voir par exemple [DeM]), l'application ci-dessus se lit encore

$$A^*/\mathrm{Nrd}(D^*) \to K^*/\mathrm{Nrd}(D_K^*).$$

L'idée principale, qui a aussi été utilisée à d'autres fins par Merkur'ev [Me], est de copier Quillen [Qu], en considérant des catégories de modules cohérents équipés d'une action de l'algèbre d'Azumaya donnée. De façon générale, soit X un schéma nœthérien et D une algèbre d'Azumaya sur X. On considère les catégories exactes $\mathscr{M}^D(X)$, resp. $\mathscr{P}^D(X)$, formée des D-modules qui sont cohérents, resp. cohérents et localement libres, comme $\mathcal{O}_X$-modules sur X. On définit les groupes de K^D-théorie, resp. G^D-théorie de X, par les formules

$$K_n^D(X) = K_n(\mathscr{P}^D(X)) \qquad \text{et} \qquad G_n^D(X) = K_n(\mathscr{M}^D(X)).$$

Lorsque X est le spectre d'un anneau A, on note $D = D(A)$. On a alors

$$G_n^D(\mathrm{Spec}(A)) = G_n(D).$$

Comme la théorie de Morita montre que la catégorie $\mathscr{P}^D(X) = \mathscr{P}^D(A)$ des D-modules A-projectifs coïncide avec celle des D-modules projectifs, on a $K_n^D(X) = K_n(D)$.

Une grande partie de la machinerie du § 7 de l'article de Quillen s'étend. On a des homomorphismes $K_n^D(X) \to G_n^D(X)$ qui sont des isomorphismes lorsque X est régulier. Les groupes $K_n^D(X)$, resp. $G_n^D(X)$, sont fonctoriels contravariants pour les morphismes quelconques, resp. les morphismes plats.

Pour tout entier p, on introduit la sous-catégorie de Serre $\mathscr{M}_p^D(X)$ de $\mathscr{M}^D(X)$ formée des D-modules cohérents sur X dont le support sur X est de codimension au moins p. Soit $X^{(p)}$ l'ensemble des points de codimension p de X. On dispose d'équivalences de catégories

$$\mathscr{M}_p^D(X)/M_{p+1}^D(X) \xrightarrow{\sim} \coprod_{x \in X^{(p)}} \bigcup_n \mathrm{Modf}^D(\mathcal{O}_{X,x}/\mathrm{rad}(\mathcal{O}_{X,x})^n)$$

où, pour toute $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative R, $\mathrm{Modf}^D(R)$ désigne la catégorie des $D \otimes_{\mathcal{O}_X} R$-modules de longueur finie. Par dévissage ([Qu], § 5, Theorem 4, Corollary 1) on obtient des isomorphismes

$$K_n(\mathscr{M}_p^D(X)/\mathscr{M}_{p+1}^D(X)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_n(D \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)),$$

où $k(x)$ est le corps résiduel en x. Par localisation ([Qu], § 5, Theorem 5) on a de longues suites exactes, qu'on peut réécrire grâce aux isomorphismes ci-dessus. On peut tirer de ces suites une suite spectrale comme le fait Quillen ([Qu], § 7, Theorem 5.4) et formuler une conjecture de Gersten dans ce contexte.

Conjecture **5.1.** — *Si X est le spectre d'un anneau local régulier, pour tout $p \geq 0$, et tout $i \geq 0$, les applications $K_i(\mathscr{M}_{p+1}^D(X)) \to K_i(\mathscr{M}_p^D(X))$ induites par l'inclusion $\mathscr{M}_{p+1}^D(X) \to \mathscr{M}_p^D(X)$ sont nulles.*

Nous nous contenterons ici du minimum requis pour notre propos. Pour simplifier, supposons X intègre, de corps des fonctions K. Par localisation on trouve les suites exactes

$$G_1(D) \to G_1(D_K) \to K_0(\mathcal{M}_1^D(X)) \to G_0(D) \to G_0(D_K) \to 0$$

et

$$K_0(\mathcal{M}_2^D(X)) \to K_0(\mathcal{M}_1^D(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(D \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)) \to 0.$$

