LE RANG DE FAMILLES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

PHILIPPE MICHEL, UNIVERSITÉ D'ORSAY

1. Introduction

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$, le théorème de Mordell-Weil dit que l'ensemble des points rationnels de $\mathcal{A}$ est un groupe abélien de type fini. On note $\operatorname{rang}\mathcal{A}(\mathbb{Q})$ le rang de la partie libre de ce groupe, c'est le rang de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{Q}$. Pour $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ générale, $\operatorname{rang}\mathcal{A}(\mathbb{Q})$ est un entier difficile à appréhender, même dans le cas le plus simple des courbes elliptiques. Ainsi on ne sait pas trouver de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, de rangs arbitrairement grands. La difficulté à résoudre ce problème vient peut-être du fait (calculs numériques à l'appui) que, quand $\mathcal{A}$ varie en un sens convenable $\operatorname{rang}\mathcal{A}(\mathbb{Q})$ est borné en moyenne. Rendons cet énoncé plus précis : Fouvry [Fo] a pu montrer *inconditionnellement* que le rang moyen de la famille de courbes elliptiques définies par l'équation

$$E_{0,t}: \ y^2 = x^3 + t, \tag{1.1}$$

est très petit quand t varie dans $\mathbb{Z}$. Plus précisément, on a l'estimation

$$\sum_{0<|t|\leqslant T} \sqrt{3}^{\operatorname{rang} E_{0,t}} = O(T).$$

Citons également le travail de Heath-Brown [H-B], concernant la famille de courbes d'équations $E_{-t^2,0}: \ y^2 = x^3 - t^2x, \ t \in \mathbb{Z}$, dont le résultat principal entraine la majoration

$$\sum_{0<|t|\leqslant T} \sqrt{2}^{\operatorname{rang} E_{-t^2,0}} = O(T).$$

Il faut dès à présent noter que les familles $E_{0,t}$ et $E_{-t^2,0}$ sont très particulières : à la différence des exemples ci-après, ces familles sont *géométriquement triviales*, c'est à dire que, sur $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, toutes les courbes $E_{0,t}$ (*resp* $E_{-t^2,0}$) sont isomorphes (leur invariant j est constant). De ce fait, les preuves de [Fo] et [H-B] reposent sur de délicats arguments de descente et de théorie algébrique des nombres. Le prix à payer pour traiter des familles non géométriquement triviales est énorme puisqu'il nous faut admettre une partie des Conjectures standard (rappelée ci-dessous) ; modulo ces dernières, Brumer [Br] a borné en moyenne le rang de toutes les courbes elliptiques. Une version affaiblie de son résultat est la suivante :

Théorème 1.1. *Soit $E_{a,b}$ la courbe elliptique définie par l'équation*

$$E_{a,b}: \ y^2 = x^3 + ax + b, \ a, b \in \mathbb{Z};$$

On pose $\Delta(a,b) = -16(4a^3 + 27b^2)$ $(\neq 0)$; alors, si les trois hypothèses T-W, GRH, B-S (voir ci-dessous) sont vraies pour toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, pour $T \to +\infty$, on a la majoration

$$\sum_{\substack{|a|\leqslant T^{1/3} \\ |b|\leqslant T^{1/2} \\ \Delta(a,b)\neq 0}} \operatorname{rang} E_{a,b}(\mathbb{Q}) \leqslant (2,3 + o(1))4T^{5/6}. \tag{1.2}$$

On dit alors que le rang moyen de la famille $E_{a,b}$ est majoré par 2,3. Plus récemment, Fouvry et Pomykala [F-P] utilisant indirectement les travaux de Deligne sur la Conjecture de Weil, ont prouvé une inégalité similaire pour des familles peu denses de courbes elliptiques. A leur suite, l'auteur ([Mic]) put généraliser et améliorer leur résultat :

Théorème 1.2. *Soient $a_1(t), \ldots,\ a_4(t),\ a_6(t)$ cinq polynômes de $\mathbb{Z}[t]$ et E_t la famille de courbes elliptiques d'équation :*

$$E_t : y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t)\ t \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

On note $g_2(t)$ et $g_3(t)$ les polynômes que l'on obtient après avoir mis l'équation précédente sous forme de Weierstrass :

$$y'^2 = 4x'^3 - g_2(t)x' - g_3(t).$$

Supposons que toutes les courbes elliptiques de cette famille vérifient les hypothèses TW, B-SD et GRH et que son invariant $j(t) = 1728.g_2(t)^3/(g_2(t)^3 - 27g_3(t)^2)$, est une fraction non constante, alors, quand $T \to +\infty$, on a la majoration

$$\sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ \Delta(t)\neq 0}} \operatorname{rang} E_t \leqslant (\deg \Delta + c_\Delta + c'_\Delta - 3/2)(1 + o(1))2T. \tag{1.4}$$

où $\Delta(t) = g_2(t)^3 - 27g_3(t)^2$ est le discriminant de la famille, c_Δ est le nombre de racines distinctes de Δ dans $\mathbb{C}$ et $c'_\Delta = |\{z \in \mathbb{C},\ g_2(z) = g_3(z) = 0\}|$.

Observons que ces majorations ne sont pas du tout triviales. En effet, la borne de Mestre [Me], pour le rang d'une variété abélienne définie sur $\mathbb{Q}$ (et en utilisant les hypothèses T-W, B-SD, et GRH) est

$$\operatorname{rang} \mathcal{A}(\mathbb{Q}) \leqslant \log N_{\mathcal{A}} / \log\log N_{\mathcal{A}}.$$

Cette majoration, individuelle, conduit, pour une famille de courbes elliptiques E_t, à la borne en moyenne,

$$\sum_{|t|\leqslant T} \operatorname{rang} E_t \leqslant \deg \Delta.2T \frac{\log T}{\log\log T}(1 + o(1)).$$

La question de la généralisation de ces résultats à des variétés abéliennes de plus grande dimension se pose donc naturellement.

Disons un mot des conjectures T-W, GRH et B-SD : elles entrent dans le cadre très général des conjectures standard dont nous ne donnons ici qu'une forme restreinte (voir [Ser] et [Hu] p.59 pour une forme plus complète) :

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$ de dimension g ; pour tout nombre premier p, on sait associer à $\mathcal{A}$ un entier f_p et un polynôme unitaire

$$P_p^1(T) = \prod_{i=1}^{B_p} (1 - \lambda_{p,i} T);$$

de plus, pour tout i, $\lambda_{p,i}$ est un entier algébrique et on a les inégalités suivantes

$$f_p \geqslant 0,\ B_p \leqslant 2g,\ |\lambda_{p,i}| \leqslant p^{1/2}; \tag{1.5}$$

ces inégalités devenant des égalités si $\mathcal{A}$ a bonne réduction en p (c'est vrai pour presque tout nombre premier p). On définit alors le conducteur de $\mathcal{A}$, $N_{\mathcal{A}} = \prod_p p^{f_p}$ et la fonction L attachée à $\mathcal{A}$:

$$L(s, \mathcal{A}) = \prod_p\ P_p^1(p^{-s})^{-1}.$$

Cette série de Dirichlet converge absolument pour $\Re es > 3/2$ et on fait sur $L(s,\mathcal{A})$ les deux conjectures dites *standard* suivantes :

Conjecture 1.1. T-W. *La fonction $L(s,\mathcal{A})$ se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$ et la fonction $\xi(s,\mathcal{A})$ définie par*

$$\xi(s,\mathcal{A}) = N_{\mathcal{A}}^{s/2}((2\pi)^{-s}\Gamma(s))^g L(s,\mathcal{A}),$$

satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi(s,\mathcal{A}) = w\xi(1-s,\mathcal{A}),$$

pour un certain réel w, avec $w = \pm 1$.

Conjecture 1.2. B-SD. *On a l'égalité*

$$\operatorname{rang} \mathcal{A}(\mathbb{Q}) = ord_{s=1} L(s,\mathcal{A}).$$

La dernière conjecture dont nous aurons besoin, n'est pas à proprement parler une conjecture standard, mais si on admet les deux conjectures précédentes, la fonction $\xi(s,\mathcal{A})$ appartient la classe des fonctions de Selberg [Sel] , et il est alors naturel de supposer vraie *l'hypothèse de Riemann généralisée* (GRH) :

Conjecture 1.3. GRH. *Les zéros non triviaux de ξ sont situés sur la droite critique $\Re es = 1$.*

Remarque 1.1. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une courbe elliptique, la Conjecture T-W, est une conséquence de la conjecture de Taniyama-Weil qui prédit que la fonction $L(s,\mathcal{A})$ est la fonction L associée à une forme modulaire. La conjecture B-SD n'étant autre que la fameuse conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer. Même dans ce cas le plus simple, ces deux conjectures ne sont pas démontrées, malgré les nombreux progrès de ces dernières années, notamment la preuve par Wiles que toute courbe elliptique semi-stable est modulaire. Ne parlons pas de la dernière, pour laquelle il y a encore moins de progrès.

Disons encore un mot sur la définition des nombres $(\lambda_{p,i})$ soit $\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})$ le module de Tate de $\mathcal{A}$; c'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2g$, muni de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Les $(\lambda_{p,i})$ sont les valeurs propres du frobenius *arithmétique* en p agissant sur $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{I_{\overline{p}}} := \mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})^{I_{\overline{p}}} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ où $I_{\overline{p}}$ désigne le groupe d'inertie en une place $\overline{p}$ de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ au dessus de p. Si $\mathcal{A}$ à bonne réduction en p, $I_{\overline{p}}$ agit trivialement ; alors, pour toute polarisation de $\mathcal{A}$, $\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée (forme de Weil) relativement à laquelle le frobenius (arithmétique) agit comme une similitude symplectique de rapport p et donc, par les théorèmes de diagonalisation des matrices symplectiques, les $(\lambda_{p,i})_{i=1}^{2g}$ sont de la forme

$$(p^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\theta_{p,1}}, p^{1/2}\,\mathrm{e}^{-i\theta_{p,1}}, \dots, p^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\theta_{p,g}}, p^{1/2}\,\mathrm{e}^{-i\theta_{p,g}}) \tag{1.6}$$

avec $\theta_{p,i} \in [0,\pi]$. Il est naturel de se demander quand un résultat de type Sato-Tate est valable : c'est à dire l'équidistribution, quand p varie, de l'ensemble $\{\theta_{p,1},\dots,\theta_{p,g}\}$ dans l'espace des classes de conjugaison d'un compact maximal de $Sp_{2g}(\mathbb{C})$ muni de sa mesure de Sato-Tate (cette mesure est décrite à la section 5).

2. Les résultats

Comme dans les articles précédemment cités (à l'exception de [Fo] et [H-B]), nous utilisons les formules explicites de Weil, généralisées par Mestre. Ensuite, l'application explicite de la formule de Lefschetz-Grothendieck (c'était implicite dans [F-P] et explicite dans [Mic]), nous permet de revenir à une situation purement géométrique.

Partons d'une famille de variétés abéliennes définies sur $\mathbb{Q}$, paramétrée par un ouvert affine, non vide, noté $U_{\mathbb{Q}}$, de la droite projective sur $\mathbb{Q}$,

$$U_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[\mathrm{T}, \frac{1}{P(\mathrm{T})}]);$$

où $P(\mathrm{T})$ est un polynôme sans facteurs carrés, à coefficients entiers premiers entre eux. On a donc un schéma abélien sur $U_{\mathbb{Q}}$ de dimension g

$$\mathcal{A} \quad @>f>> \quad U_{\mathbb{Q}}.$$

L'extension des scalaires à $\mathbb{C}$ définit une famille complexe de variétés abéliennes sur $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \big(\{z_j; P(z_j) = 0\} \cup \{\infty\}\big)$. Sur $U_{\mathbb{C}}$, on dispose du faisceau $\mathcal{F} := R^1 f_* \mathbb{Q}_\ell$, qui est lisse et de rang $2g$. Si on fixe un point base z_0 de $U_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}$ équivaut à une représentation (dite de *monodromie*) du groupe fondamental (topologique) $\pi_1(U_{\mathbb{C}}, z_0)$ sur $\mathcal{F}_{z_0} = H^1(\mathcal{A}_{z_0}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell^{2g}$; on notera ρ_{z_0} cette représentation. Au chapitre suivant, on montrera le Théorème général suivant :

Théorème 2.1. *On suppose T-W, GRH, B-SD vraies pour toutes les variétés abéliennes de la famille $\mathcal{A}$. Alors, si la représentation ρ_{z_0} est irréductible, on a la majoration*

$$\sum_{\substack{|t| \leqslant T \\ P(t) \neq 0}} \mathrm{rang}\, \mathcal{A}_t(\mathbb{Q}) \leqslant \frac{\mathcal{L}(T)}{\log T}(1 + o(1)) + (2g(d-1) - \kappa + o(1))2T.$$

où κ est un réel tel que $|\kappa| \leqslant g$ déterminé par l'image de $\pi_1(U_{\mathbb{C}}, z_0)$ par la représentation ρ_{z_0}, $\mathcal{L}(T)$ est le conducteur logarithmique moyen :

$$\mathcal{L}(T) = \sum_{\substack{|t| \leqslant T \\ P(t) \neq 0}} \log N_{\mathcal{A}_t} \leqslant (2g(d-1) + o(1))2T \log T,$$

et $d = \deg P(\mathrm{T}) + 1 = |\{z \in \mathbb{C};\ P(z) = 0\} \cup \{\infty\}| = |S_{\mathbb{C}}|$.

