Théorie de bifurcation et de stabilité pour une équation de Schrödinger avec une non-linéarité compacte

THÈSE N^{O} 4233 (2008)

PRÉSENTÉE LE 19 DÉCEMBRE 2008

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

CHAIRE D'ANALYSE

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

François GENOUD

acceptée sur proposition du jury:

Prof. C. Pfister, président du jury
Prof. C. Stuart, directeur de thèse
Prof. T. Cazenave, rapporteur
Prof. L. Jeanjean, rapporteur
Prof. T. Ratiu, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2008

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement Charles Stuart de m'avoir donner l'opportunité de me lancer dans cette belle aventure mathématique. Je ne saurais dire à quel point je lui suis reconnaissant, tant pour sa générosité humaine que pour ses hautes compétences pédagogiques et mathématiques. J'ai énormément bénéficié de son enthousiasme, de sa disponibilité et de la grande liberté qu'il m'a accordée. Il a aussi su me redonner confiance dans des périodes de doutes et c'est en partie grâce à lui que je suis maintenant décidé à poursuivre l'aventure et à entreprendre une carrière académique.

Ma reconnaissance va également aux experts, membres de mon jury de thèse, Thierry Cazenave, Louis Jeanjean et Tudor Ratiu, ainsi qu'au président du jury, Charles Pfister, pour leur lecture attentive et leurs questions et remarques pertinentes. Je remercie en particulier Louis Jeanjean qui a mis le doigt sur certaines lacunes dans mon travail et m'a ainsi permis de corriger et de compléter le présent rapport.

Il y a un peu plus de trois ans que j'ai intégré la Section de Mathématiques de l'EPFL, après avoir fait mes études en Physique, également à l'EPFL. Mais avant ça, ayant fait ma scolarité dans des domaines littéraires, je suis passé par le Cours de Mathématiques Spéciales (CMS) de l'EPFL, qui forme les personnes qui n'ont pas un niveau suffisant, en vue d'intégrer l'école. J'ai également passé une année en échange à l'ETH de Zürich pendant mes études. Ma formation a ainsi traversé quatre phases distinctes, au cours desquelles j'ai eu la chance de recevoir un enseignement d'une grande qualité. Je tiens donc aussi à remercier ceux que je considère aujourd'hui comme mes mentors.

Tout d'abord, au CMS, Olivier Woringer et Guido Burmeister, qui ont été mes premiers maîtres, respectivement de mathématiques et de physique. Quand je suis entré au CMS, je savais bien peu de choses dans ces deux domaines et je dois beaucoup à Olivier et à Guido, qui m'ont permis de commencer mes études à l'EPFL avec une base solide, et surtout, qui m'ont fait découvrir les joies des mathématiques.

Durant mes études en Physique, j'ai eu de nombreux enseignants de qualité et j'aimerais remercier en particulier Tudor Ratiu, qui a été mon maître d'analyse en première année et dont le cours (et les exercices !) est profondément gravé dans ma mémoire. Pour l'analyse, merci encore à Charles Stuart, grâce à qui j'ai découvert l'analyse complexe, qui est peut-être la plus belle théorie mathématique que l'on puisse enseigner à un niveau élémentaire. En ce qui concerne la physique, je dois beaucoup à Christian Gruber, qui était très exigeant et qui a su me montrer la beauté de l'interaction entre les mathématiques et la physique, introduisant d'ailleurs souvent dans ses cours des notions mathématiques que j'ignorais totalement ! J'ai découvert grâce à lui la mécanique quantique et la relativité générale et ces deux rencontres m'ont profondément bouleversé.

A Zürich, j'ai étudié l'analyse fonctionnelle avec Michael Struwe, dans un cours d'une élégance rare. C'est durant cette année passée à Zürich que mon idée d'aller plutôt en direction des mathématiques que de la physique s'est trouvée définitivement confirmée et je le dois en partie à Michael Struwe.

Je dois aussi énormément à Charles Pfister, qui a été mon superviseur durant mon travail de diplôme, et avec qui j'ai appris à avoir des exigences de rigueur élevées et à ne pas prendre pour argent comptant les textes scientifiques que je lis. C'est avec lui que j'ai fait mes premiers pas dans la recherche.

J'aimerais encore remercier mon collègue Gilles Évéquoz, pour les nombreuses heures passées ensemble à étudier dans le calme et pour toutes les discussions intéressantes que nous avons eues. Merci aussi à Boris Buffoni, dont j'ai été l'assistant pour le cours d'analyse fonctionnelle et avec qui j'ai eu des discussions fort intéressantes.

Ma plus grande gratitude va également à ma famille, et particulièrement à ma mère, Martine, pour son soutien, sa grande sagesse et son regard toujours si serein sur le monde, qui m'apportent beaucoup.

Malgré la distance, je suis resté très proche de mon ami physicien(-mathématicien !) Sven Bachmann, avec qui j'ai fait mes études. Cette amitié m'est très chère et nos innombrables conversations, scientifiques ou non scientifiques, sont pour moi inestimables. Je lui suis aussi très reconnaissant de me tenir au courant de ce qui se passe dans le monde de la physique théorique.

Finalement, merci à Jim, mon vieux frère, mon éternel ami, qui est toujours là.

Résumé

L'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\partial_t w + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0 \quad w = w(t,x) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ N \geq 2, \tag{1}$$

est étudiée, où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Le coefficient V fait l'objet de diverses hypothèses. En particulier, il est toujours supposé que $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Des situations où V est non-borné à l'origine sont envisagées, voire imposées. Une attention spéciale est portée au cas où V est radial.

La recherche de solutions sous la forme d'ondes stationnaires $w(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ conduit naturellement à l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2. \tag{2}$$

Les deux objectifs principaux de la thèse sont

(A) établir des résultats d'existence et de bifurcation pour (2),
(B) discuter la stabilité orbitale des ondes stationnaires de (1) correspondant aux solutions trouvées en (A).

Tout d'abord, au Chapitre 1, dans le cas où V est radial, une approche variationnelle montre l'existence d'états fondamentaux de (2). Une propriété de non-dégénérescence de ces solutions est démontrée, qui joue un rôle crucial dans les arguments de continuation du Chapitre 2.