On a alors le

Théorème **5.2.** — *Soit* A *un anneau local régulier de corps des fractions* K, *et soit* D *une* A-*algèbre d'Azumaya. Si la conjecture de Gersten* 5.1 *vaut pour* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $i = 0$ *et* $p = 1$, i.e. *si l'application*

$$K_0(\mathcal{M}_2^D(X)) \to K_0(\mathcal{M}_1^D(X))$$

est nulle, alors

(i) *L'application* $A^*/\mathrm{Nrd}(D^*) \to K^*/\mathrm{Nrd}(D_K^*)$ *est injective.*

(ii) *Tout élément de* $K^*/\mathrm{Nrd}(D_K^*)$ *qui, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de hauteur* 1, *est dans l'image de* $A_\mathfrak{p}^*/\mathrm{Nrd}(D_{A_\mathfrak{p}}^*)$ *est dans l'image de* $A^*/\mathrm{Nrd}(D_A^*)$.

Démonstration. — Si la conjecture vaut, les deux suites exactes ci-dessus donnent naissance à une suite exacte

$$K_1(D) \to K_1(D_K) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(D \otimes_A k(x)) \to K_0(D) \to K_0(D_K) \to 0$$

(ici on a utilisé la régularité de A). Pour toute algèbre d'Azumaya D sur un anneau local, tout D-module projectif est somme directe d'exemplaires d'un certain idéal projectif de D, unique à isomorphisme près ([DeM], Corollary 2). Ainsi chacun des groupes $K_0(D \otimes_A k(x))$, $K_0(D)$ et $K_0(D_K)$ est cyclique infini, et l'application $K_0(D) \to K_0(D_K)$ est injective. On a donc une suite exacte

$$(*) \qquad K_1(D) \to K_1(D_K) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(D \otimes_A k(x)) \to 0,$$

où chacun des facteurs $K_0(D \otimes_A k(x))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Pour l'anneau local régulier A, en associant à chaque élément de K^* son diviseur de Weil, on obtient la suite exacte classique

$$A^* \to K^* \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z} \to 0.$$

On sait que le groupe $K_1(D)$ de Quillen coïncide avec celui de Bass et Milnor, c'est-à-dire avec l'abélianisé de groupe linéaire infini $\mathbf{GL}_\infty(D)$. On a donc un homomorphisme $D_{ab}^* \to K_1(D)$. Pour D une algèbre d'Azumaya sur un anneau commutatif semi-local, cette application est surjective ([Ba], Chap. V, § 9, Theorem 9.1). Par ailleurs, pour D une algèbre d'Azumaya sur l'anneau A, la norme réduite ([K/O], chap. IV, § 2) induit des homomorphismes compatibles $K_1(D) \to A^*$ et $K_1(D_K) \to K^*$. On dispose ainsi d'un diagramme commutatif de suites exactes

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccccc} K_1(D) & \longrightarrow & K_1(D_K) & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(D \otimes_A k(x)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ A^* & \longrightarrow & K^* & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où la flèche verticale de droite, soit φ, est induite par le reste du diagramme.

Soit $x \in X^{(1)}$ et soit $\pi \in A$ un générateur de l'idéal premier associé à x. La norme réduite de la classe de π dans $K_1(D_K)$ n'est autre que π^d, où d^2 est le rang de D sur A. Ainsi $\partial(\varphi(\mathrm{Nrd}(\pi)))$ a toutes ses composantes nulles, sauf la composante en x qui est égale à d. Par ailleurs, par construction, la suite exacte $(*)$ commute à la localisation. Pour $y \in X^{(1)}$ différent de x, d'anneau local A_y, la classe de π dans $K_1(D_K)$ vient de $K_1(D \otimes_A A_y)$, et donc la composante en y de $\partial(\pi)$ est nulle. Soit $n_x \in \mathbf{Z}$ sa composante dans $K_0(D \otimes_A k(x)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$. L'élément $(0, \ldots, 0, n_x, 0, \ldots, 0)$ de

$$\bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_0(D \otimes k(x)) = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z}$$