Remarque 2.1. Très souvent, on s'attend à ce que la famille $\mathcal{A}$ soit polarisée et à ce que l'image $Im\rho_{z_0}$ soit surjective sur $Sp(\mathcal{F}_{z_0})$, κ vaut alors $-1/2$.

Reste à avancer des familles de variétés abéliennes telles que la représentation complexe associée soit irréductible.

Tous nos exemples proviennent de familles de jacobiennes de courbes sur une surface. On part de la situation générale suivante :

$$\mathcal{C} \quad @>f>> \quad U_{\mathbb{Q}}$$

f est un morphisme lisse propre et plat sur $U_{\mathbb{Q}}$ dont les fibres sont des courbes lisses, connexes de genre $g \geqslant 1$. En outre f est muni d'une section s ($f \circ s = Id_{U_{\mathbb{Q}}}$), qui définit une section unité des jacobiennes des courbes de cette famille. Dans certains cas, où l'on dispose des équations explicites de $\mathcal{C}$, Katz [Ka4] a donné des conditions suffisantes pour l'irréductibilité de ρ_{z_0} ; par exemple le Théorème 12 de [Ka4] :

Théorème 2.2. *Soit $F(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré $\geqslant 3$, on suppose que le polynôme de deux variables défini par*

$$F(X,Z) = \frac{F(X) - F(Z)}{X - Z},$$

est irréductible sur $\mathbb{C}$. Soit alors la famille de courbes hyperelliptiques d'équation

$$y^2 = F(x) + t$$

définie sur $U := \{t \in \mathbb{C}; F(X) + t$ a d racines distinctes dans $\mathbb{C}\}$. Alors pour tout $z_0 \in U$, la représentation de la monodromie ρ_{z_0} est irréductible.

Si on permet à U d'être de dimension > 1, on trouve dans [Ka4] d'autres exemples de familles de courbes à monodromie irréductible (certaines étant également évoquées dans [Br]). Ceci dit, la méthode de Katz est en quelque sorte inverse de la nôtre, puisque la preuve de l'irréductibilité dépend d'estimations élémentaires de sommes d'exponentielles sur les corps finis ; pour le problème qui nous occupe, il est souvent beaucoup plus rentable de procéder directement à partir des équations de $\mathcal{C}$, sans avoir à prouver un résultat d'irréductibilité (voir [Br, F-P]). Nous donnons maintenant un exemple assez général où les équations de $\mathcal{C}$ n'interviennent pas.

On fixe ℓ un nombre premier. Soit $\mathcal{X}$ une surface projective, lisse, définie sur $\mathbb{Q}$, géométriquement connexe, on pose, pour $i = 0, 1, \ldots, 4$, $b_i(\mathcal{X}, \ell)$ son i-ème nombre de Betti :

$$b_i(\mathcal{X}, \ell) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{et}(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \ (= \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})),$$

(ces groupes de cohomologie sont ceux relatifs à la topologie *étale*). Rappelons qu'alors

$$b_i(\mathcal{X}, \ell) = b_{4-i}(\mathcal{X}, \ell) \text{ et } b_0(\mathcal{X}, \ell) = b_4(\mathcal{X}, \ell) = 1. \tag{2.1}$$

Nous serons intéressés par les surfaces $\mathcal{X}$ telles que $b_1(\mathcal{X}, \ell)$ $(= b_3(\mathcal{X}, \ell)) = 0$ (ce n'est pas un cas rare), par exemple quand $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ est une intersection complète ou bien une surface torique. En fait cette hypothse est cruciale : dans le cas contraire, et quand bien même admettrait-on l'hypothèse de Riemann, les valeurs propres du frobénius agissant sur $H^3_{et}(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ auraient une contribution trop grande (cf. remarque 6.5).

Théorème 2.3. *Soit $\mathcal{X}$ une surface projective, lisse, définie sur $\mathbb{Q}$, géométriquement connexe, telle que $b_1(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, l) = 0$, et soit $(\mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}}$ la famille de courbes issue d'un* pinceau de Lefschetz *de $\mathcal{X}$ défini sur $\mathbb{Q}$; notons $S_{\mathbb{Q}}$ le fermé réduit de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ au dessus duquel les courbes $\mathcal{X}_t$ sont singulières, et $U_{\mathbb{Q}}$ l'ouvert complémentaire. Supposons que, g, le genre commun de toutes les courbes de $(\mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}}$ est $\geqslant 1$. Alors, la représentation ρ_{z_0} est irréductible.*

Si on suppose les conjectures T-W, GRH, et B-SD vraies pour toutes les jacobiennes des courbes de la famille $(\mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, on a, quand $T \to +\infty$, la majoration

$$\sum_{\substack{|t| \leqslant T \\ t \notin S_{\mathbb{C}}}} \operatorname{rang} \operatorname{Jac} \mathcal{X}_t(\mathbb{Q}) \leqslant (2d - 4g + \delta' - \delta - d_2' - 1/2 + o(1))2T.$$

L'entier $d = |S_{\mathbb{C}}|$ ne dépend pas du pinceau, mais uniquement du plongement projectif de $\mathcal{X}$ choisi ; on note δ le cardinal de l'intersection, (notée Δ) de l'axe A du pinceau avec $\mathcal{X}$ (cf. 3). On désigne par δ' (resp. d_2'), le nombre d'orbites sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *de Δ (resp. de l'ensemble des fibres singulières du pinceau ayant deux composantes irréductibles).*

Cette majoration est à rapprocher du Théorème 1.2 (avec $c'_\Delta = 0$) : le terme dominant, $2d$, correspondant à $\deg \Delta(t) + c_\Delta$. Il est possible de diminuer encore ce terme, soit, dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ est une surface de type Hilbert-Blumenthal sans faire d'hypothèses supplémentaires, ou plus généralement en admettant d'autres conjectures standard relatives à la surface $\mathcal{X}$. Dans la section suivante, on s'attachera à définir précisément ce qu'est un pinceau de Lefschetz défini sur $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{X}$, la famille des jacobiennes attachée à ce pinceau, et en particulier l'ouvert $U_{\mathbb{Q}}$. Les sections 4 et 5 sont essentiellement composés de rappels de faits "bien connus" ; on y justifie le passage de la situation sur un corps global à sa réduction sur les corps finis que l'on étudie précisément. La preuve du Théorème 2.3, est l'objet de la section 6, et on explique rapidement dans la section 7, les modifications à apporter pour prouver le Théorème 2.1. Enfin, dans les deux dernières sections, on donnera une version *inconditionnelle* et améliorée du théorème précédent pour les pinceaux de Lefschetz sur le corps des fonctions rationnelles sur un corps fini $\mathbb{F}_q(X)$.

Je tiens à remercier E. Fouvry, N.M Katz, G. Laumon, F. Leprevost, L. Moret-Bailly, M. Raynaud ainsi que E. Ullmo de leurs explications qui m'ont fait progrésser en même temps que ce travail et aussi le rapporteur qui m'a encouragé à pousser mes arguments au cas des corps de fonctions.

3. Pinceaux de Lefschetz sur une surface

La référence pour ce qui est rappelé ici est [Mi1] V.3.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique d'un corps K. Soit $\mathcal{X}$ une surface projective, lisse, connexe définie sur $\overline{K}$, plongée dans $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$. On se donne maintenant A, un sous-espace linéaire de codimension 2 de $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$; l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$ contenant A est paramétré par une droite projective D de la grassmannienne $\check{\mathbb{P}}^n_{\overline{K}}$ et définit un pinceau d'hyperplans d'axe A. On choisit une paramétrisation de la droite D par $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ grâce à laquelle on identifiera D et $\mathbb{P}^1$; pour $t \in \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ on note H_t l'hyperplan du pinceau correspondant.

Soit $\widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X} \times D$ la variété d'incidence, c'est à dire l'ensemble des couples $(x,t) \in \mathcal{X} \times D$ tels que $x \in H_t$; les applications, première, et seconde coordonnée sur $\mathcal{X} \times D$ définissent le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{\pi} & \widetilde{\mathcal{X}} \\ & & s \uparrow\downarrow f \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array} \tag{3.1}$$

et la fibre en t de f, $f^{-1}(t)$ est notée $H_t \cap \mathcal{X} := \mathcal{X}_t$.

Définition 3.1. Le pinceau d'hyperplans $(H_t)_{t\in D}$ est dit de Lefschetz si les conditions suivantes sont vérifiées :

- L'axe A du pinceau coupe $\mathcal{X}$ transversalement, (donc en un nombre fini, noté δ , non nul de points) ; ainsi $\widetilde{\mathcal{X}}$ se déduit de $\mathcal{X}$ par éclatement de $\Delta = A \cap \mathcal{X}$.
- Il existe un ouvert dense U de D tel que, pour tout $t \in U$, H_t coupe $\mathcal{X}$ transversalement.
- On note $S = D - U$ l'ensemble exceptionnel, alors pour tout $s \in S$, $\mathcal{X}_s$ est une courbe avec pour seule singularité un point double ordinaire noté x_s.

Si le pinceau d'axe A est de Lefschetz, le morphisme f est alors propre et plat, lisse hors des x_s, et les fibres $\mathcal{X}_t$ sont des courbes connexes , lisses si $t \notin S$, de même genre noté g. De plus, à tout point x de $A \cap \mathcal{X}$, on associe une section s_x de f : pour tout $t \in D$, $x \in \mathcal{X}_t$, s_x est alors définie par $s_x(t) = (x,t)$.

Remarque 3.1. On dit qu'un plongement projectif est de *Lefschetz* si les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert dense de la grassmannienne des droites ; en caractéristique nulle tout plongement est de *Lefschetz* et en caractéristique positive tout multiple non trivial d'un plongement donné est de *Lefschetz* (cf. [Ka1] p.217) ; ainsi, la situation que nous étudions n'est pas "rare". Il faut également noter que le cardinal d de l'ensemble exceptionnel ne dépend que de $\mathcal{X}$ et de son plongement dans $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$ mais pas du pinceau choisi ([Ka1] p. 250, [Ka2] p. 268). En effet, on a la formule suivante

$$d := |S| = \chi(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) + \delta + 4(g-1). \tag{3.2}$$

Par exemple, si $\mathcal{X}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^3$ de degré δ, on a

$$b_2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, l) = \delta^3 - 4\delta^2 + 6\delta - 2,\ g = \frac{\delta(\delta-3)}{2} + 1,\ \textit{et}\ |S| = b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, l) + 2 + \delta + 4(g-1).$$

Supposons $\mathcal{X}$ définie sur K et plongée dans $\mathbb{P}^n_K$; on fait la définition suivante :

Définition 3.2. Un pinceau de Lefschetz de $\mathcal{X}$ sera dit défini sur K, si son axe A l'est, et s'il existe un point de $A \cap \mathcal{X}$ rationnel sur K.

Si $\mathcal{X}$ est munie d'un pinceau de Lefschetz défini sur K, et si on choisit un point rationnel x de $A \cap \mathcal{X}$, on peut choisir une paramétrisation de D_K par $\mathbb{P}^1_K$, telle que le point exceptionnel x soit au dessus du point ∞ $(f(x) = \infty)$.

Définition 3.3. Dans le Théorème 2.3, on entend par pinceau de Lefschetz la donnée d'un pinceau de Lefschetz de $\mathcal{X}$ défini sur K, dont le genre associé g est $\geqslant 1$, muni d'une paramétrisation de D_K par $\mathbb{P}^1_K$, d'un point exceptionnel rationnel x_∞ et de la section qui l'accompagne.

Avec ces données $\widetilde{\mathcal{X}}$ est définie sur K, ainsi que la section s_{x_∞} de f ; l'ensemble exceptionnel S (on note d son cardinal) est étale sur K ([Ka1] Prop 6.3) il est donc formé des racines d'un polynôme $P(\mathrm{T})$, séparable (c'est à dire que ses racines sont toutes de multiplicité 1), à coefficients dans K et du point ∞. Autrement dit le diagramme (3.1) est défini sur K. Sur $U_K := \operatorname{Spec} K[\mathrm{T}, 1/P(\mathrm{T})]$, on dispose d'une famille de courbes lisses connexes sur K, $(\mathcal{X}_t)_{t \in U_K}$, munies d'un point rationnel $s_{x_\infty}(t)$, qu'on prend comme l'origine de la jacobienne.