La première partie du Chapitre 2 établit des résultats locaux d'existence et de bifurcation pour (2), sans hypothèse de symétrie sur V. Moyennant certaines conditions sur la puissance p et le coefficient V, deux branches de solutions sont obtenues, au voisinage de $\lambda = 0$ et au voisinage de $\lambda = +\infty$, qui sont de classe C^r si $V \in C^r(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, pour $r = 0, 1$. Ces résultats indépendants sont démontrés en imposant respectivement que $\lim_{|x|\to\infty} V(x)|x|^b = B > 0$ avec $b \in (0,2)$ et que $\lim_{x\to 0} V(x)|x|^a = A > 0$ avec $a \in (0,2)$. Le comportement asymptotique le long des branches de solutions est discuté en détail, en fonction de la valeur de p. La seconde partie du Chapitre 2 montre l'existence d'une branche globale de solutions de (2), dans le cas où V est radial. Sous certaines hypothèses, en particulier si $a \in (0, b]$, la branche globale "réunit" les deux branches locales obtenues dans la première partie.

Le Chapitre 3 traite de la stabilité des ondes stationnaires de (1) qui correspondent aux solutions de (2) trouvées dans la première partie du Chapitre 2. Il est expliqué en détail comment appliquer la théorie générale de stabilité à (1). Des résultats locaux de stabilité/instabilité sont démontrés, au voisinage de $\lambda = 0$ et au voisinage de $\lambda = +\infty$.

Mots clés : équations de Schrödinger non-linéaires, équations elliptiques semi-linéaires, bifurcation, stabilité orbitale.

Abstract

The nonlinear Schrödinger equation

$$i\partial_t w + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0 \quad w = w(t,x) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ N \geq 2, \tag{1}$$

is studied, with $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ and $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ an interval. The coefficient V is subject to various hypotheses. In particular, it is always assumed that $V(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$. Situations where V is unbounded at the origin are considered. A special attention is paid to the radial case.

Seeking solutions of (1) as standing waves $w(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ leads naturally to the semilinear elliptic equation

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2. \tag{2}$$

The main goals of the thesis are

(A) to establish existence and bifurcation results for (2),

(B) to discuss the orbital stability of the standing waves of (1) corresponding to the solutions found in (A).

First, in Chapter 1, in the case where V is radial, a variational approach shows the existence of ground states for (2). A non-degeneracy property of these solutions is proved, which plays a crucial role in the continuation arguments of Chapter 2.

The first part of Chapter 2 establishes local existence and bifurcation results for (2), without any symmetry assumption on V. Under certain hypotheses on the power p and the coefficient V, two branches of solutions are obtained, in a neighborhood of $\lambda = 0$ and in a neighborhood of $\lambda = +\infty$. The branches are of class C^r if $V \in C^r(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, for $r = 0, 1$. These independent results are proved by requiring respectively that $\lim_{|x|\to\infty} V(x)|x|^b = B > 0$ with $b \in (0,2)$ and that $\lim_{x\to 0} V(x)|x|^a = A > 0$ with $a \in (0,2)$. The asymptotic behaviour along the branches is discussed in detail and depends on the value of p. The second part of Chapter 2 proves the existence of a global branch of solutions of (2), in the case where V is radial. Under appropriate hypotheses, in particular if $a \in (0, b]$, the global branch "sticks together" the two local branches obtained in the first part.

Chapter 3 is concerned with the orbital stability of the standing waves of (1) corresponding to the solutions of (2) found in the first part of Chapiter 2. It is explained in detail how to apply the general theory of orbital stability to (1). Local stability/instability results are proved, in a neighborhood of $\lambda = 0$ and in a neighborhood of $\lambda = +\infty$.

Key words : nonlinear Schrödinger equations, semilinear elliptic equations, bifurcation, orbital stability.

Table des matières

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques aspects de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\partial_t w + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0 \quad w = w(t,x) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ N \geq 2, \tag{NLS}$$

où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Δ désigne ici le laplacien par rapport à la variable d'espace, $x \in \mathbb{R}^N$. Nous ferons diverses hypothèses sur la puissance p et sur le coefficient V selon les résultats à démontrer. Typiquement, pour assurer l'existence de solutions, nous supposerons toujours que p est borné supérieurement par une quantité qui dépend de V, c.f. l'hypothèse (H2) du Chapitre 1. La fonction V pourra être non-bornée à l'origine, ce qui entraîne des difficultés techniques importantes, mais nous supposerons toujours que $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, c.f. (H2). Comme il apparaîtra clairement par la suite, c'est cette dernière hypothèse qui justifie le terme 'non-linéarité compacte'.

Nous nous intéresserons spécialement à l'existence et aux propriétés des solutions particulières de (NLS) que sont les ondes stationnaires. Une onde stationnaire est une fonction de la forme $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$, où nous supposons que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}^N$, est à valeurs réelles. Une telle fonction est solution de (NLS) si et seulement si la fonction u satisfait l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2. \tag{E_λ}$$

Les solutions des équations (NLS) et (E_λ) seront pour nous des solutions faibles, ces notions étant précisées respectivement dans les Définitions 3.0.1 et 1.1.3. Il existe une abondante littérature concernant les équations de Schrödinger semi-linéaires de la forme générale

$$i\partial_t w + \Delta w + f(x,w) = 0 \tag{NLSG}$$

et il serait par trop ambitieux de vouloir en faire une présentation exhaustive. Nous nous concentrerons donc dans cette introduction sur certaines questions traitées dans le présent rapport et nous tenterons de les situer au mieux dans la littérature existante. L'équation (NLSG) intervient dans la modélisation de nombreux systèmes physiques dans des domaines aussi variés que la physique des plasmas, la physique des gaz froids et l'optique non-linéaire. Néanmoins, nous n'entrerons pas sur le terrain des applications dans ce travail. Nous notons tout de même en passant qu'en dimension $N = 1$, des méthodes dans le même esprit que celles présentées ici permettent de donner des conditions générales garantissant l'existence et la stabilité d'ondes stationnaires pour une équation du type (NLS), dans le contexte des guides d'ondes planaires en optique non-linéaire, c.f. [47, 48]. Ces résultats seront présentés dans un prochain travail [15].