a donc pour image $(0, \ldots, 0, d, 0, \ldots, 0) \neq 0$ par φ. Il en résulte que l'application induite est une somme directe d'applications injectives

$$\varphi_x : K_0(D \otimes k(x)) = \mathbf{Z} \to K_0(k(x)) = \mathbf{Z}.$$

L'application φ est donc injective et, en tenant compte de la surjectivité de l'application $D^* \to K_1(D)$, une chasse facile dans le diagramme $(**)$ permet alors de déduire l'énoncé (i) de la proposition. Montrons (ii). Soit $\xi \in K^*$ un élément qui en tout point $x \in X^{(1)}$ s'écrive comme le produit d'une unité de l'anneau local A_x par une norme réduite de D_K. Alors, $\partial(\xi)$ est dans l'image de φ, comme on le vérifie composante par composante, le diagramme $(**)$ étant compatible à la localisation. Comme la flèche supérieure ∂ dans ce diagramme est surjective, on voit qu'après multiplication par un élément convenable de $\mathrm{Nrd}(K_1(D_K)) = \mathrm{Nrd}(D_K^*)$ ([Ba], *loc. cit.*), l'élément ξ a un diviseur nul, *i.e.* est dans A^*.

Théorème **5.3.** — *Soit k un corps*, D *une algèbre simple centrale sur k. Soit* A *un anneau local d'une variété lisse sur k. Alors la conjecture de Gersten* 5.1 *vaut pour* X = Spec(A) *et la* A-*algèbre d'Azumaya* $D \otimes_k A$, *si bien que les énoncés* (i) *et* (ii) *du théorème* 5.2 *valent dans cette situation.*

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration de Quillen de la conjecture de Gersten dans ce contexte ([Qu], § 7, Theorem 5.11). On notera que la démonstration ne s'étend pas au cas d'une algèbre d'Azumaya « variable » sur A.

Remarques **5.3.1.** — La partie (i) du théorème 5.3 a déjà été démontrée d'une autre façon ci-dessus (corollaire 2.3). La partie (ii) a été établie dans [C-T/P/S] lorsque D est d'indice premier, puis, sans cette restriction, par M. Rost [Ro], comme cas particulier d'un résultat encore plus général. Nous renvoyons à ces articles et à [C-T/S_1] pour une discussion du problème pour des groupes plus généraux que **SL**(1, D).

Théorème **5.4.** — *Soit* A *un anneau local régulier de dimension au plus* 2, *et soit* D *une* A-*algèbre d'Azumaya. Alors l'application*

$$K_0(\mathscr{M}_2^{D}(A)) \to K_0(\mathscr{M}_1^{D}(A))$$

est nulle, et donc les énoncés (i) *et* (ii) *du théorème* 5.2 *valent dans cette situation.*

Démonstration ([Oj$_3$], p. 297). — C'est trivial si A est de dimension 1. Soit A de dimension 2, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et soit $k = A/\mathfrak{m}$, puis $D_k = D \otimes_A k$. Soit M un D_k-module. Soit a un paramètre régulier de A. On peut trouver un D/Da-module projectif N et un D-homomorphisme surjectif $f: N \to M$. Soit L le noyau de f. C'est un D/Da-module qui, comme A/Aa-module, est sans torsion, donc projectif, puisque A/Aa est un anneau de valuation discrète. Comme A/Aa est local, L et N sont chacun somme directe d'un certain nombre d'exemplaires, soit p, resp. q, d'un même D/Da-module projectif ([DeM]). En passant au corps des fractions de A/Aa, on voit que $p = q$, et donc L et N sont isomorphes comme D/Da-modules, et la classe de M dans $K_0(\mathscr{M}_1^{D}(A))$ est nulle. Comme tout D-module à support dans $\mathfrak{m}$ admet une filtration à quotient des D_k-modules, on conclut que l'application

$$K_0(\mathscr{M}_2^{D}(A)) \to K_0(\mathscr{M}_1^{D}(A))$$

est nulle.

Remarque **5.4.1.** — Le théorème 5.4 (i) n'est autre que le théorème 3 de [Oj$_3$], sans hypothèse parasite sur l'excellence de l'anneau A. Le théorème 5.4 (ii) est un cas particulier de [CT/S$_1$], corollaire 6.14.