4. Un épaississement de la situation

Dorénavant K désignera un corps global (ie. un corps de nombre ou le corps de fonction d'une courbe projective, lisse, géométriquement connexe, définie sur le corps fini $\mathbb{F}_q$). $\mathcal{X}$ est une surface sur K, projective, lisse, géométriquement connexe, avec $b_1(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) = 0$ et munie d'un pinceau de Lefschetz défini sur K, au sens de la Définition 3.3. Il existe alors un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places de K tel qu'en chassant les dénominateurs des coefficients des équations qui définissent $\mathcal{X},\ A,\ \widetilde{\mathcal{X}}$, ces équations ainsi que $P(\mathrm{T})$ peuvent être supposées à coefficients dans l'anneau des $\mathcal{S}$-entiers $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ et que le diagramme (3.1) $(\mathcal{X}, A, \widetilde{\mathcal{X}}, f, s)$ admet alors un modèle lisse sur $Spec(\mathcal{O}_\mathcal{S})$ ([Ka1] section 6). Autrement dit, pour toute place v de K $v \notin \mathcal{S}$, si on note $\mathcal{X}_v$ la (bonne) réduction de $\mathcal{X}$ en v, c'est une surface projective sur le corps résiduel k_v de v, lisse, géométriquement connexe, munie d'un pinceau de Lefschetz d'axe A_v, défini sur k_v, dont le genre des courbes est g, dont l'ensemble exceptionnel S_v est donné par les zéros (simples) dans $\overline{k}_v$ du polynôme $P(\mathrm{T}) \mod v$ et du point ∞. Pour $t \in U_K$, et qu'on note $\bar{t}$ la classe de t $(\mod v)$ alors : la réduction en v de la courbe $\mathcal{X}_t$ relativement au modèle donné est la courbe sur k_v

$$\mathcal{X}_{t,v} = \mathcal{X}_{v,\bar{t}}. \tag{4.1}$$

Si $P(t) \neq 0 \pmod v$, $\mathcal{X}_t$ a bonne réduction en v, les inégalités (1.5) sont des égalités. On pose $\mathcal{A}_t := \operatorname{Jac} \mathcal{X}_t$ et $\mathcal{A}_{v,\bar{t}} := \operatorname{Jac} \mathcal{X}_{v,\bar{t}}$; le plongement défini par s de $\mathcal{X}_t$ dans $\mathcal{A}_t$, fournit le diagramme

(4.2) reliant les modules de Tate de $\mathcal{A}_t$ et de $\mathcal{A}_{v,\bar{t}}$, (on rappelle que $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}) := \mathbb{T}_\ell(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t) & & \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{v,\bar{t}}) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ H^1(\mathcal{X}_t \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathcal{X}_{v,\bar{t}} \otimes \overline{k_v}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee. \end{array} \tag{4.2}$$

Les flèches verticales sont décrites par le lemme ci-dessous ([Mi3] Cor 9.6) :

Lemme 4.1. *Soit C une courbe projective, lisse, connexe, définie sur k, plongée dans sa jacobienne, $\ell \neq \mathrm{car} k$, alors on a un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)]$-modules*

$$H^1(C \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee \simeq \mathbb{V}_\ell(\mathrm{Jac}\, C).$$

La flèche horizontale est la flèche de *spécialisation de la cohomologie* ; en outre, l'action de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ sur $H^1(\mathcal{X}_t \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ est non ramifiée en v, et les valeurs propres de la classe de conjugaison du frobenius *géométrique* $(\mathrm{Frob}_v) \subset \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ et de $\mathrm{Frob}_{k_v} \in \mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)$ agissant sur leur espace respectif sont les mêmes ([Ser] 2.3.3). Pour résumer, on a le résultat suivant

Lemme 4.2. *Si $P(t) \neq 0 (\mathrm{mod}\ v)$, l'ensemble des valeurs propres de la classe de conjugaison (Frob_v) agissant sur $H^1(\mathcal{X}_t \otimes K^{sep}, \mathbb{Q}_\ell)$ (ou sur $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^\vee$) coincide avec celui de Frob_v agissant sur $H^1(\mathcal{X}_{v,\bar{t}} \otimes \overline{k}_v, \mathbb{Q}_\ell)$ (ou $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{v,\bar{t}})^\vee$).*

Remarque 4.1. Nous n'avons pas dit que pour ce modèle, la réduction en v de $\mathcal{A}_t$ était égale à $\mathcal{A}_{v,\bar{t}}$, or c'est vrai car $\mathcal{X}_t$ est *semi-stable*, mais nous n'utiliserons pas ce résultat difficile avant la section 6.4.

5. Monodromie des pinceaux de Lefschetz

On se fixe ℓ un nombre premier. Soit $k = \mathbb{F}_q$, un corps fini de caractéristique $p \neq \ell$, et on se donne une surface $\mathcal{X}$ projective, lisse, géométriquement connexe munie d'un pinceau de Lefschetz tous deux étant définis sur k.

Avec les notations de la section précédente, pour tout $t \in \mathbb{F}_q$ tel que $P(t) \neq 0$, les valeurs propres du frobenius *géométrique* agissant sur $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^\vee$ sont de la forme (1.6), c'est à dire

$$q^{1/2}\, \mathrm{e}^{i\theta_{t,1}}, q^{1/2}\, \mathrm{e}^{-i\theta_{t,1}}, \dots, q^{1/2}\, \mathrm{e}^{i\theta_{t,g}}, q^{1/2}\, \mathrm{e}^{-i\theta_{t,g}},$$

et sa trace s'écrit

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^\vee) = 2p^{1/2} \sum_{i=1}^{g} \cos\theta_{t,i}. \tag{5.1}$$

Le but de cette section est de prouver la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Supposons que $H^1(\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$, on a pour tout polynôme symétrique, à coefficients rationnels, en g variables $V(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_g)$ et pour tout caractère additif ψ de $\mathbb{F}_q$, les inégalités suivantes :*

$$\Bigg| \sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q \\ P(t)\neq 0}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^\vee) \Bigg| \leqslant 2g(|S|-2)q\ ; \tag{5.2}$$

$$\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q \\ P(t)\neq 0}} V(\cos\theta_{t,1}, \dots, \cos\theta_{t,g})\psi(t) = \delta_\psi \kappa_V q + O(q^{1/2}), \tag{5.3}$$

où δ_ψ vaut 1 ou 0 suivant que ψ est trivial ou non, et l'expression de κ_V est donnée en (5.7). En outre, la constante apparaissant dans le symbole de Landau ne dépend que de V, g et $|S|$.

Preuve. — L'outil principal de la démonstration est le faisceau $\mathcal{F}_q := R^1 f_* \mathbb{Q}_\ell$ qui est lisse sur

$$U_{\mathbb{F}_q} := Spec\mathbb{F}_q[t, \frac{1}{P(t)}];$$

il est libre de rang $2g$, et si on fixe un point base $z \in U \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$, il correspond à une représentation continue ρ_q du groupe fondamental arithmétique $\pi_1^{arith} = \pi_1(U_{k_v}, z)$ dans le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension $2g$, $\mathcal{F}_{q,z}$; la représentation géométrique associée sera notée ρ_q^{geom}.

Ce faisceau est relié comme suit à la Proposition 5.1 : par le théorème de changement de base propre, on a un isomorphisme

$$\mathcal{F}_z \simeq H^1((\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)_z, \mathbb{Q}_\ell);$$

d'autre part, pour tout point fermé t de $U_{\mathbb{F}_q}$ de corps résiduel $\mathbb{F}_{q'}$, par le lemme 4.1 et par changement de point base, on a des isomorphismes de $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_{q'})]$-modules,

$$H^1((\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)_z, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^1((\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)_t, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{V}_\ell(\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t)^\vee$$

et en particulier

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}_q) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{q'}, H^1((\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)_t, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{q'}, \mathbb{V}_\ell(\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_{p,t})^\vee). \tag{5.4}$$

On rappelle également que $\mathcal{F}_{q,z} = H^1((\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q)_z, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée à valeur dans $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ (la forme d'intersection) qu' on notera (.). L'action de π_1^{arith} est compatible avec cette forme, de sorte qu'en choisissant deux isomorphismes $\mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell(-1)$ et $\mathbb{Q}_\ell^{2g} \simeq \mathcal{F}_z$ on a l'inclusion

$$\rho_q^{geom}(\pi_1^{geom}) \subset Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell),$$

et que pour tout point fermé $t \in U_{\mathbb{F}_q}$ de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^n}$, Frob_t agit par une similitude symplectique de rapport q^n. On notera $G_{geom}(\mathcal{F}_q)$ le groupe de monodromie géométrique du faisceau $\mathcal{F}_q$ (ie. l'adhérence de Zariski de $\rho_q^{geom}(\pi_1^{geom})$ dans $Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$).

5.1. **Calcul de $G_{geom}(\mathcal{F}_q)$.** Les faits relatifs à la monodromie des pinceaux de Lefschetz rappelés ci-dessous sont tirés de [D1] 4.2, [Ka2]. On se place dans le cadre plus général ou la surface $\mathcal{X}$ est définie sur un corps algébriquement clos k.

A tout élément de l'ensemble exceptionnel $s \in S$ on peut associer (au signe près) un *cycle évanescent* $\pm\delta_s \subset H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell)$ qui agit sur $H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell)$. Alors le groupe d'inertie en s, I_s, agit sur $H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell)$ par :

$$i \in I_s : x \longrightarrow \ x \ + (x.\delta_s) t_\ell(i) \delta_s,$$

où on a noté t_ℓ la surjection (P_s désigne le groupe d'inertie sauvage)

$$t_\ell : I_s \to I_s/P_s \xrightarrow{\simeq} \prod_{\ell' \neq p} \mathbb{Z}_{\ell'}(1) \to \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1.$$

En particulier, $\mathcal{F}_q$ est modérement ramifié aux points de $S_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. Les cycles évanescents $(\pm\delta_s)_{s \in S}$ sont conjugués sous l'action de π_1^{geom}, de sorte que le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent, E, est stable. Par le Théorème de *Lefschetz difficile* (valable en toute caractéristique [D1, D2]), on a alors une décomposition en somme directe orthogonale pour la forme bilinéaire (.) :

$$H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell) = E \oplus E^\perp = E \oplus H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1^{geom}}.$$

D'une part, l'action de π_1^{geom} sur l'espace des cycles évanescents E est connue grâce à un théorème de Kazdhan et Margulis ([D1] 5.10) :

Proposition 5.2. *L'image de π_1^{geom} par ρ^{geom} est ouverte dans $Sp(E)$.*

D'autre part, on a les isomorphismes ([Ka2] p. 279 et 291)

$$H^1(\mathcal{X}_z, \mathbb{Q}_\ell)^{\pi_1^{geom}} \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{5.5}$$

On a donc le

Corollaire 5.3. *Soit $\mathcal{X}$, une surface projective, lisse, définie sur un corps algébriquement clos k, telle que $b_1(\mathcal{X}, \ell) = 0$. Alors, la représentation de la monodromie attachée à un pinceau de Lefschetz sur $\mathcal{X}$ est irréductible et son groupe de monodromie géométrique est*

$$G_{geom}(\mathcal{F}_q) = Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell).$$

5.2. **Fin de la preuve.** La preuve est classique : appliquons la formule de Grothendieck-Lefschetz au faisceau $\mathcal{F}_q$; par le corollaire 5.3 , la représentation ρ_q^{geom} est irréductible, et comme U_q est affine on a

$$\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q \\ P(t)\neq 0}} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}_q) = -\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^1_c(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F}_q)).$$

Comme $\mathcal{F}_q$ est modérément ramifié, la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch donne $\dim H^1_c(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F}_q)) = 2g(|S|-2)$. Le Théorème fondamental de Deligne sur les poids ([D2]) achève de prouver la première partie de 5.1 ($\mathcal{F}_q$ est pur de poids 1) : on a

$$|\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^1_c(U_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{F}_p))| \leqslant 2g(|S|-2)p.$$