Avant de résumer les résultats consignés dans ce rapport, laissez-nous brièvement inscrire notre travail dans une perspective historique.

Héritage historique

Les théorèmes principaux que nous établissons dans cette thèse sont des résultats d'existence, de bifurcation et de stabilité d'ondes stationnaires pour (NLS). Des recherches mathématiques rigoureuses sur ces questions pour des équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non-linéaires ont commencé à la fin des années 70. Le problème de l'existence de solutions stationnaires pour ces équations est ramené à celui de l'existence de solutions d'une équation elliptique non-linéaire de la forme

$$\Delta u + g(x, u) = 0 \tag{1}$$

((E_λ) dans le contexte de (NLS)). Sur cette question, on retiendra en particulier les travaux précurseurs de Strauss [37], de Stuart [42] et de Berestycki et Lions [4], dans lesquels les auteurs utilisent des méthodes de minimisation sous contrainte dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. L'originalité de ces travaux réside en ce que les techniques utilisées permettent de prouver l'existence de solutions pour (1) sur tout l'espace $\mathbb{R}^N$, sous des conditions assez générales sur la non-linéarité g et pour des dimensions $N > 1$. Le défi majeur consistait alors à adapter les méthodes variationnelles qui avaient depuis longtemps fait leurs preuves pour des équations définies sur des domaines bornés réguliers de $\mathbb{R}^N$, le problème principal étant, lorsque l'on travaille sur tout l'espace, de palier la perte de compacité dans les injections de Sobolev. Une méthode à la fois efficace et élégante pour combler ce manque de compacité fut introduite par Strauss [37], qui consiste à utiliser des suites de fonctions à symétrie sphérique comme suites minimisantes. Nous faisons l'usage de ce genre d'arguments dans la Section 1, où nous prouvons l'existence d'un état fondamental pour l'équation (E_λ), pour tout $\lambda > 0$. Le travail de Strauss [37] concerne essentiellement des équations autonomes avec des non-linéarités de la forme $g(x, u) = |u|^{p-1}u - \alpha|u|^{q-1}u,\ \alpha \geq 0$. Dans [4], Berestycki et Lions ont considérablement généralisé le type de non-linéarités g pouvant être traitées par la méthode variationnelle. Cependant, ils ne considèrent également que des non-linéarités autonomes, i.e. $g(x, u) = g(u)$. L'article [42] de Stuart s'inscrit dans une série de travaux novateurs [38, 26, 40, 41] qui mettent en évidence des phénomènes de bifurcation pour des équations elliptiques non-linéaires à partir d'un point du spectre essentiel de l'opérateur linéarisé. Plus précisément, des équations de la forme

$$Su - F(u) = \lambda u \tag{2}$$

sont considérées dans [42], où S est un opérateur auto-adjoint agissant dans un espace fonctionnel approprié (typiquement $S = \Delta$ agissant dans $H^1(\mathbb{R}^N)$), $F(0) = 0$ et F est sur-linéaire à l'origine. On s'intéresse alors à la bifurcation à partir de points λ pour lesquels $S - \lambda I$ n'est pas un opérateur de Fredholm. C'est le cas si λ est un point du spectre essentiel de S. La bifurcation à partir d'un point du spectre essentiel ne peut être démontrée en utilisant la théorie standard de bifurcation via la méthode de réduction de Liapounov-Schmidt car l'opérateur $S - \lambda I$ est typiquement injectif et pas surjectif. La méthode mise en oeuvre dans [42] consiste alors à établir l'existence de solutions de (2) par des arguments de minimisation sous contrainte du même genre que ceux mentionnés ci-dessus, puis à établir des relations entre certaines normes des solutions ainsi obtenues et le paramètre λ afin de prouver la bifurcation dans les normes en question. Les résultats obtenus dans [42] concernent le problème de Dirichlet associé à des équations *non-autonomes* du genre de (E_λ). Sous des hypothèses appropriées, ils sont obtenus dans les cas où la fonction V est bornée sur $\mathbb{R}^N$ et, soit tend vers zéro à l'infini, soit est radiale. Ces deux dernières hypothèses permettent chacune de récupérer de la compacité, assurant par là la convergence des suites minimisantes. La méthode a été considérablement améliorée dans [45], qui ne suppose plus que V tend vers zéro à l'infini, ni de symétrie particulière. Cependant, il est toujours supposé que V est borné alors que nous prouvons ici un résultat de bifurcation depuis l'infimum du spectre essentiel dans des situations où V n'est pas borné à l'origine. Nous obtenons au Chapitre 1 l'existence de solutions par minimisation sous contrainte sous l'hypothèse que V est radiale. En revanche, au Chapitre 2, nous obtenons des résultats de bifurcation locale sans hypothèse de symétrie sur la fonction V. Nous obtenons en fait bifurcation le long de branches (au moins) continues de solutions dans $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$, ce qui diffère des résultats purement variationnels mentionnés ci-dessus. Des résultats du même genre on été établis dans [44, 31, 46] et, plus récemment, dans [1, 2]. Nous verrons que le cas où les branches de solutions sont de classe C^1 permet de discuter la stabilité des ondes stationnaires à l'aide d'un critère simple.