Théorème **5.5.** — *Soit* A *un anneau local d'une variété algébrique lisse de dimension* 3 *sur un corps* k *infini, et soit* D *une* A-*algèbre d'Azumaya. Alors l'application*

$$K_0(\mathscr{M}_2^{D}(A)) \to K_0(\mathscr{M}_1^{D}(A))$$

est nulle, et donc les énoncés (i) *et* (ii) *du théorème* 5.2 *valent dans cette situation.*

Nous commencerons par établir quelques lemmes.

Lemme **5.5.1.** — *Soit* A *un anneau commutatif nœthérien,* D *une* A-*algèbre quelconque et* M *un* D-*module, de type fini comme* A-*module et non nul. Il existe une filtration de* M *par des sous*-D-*modules*

$$M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = (0)$$

tels que pour tout i, *l'annulateur* $\operatorname{ann}_A(M_i/M_{i+1})$ *soit un idéal premier de* A.

Démonstration. — La même que pour les A-modules.

Lemme **5.5.2.** — *Soit* A *un anneau semi-local et* D *une* A-*algèbre d'Azumaya. Soit*

$$0 \to P \to Q \to M \to 0$$

une suite exacte de D-*modules, avec* P *et* Q *projectifs et* M *annulé par un élément régulier* s *de* A. *Alors* $P \simeq Q$.

Démonstration. — Si l'anneau semi-local A est connexe, P et Q sont sommes directes d'un certain nombre d'exemplaires d'un même D-module indécomposable S ([DeM]). Si $P \simeq S^m$ et $Q \simeq S^n$, en inversant s, on trouve $S_s^m \simeq S_s^n$, d'où $n = m$. Le cas d'un anneau semi-local quelconque se ramène au cas connexe en écrivant A comme un produit.

Lemme **5.5.3.** — *Soit* A *un anneau commutatif et* D *une* A-*algèbre d'Azumaya. Pour tout* D-*module* M, *les dimensions homologiques* $\mathrm{dh}_A\, M$ *et* $\mathrm{dh}_D\, M$ *coïncident.*

Démonstration. — Par descente fidèlement plate, on peut supposer que D est une algèbre de matrices $M_n(A)$. On applique alors l'équivalence de Morita.

Démonstration du théorème. — Soit M dans $\mathscr{M}_2^D(A)$. En vertu du lemme 5.5.1, il suffit de considérer les cas où l'annulateur $\mathrm{ann}_A(M)$ de M est soit l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, soit un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 2 de A. Si $\mathrm{ann}_A(M) = \mathfrak{m}$, on choisit un paramètre régulier $s \in \mathfrak{m}$ et on applique le théorème 5.4 à l'anneau local régulier A/As de dimension 2. La classe de M est nulle dans $K_0(\mathscr{M}_1^D(A/As))$, donc aussi dans $K_0(\mathscr{M}_1^D(A))$. Supposons donc $\mathrm{ann}_A(M) = \mathfrak{p}$ premier de hauteur 2.

Comme A est de type géométrique, on peut appliquer la procédure décrite par Quillen dans [Qu], § 7, Lemma 5.2. On peut ainsi trouver une k-algèbre de type fini S dont A est l'anneau local $S_\mathfrak{m}$ en un idéal maximal que nous noterons encore $\mathfrak{m}$, un idéal premier $\mathfrak{q}$ de hauteur 2 de S avec $\mathfrak{q}A = \mathfrak{p}$, une algèbre d'Azumaya D sur S induisant l'algèbre donnée sur A, un D-module M sur S avec $\mathrm{ann}_S(M) = \mathfrak{q}$, et un sous-anneau R (anneau de polynômes de deux variables sur k) de S tel que $R \to S$ soit plat (de dimension relative 1), $S/\mathfrak{q}$ soit fini sur R — donc définisse un $S/\mathfrak{q}$-module cohérent à support de codimension 1 dans Spec(R) — et enfin une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to A \otimes_R S/\mathfrak{q} \xrightarrow{u} A \otimes_R S/\mathfrak{q} \to (S/\mathfrak{q})_\mathfrak{m} \to 0$$

(ici $(S/\mathfrak{q})_\mathfrak{m} = A \otimes_S (S/\mathfrak{q})$), avec $u \in A \otimes_R S/\mathfrak{q}$ régulier.