Prouvons la seconde partie de 5.1, notre référence générale sera [Ka5] Chap. 3 et 13 : soit K un compact maximal de $Sp_{2g}(\mathbb{C})$, et $K^\natural$ l'espace topologique quotient, des classes de conjugaisons de K. $K^\natural$ est isomorphe au quotient de $[-\pi,\pi]^g$ par le produit semi-direct $(\{\pm1\}^g) \rtimes \mathcal{S}_g$, où $\mathcal{S}_g$ est le groupe symétrique agissant par permutation des coordonnées, et où un élément $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_g) \in \{\pm1\}^g$ envoie $(\theta_1, \dots, \theta_g)$ sur $(\epsilon_1\theta_1, \dots, \epsilon_g\theta_g)$. La mesure de *Sato-Tate* sur $K^\natural$ est alors l'image par la projection de la mesure μ sur $[-\pi,\pi[^g$, de masse totale un et de densité

$$\mu = \frac{4^{g^2}}{(2\pi)^g 2^g g!}\prod_{i=1}^{g} \sin^2\theta_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant g} \sin^2\frac{\theta_i+\theta_j}{2}\sin^2\frac{\theta_i-\theta_j}{2} d\theta_1\dots d\theta_g. \tag{5.6}$$

Alors $V(\cos\theta_1, \dots, \cos\theta_g)$ (V étant un polynôme symétrique) peut être considéré comme une fonction sur $K^\natural$ et son intégrale sur $K^\natural$ est donnée par

$$\kappa_V := \int_{K^\natural} V\mu^\natural = \int_{[-\pi,\pi[^g} V(\cos\theta_1, \dots, \cos\theta_g)\mu(\theta_1, \dots \theta_g). \tag{5.7}$$

Le polynôme trigonométrique V peut s'écrire sous la forme d'une somme finie

$$V(\cos\theta_1, \dots, \cos\theta_g) = \kappa_V + \sum_\rho \beta_\rho \operatorname{tr}(\rho(\langle\theta_1, \dots \theta_g\rangle)\ ),$$

où ρ parcourt les représentations irréductibles de $Sp_{2g}(\mathbb{C})$ et $\langle\theta_1, \dots \theta_g\rangle$ est la matrice diagonale de valeurs propres $\mathrm{e}^{i\theta_1}, \mathrm{e}^{-i\theta_1}, \dots, \mathrm{e}^{i\theta_g}, \mathrm{e}^{-i\theta_g}$. Soit E_ℓ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$, contenant $\sqrt{p}$, pour chaque représentation irréductible ρ, on forme par composition, le E_ℓ-faisceau $\rho(\mathcal{F}_q(1/2))$, lisse sur $U_{\mathbb{F}_q}$, pur de poids 0, et pour tout $t \in \mathbb{F}_q$, $P(t) \neq 0$, on a

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_t, \rho(\mathcal{F}_q(1/2))) = \mathrm{tr}(\rho(\langle \theta_{t,1}, \dots \theta_{t,g} \rangle)).$$

D'une part, par construction, la représentation géométrique associée à $\rho(\mathcal{F}_q(1/2))$ est irréductible (Cor 5.3) et donc

$$H_c^2(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \rho(\mathcal{F}_q(1/2))) = 0.$$

D'autre part, à un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{F}_q$ on associe le faisceau $\mathcal{L}_\psi$, qui est lisse sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, de rang 1, pur de poids 0 ([Ka5] Chap. 4), sauvagement ramifié en ∞ avec $\mathrm{Swan}_\infty = 1$; alors, par la Proposition 7.1, le faisceau $\rho(\mathcal{F}_q(1/2))$ est modérément ramifié et le Lemme clef 4.8.2 de [Ka3] nous permet de conclure que

$$H_c^2(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \rho(\mathcal{F}_q(1/2)) \otimes \mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Appliquant une fois encore la formule des traces, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q\\ P(t)\neq 0}} V(\cos\theta_{t,1}, \dots, \cos\theta_{t,g})\psi(t) = \quad & \delta_\psi \kappa_V q + O(\deg P) \\ & - \sum_\rho \beta_\rho \, \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^1(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \rho(\mathcal{F}_q(1/2)) \otimes \mathcal{L}_\psi)).\end{aligned}$$

On conclut la preuve de 5.1 (5.3) comme précédement, la constante dans le $O(q^{1/2})$ étant controlée par la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch.

□

5.3. **Une amélioration de la Proposition 5.1 (13).** La majoration (5.2) utilise uniquement le fait que le faisceau $\mathcal{F}_q$ est géométriquement irréductible et modérément ramifié. La situation particulière d'un pinceau de Lefschetz permet de réduire considérablement la constante $2g(|S|-2)$. Nous en donnons une preuve complètement élémentaire ; on n'oubliera cependant pas la suite spectrale de Leray sous-jacente.

En vertu du Lemme 4.1, et du théorème de Weil pour les courbes, on a l'égalité

$$R_q =: \sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q\\ P(t)\neq 0}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^\vee) = \sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q\\ P(t)\neq 0}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^1(\mathcal{X}_t \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) \tag{5.8}$$

$$= |U(\mathbb{F}_q)|(q+1) - \sum_{t\in U(\mathbb{F}_q)} |\mathcal{X}_t(\mathbb{F}_q)|. \tag{5.9}$$

Posons $d'_q = |S(\mathbb{F}_q)| = q + 1 - |U(\mathbb{F}_q)| \leqslant d$, et $d_{q,1}$ (resp. $d_{q,2}$), le nombre d'éléments $s \in S(\mathbb{F}_q)$, tels que $\mathcal{X}_s$ soit une courbe irréductible, (resp. tels que $\mathcal{X}_s$ ait deux composantes irréductibles) ; on a donc $d'_q = d_{q,1} + d_{q,2}$. Considérant alors les courbes $\mathcal{X}_{q,s}(\mathbb{F}_q)$, $s \in S(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} R_q &= (q+1-d'_q)(q+1) - |\widetilde{\mathcal{X}}(\mathbb{F}_q)| + (d_{q,1} + 2d_{q,2})q + O(gd'_q q^{1/2}) \\ &= q^2 - |\widetilde{\mathcal{X}}(F_q)| + (d_{q,2}+2)q + O(gdq^{1/2}). \end{aligned}$$

Or $\widetilde{\mathcal{X}}$ est défini à partir de $\mathcal{X}$ en éclatant les points de $A \cap \mathcal{X}$; notant δ_q le nombre de ceux qui sont $\mathbb{F}_q$-rationnels, on a donc

$$|\widetilde{\mathcal{X}}(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)| + \delta_q q.$$

D'autre part, la formule des traces pour $\mathcal{X}$ donne

$$|\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)| = q^2 + \sum_{i=1}^{3}(-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^i(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) + 1;$$

si bien que, compte tenu des hypothèses faites sur $\mathcal{X}$, on a

$$R_q = -\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^2(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) + (d_{q,2} + 2 - \delta_q)q + O(gdq^{1/2}). \tag{5.10}$$

Remarque 5.1. En vertu des conjectures de Weil ([D1] Thm. 1.6), on a la majoration

$$|\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q, H^2(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell))| \leqslant b_2(\mathcal{X},\ell)q. \tag{5.11}$$

6. Majoration du rang en caractéristique 0

Pour étudier le rang, nous employons les formules explicites de Weil-Mestre. Le lemme qui suit est une version généralisée du Lemme 2 de [F-P].

Soit $\lambda \geqslant 1$ un paramètre (on choisira $\lambda = \log T(1-\log^{-1/2} T)$) et soit F_λ la fonction définie par

$$F_\lambda(x) = \max(0, 1 - |x/\lambda|).$$

Lemme 6.1. *Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne définie sur $\mathbb{Q}$ de dimension g. On suppose qu'elle vérifie les trois hypothèses, T-W, B-SD et GRH, alors on a la majoration*

$$\begin{aligned}\lambda \operatorname{rang} \mathcal{A}(\mathbb{Q}) \leqslant \quad & \log N_{\mathcal{A}} - 2\sum_p \Big(\sum_{i=1}^{B_p} \lambda_{p,i}\Big) F_\lambda(\log p)\frac{\log p}{p} \\ & -2\sum_p \Big(\sum_{i=1}^{B_p} \lambda_{p,i}^2\Big) F_\lambda(2\log p)\frac{\log p}{p^2} \ + O(g).\end{aligned}$$

On suit la méthode de [F-P] : on applique le Lemme 6.1 à chacune des variétés abéliennes $\mathcal{A}_t = \operatorname{Jac}\mathcal{X}_t$, $t\in\mathbb{Z}$, $|t|\leqslant T$, $P(t)\neq 0$, puis on somme ces inégalités et on obtient en intervertissant les sommations

$$\lambda \sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \operatorname{rang}\mathcal{A}_t(\mathbb{Q}) \leqslant \mathcal{L}_T - S_1(T) - S_2(T) + O(gT),$$

avec

$$S_j(T) = 2\sum_p F_\lambda(j\log p)\frac{\log p}{p^j} \sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \Big(\sum_{i=1}^{B_{p,t}} \lambda_{p,t,i}^j\Big),\ j = 1, 2.$$

On applique alors à chacune des sommes S_j le traitement suivant :

En vertu de (1.5), la contribution à $S_j(T)$ des $p|\ell N$ est un $O(T)$, on supposera donc que $p \not|\ell N$. Encore d'après (1.5), la contribution pour chaque p des $|t|\leqslant T$ tels que $P(t) = 0 \pmod p$ est un $O(\deg(P)gTp^{j/2-1})$; d'autre part, pour les t tels que $P(t)\neq 0 \pmod p$, on applique le Lemme 4.2, ce qui donne finalement

$$S_j(T) = 2\sum_p F_\lambda(j\log p)\frac{\log p}{p^j} \sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ P(t)\neq 0 \pmod p}} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p^j, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{p,\bar t})^\vee) \ + O(T). \tag{6.1}$$

Pour chaque p, on découpe alors l'intervalle $[-T,T]$, en intervalles de longueur p avec éventuellement un intervalle incomplet I_p de longueur $\leqslant p-1$.

$$S_j(T) = 2\sum_p F_\lambda(j\log p)\frac{\log p}{p^j}\left[\frac{2T+1}{p}\right]R_{p,j} + 2\sum_p F_\lambda(j\log p)\frac{\log p}{p^j}\sum_{\substack{t\in I_p\\ P(t)\neq 0 \pmod p}}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p^j,\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{p,\bar t})^\vee); \tag{6.2}$$

où

$$R_{p,j} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_p\\ P(t)\neq 0}}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p^j,\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{p,\bar t})^\vee).$$

6.1. **Traitement des sommes incomplètes.** La somme incomplète est majorée par la méthode classique de Polya-Vinogradov : on a l'égalité

$$\sum_{\substack{t\in I_p\\ P(t)\neq 0 \pmod p}}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p,\dots)) = \sum_{k=-(p-1)/2}^{(p-1)/2}\mathcal{F}(k;p)\sum_{t\in I_p}\mathrm{e}(\frac{-kt}{p}),$$

où

$$\mathcal{F}(k;p) = \frac{1}{p}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_p\\ \Delta(t)\neq 0}}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p,\dots))\,\mathrm{e}(\frac{kt}{p}).$$

Appliquant la Proposition 5.1 (5.2) et (5.3) on majore cette dernière quantité par

$$O(dgp+\sum_{\substack{k=-(p-1)/2\\ k\neq 0}}^{(p-1)/2}\frac{p}{k}) = O(dgp\log p) \text{ (car } \kappa_V = 0 \text{ dans ce cas)}, \tag{6.3}$$

et donc le deuxième terme de (6.2) est un $O(\lambda\,\mathrm{e}^\lambda)$ si $j=1$ et $O(\mathrm{e}^{\lambda/2})$ si $j=2$.

Remarque 6.1. Avec (1.5), la somme incomplète aurait pu être majorée trivialement par $2gp^{3/2}$, cela aurait pour effet de multiplier par $3/2$ le rang moyen dans le Théorème 2 ; ainsi la technique qui consiste à compléter des sommes incomplètes à l'aide de caractères est performante (cette remarque était faite dans [F-P]).

Reste à traiter le premier terme de (6.2) correspondant aux sommes complètes.

6.2. **Contribution de $S_1(T)$.** D'après (5.10), le premier terme de (6.2) pour $j=1$ s'écrit :

$$2\sum_p F_\lambda(\log p)\frac{\log p}{p}\left[\frac{2T+1}{p}\right]\Big(-\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p,H^2(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_p,\mathbb{Q}_\ell)) + (d_{p,2}+2)p - \delta_p p + O(gdp^{1/2})\Big)$$

$$= T_1+T_2+T_3+T_4$$

le terme T_4 correspondant à $O(gdp^{1/2})$ est majoré :

$$|T_4| = O(gdT); \tag{6.4}$$

On va maintenant traiter non trivialement le terme terme T_3 correspondant à $-\delta_p p$.