A cette époque de travail intensif sur les problèmes elliptiques semi-linéaires est finalement apparue la méthode la plus aboutie permettant de palier le manque de compacité dans les problèmes variationnels, à savoir la méthode de concentration-compacité de P.-L. Lions [28, 29]. Parmi ses nombreuses applications, cette technique a notamment contribué à établir certains des premiers résultats rigoureux concernant la stabilité orbitale des ondes stationnaires pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non-linéaires, voir l'article célèbre de Cazenave et Lions [8]. On retiendra aussi les résultats d'instabilité par 'blow-up' de Berestycki et Cazenave [3] et de Berestycki et Lions [5], également démontrés par des arguments variationnels. On consultera avec profit [7, 27] pour un regard plus récent sur ces travaux. Signalons encore la référence [20] pour un travail récent dans le même esprit, où des équations de Schrödinger asymptotiquement périodiques sont étudiées. En parallèle de l'école française, un travail important a été entrepris par d'autres auteurs à la même époque sur la question de la stabilité pour des problèmes similaires, voir par exemple [35, 36]. Ces derniers travaux ont finalement abouti à une théorie générale de la stabilité orbitale pour des systèmes hamiltoniens [17] et nous expliquons en détail à la Section 3.2 comment appliquer cette théorie à la situation qui nous intéresse. La notion de stabilité orbitale est rappelée au Chapitre 3, c.f. Définition 3.0.2. Il existe de nombreuses notions de stabilité différentes, dépendant du type d'équations considéré. L'idée générale est que, plus le système admet de symétries, plus la notion de stabilité qui convient est faible. Grillakis, Shatah et Strauss traitent d'ailleurs de groupes de symétrie assez généraux dans la seconde partie de leur théorie de stabilité [18]. Dans notre cas, nous observons que si w est une solution de (NLS), alors $e^{i\theta}w$ est aussi une solution, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation est invariante par rapport à l'action du groupe $\{e^{i\theta}\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ sur l'ensemble des solutions et la notion de stabilité qui convient est ici celle de la Définition 3.0.2. La situation où V est constant, i.e. où l'équation est autonome en espace, présente une symétrie supplémentaire, l'invariance par les translations de $\mathbb{R}^N$. La notion de stabilité adaptée est alors celle considérée dans [8]. Notons finalement que, même sans symétrie supplémentaire, il est possible de considérer des notions de stabilité plus faibles. Voir par exemple le Théorème 1.2 de [11] pour un résultat dans cette direction.

Résultats récents

Notre travail sur (NLS) a été stimulé par deux contributions récentes [6, 23], qui établissent des résultats d'existence et de stabilité d'ondes stationnaires sous des hypothèses analogues aux nôtres. Dans [6], De Bouard et Fukuizumi considèrent (NLS) pour $N \geq 3$ avec les hypothèses suivantes, où $b \in (0, 2)$ et $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$:

(A1) $V \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ avec $V \geq 0$ mais $V \not\equiv 0$ et $V \in L^\theta(|x| \leq 1)$ avec $\theta = \frac{2N}{(N+2)-(N-2)p}$.

(A2) Il existe $C > 0$ et $a > \frac{(N+2)-(N-2)p}{2} > b$ tel que $\left|V(x) - |x|^{-b}\right| \leq C|x|^{-a}$ pour $|x| \geq 1$.

Sous ces hypothèses, il a été montré dans [10] que, pour tout $\lambda > 0$, (E_λ) possède une solution $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. (Notez que le travail sur la stabilité orbitale pour (NLS) avec des hypothèses du genre de (A1)-(A2) a commencé dans [10], où un résultat d'instabilité est prouvé.) Il est démontré dans [6] que, pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, l'onde stationnaire correspondante, $e^{i\lambda t}u_\lambda$, est orbitalement stable si $p < 1 + \frac{4-2b}{N}$.

Ces résultats ont ensuite été étendus et améliorés dans [23] par Jeanjean et Le Coz. A la place de (A1) et (A2), ils font les hypothèses plus faibles suivantes :

(B1) $V \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pour un $\gamma > \frac{2N}{(N+2)-(N-2)p}$.

(B2) Il existe $b \in (0,2)$ tel que $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)|x|^b = 1$.

Ils supposent encore $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$. Il faut noter que Jeanjean et Le Coz considèrent en fait (NLSG) avec une non-linéarité plus générale $f(x,s) = V(x)g(s)$ que le cas $g(s) = |s|^{p-1}s$, et ils supposent alors, en plus de (B1) et (B2), que $g(e^{i\theta}s) = e^{i\theta}g(s)$ pour tout $\theta, s \in \mathbb{R}$ et que

$$g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g(0) = 0,\ \lim_{s\to 0^+} \frac{g'(s)}{ps^{p-1}} = 1 \text{ et } \lim_{s\to\infty} \frac{|g'(s)|}{s^{\alpha}} < \infty \text{ pour un } \alpha \in (0, \tfrac{4}{N-2}).$$

Nous mentionnons plus loin un travail, qui ne sera pas présenté dans ce rapport, dans lequel nous recouvrons essentiellement le cas considéré par Jeanjean et Le Coz et qui traite même de non-linéarités un peu plus générales. Sous les hypothèses ci-dessus, il est démontré dans [23] que, pour $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, il existe une solution $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ de

$$\Delta u - \lambda u + V(x)g(u) = 0,$$

que l'on a

$$\|u_\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{et} \quad |u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{lorsque } \lambda \to 0,$$

et que l'onde stationnaire associée à u_λ est orbitalement stable.

Les approches utilisées dans [6] et dans [23] sont similaires. Tout d'abord, l'existence de solutions est établie par des arguments variationnels : minimisation sur la variété de Nehari dans [6] et une version du théorème du col dans [23]. Ensuite, la stabilité orbitale est démontrée en utilisant un critère qui peut être déduit de l'analyse très générale présentée dans [17]. Ce critère (c.f. la Proposition 3 de [23]), qui est discuté en détail dans la Section 3 de [50], convient bien aux situations où l'on ne sait pas si les solutions u_λ sont dérivables par rapport à λ. C'est typiquement le cas lorsque les solutions sont obtenues par une approche variationnelle. Si l'application $\lambda \mapsto u_\lambda$ est dérivable, la stabilité peut être déduite d'un critère souvent plus simple à vérifier, la *condition de pente*, dont nous parlerons plus loin. La vérification du critère de stabilité dans [6] et [23] présente des difficultés techniques importantes et peut être résumée comme suit. Tout d'abord, il est démontré qu'après un changement de variables (similaire au changements de variables que nous utilisons dans la Section 2.1), les solutions u_λ convergent, lorsque $\lambda \to 0$, vers l'unique solution positive et radiale $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de

$$\Delta u - u + |x|^{-b}|u|^{p-1}u = 0, \tag{3}$$

l'unicité étant assurée, en dimension $N \geq 3$, par un théorème de Yanagida (c.f. Section 1.3). Il est ensuite montré que cette solution est non-dégénérée, dans le sens que $v = 0$ est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ de

$$\Delta v - v + p|x|^{-b}\psi^{p-1}v = 0.$$

Cette propriété de non-dégénérescence permet alors de montrer que le critère de stabilité est vérifié dans les nouvelles variables, dans la limite $\lambda \to 0$, et par suite, pour tout $\lambda > 0$ assez petit. La partie la plus difficile consiste à prouver la non-dégénérescence de la solution ψ de (3) et, pour ce faire, les auteurs de [6] et [23] utilisent des équations auxiliaires satisfaites par ψ et le théorème d'unicité de Yanagida.