Le noyau de $M \to M \otimes_{S/\mathfrak{q}} K$ étant de longueur finie, pour démontrer que la classe de l'image de M dans $K_0(\mathscr{M}_1^D(A))$ est nulle, on peut, compte tenu de ce qui a été fait plus haut, remplacer M par son image dans $M \otimes_{S/\mathfrak{q}} K$, et supposer que M est sans torsion sur $S/\mathfrak{q}$.

Soit B la clôture intégrale de $S/\mathfrak{q}$ dans son corps des fractions K et $D_B = D \otimes_S B$. Comme S est géométrique, B est un anneau de Dedekind fini sur A. Alors MB est un B-module sans torsion, donc projectif. C'est aussi un D_B-module. Considérons le $(D_B)_\mathfrak{m}$-module $(MB)_\mathfrak{m}$. Il est lui aussi projectif. La suite exacte $(*)$, par tensorisation sur A avec l'algèbre $D_\mathfrak{m}$, donne une suite exacte

$$0 \to D_\mathfrak{m} \otimes_R S/\mathfrak{q} \xrightarrow{u} D_\mathfrak{m} \otimes_R S/\mathfrak{q} \to D_\mathfrak{m} \otimes_S (S/\mathfrak{q}) \to 0,$$

puis, par tensorisation sur $S/\mathfrak{q}$ à droite par le module B, à une suite exacte

$$0 \to D_\mathfrak{m} \otimes_R B \xrightarrow{u} D_\mathfrak{m} \otimes_R B \to (D_B)_\mathfrak{m} \to 0.$$

Soit $D' = D_\mathfrak{m} \otimes_R B$. Cette dernière suite assure que le D'-module $(D_B)_\mathfrak{m}$ est de dimension homologique 1. Il en est donc de même du $(D_B)_\mathfrak{m}$-module $(MB)_\mathfrak{m}$, vu comme D'-module. Soit donc

$$0 \to P \to Q \to (MB)_\mathfrak{m} \to 0$$

une D′-résolution projective. Comme D′ est une algèbre d'Azumaya sur l'anneau semi-local $A \otimes_R B$, de dimension 2, et que le $A \otimes_R B$-module $(MB)_m$ est annulé par l'élément régulier u, le lemme 5.5.2 s'applique : les D′-modules P et Q sont isomorphes. Ils le sont certainement aussi comme D_m-modules. Comme B est fini sur A/p, et donc sur A, les modules P et Q sont encore cohérents comme D_m-modules. Par ailleurs, comme le support du R-module B est de codimension au moins 1, et que A est plat sur R, le support des $A \otimes_R B$-modules P et Q, vus comme A-modules *via* le premier facteur, est aussi de codimension au moins 1 dans A.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] H. Bass, *Algebraic K-theory*, New York, Benjamin, 1968.

[Bh] S. M. Bhatwadekar, Analytic isomorphisms and category of finitely generated modules, *Comm. in Algebra*, **16** (1988), 1949-1958.

[Bl/O] S. Bloch and A. Ogus, Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, **7** (1974), 181-202.

[Bo] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, New York, Benjamin, 1969.

[C-T] J.-L. Colliot-Thélène, Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers, *in* Colloque sur les formes quadratiques (Montpellier, 1977), *Bull. Soc. Math. France, Mém.*, **59** (1979), 13-31.

(C-T/P/S] J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et R. Sridharan, Un théorème de pureté locale, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **309**, série I (1989), 857-862.

[C-T/S_1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles, *Math. Ann.*, **244** (1979), 105-134.

[C-T/S_2] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori: Applications, *Journal of Algebra*, **106** (1987), 148-205.

[DeM] F. R. de Meyer, Projective modules over central separable algebras, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 39-43.

[D/G] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Paris, Masson, 1970.

[F/R] D. Ferrand et M. Raynaud, Fibres formelles d'un anneau local nœthérien, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, **3** (1970), 295-311.