6.2.1. *Contribution de* T_3. Rappelons que δ_p est le nombre de points $\mathbb{F}_p$ rationnels dans l'intersection de $\mathcal{X}_p$ avec l'axe du faisceau A_p. Comme p ne divise pas N, on a $\delta_p \leqslant \delta$, ce qui donne la majoration

$$-T_3 \leqslant \delta\lambda(1+o(1))2T + O(\mathrm{e}^{\lambda}).$$

On va améliorer sensiblement cette majoration. A chaque orbite Δ_i, $i = 1, \dots, \delta'$ de Δ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on peut associer un polynôme $Q_i(\mathrm{T})$ irréductible, à coefficients entiers, dont les racines sont en bijection avec les points de Δ_i ; de plus, pour p assez grand (*ie.* tel que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les Δ_i soit non ramifiée en p), le nombre δ_p est égal au nombre de racines dans $\mathbb{F}_p$ du polynôme $Q = \prod_{i=1}^{\delta'} Q_i$, noté $\rho_Q(p)$. On applique alors à chacun des Q_i le Théorème de Nagell suivant ([Na]):

Proposition 6.2. *Soit $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$, alors, pour $x \to +\infty$, on a l'équivalence*

$$\sum_{p \leqslant x} \rho_Q(p) \log p \sim x.$$

De cette proposition et du théorème des nombres premiers, on déduit l' égalité

$$T_3 = -\delta'\lambda(1+o(1))2T + O(\mathrm{e}^{\lambda}). \tag{6.5}$$

Remarque 6.2. Observons que l'emploi de la fonction "triangle" F_λ permet de gagner un facteur 2 dans cette évaluation et celles qui suivent par rapport à la majoration triviale $F_\lambda \leqslant 1$.

6.2.2. *Contribution de* T_2. Le terme T_2 correspondant à $(d_{p,2}+2)p$ est positif et minoré :

$$T_2 \geqslant 2\lambda(1+o(1))2T + O(\mathrm{e}^{\lambda}); \tag{6.6}$$

De manière analogue à T_3, si on note d_2' le nombre d'orbites sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de l'ensemble des fibres singulières du pinceau ayant deux composantes irréductibles, on a l'égalité

$$T_2 \geqslant (2+d_2')\lambda(1+o(1))2T + O(\mathrm{e}^{\lambda}); \tag{6.7}$$

6.2.3. *Contribution de* T_1. Par (5.11), le terme T_1 correspondant à $-\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^2(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell))$ est majoré en valeur absolue par

$$|T_1| \leqslant b_2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \ell)\lambda(1+o(1))2T, \tag{6.8}$$

Remarque 6.3. Pour tout $p \not| N$, on a l'égalité

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^2(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)) = \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Si la surface $\mathcal{X}$ vérifie les conjectures de Tate [Ta], et que la fonction L, correspondant au deuxième groupe de cohomologie de $\mathcal{X}$, $L^{(2)}(\mathcal{X}, s)$ vérifie des conjectures standard, on obtient l'équivalent

$$T_1 = -\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_c^2(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\lambda(1+o(1))2T.$$

Dans le cas des corps de fonctions, on montrera *inconditionnellement* en (9.6) une égalité similaire.

Finalement avec (6.4), (6.5), (6.7), (6.8) on a l'inégalité

$$-S_1(T) \leqslant \lambda(b_2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \ell) + \delta' - (2+d_2') + o(1))2T + O(T + \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda}). \tag{6.9}$$

6.3. **Contribution de $S_2(T)$.** La majoration de $S_2(T)$ est analogue : pour $P(t) \neq 0 \pmod p$ on a

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p^2, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{p,\bar{t}})^\vee) = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_{p,t,i}^2 = 2p \sum_{i=1}^{g} \cos 2\theta_{p,\bar{t},i}.$$

On utilise alors la Proposition 5.1 (5.3) avec

$$V(\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_g) = \sum_{i=1}^{g} \cos 2\theta_i = 2\sum_{i=1}^{g} \cos^2\theta_i \ - g,$$

et ψ_p le caractère trivial. On obtient alors

$$S_2(T) = 2\kappa_V \frac{\lambda}{2}(1 + o(1))2T + O(T) + O(\mathrm{e}^{\lambda/2}); \tag{6.10}$$

$$\kappa_V = \int_{[-\pi,\pi[^g} V(\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_g)\mu(\theta_1, \ldots, \theta_g)$$

où μ est la mesure donnée en (5.6). Comme me l'a expliqué N. M. Katz, la constante κ_V se calcule simplement grâce à la théorie des représentations de Sp_{2g}, et vaut $-1/2$. En effet, partons de la relation matricielle universelle,

$$\mathrm{tr}(M^2) = \mathrm{tr}(\mathrm{Sym}_2(M)) - \mathrm{tr}(\bigwedge_2(M)).$$

Pour le groupe $Sp_{2g}(\mathbb{C})$, le carré symétrique de la représentation standard, $\mathrm{Sym}_2(\mathrm{std}_{2g})$, est irréductible alors que son carré alterné $\bigwedge_2(\mathrm{std}_{2g})$ se décompose en la somme de la représentation triviale et d'une représentation irréductible (ou bien de la représentation nulle si $g = 1$), on a donc

$$2\kappa_V = \int_K \mathrm{tr}(k^2)\mu_{Haar} = \int_K \mathrm{tr}(\mathrm{Sym}_2(k)) - \mathrm{tr}(\bigwedge_2(k))\mu_{Haar} = 0 - 1.$$

Prenant $\lambda = \log T(1 - \frac{1}{\log^{1/2} T})$, on réunit alors (6.1), (6.2),..., (6.10) pour obtenir la majoration

$$\sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \mathrm{rang}\,\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t(\mathbb{Q}) \leqslant \frac{\mathcal{L}_T}{\log T}(1 + o(1)) + (b_2(\mathcal{X}, \ell) + \delta' - d_2' - 2 + 1/2 + o(1))2T. \tag{6.11}$$

Remarque 6.4. Si nous avions utilisé la majoration triviale (1.5) pour majorer $S_2(T)$, la constante $-\kappa_V = 1/2$ aurait été remplacée par g dans (6.11). Ainsi, la connaissance précise du groupe de monodromie géométrique du faisceau $\mathcal{F}$ permet une amélioration substantielle de la majoration du rang.

Remarque 6.5. Il semble que par cette méthode, l'hypothèse $b_3(\mathcal{X}, \ell) = 0$ soit cruciale : en effet, il faudrait savoir majorer la quantité suivante

$$T_0 := 2\sum_p F_\lambda(\log p)\frac{\log p}{p}\left[\frac{2T+1}{p}\right] \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^3(\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Or, même si nous supposons que la fonction $L^{(3)}(\mathcal{X}, s)$ attachée au groupe de cohomologie $H^3(\mathcal{X} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell))$ est *extrêmement agréable* (c'est à dire possède un prolongement analytique, une équation fonctionnelle de la forme naturelle, avec pour centre de symétrie $s_0 = 3/2 + 1/2 = 2$, et qu'elle vérifie de plus l'hypothèse de Riemann généralisée : $L^{(3)}(\mathcal{X}, s)$ *n'a pas de zéros dans la bande* $s_0 < \Re e\ s \leqslant 5/2$), tout ce que nous pouvons en déduire c'est la majoration

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^3(\mathcal{X}\otimes\overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)}{p^{3/2}} \log p = O(x^{1/2}\log^2 x);$$

d'où l'on tire la majoration

$$T_0 = O(T\lambda^2).$$

Celle-ci est tout à fait insuffisante.

6.4. **Majoration du conducteur.** Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne de dimension g définie sur un corps global K, nous voulons majorer l'exposant f_v de son conducteur en une place v de mauvaise réduction. Rappelons que f_v peut être défini, en termes de la représentation (restreinte à l'inertie en une place $\overline{v}$ au dessus de v) de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ sur le module de Tate de $\mathcal{A}$:

$$f_v = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(\frac{\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})\otimes\mathbb{Q}_\ell}{(\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})\otimes\mathbb{Q}_\ell)^{I_{\overline{v}}}}) + \mathrm{Swan}_v(\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})\otimes\mathbb{Q}_\ell).$$

Cette définition permet de montrer le résultat général suivant ([B-K] Theorem 6.2, [S-T]) :

Proposition 6.3. *Si* $K = \mathbb{Q}$, $v = p$, *on a la majoration*

$$f_p = O(g\log g); \tag{6.12}$$

Si $\mathrm{car}K > 2g+1$, $\mathrm{Swan}_v(\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})\otimes\mathbb{Q}_\ell) = 0$ *et on a*

$$f_v \leqslant 2g. \tag{6.13}$$

Soit $t \in \mathbb{Z}$ tel que $P(t) \neq 0$, pour tout $p \not| N$, la réduction en p de la courbe $\mathcal{X}_t$ est la courbe $\mathcal{X}_{p,\bar{t}}$ qui est *semi-stable* et d'après [B-L-R] 9.7.2, la composante neutre de la réduction en p du modèle de Néron de $\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t$ est isomorphe à la jacobienne de la courbe $\mathcal{X}_{p,\bar{t}}$. On majore alors f_p suivant les différents cas ci-dessous :

- Si $p \not| NP(t)$, la courbe $\mathcal{X}_t$ a bonne réduction et itou pour sa jacobienne, donc $f_p(\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t) = 0$.
- Pour p divisant N, par (6.12) on a $f_p(\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t) = O(g\log g)$.
- Pour $p \not| N$, mais $p|P(t)$, la réduction de la courbe $\mathcal{X}_t$ en p est la courbe $\mathcal{X}_{p,\bar{t}}$ qui n'a qu'un seul point double ordinaire. Il s'ensuit alors par [B-L-R] 9.2.8, que la composante neutre de la réduction en p du modèle de Néron de $\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t$ est extension d'un variété abélienne par un tore de rang 1 ; donc dans ce cas, la définition de l'exposant du conducteur ([Gr]) donne $f_p(\mathrm{Jac}\,\mathcal{X}_t) = 1$.

On déduit alors des majorations précédentes, la majoration :

$$\begin{aligned}\log N_{\mathcal{A}_t} &\leqslant \sum_{\substack{p|P(t)\\ p\not| N}} \log p \ + \sum_{p|N} g\log g\log p\\ &\leqslant \log P(t)\ + O(g\log g\log N)\end{aligned}$$

En sommant sur les $-T \leqslant t \leqslant T$ on obtient

$$\frac{\mathcal{L}_T}{\log T} = \frac{1}{\log T}\sum_{\substack{|t|\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \log N_{\mathcal{A}_t} \leqslant \deg P.(1+o(1))2T = (d-1)(1+o(1))2T.$$

Ceci combiné avec (6.11) et l'égalité (3.2) achève de prouver le Théorème 2.3.

7. Le Théorème 2.1

Indiquons les modifications principales : partant d'une famille de variétés abéliennes sur un ouvert affine $U_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, nous construisons un modèle de cette famille sur $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$. On considère le faisceau constructible sur $\mathbb{P}^1_{\frac{1}{\ell N}\mathbb{Z}}$, $\mathcal{F} := R^1 f_* \mathbb{Q}_\ell$ qui est en fait lisse sur $U_{\frac{1}{\ell N}\mathbb{Z}} :=$ Spec $\mathbb{Z}[t, \frac{1}{\ell N P(t)}]$, où $P(T)$ est un polynôme sans facteurs carrés, à coefficients entiers premiers entre eux.