Nous allons maintenant donner une description détaillée du contenu de la thèse, tout en situant nos résultats par rapport à ceux de [6, 23].

Contenu de la thèse

Dans la suite de cette introduction, nous ferons référence aux hypothèses (H0) à (H8), qui sont formulées au début des Chapitres 1 et 2.

Les résultats des deux premiers chapitres ne concernent que l'équation stationnaire (E_λ). Néanmoins, comme nous verrons au Chapitre 3, la stabilité orbitale des ondes stationnaires repose essentiellement sur les propriétés de l'équation stationnaire.

Dans le Chapitre 1, nous prouvons l'existence pour tout $\lambda > 0$ d'un *état fondamental* de (E_λ), c.f. Théorème 1.1.8. Pour nous, un état fondamental est une solution faible qui minimise la fonctionnelle dont (E_λ) est l'équation d'Euler-Lagrange, sur la variété de Nehari dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, c.f. Définition 1.1.4. La méthode de minimisation sous contrainte que nous employons est fortement inspirée de [45] (voir aussi [43]) et remonte à Nehari [33]. Pour obtenir ce résultat d'existence en dimension $N \geq 2$, nous formulons des hypothèses assez fortes sur le coefficient V. Nous supposons que $V \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ est une fonction radiale telle que $V(r) = V(x) > 0$ est décroissante en $r > 0$ et qu'il existe $k \in (0, 2)$ tel que $|x|^k V(x)$ est borné sur $\mathbb{R}^N$. En particulier, V tend vers zéro à l'infini. Nous supposons également que $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$. Nous obtenons alors des solutions positives, radiales et radialement décroissantes. La suite du Chapitre 1 est consacrée à l'étude de certaines propriétés des états fondamentaux de (E_λ). Par la Proposition 1.1.10, ces solutions sont radiales et nous ferons donc largement recours à des équations différentielles ordinaires. La Section 1.2 traite de la *régularité* des états fondamentaux, sous les mêmes hypothèses qu'au Chapitre 1. Le Théorème 1.2.7 résume ces propriétés. Dans la Section 1.3, nous supposons que $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ et nous faisons de plus l'hypothèse (H4), qui stipule que $rV'(r)/V(r) < 0$ est une fonction décroissante. Nous prouvons alors, grâce au théorème de Yanagida mentionné ci-dessus, un résultat d'*unicité* (c.f. 1.3.2) des états fondamentaux de (E_λ), valable en dimension $N \geq 3$. Finalement, dans la Section 1.4, nous montrons que, sous les mêmes hypothèses supplémentaires mais en toute dimension $N \geq 2$, les états fondamentaux sont des solutions non-dégénérées de (E_λ) (c.f. 1.4.10), au sens de la Définition 1.4.2. Le résultat de *non-dégénérescence* est un élément essentiel dans la théorie de bifurcation développée au Chapitre 2.

Les résultats de ce premier chapitre sont obtenus sous des hypothèses assez fortes et sont appliqués dans le Chapitre 2 aux équations auxiliaires qui interviennent dans la théorie de bifurcation locale et qui apparaissent comme des cas particulier de (E_λ), ainsi qu'à l'équation (E_λ) elle-même dans la théorie globale, qui nécessite des hypothèses plus restrictives.

Le Chapitre 2 présente des résultats de *bifurcation locale* dans la Section 2.1 et un résultat de *continuation globale* dans la Section 2.2. Nous travaillons en dimension $N \geq 2$ pour la théorie locale mais la continuation globale utilise de façon essentielle le résultat d'unicité 1.3.2, qui n'est valable qu'en dimension $N \geq 3$. *De plus, dans la Section 2.1, nous ne faisons pas d'hypothèse de symétrie sur la fonction V. Dans la Section 2.2, V est supposée positive, radiale et radialement décroissante.* La théorie locale établit l'existence dans $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ d'une branche de solutions de (E_λ) de la forme

$$\{(\lambda, u_\lambda) : 0 < \lambda < \lambda_0\} \subset \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \tag{4}$$

(c.f. Théorème 2.1.10) et d'une branche de solutions de la forme

$$\{(\lambda, u_\lambda) : \lambda^\infty < \lambda < \infty\} \subset \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \tag{5}$$

(c.f. Théorème 2.1.11). Commençons par discuter les résultats au voisinage de $\lambda = 0$. Nous obtenons une branche continue de la forme (4) sous les hypothèses (H0) et (H5). Si, de plus, (H1) et (H6) sont vérifiées, la branche est de classe C^1. Les hypothèses (Hr), $r = 0, 1$, stipulent simplement que

$V \in C^r(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. L'hypothèse (H5) prescrit le comportment de V à l'infini, de façon analogue à l'hypothèse (B2) ci-dessus, et, avec (H0), remplace les hypothèses d'intégrabilité locale (A1)/(B1). On pourrait certainement se contenter de telles hypothèses mais l'analyse est déjà assez technique sous notre hypothèse plus forte, qui stipule que $V(x)|x|^b$ est borné à l'origine. Dans le cas C^1, l'hypothèse (H6) contrôle le comportement asymptotique du gradient de V. Nous obtenons la branche (4) pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$ et le Théorème 2.1.10 montre que différents scénarios de bifurcation se présentent suivant les valeurs de p. Notre résultat englobe le résultat de bifurcation de Jeanjean et Le Coz, si ce n'est que nous travaillons sous des hypothèses plus fortes. De fait, les restrictions concernant la régularité de V sont nécessaires pour obtenir une branche de solutions ayant la même régularité. La méthode que nous employons pour démontrer le Théorème 2.1.10 utilise deux ingrédients essentiels, un argument de perturbation et un argument de continuation. Tout d'abord, nous effectuons dans (E_λ) le changement de variable (2.6) qui conduit à l'équation auxiliaire