[EGA_4] A. Grothendieck, Eléments de géométrie algébrique, IV, 4e partie, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **32** (1967), 1-361.

[Gr_1] A. Grothendieck, Torsion homologique et sections rationnelles, in *Anneaux de Chow et applications*, Séminaire Chevalley, 2e année, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.

[Gr_2] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer II, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Amsterdam, North-Holland, 1968.

[Gr_3] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Amsterdam, North-Holland, 1968.

[Knus] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **294**, Springer-Verlag, 1991.

[K/O] M.-A. Knus et M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, L.N.M., **389**, Springer-Verlag, 1974.

[Ko] В. И. Копейко, Квадратичные пространства и алгебры кватернионов, зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР 1978, т. 75, 110-120.

[La] T. Y. Lam, *Serre's Conjecture*, L.N.M., **635**, Springer-Verlag, 1978.

[Li] H. Lindel, On the Bass-Quillen conjecture concerning projective modules over polynomial rings, *Inventiones math.*, **65** (1981), 319-323.

[Me] А. С. Меркурьев, Группа SK_2 для алгебр кватернионов, Изв. АН СССР. Сер. матем., t. 52 (1988), 310-335 (= *Math. U.S.S.R. Izv.*, **32** (1989), 313-337).

[Mi] J. S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Nis$_1$] Ye. A. Nisnevich, Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **299**, série I (1984), 5-8.

[Nis$_2$] Ye. A. Nisnevich, Rationally trivial principal homogeneous spaces, purity and arithmetic of reductive group schemes over extensions of two-dimensional local regular rings, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **309**, série I (1989), 651-655.

[Nis$_3$] Ye. A. Nisnevich, The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory, in *Algebraic* K-*theory*: *Connections with Geometry and Topology*, Lake Louise, 1987, ed. J. F. Jardine and V. P. Snaith, NATO ASI Series C, **279** (1989), Kluwer Academic Publishers, 241-342.

[Oj$_1$] M. Ojanguren, Formes quadratiques sur les algèbres de polynômes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, série A, **287** (1978), 695-698.

[Oj$_2$] M. Ojanguren, Quadratic forms over regular rings, *Journal of the Indian Math. Soc.*, **44** (1980), 109-116.

[Oj$_3$] M. Ojanguren, Unités représentées par des formes quadratiques ou par des normes réduites, in *Algebraic* K-*theory*, Oberwolfach, 1980, t. II, L.N.M., **967** (K. Dennis, éd.), 291-299, Springer-Verlag, 1982.

[Pa] S. Parimala, Failure of a quadratic analogue of Serre's conjecture, *American J. of Math.*, **100** (1978) 913-924.

[Qu] D. Quillen, Higher algebraic K-theory: I, in *Algebraic* K-*Theory I*, L.N.M., **341** (1973), 85-147 (= 1-63), Springer-Verlag.

[Ra$_1$] M. S. Raghunathan, Principal bundles on affine space, in *C.P. Ramanujam—A Tribute*, 187-206, Tata Institute of Fundamental Research, *Studies in Mathematics*, **8**, Springer-Verlag, 1978.

[Ra$_2$] M. S. Raghunathan, Principal bundles on affine space and bundles on the projective line, *Math. Annalen*, **285** (1989), 309-332.

[Ra/Ra] M. S. Raghunathan and A. Ramanathan, Principal bundles on the affine line, *Proc. Ind. Acad. Sc.*, **93** (1984), 137-145.

[Ro] M. Rost, Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **10**, série I (1990), 189-192.

[Se] J.-P. Serre, Espaces fibrés algébriques, in *Anneaux de Chow et applications*, Séminaire Chevalley, 2^e année, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.

[SGA$_4$] *Théorie des Topos et Cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1963, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, L.N.M., **269** (t. 1), **270** (t. 2), **305** (t. 3), Springer-Verlag.

J.-L. C.-T.
C.N.R.S.
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay

M. O.
Section de Mathématiques
Université de Lausanne
CH-1015 Lausanne

Manuscrit reçu le 23 août 1990.
Révisé le 9 août 1991.