Pour toute place v de Spec $\frac{1}{\ell N}\mathbb{Z}$ de corps résiduel k_v (ie. $k_v = \mathbb{F}_p$ si $v = p \not| \ell N$, ou $k_v = \mathbb{Q}$ si $v = \infty$ est la place générique), fixons un point base $z_v \in U \otimes \overline{k}_v$; notons $\mathcal{F}_v$ la restriction de $\mathcal{F}$ à la fibre au-dessus de v. On dispose donc d'une représentation continue ρ_v du groupe fondamental arithmétique ${\pi_1^{arith}}_v = \pi_1(U_{k_v}, z_v)$ dans le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathcal{F}_{z_v}$ et on désignera par $G_{geom,v}$ le groupe de monodromie géométrique associé. D'autre part, on a pour $p \not| N\ell$, $t \in \mathbb{Z}$, $p \not| P(t)$, la relation

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p, H^1(\mathcal{X}_t \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\overline{t}}, \mathcal{F}_p).$$

Les représentations $(\rho_v)_v$ ne sont pas indépendantes : choisissons un plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$, et des isomorphismes de $\mathcal{F}_{v,z_v} \simeq \mathbb{Q}_\ell^{2g} \to \mathbb{C}^{2g}$, et notons encore $G_{geom,v}$ l'adhérence de Zariski des $G_{geom,v}$ ainsi plongés dans $GL_{2g}(\mathbb{C})$, la proposition suivante est un cas particulier du théorème de spécialisation de la monodromie ([D2] 1.11, [Ka6] 8.18)

Proposition 7.1. *Quitte à agrandir N, pour tout $p \not| \ell N$ on a les propriétés suivantes :*

- *le faisceau $\mathcal{F}_p$ est modérément ramifié aux points de $S_p \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$; en particulier par la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch, on a l'égalité des caractéristiques d'Euler,*

$$\chi_c(\mathcal{F}_p, U_p \otimes \overline{\mathbb{F}}_p) = \chi_c(\mathcal{F}_\infty, U_{\mathbb{C}}) = 2g(2 - |S_{\mathbb{C}}|).$$

- *Le groupe de monodromie géométrique $G_{geom,p}$ est conjugué dans $GL_{2g}(\mathbb{C})$ à $G_{geom,\infty}$.*

Par l'hypothèse $\rho^{geom}_{z_\infty}$, est irréductible par conséquent pour tout $p \not| \ell N$ et pour la famille de variétés abéliennes définie sur $U_{\mathbb{F}_p}$, on a la majoration 5.1 (13). Cela nous permet de majorer $|S_1(T)|$, par

$$2g(d-2)\frac{\lambda}{2}(1 + o(1))2T + O(\lambda\, \mathrm{e}^\lambda).$$

Comme on ne sait rien a priori sur le groupe de monodromie géométrique de ρ_{z_0}, tout ce que l'on peut faire pour majorer $S_2(T)$ c'est appliquer (1.5), ce qui donne

$$|S_2(T)| \leqslant g\frac{\lambda}{2}(1 + o(1))2T + O(T) + O(\mathrm{e}^{\lambda/2}).$$

Comme on ne sait rien non plus sur le conducteur, (6.13) fournit la majoration

$$\frac{\mathcal{L}_T}{\log T} \leqslant 2g(d-1)(1 + o(1))2T.$$

La réunion de ces trois majorations achève de prouver le Théorème 2.1.

8. Variétés abéliennes sur les corps de fonctions

Soit K le corps de fonctions d'une courbe $\mathcal{C}$ projective, lisse, géométriquement connexe définie sur $\mathbb{F}_q$. Pour toute place v de K on note: k_v son corps résiduel, $|v| = |k_v|$ le cardinal de celui-ci, d_v ou $\deg v$ son degré ($d_v = \log|v| = |k_v|/\log q$ et $\chi = 2 - 2g_C$ la caractéristique d'Euler.

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne de dimension g définie sur K. On désigne par $N_{\mathcal{A}} = \prod_v v^{f_v}$ son conducteur, $n_{\mathcal{A}} = \deg N_{\mathcal{A}} = \sum_v d_v f_v$. Le module de Tate $\mathbb{T}_\ell(\mathcal{A})$ définit un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sur $\mathcal{C}$, lisse hors des places de mauvaise réduction de $\mathcal{A}$. La fonction L associée à $\mathcal{A}$ est définie par

$$L(s, \mathcal{A}) = \prod_v \det(I - |v|^{-s}\,\mathrm{Frob}_v, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee I_{\overline{v}}})^{-1}$$

(aux places de bonne réduction $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee I_{\overline{v}}} = \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee$). On sait que cette fonction a les propriétés suivantes (cf. [Sch] p.496, p.507):

- la fonction $L(\mathcal{A}, s)$ est une fraction rationnelle en q^{-s}, de degré $n_a - 2g\chi$ qui s'écrit

$$L(\mathcal{A}, s) = \frac{P_1(q^{-s})}{P_0(q^{-s})P_2(q^{-s})},$$

  et $P_j(q^{-s}) = \det(I - q^{-s}\,\mathrm{Frob}_q, H^j(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee))$ a tous ses zéros sur la droite $\Re\mathrm{e}\ s = 1/2 + j/2$.
- $L(\mathcal{A}, s)$ vérifie l'equation fonctionnelle

$$L(\mathcal{A}, 2-s) = \pm q^{(1-s)(n_{\mathcal{A}} - 2g\chi)} L(\mathcal{A}, s).$$

- $ord_{s=1} L(\mathcal{A}, s) \geqslant \mathrm{rang}\,\mathcal{A}(K)$.

Remarque 8.1. Contrairement au cas des corps de nombres (si on admet T-W), il se peut que $L(\mathcal{A}, s)$ ne soit pas holomorphe (l'exemple le plus simple est celui où $\mathcal{A}$ est l'extension des scalaires à K d'une variété abélienne sur $\mathbb{F}_q$). En effet, on a les isomorphismes de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-modules suivants:

$$H^0(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee) \simeq \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee \mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)},$$
$$H^2(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee) \simeq \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee_{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)};$$

d'après l'équation fonctionnelle, pour que $L(\mathcal{A}, s)$ soit une fonction holomorphe il faut et il suffit que $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee \mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)} = 0$, ce qui équivaut à

$$\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)} = 0$$

puisque toute polarisation de $\mathcal{A}$ induit un isomorphisme $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^\vee \simeq \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})$. Comme me l'a expliqué L. Moret-Bailly, la nullité de $\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)}$ s'interprète géométriquement et est équivalente au fait que la $\overline{\mathbb{F}}_q.K/\overline{\mathbb{F}}_q$-trace de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_q.K}$ est nulle (en d'autres termes $\mathcal{A} \times_K \overline{\mathbb{F}}_q.K$ n'admet pas de sous-variété abélienne constante à isogénie près). En effet, notons $\mathcal{A}_0$ la $\overline{\mathbb{F}}_q.K/\overline{\mathbb{F}}_q$-trace de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_q.K}$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{nc}}$ le quotient $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_q.K}/\mathcal{A}_0$, d'après le théorème de Néron-Lang $\mathcal{A}_{nc}(\overline{\mathbb{F}}_q.K)_{tors}$ est fini et par suite on a les égalités

$$\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_{nc})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)} = 0 \textit{ et } \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)} = \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_0).$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{A}$ est une courbe elliptique, $L(\mathcal{A}, s)$ est holomorphe si et seulement si son invariant j est non constant.

Les propriétés de $L(s, \mathcal{A})$ permettent d'obtenir la formule explicite suivante ([Br], Appendix):

Proposition 8.1. *Soit f le polynôme trigonométrique pair*

$$f(\theta) = c_0 + 2\sum_{d=1}^{Y} c_d \cos(d\theta),$$

on a

$$\sum_{\theta}^{(1)} f(\theta) = \quad c_0(n_{\mathcal{A}} - 2g\chi) - 2\sum_{m\geqslant 1,v} \frac{c_{md_v}d_v}{|v|^m}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^m, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee, I_{\overline{v}}})$$
$$-\sum_{\theta}^{(0)} f(\theta - \mathrm{i}\log q/2) - \sum_{\theta}^{(2)} f(\theta + \mathrm{i}\log q/2),$$

les sommes $\sum_{\theta}^{(j)} f(\theta + \mathrm{i}(j-1)\log q/2)$, $(j = 0,1,2)$ *portent sur ordonnées des zéros* s *de* $P_j(q^{-s})$ *écrits sous la forme* $s = 1/2 + j/2 + \mathrm{i}\theta/\log q$, $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Soit Y un entier $\geqslant 1$, on choisit, comme dans [Br], $c_d = 1 - d/Y$, et on pose

$$g_Y(z) = \sum_{d=1}^{Y}\big(1 - \frac{d}{Y}\big)z^d = \begin{cases} \dfrac{z^Y - 1}{Yz(1-z^{-1})^2} - \dfrac{1}{1-z^{-1}} & \textit{si } z \neq 1 \\ \frac{1}{2}(Y-1) & \textit{si } z = 1. \end{cases} \tag{8.1}$$

alors $f_Y(\theta) = 1 + g_Y(\mathrm{e}^{i\theta}) + g_Y(\mathrm{e}^{-i\theta}) = \dfrac{\sin^2(Y\theta/2)}{Y\sin^2(\theta/2)}$ est une fonction positive si θ est réel. On obtient donc pour cette fonction

$$Y\operatorname{rang}\mathcal{A}_K \leqslant n_{\mathcal{A}} - 2g\chi - 2\sum_{m\geqslant 1,v}\frac{c_{md_v}d_v}{|v|^m}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^m, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee, I_{\overline{v}}}) + O(\frac{gq^Y}{Y}). \tag{8.2}$$

où l'on a fait l'estimation triviale

$$\sum_{\theta}^{(0)} f_Y(\theta - \mathrm{i}\log q/2) + \sum_{\theta}^{(2)} f_Y(\theta + \mathrm{i}\log q/2) = O(\frac{gq^Y}{Y}).$$

Le Théorème des nombres premiers est remplacé par le lemme suivant de [Br] prop 6.3.

Lemme 8.2. *Soit* $\pi_K(d)$ *le nombre de places* v *de* K *de corps résiduel* $k_v \simeq \mathbb{F}_{q^d}$*, on a l'estimation*

$$\left|\pi_K(d) - \frac{q^d}{d}\right| = O((|\chi| + 1)q^{d/2}).$$

Ce dernier lemme et la majoration triviale

$$|\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^m, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee, I_{\overline{v}}})| \leqslant 2g|v|^{m/2} \tag{8.3}$$

permettent de majorer la contribution des $m \geqslant 3$ dans la formule explicite:

$$2\sum_{m\geqslant 3,v}\frac{c_{md_v}d_v}{|v|^m}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^m, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee, I_{\overline{v}}}) = O((|\chi| + 1)gq). \tag{8.4}$$

9. Majoration du rang en moyenne sur les corps de fonctions

A partir de maintenant et pour simplifier les arguments $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ est la droite projective. Soit $g \geqslant 1$ tel que $\operatorname{Car} \mathbb{F}_q > 2g+1$. Soit une surface $\mathcal{X}$ sur $K = \mathbb{F}_q(X)$ projective, lisse, géométriquement connexe telle que $b_1(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) = 0$ qui est munie d'un pinceau de Lefschetz de courbes de genre g défini sur K paramétré par $\mathbb{P}^1_K$.

On dispose d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places de K tel que la situation précédente a "bonne réduction" en toute place $v \notin \mathcal{S}$. Pour $t \in \mathbb{F}_q[X]$ tel que $P(t) \neq 0$ on note $\mathcal{A}_t$ la jacobienne de la courbe $\mathcal{X}_t$ correspondant au point de $\mathbb{P}^1(K)$ de coordonnées $(t,1)$; on notera $h(t) := \deg t$ ($h(t) = h((t,1))$ est la "hauteur logarithmique" du point $(t,1)$ de $\mathbb{P}^1_K$).

Enfin, on suppose que toutes les variétés abéliennes $\mathcal{A}_t$, $t \in \mathbb{P}^1_K(K)$ sauf un nombre fini ont leur $\overline{\mathbb{F}}_q.K/\overline{\mathbb{F}}_q$-trace nulle: en vertu de la remarque 8.1, leur fonction $L(s, \mathcal{A}_t)$ est alors holomorphe.

Sous ces hypothèses, on peut majorer le rang moyen dans une telle famille:

$$\frac{1}{C(T)} \sum_{\substack{h(t) \leqslant T \\ P(t) \neq 0}} \operatorname{rang} \mathcal{A}_t(K), \text{ où } C(T) = \sum_{h(t) \leqslant T} 1 = q^{T+1} \ (T \text{ entier}).$$

Plus précisément, la fin de cet article est consacrée à la preuve du:

Théorème 9.1. *Soit le corps $K := \mathbb{F}_q(X)$, soit un entier $g \geqslant 1$ tel que* $\operatorname{Car} \mathbb{F}_q > 2g+1$*; soit $\mathcal{X}$ une surface projective lisse, géométriquement connexe, sur K telle que $b_1(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) = 0$. Soit $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{P}^1_K}$ une famille de variétés abéliennes issue d'un pinceau de Lefschetz de $\mathcal{X}$ défini sur K, de dimension g. Supposons de plus que les points $t \in \mathbb{F}_q[X] (\subset \mathbb{P}^1(K))$ tels que la $\overline{\mathbb{F}}_q.K/\overline{\mathbb{F}}_q$-trace de $\mathcal{A}_t$ est non nulle soient de degré (ie. hauteur) borné (ces points sont donc en nombre fini). Alors on a pour T entier, $T \to \infty$*

$$\sum_{\substack{t \in \mathbb{F}_q[X] \ h(t) \leqslant T \\ P(t) \neq 0}} \operatorname{rang} \mathcal{A}_t(K) \leqslant (b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) + \delta + 4g + b + \delta' - d'_2 - 9/2 + o(1)) \mathcal{C}(T).$$

On désigne par δ le cardinal de Δ et par δ' (resp. d'_2), le nombre d'orbites sous l'action de $\operatorname{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)$ *de Δ (resp. de l'ensemble des fibres singulières du pinceau ayant deux composantes irréductibles). L'entier positif ou nul b est défini en (9.7) et vérifie $b \leqslant b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell)$ (on retrouve en particulier la majoration du Théorème 2.3).*

Remarque 9.1. Nous ne sommes pas parvenus à prouver dans le cas général, l'hypothèse selon laquelle les points $t \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q.K)$ tels que la $\overline{\mathbb{F}}_q.K/\overline{\mathbb{F}}_q$-trace de $\mathcal{A}_t$ est non nulle sont de hauteur bornée ; ceci dit, dans notre situation, le groupe de monodromie géométrique est aussi "gros" que possible et cette hypothèse parait très vraisemblable ; nous espérons revenir prochainement sur cette question. Notons cependant deux exemples où cette hypothèse est toujours vérifiée:

– Si $g = 1$, alors l'invariant de la famille $j(\mathrm{T}) \in K(\mathrm{T})$ n'est pas indépendant de T. Pour toute fraction $t(X) \in \overline{\mathbb{F}}_q(X)$ que l'on écrit sous la forme $t(X) = t_1(X)/t_2(X)$, $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{F}}_q[X]$, avec t_1 et t_2 premiers entre eux, l'invariant $j(t) = j(X, t(X))$ de $\mathcal{A}_t$ est non constant dès que $h(t) = \max\{\deg t_1, \deg t_2\}$ est assez grand.