$$\Delta v - v + \mu^{-b} V(x/\mu)|v|^{p-1} v = 0, \qquad (\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$$

où le paramètre λ a été remplacé par le nouveau paramètre $\mu = \sqrt{\lambda}$. Utilisant le fait que $V(x)|x|^b \to B > 0$ lorsque $|x| \to \infty$ (hypothèse (H5)), un passage à la limite $\mu \to 0$ dans ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) conduit formellement à l'équation limite

$$\Delta v - v + B|x|^{-b}|v|^{p-1} v = 0, \qquad (\widetilde{\mathrm{E}}_0)$$

qui correspond précisément à (3) si $B = 1$. A ce stade, notre démarche procède en un certain sens à l'inverse de ce qui est fait dans [6] et [23]. Par perturbation de l'équation limite ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$), en utilisant une version du théorème des fonctions implicites, nous produisons dans $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ une branche de solutions $(\mu, v(\mu))$ de ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$), pour $\mu \geq 0$ assez petit (c.f. 2.1.6). On obtient alors le Théorème 2.1.10 en revenant aux variables initiales. L'intérêt du changement de variable est qu'il nous place dans une situation où le théorème des fonctions implicites peut effectivement être appliqué, alors que dans les variables initiales, des phénomènes de bifurcation ont lieu. Les résultats du Chapitre 1 assurent l'existence d'un état fondamental non-dégénéré $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ de l'équation limite ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$). C'est cette propriété de non-dégénérescence qui permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites à une fonction appropriée au point $(0, \psi) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Par construction, nous avons alors que $v(\mu) \to v(0) = \psi$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\mu \to 0$. Utilisant les propriétés du changement de variables (2.6), nous obtenons alors le comportement précis des quantités $|u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, $|\nabla u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et $|u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, le long de la branche (4), lorsque $\lambda \to 0$, ce qui permet de discuter des résultats de bifurcation/bifurcation asymptotique en fonction de la valeur de la puissance p. Nous obtenons en particulier que

$|u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$, pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$ et

$|\nabla u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$, pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$, alors que

$|u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0/\infty$ lorsque $\lambda \to 0$, selon que $p < 1 + \frac{4-2b}{N}/p > 1 + \frac{4-2b}{N}$.

Nous verrons que ces résultats sont cohérents avec la vérification de la condition de pente et que, pour $\lambda > 0$ assez petit, nous avons précisément stabilité/instabilité de l'onde stationnaire associée à u_λ selon que $p < 1 + \frac{4-2b}{N}/p > 1 + \frac{4-2b}{N}$.

Les résultats d'existence et de bifurcation au voisinage de $\lambda = +\infty$ contenus dans le Théorème 2.1.11 sont obtenus de façon tout à fait similaire, en utilisant cette fois le changement de variable (2.8) et le problème auxiliaire ($\mathrm{E'}_\tau$). Puisque les deux situations présentent des analogies structurelles très fortes, nous sommes en mesure de donner un traitement unifié des deux problèmes dans la Section 2.1.1. Le Théorème 2.1.11 donne précisément le comportement des normes

$|u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, $|\nabla u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et $|u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, le long de la branche (5), lorsque $\lambda \to \infty$. En particulier, nous avons que

$|\nabla u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ lorsque $\lambda \to \infty$, pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$, que

$|u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \infty/0$ lorsque $\lambda \to \infty$, selon que $p < 1 + \frac{4-2a}{N}/p > 1 + \frac{4-2a}{N}$ et que

$|u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ lorsque $\lambda \to \infty$, si $N = 2$ ou si $N \in \{3, 4, 5\}$, $a < 3 - N/2$ et $1 < p < \frac{4-2a}{N-2}$.

Pour certaines valeurs des paramètres, nous observons donc un phénomène de concentration des solutions lorsque $\lambda \to \infty$, dans le sens que $|u_\lambda|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ alors que $|u_\lambda|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Ce phénomène est discuté plus en détail aux points 2.1.12 et 2.1.15.

Remarquons que le Théorème 2.1.11, qui concerne la bifurcation au voisinage de $\lambda = +\infty$ est totalement indépendant du Théorème 2.1.10. Il est établi sous les hypothèses (H7) et (H8), qui prescrivent le comportement de V à l'origine, alors que le Théorème 2.1.10 utilise les hypothèses (H5) et (H6), qui prescrivent le comportement de V à l'infini. C'est seulement à la Section 2.2 que nous ferons ces hypothèses simultanément, de sorte que la branche globale de solutions donnée par le Théorème 2.2.10 réunira les deux branches locales (4) et (5).

Remarquons également que le Théorème 2.1.10 présente un phénomène de bifurcation du spectre essentiel car la valeur $\lambda = 0$ est précisément l'infimum du spectre essentiel du laplacien, vu comme un opérateur non-borné agissant dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Les résultats concernant la branche (4) ont été publiés dans [11] et ceux concernant la branche (5) font l'objet de l'article [14].

La méthode de perturbation/continuation utilisée à la Section 2.1 a pour origine l'article [44] de Stuart, où un problème elliptique semi-linéaire sur la demie-droite est étudié. La mise en oeuvre de ce programme en dimension supérieure présente des difficultés importantes. La partie la plus difficile est de démontrer la non-dégénérescence des solutions des équations limites, ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$) dans la limite $\lambda \to 0$, (E'$_0$) dans la limite $\lambda \to \infty$. Notez que ces équations sont radiales, même si le problème de départ ne l'est pas. Grâce à cela, la démonstration de la non-dégénérescence fait essentiellement appel à la théorie des équations différentielles ordinaires. Dans la situation à une dimension considérée dans [44], cette propriété peut être prouvée par des arguments élémentaires. En revanche, en dimension supérieure, la présence d'un terme d'ordre 1 dans les équations radiales complique beaucoup la situation et nous devons recourir à des techniques plus sophistiquées, notamment la théorie spectrale pour des opérateurs différentiels ordinaires.

La théorie globale présentée à la Section 2.2 utilise aussi en partie des idées développées dans [44]. La démonstration du théorème de continuation globale 2.2.10 est essentiellement inspirée de la démonstration du Théorème 2 de [44]. L'idée centrale est de montrer, par une application itérée du théorème des fonctions implicites, que la branche de solutions (4) amorcée par le Théorème 2.1.10 sous les hypothèses (H5) et (H6) peut être prolongée en une branche globale

$$\{(\lambda, u_\lambda) : 0 < \lambda < \infty\} \subset \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N). \tag{6}$$

Pour ce faire, nous travaillons sous des hypothèses plus fortes qu'à la Section 2.1. Nous supposons dans un premier temps que les hypothèses (H1), (H5) et (H6) sont vérifiées, qui assurent l'existence d'une branche de classe C^1, de la forme (4). Nous faisons aussi l'hypothèse (H3) qui garantit l'existence d'états fondamentaux de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$. Cette hypothèse stipule que V est positive, radiale et radialement strictement décroissante. Nous supposons aussi que $N \geq 3$, ce qui permet d'utiliser le résultat d'unicité 1.3.2, si l'hypothèse supplémentaire (H4) est satisfaite. Il est intéressant de remarquer que l'hypothèse (H4) intervient de façon naturelle dans les démonstrations de l'unicité et de la non-dégénérescence de l'état fondamental de (E_λ), qui sont deux éléments essentiels à la preuve du Théorème 2.2.10. En ce sens, nous avons le sentiment qu'elle est "presque nécessaire" pour obtenir la continuation globale avec notre méthode.

Pour prolonger la branche (4), nous montrons dans la Section 2.2.2 qu'il existe $\widetilde{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tel que, pour tout $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$, u_λ est un état fondamental de (E_λ). Nous obtenons en fait une correspondance biunivoque entre les solutions sur la branche, pour $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$, et les états fondamentaux positifs. Ceci implique en particulier l'unicité locale des états fondamentaux positifs. Ce résultat est obtenu sans l'hypothèse supplémentaire (H4). En revanche, nous utilisons de façon cruciale l'unicité de la solution de l'équation limite $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$ qui, elle, satisfait (H4).

Il faut ensuite s'assurer que les solutions u_λ pour $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$ ne peuvent pas quitter l'ensemble des états fondamentaux lorsque l'on passe à la limite $\lambda \to \widetilde{\lambda}$, i.e. qu'il existe $u_{\widetilde{\lambda}} = \lim_{\lambda \to \widetilde{\lambda}} u_\lambda$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et que $u_{\widetilde{\lambda}}$ est un état fondamental de $(\mathrm{E}_{\widetilde{\lambda}})$. C'est une conséquence de la Proposition 2.2.2, qui nécessite une étude approfondie de la structure variationnelle de (E_λ) et fait l'objet de la Section 2.2.1. Notez que les arguments employés dans cette section sont en partie inspirés de [20]. La Section 2.2.1 établit également des bornes *a priori* sur la norme H^1 des états fondamentaux. Utilisant l'hypothèse (H4), qui assure à la fois la non-dégénérescence et l'unicité de l'état fondamental de (E_λ) pour tout $\lambda > 0$, on peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à une fonction appropriée, au point $(\widetilde{\lambda}, u_{\widetilde{\lambda}}) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ et, en fait, en chaque point (λ, u_λ), où $\lambda > 0$ et u_λ est un état fondamental de (E_λ). Il en découle que la fonction qui à chaque $\lambda > 0$ associe l'unique état fondamental de (E_λ) définit une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$.

Nous montrons ensuite au Corollaire 2.2.11 que les prescriptions sur le comportement de V à l'origine et à l'infini peuvent être rendues compatibles et que, dans ce cas, la branche globale (6) réunit les deux branches locales (4) et (5). Dans cette situation, nous contrôlons alors précisément le comportement des solutions sur la branche globale lorsque $\lambda \to 0/\infty$, en fonction des paramètres a et b. Ces propriétés asymptotiques sont résumées à la Remarque 2.2.13.

La continuation globale fait l'objet de l'article [13].

Le Chapitre 3 traite de la stabilité orbitale des ondes stationnaires associées aux solutions u_λ données par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11. Le résultat principal est le Théorème 3.4.2. Il est valable en dimension $N \geq 2$ et ne suppose pas que V est radiale. D'une part, sous les hypothèses (H1), (H5) et (H6), il existe $\underline{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tel que, pour tout $\lambda \in (0, \underline{\lambda})$, l'onde stationnaire $e^{i\lambda t}u_\lambda$ est stable si $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$ et instable si $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$. D'autre part, sous les hypothèses (H1), (H7) et (H8), il existe $\overline{\lambda} \in (\lambda^\infty, \infty)$ tel que, pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, \infty)$, l'onde stationnaire $e^{i\lambda t}u_\lambda$ est stable si $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N}$ et instable si $1 + \frac{4-2a}{N} < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$. La démonstration de ce théorème utilise la théorie générale de stabilité présentée dans [17]. La théorie est également exposée dans un travail récent de Stuart [50], où une attention particulière est portée à (NLSG). Le critère de stabilité utilisé par Jeanjean et Le Coz y est également discuté en détail à la Section 3, alors qu'il n'est pas tout à fait évident de le déduire des résultats de [17]. Ayant fourni des efforts considérables pour obtenir des branches de solutions de classe C^1, nous utiliserons quant à nous un autre critère, parfois appelé la *condition de pente*. Nous expliquons à la Section 3.2 comment cette condition découle de la théorie générale, dans le contexte de (NLS). Ce critère affirme que, sous certaines conditions sur le spectre de l'opérateur correspondant à la linéarisation de (NLS) au point u_λ, l'onde stationnaire $e^{i\lambda t}u_\lambda$ est orbitalement stable/instable si $\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^2 dx > 0/ < 0$. Ce critère a été utilisé, par exemple, dans le travail [30], où la stabilité est étudiée pour un problème à une dimension avec un terme linéaire non-trivial, le long d'une branche globale de solutions, qui bifurque d'une valeur propre de l'opérateur linéarisé. L'existence d'une telle branche a été prouvée dans [22] et l'étude des propriétés des états fondamentaux pour ce problème est approfondie dans l'article [49].