Notre deuxième exemple est celui d'un pinceau de Lefschetz "constant" en X:

Exemple. — . Supposons que la surface $\mathcal{X}$ du Théorème 9.1 et le pinceau de Lefschetz qui l'accompagne soient tous deux définis sur le sous-corps $\mathbb{F}_q$ de K. La situation considérée est donc obtenue par extension des scalaires à K d'un pinceau de Lefschetz de $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{F}_q$ qu'on écrit

$(\mathcal{X}_x)_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}}$. Pour $t\in K$ la fibre en t, $\mathcal{X}_{K,t}$, du pinceau est la fibre générique de la famille de courbes

$$t^*(\mathcal{X}_x)_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}} = (\mathcal{X}_{t(x)})_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}}.$$

Ainsi, si t est non constant ($t\notin\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$), la représentation de monodromie attachée à la famille $(\mathcal{X}_{t(x)})_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}}$ est géométriquement irréductible de groupe de monodromie géométrique $Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$: en effet le fait que le morphisme $t:\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ est dominant et la théorie des pinceaux de Lefschetz impliquent que ce groupe de monodromie géométrique est un sous-groupe fermé d'indice fini de $Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$. On conclut car $Sp_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$ est connexe... En particulier, pour tout t non constant la fonction $L(s,\mathcal{A}_t)$ est holomorphe, ainsi les hypothèses du Théorème 9.1 sont vérifiées.

D'autre part, tout morphisme non constant $t\in\mathbb{P}^1(K)$ d'éfinit une extension algébrique finie de K de degré $h(t)$, donnée par l'équation $t(U)=X$ que l'on note K_t. Alors $\mathcal{A}_t$ peut être considérée comme l'extension des scalaires à K_t de la variété abélienne sur K, $\mathcal{A}_X$; on a donc la minoration

$$\operatorname{rang}\mathcal{A}_t(K) = \operatorname{rang}\mathcal{A}_X(K_t) \geqslant \operatorname{rang}\mathcal{A}_X(K),$$

et par le Théorème 9.1 on obtient l'encadrement

$$\operatorname{rang}\mathcal{A}_X(K) \leqslant \frac{1}{C(T)}\sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ t\notin S}} \operatorname{rang}\mathcal{A}_X(K_t) + o(1) \leqslant b_2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q},\ell)+4g+2\delta+b-d_2-9/2.$$

Ici b est la multiplicité de la valeur propre q de Frob_q agissant sur $H^2(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q},\mathbb{Q}_\ell)$ (conjecturalement b est le rang du groupe de Néron-Séveri de $\mathcal{X}_{\mathbb{F}_q}$), δ est le cardinal de $\Delta_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et d_2 est le nombre des fibres du pinceau $(\mathcal{X}_x)_{x\in\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}}$ qui ont deux composantes irréductibles.

Cette majoration montre donc que le rang de $\mathcal{A}_X(K')$ ne crot pas beaucoup quand K' parcourt les extensions de K de la forme K_t.

Preuve. — (du Théorème 9.1). Appliquant la formule explicite (8.2) et (8.4) à chacun des $\mathcal{A}_t$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned} Y\sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}}\operatorname{rang}\mathcal{A}_t(K) \leqslant\ & \sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} n_{\mathcal{A}_t}-4g\\ & -S_1(T)-S_2(T)\\ & +O(\frac{gq^Y}{Y})+O(gqC(T)).\end{aligned}\tag{9.1}$$

où l'on a noté comme précédemment

$$S_j(T) = 2\sum_v \frac{c_{jd_v}d_v}{|v|^j}\sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^j,\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee,I_{\overline{v}}}),\ \ j=1,2,$$

et où $O(\frac{gq^Y}{Y})$ est la contribution des pôles des fonctions $L(s,\mathcal{A}_t)$ qui ne sont pas holomorphes (par hypothèse, il n'y a qu'un nombre fini de tels t).

La contribution à $S_j(T)$ des places $v\in\mathcal{S}$ est majorée avec (8.3):

$$\sum_{v\in\mathcal{S}}\frac{c_{jd_v}d_v}{|v|^j}\sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v^j,\mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee,I_{\overline{v}}}) = O_{\mathcal{S}}(2gC(T)).$$

Choisissons $Y \leqslant T+1$. Pour chaque place $v \notin \mathcal{S}, |v| \leqslant Y \leqslant T+1$ dans $S_j(T)$, la somme en t se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v^j, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^{\vee, I_{\overline{v}}}) &= \sum_{\substack{h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0 (\mathrm{mod}\ v)}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v^j, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A})^{\vee}) + O(2g \deg_K P \frac{C(T)}{|v|^{1-j/2}})\\ &= \frac{C(T)}{|v|}\Big(\sum_{\substack{t\in k_v\\ \overline{P}(t)\neq 0}} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{k_v}^j, \mathbb{V}_\ell(\mathcal{A}_t)^{\vee}) + O(2g \deg_K P |v|^{j/2})\Big)\end{aligned}$$

Contrairement au cas $K = \mathbb{Q}$, il n'y a pas de sommes incomplètes: en effet, si $d_v \leqslant T+1$, l'ensemble des polynômes t de degré $\leqslant T$ se scinde en sous-ensembles de cardinal q^{T+1}/q^{d_v} correspondant aux q^{d_v} classes de congruences modulo v.

La somme $S_2(T)$ est évaluée avec (5.1), le Lemme 8.2 et l' égalité (8.1) qui permet de sauver un facteur 2 par rapport à la majoration $c_d \leqslant 1,\ d \leqslant Y$:

$$S_2(T) = C(T)Y(-1/2 + O(\frac{1}{Y})). \tag{9.2}$$

9.1. **Contribution de $S_1(T)$.** Pour $j = 1$, compte-tenu de (5.10) et du fait que $\mathcal{X}$ a bonne réduction en toute place $v \notin \mathcal{S}$, on a

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{k_v}, H^2(\mathcal{X}_{\overline{k}_v}, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v, H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

et on décompose la somme $S_1(T)$ à la manière de 6.2:

$$\begin{aligned} S_1(T) &= 2C(T)\sum_{v\notin\mathcal{S}} \frac{c_{d_v} d_v}{|v|^2} \quad \{-\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v, H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) + (d_{v,2}+2)|v| - \delta_v |v| \\ &\qquad + O(2g\deg_K P|v|^{1/2})\} \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{aligned}$$

L'évaluation de $S_1(T)$ est analogue à celle de la section 6.2. Le Lemme 8.2 et l'égalité (8.1) seront employés implicitement.

Notons d'abord la majoration

$$T_4 = O(2g \deg_K P.C(T)) \tag{9.3}$$

9.1.1. *Contribution de T_3.* On peut définir Δ par les racines d'un polynôme $Q(\mathrm{T})$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q[X]$ premiers entre eux et pour $v \notin \mathcal{S}$, δ_v est le nombre de racines distinctes dans k_v de $Q(\mathrm{T})$ (mod v). A la décomposition de $\Delta = \Delta_1 \cap \cdots \cap \Delta_{\delta'}$ suivant ses orbites sous l'action de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)$ correspond la factorisation de $Q(\mathrm{T}) = \prod_{i=1}^{\delta'} Q_i(\mathrm{T})$ en produit de polynômes irréductibles distincts à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q.K$. Pour évaluer le terme T_3, on applique à Q la proposition suivante qui est un analogue pour les corps de fonctions du théorème de Nagell (Proposition 6.2):

Proposition 9.2. *Soit $Q \in K[\mathrm{T}]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_q[X]$ premiers entre eux, qui se décompose dans $\overline{\mathbb{F}}_q.K$ en un produit de δ' polynômes irréductibles distincts. Pour toute place v de K, soit $\rho_Q(v)$ le nombre de racines distinctes de $P \pmod v$ dans k_v, alors on a*

$$\sum_{\substack{v \\ d_v=d}} \rho_Q(v) = \delta' \frac{q^d}{d} + O_Q(q^{d/2}).$$

Preuve. — L'équation en X et T, $Q(\mathrm{T}) = 0$ définit une courbe affine plane sur $\mathbb{F}_q$ qui a δ' composantes géométriquement irréductibles. Le nombre de points de $\mathcal{C}_Q$ à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^d}$ est égal à

$$|\mathcal{C}_Q(\mathbb{F}_{q^d})| = d \sum_{v, d_v=d} \rho_Q(v) + O(\sum_{\substack{d'|d \\ d'<d}} \sum_{v, d_v=d'} d' \deg_K Q) = d \sum_{v, d_v=d} \rho_Q(v) + O(\deg_K Q q^{d/2}).$$

D'autre part, pour d assez grand (tel que les composantes irréductibles de $\mathcal{C}_Q$ soient définies sur $\mathbb{F}_{q^d}$), le théorème de Weil pour les courbes (éventuellement avec singularités) fournit l' égalité

$$|\mathcal{C}_Q(\mathbb{F}_{q^d})| = \delta' q^d + O_Q(q^{d/2}).$$

□

On obtient alors

$$-T_3 = C(T)Y(\delta' + O(\frac{1}{Y})), \tag{9.4}$$

9.1.2. *Contribution de T_2.* On a l'inégalité

$$-T_2 \leqslant C(T)Y(-2 + O(\frac{1}{Y}))$$

On peut calculer, comme T_3 ci-dessus, un équivalent pour T_2:

$$T_2 = C(T)Y(2 + d_2' + O(\frac{1}{Y})), \tag{9.5}$$

où d_2' désigne le nombre d'orbites sous l'action de $\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)$ de l'ensemble des fibres singulières du pinceau ayant deux composantes irréductibles.

9.1.3. *Contribution de T_1.* A ce point, on obtiendrait la majoration analogue à (6.9)

$$-S_1(T) \leqslant C(T)Y\big(b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) + \delta' - (2 + d_2') + O(\frac{1}{Y})\big)$$

Dans le cas des corps de fonctions, on peut faire mieux en donnant un *équivalent* de

$$T_1 = -2C(T) \sum_v \frac{c_{d_v} d_v}{|v|^2} \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_v, H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

En effet $H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathcal{F}_\eta$ est la fibre générique d'un faisceau $\mathcal{F}$ lisse et pur de poids 2 sur l'ouvert $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} - \mathcal{S}$. Par la théorie de Grothendieck on sait que la fonction

$$L(s, H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \prod_{v \notin \mathcal{S}} \det(I - |v|^{-s} \mathrm{Frob}_v, H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))^{-1}$$

- est une fraction rationnelle qui s'écrit sous la forme

$$L(s,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))=\frac{P_1(q^{-s})}{P_0(q^{-s})P_2(q^{-s})}$$

avec $P_j(X)=\det(I-X\,\mathrm{Frob}_q,H^j_c(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q},\mathcal{F}))$.

- On a les isomorphismes de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$-modules:

$$H^0_c(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q},\mathcal{F})\simeq H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)}$$

$$H^2_c(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q},\mathcal{F})\simeq H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)_{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)}(-1).$$

ainsi, pour $j=0,2$ les zéros de $P_j(q^{-s})$ sont de la forme $s_j=1+j/2+\mathrm{i}\theta/\log q$ $\theta\in[-\pi,\pi[$.

- Par le théorème fondamental de Deligne [D2] 3.3.4, les zeros de $P_1(q^{-s})$ sont de la forme $s_1=1+i/2+\mathrm{i}\theta/\log q$ avec $i\leqslant 1$, $\theta\in[-\pi,\pi[$.

L'écriture de $L(s,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))$ sous la forme $P_1(q^{-s})/P_0(q^{-s})P_2(q^{-s})$ implique pour tout $n\geqslant 1$ l' égalité suivante (qui ne nécessite pas d'équation fonctionnelle):

$$-\sum_{s_2}q^{ns_2}q^{-2n}-\sum_{s_0}q^{ns_0}q^{-2n}+\sum_{s_1}q^{ns_1}q^{-2n}=-\sum_{\substack{m,v\\ md_v=n}}\frac{d_v}{|v|^{2m}}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v^m,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)),$$

qui se réécrit

$$-\sum_{s_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+O_{\mathcal{X}}(q^{-n/2})=-\sum_{\substack{v\\ d_v=n}}\frac{d_v}{|v|^{2m}}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))+O(b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\ell)).$$

ce qui donne, en sommant sur $1\leqslant n\leqslant Y$

$$\sum_{s_2}g_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+O_{\mathcal{X}}(1)=\sum_{v}\frac{c_{d_v}d_v}{|v|^2}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_v,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)).$$

d'après (8.1), si $\theta\neq 0$, $g_Y(\theta)=O(\theta^{-1})$ et $g_Y(0)=(Y-1)/2$. On a donc

$$T_1=-C(T)Yb+O_{\mathcal{X}}(C(T)\log Y). \tag{9.6}$$

L'entier b est la multiplicité de la racine q^{-2} du polynôme $P_2(X)$ ou, si on préfère, la multiplicité de la valeur propre q^2 de Frob_q agissant sur $H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)_{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)}(-1)$ (en particulier $b\leqslant b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\ell)$):

$$b=\mathrm{ord}_{s=2}L(s,H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))\geqslant\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\big\{H^2(\mathcal{X}_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)_{\mathrm{Gal}(K^{sep}/\overline{\mathbb{F}}_q.K)}(1)\big\}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}. \tag{9.7}$$

(cette dernière inégalité est une égalité si, selon une conjecture bien connue, l'action de Frob_q est semi-simple).

Réunissant (9.3), (9.4), (9.5), (9.6) on obtient l'égalité (comparer avec (6.9)),

$$-S_1(T)=C(T)Y\big(b+\delta'-(2+d_2')+O(\frac{1}{Y})\big) \tag{9.8}$$

9.2. **Contribution des conducteurs.** On applique les arguments de la section 6.4 pour majorer $n_{\mathcal{A}_t}$. Notons que d'après l'hypothèse Car $\mathbb{F}_q > 2g+1$, il n'y a pas de termes de ramification sauvage. Ainsi l'exposant du conducteur de $\mathcal{A}_t$ vaut 1 en toute place v qui n'est pas dans $\mathcal{S}$ et qui divise $P(t)$; il est majorée par $2g$ pour $v \in \mathcal{S}$ et vaut 0 dans les autres cas. On a donc

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{A}_t} = & \sum_{\substack{v \mid P(t) \\ v \notin \mathcal{S}}} d_v + O(2g \sum_{v \in \mathcal{S}} d_v) \\ & \leqslant \deg P.h(t) + O_{\mathcal{S}}(2g) \end{aligned} \tag{9.9}$$

Réunissant (9.1), (9.9), (9.8) et (9.2), et en prenant $Y = T$, on obtient le théorème 9.1.

□

9.3. **Quelques remarques.** Pour $t \in \mathbb{F}_q[X]$ on note $t^\natural$ son *noyau* (ie. le produit des facteurs v premiers distincts de t). Il n'est pas difficile de montrer que pour $T \to +\infty$, on a l'équivalence:

$$\frac{1}{C(T)} \sum_{t,\ h(t) \leqslant T} h(t^\natural) \simeq \frac{1}{C(T)} \sum_{t,\ h(t) \leqslant T} h(t) \simeq T.$$

c'est à dire que les $t \in \mathbb{F}_q[X]$ qui ont de grands facteurs premiers non simples sont "rares"). Plus généralement, l'hypothèse suivante ne semble pas déraisonnable:

Hypothèse 9.1. Soit $P(\mathrm{T})$ un polynôme séparable à coefficients dans $\mathbb{F}_q[X]$, alors quand $T \to +\infty$ on a l' équivalence

$$\frac{1}{C(T)} \sum_{\substack{t, P(t) \neq 0 \\ h(t) \leqslant T}} h(P(t)^\natural) \simeq \frac{1}{C(T)} \sum_{h(t) \leqslant T} h(P(t)) \simeq \deg_K P.T.$$

Signalons que cette hypothèse est vraie quand $P(\mathrm{T})$ est scindé dans $\mathbb{F}_q(X)$ et que plus généralement, comme l'a remarqué E. Fouvry, des arguments de crible hérités de la théorie analytique des nombres permettent de prouver la minoration

$$\frac{1}{C(T)} \sum_{\substack{t, P(t) \neq 0 \\ h(t) \leqslant T}} h(P(t)^\natural) \gg_{\deg_K P(\mathrm{T})} T.$$

Dans le cas qui nous occupe, compte-tenu de l' égalité $n_{\mathcal{A}_t} = h(P(t)^\natural) + O_{\mathcal{S}}(2g)$, la validité l'Hypothèse 9.1 pour $P(\mathrm{T})$ implique que la majoration (9.9) est la meilleure possible et donc que la partie droite de la formule explicite est extrèmement bien controlée "en moyenne": sous les hypothèses du théorème 9.1 et en admettant l'Hypothèse 9.1 on a l' égalité

$$\frac{1}{C(T)} \left\{ \sum_{\substack{h(t) \leqslant T \\ P(t) \neq 0}} \mathrm{rang}_{\mathrm{an}} \mathcal{A}_t + \frac{1}{T} \sum_{\substack{s_t \\ s_t \neq 1}} f_T(\theta_t) \right\} = (b_2(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \ell) + b + \delta' + \delta + 4g - d_2' - 9/2 + o(1))$$

où $s_t = 1 + i\theta_t / \log q$ parcourt l'ensemble des zéros de $L(s, \mathcal{A}_t)$, et $\mathrm{rang}_{\mathrm{an}} \mathcal{A}_t = \mathrm{ord}_{s=1} L(s, \mathcal{A}_t)$ désigne le rang analytique de $\mathcal{A}_t$. Ainsi la seule perte dans la majoration du rang analytique en moyenne proviendrais de la contribution des zéros de $L(s, \mathcal{A}_t)$ qui sont "proches" de 1.

Enfin, disons que le Théorème 2.1 doit sans doute s'étendre au cas des corps de fonctions au moins pour des familles de variétés abéliennes dont la monodromie est suffisament "irréductible", ceci pour assurer que pour tout t sauf un nombre fini $L(s, \mathcal{A}_t)$ est holomorphe. L'exemple le plus simple est celui d'une famille de courbes elliptiques dont l'invariant j vu comme élément de $\mathbb{F}_q(X,\mathrm{T})$ n'est pas constant en T: le groupe de monodromie géométrique est alors SL_2 (cf. [D2] 3.5.5). Ainsi, notre méthode permet de retrouver *inconditionnellement* le Théorème 1.3 de [Mic] dans le cadre des corps de fonctions:

Théorème 9.3. *Soient* $a_1(\mathrm{T}),\ a_2(\mathrm{T}),\ a_3(\mathrm{T}),\ a_4(\mathrm{T}),\ a_6(\mathrm{T})\ \in\ \mathbb{F}_q[X,\mathrm{T}]$ *cinq polynômes, et* $\mathcal{E}_t$ *le famille de courbes elliptiques sur* $\mathbb{F}_q(X)$ *d'équation*

$$y^3+a_1(t)xy+a_3(t)y=x^3+a_2(t)x^2+a_4(t)x+a_6(t).$$

Si $p=\mathrm{Car}\ \mathbb{F}_q>3$ *et si l'invariant* $j(X,\mathrm{T})\in\mathbb{F}_q(X,\mathrm{T})$ *de cette famille n'est pas indépendant de* T*, on a la majoration suivante pour* $T\to+\infty$*:*

$$\frac{1}{C(T)}\sum_{\substack{t\in\mathbb{F}_q[X]\ \ h(t)\leqslant T\\ P(t)\neq 0}}\mathrm{rang}\,\mathcal{E}_t(K)\leqslant \deg_K\Delta+c_\Delta+c'_\Delta-3/2+o(1),$$

où on a noté $\Delta\in K[\mathrm{T}]$ *le discriminant de la famille,*
c_Δ *est le nombre de racines distinctes de* Δ *dans* $\overline{K}$*,*
c'_Δ *est le nombre de racines* $t\in\overline{K}$ *de* Δ *telle que la fibre* $\mathcal{E}_t$ *est dégénérée de type additif.*

References

[B-L-R] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT et M. RAYNAUD. — *Neron models*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge Bd. 21 , Berlin Heidelberg New York: Springer 1990.

[Br] A. BRUMER. — *The average rank of elliptic curves I*, Invent.Math. 109, (1992) , 445-472.

[B-K] A. BRUMER, K. KRAMER. — *The conductor of an abelian variety* , Comp. Math. 92 (1994), 227-248.

[D1] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil I* , Publ.Math.IHES 43 (1974), 273-308.

[D2] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil II*, Publ.Math.IHES 52 (1981), 313-428.

[Fo] E. FOUVRY. — *Sur le comportement en moyenne du rang des courbes $y^2 = x^3 + k$,* in: Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 1990-91, pp.64-84. Basel: Birkauser. 1993.

[F-P] E. FOUVRY et J. POMYKALA. — *Rang des courbes elliptiques et sommes d'exponentielles,* Mh. Math. 116 (1993), 111-125.

[Gr] A. GROTHENDIECK. — *Modèles de Néron et Monodromie,* SGA 7 I, LNM 340, Berlin Heidelberg New York: Springer 1974, 313-523.

[H-B] D.R. HEATH-BROWN. — *The size of the Selmer groups for the congruent number problem,* Invent. Math. 111, 171-195 (1993).

[Hu] W. W. J. HULSBERGEN. — *Conjectures in Algebraic Geometry: a survey*, Aspects of Maths., Vol E18, Braunschweig; Wiesbaden : Vieweg 1992.

[Ka1] N.M. KATZ. — *Pinceaux de Lefschetz: Théorème d'existence,* SGA 7 II, LNM 340, Berlin Heidelberg New York: Springer 1974, 212-253.

[Ka2] N.M. KATZ. — *Etude cohomologique des pinceaux de Lefschetz,* SGA 7 II, LNM 340, Berlin Heidelberg New York: Springer 1974, 254-327.

[Ka3] N.M. KATZ. — *Sommes d'exponentielles,* Astérisque 79, Soc. Math. de France (1978).

[Ka4] N.M. KATZ. — *Monodromie of Families of Curves: application of some results of Davenport-Lewis,* in: Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, M.J. Bertin Edt., 1979-80, pp.64-84. Basel: Birkauser. 1981.

[Ka5] N.M. KATZ. — *Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups,* Annals of Maths. Studies 116, PUP.

[Ka6] N.M. KATZ. — *Exponential sums and differential equations,* Annals of Maths. Studies 124, PUP.

[Me] J.-F. MESTRE. — *Formules explicites et minorations de conducteurs de variétés algébriques,* Comp. Math. 58, (1986), 209-232.

[Mic] P. MICHEL. — *Rang moyen de famille de courbes elliptiques et lois de Sato-Tate.* Mh. Math. 120, (1995) 127-136.

[Mi1] J.S. MILNE. — *Etale Cohomology,* Princeton Math. Series, 33, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1980.

[Mi2] J.S. MILNE. — *Abelian Varieties,* in: Cornell G., Silverman, J. (eds.) Arithmetic Geometry, Berlin Heidelberg New York: Springer 1986, 103-150.

[Mi3] J.S. MILNE. — *Jacobian Varieties,* in: Cornell G., Silverman, J. (eds.) Arithmetic Geometry, Berlin Heidelberg New York: Springer 1986, 167-212.

[Sch] P. SCHNEIDER. — *Zur Vermutung von Birch and Swinnerton-Dyer ber globalen Funktionenkpern*, Math. Ann. 260, 495-510 (1982).

[Sel] A. SELBERG. — *Old and new conjectures for a certain class of Dirichlet series*, Proceedings of the Amalfi conference on Analytic Number Theory 1989, (Università di Salerno 1992).

[Ser] J.P. SERRE. — *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques , (définitions et conjectures),* Oeuvres, Vol 2, Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 1985, 581-592.

[S-T] J.P. SERRE and J. TATE. — *Good reduction of abelian varieties,* Ann. of Math., 88 (1968), 492-517.

[Ta] J. TATE. — *Algebraic cycles and poles of zeta functions,* In: Arithmetic Algebraic Geometry, ed. O.F.G Schilling, Harper & Row (1965), p. 93-111.

Université Paris-Sud, Bât. 425, Mathématiques,91405 Orsay

E-mail address: `michel@math.u-psud.fr`