Nous commençons le Chapitre 3 par deux définitions. Tout d'abord, nous introduisons la notion appropriée de solution de (NLS) (c.f. 3.0.1), puis nous définissons la stabilité orbitale (c.f. 3.0.2). Ensuite la Section 3.1 discute des conditions sous lesquelles le problème de Cauchy correspondant à (NLS) est bien posé localement/globalement dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. La Section 3.2 explique brièvement comment inscrire (NLS) dans le cadre des systèmes hamiltoniens et quelles hypothèses doivent être vérifiées pour pouvoir appliquer la condition de pente, notamment les hypothèses sur le spectre de l'opérateur linéarisé. La Section 3.3 est entièrement consacrée à la vérification des conditions spectrales. Ces propriétés sont vérifiées localement, au voisinage de $\lambda = 0$ et au voisinage de $\lambda = +\infty$, en utilisant à nouveau une approche qui englobe les deux situations. Elles reposent en grande partie sur la caractérisation variationnelle des solutions des problèmes limites ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$) et (E'$_0$) et sont obtenues par perturbation des cas limites. Finalement, le Théorème 3.4.2 est démontré à la Section 3.4.

Nos résultats de stabilité le long des branches (4) et (5) sont présentés respectivement dans [11] et [14].

Le cas homogène

L'exemple le plus simple d'une fonction V satisfaisant les hypothèses (H0) à (H8) est donné par le cas homogène où $V(x) = B|x|^{-b}$. Dans ce cas, on obtient immédiatement une branche globale de solutions en posant

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2-b}{2(p-1)}}\psi(\lambda^{\frac{1}{2}}x) \quad \text{pour tout } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

où ψ est un état fondamental de ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$). Il n'est pas difficile de vérifier que l'application $\lambda \mapsto u_\lambda$ ainsi définie est de classe $C^1((0,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$. Nous avons alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda(x)^2 dx = \lambda^{\frac{2-b}{p-1}-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)^2 dx,$$

de sorte que $\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^2 dx > 0 / < 0$ pour tout $\lambda > 0$ si $p < 1 + \frac{4-2b}{N} / p > 1 + \frac{4-2b}{N}$. On obtient ainsi un résultat de stabilité/instabilité sur toute la branche. Malheureusement, malgré des efforts importants dans cette direction, nous n'avons pas réussi à obtenir un résultat de stabilité sur toute la branche globale donnée par le Théorème 2.2.10 dans le cas radial mais non-homogène, en dimension $N \geq 3$. Nous sommes en mesure de démontrer un tel résultat dans le cas $N = 1$, que nous présenterons dans [15]. Notez que nous sommes aussi en mesure d'établir tous les résultats principaux de ce rapport en dimension $N = 1$, en utilisant des méthodes souvent plus élémentaires, ce que nous ferons dans [15].

Nous terminons cette introduction en mentionnant des résultats concernant des non-linéarités plus générales que nous n'avons pas pu intégrer à ce rapport, faute d'espace et de temps.

Non-linéarités plus générales

Dans [12], nous considérons (NLSG) avec une non-linéarité f qui peut être écrite comme une perturbation du cas particulier (NLS), à savoir $f(x,s) = V(x)|s|^{p-1}s + r(x,s)$. Sous les hypothèses (H1), (H5), (H6) et sous des hypothèses appropriées sur la fonction r, nous pouvons démontrer l'existence et la stabilité/instabilité orbitale d'ondes stationnaires pour $\lambda > 0$ assez petit. La méthode que nous employons (et qui est décrite plus en détail dans [11]) consiste à tronquer la non-linéarité en dehors d'un voisinage de $s = 0$ puis à étudier l'équation auxiliaire ainsi obtenue.

En prescrivant judicieusement le comportement de la perturbation r pour $|s|$ petit, nous sommes en mesure de démontrer l'existence et la stabilité/instabilité orbitale d'ondes stationnaires pour l'équation auxiliaire, par les méthodes exposées ci-dessus. Comme dans le cas où $r = 0$, nous contrôlons le comportement de différentes normes de ces solutions lorsque $\lambda \to 0$. On a notamment un résultat de bifurcation en norme L^∞. Or, par construction, les solutions de l'équation auxiliaire qui sont petites dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ sont aussi solutions de l'équation de départ. Nous obtenons ainsi les résultats d'existence et de bifurcation pour l'équation initiale. Il n'est ensuite pas difficile de discuter la stabilité de ces solutions.

Les théorèmes démontrés dans [12] s'appliquent par exemple au cas où r est une somme de puissances de la forme

$$r(x,s) = \sum_{i=1}^{m} Z_i(x)|s|^{q_i-1}s \quad \text{avec} \quad p < q_i < 1 + \tfrac{4-2b}{N-2},$$

où les fonctions $Z_i \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ sont telles que $Z_i(x)|x|^b$ et $x \cdot \nabla Z_i(x)|x|^b$ sont bornés sur $\mathbb{R}^N$. Il nous semble que ce type de non-linéarités n'est pas couvert par des travaux antérieurs.

D'autre part, nous couvrons aussi la situation $f(x,s) = V(x)g(s)$ considérée par Jeanjean et Le Coz, essentiellement sous les mêmes hypothèses, si ce n'est des restrictions mineures qui concernent la régularité des fonctions V et g, nécessaires pour obtenir une branche de solutions de classe C^1.

Notations

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, sont munis des mesures de Lebesgue usuelles et toutes les fonctions sont supposées mesurables. L'intégration est toujours entendue au sens de Lebesgue.

Nous utiliserons différents espaces de fonctions réelles et complexes. Dans les Chapitres 1 et 2, nous travaillons sur le problème stationnaire (E_λ) et nous n'utilisons que des fonctions à valeurs réelles. Dans le Chapitre 3, nous utilisons aussi des fonctions à valeurs complexes. Pour $1 \leq p \leq \infty$, nous noterons $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $L^p(\mathbb{R}^N)$ ou simplement L^p les espaces de Lebesgue réels ou complexes. Nous les munissons de leurs normes usuelles, que nous notons $|\cdot|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ ou simplement $|\cdot|_{L^p}$. Le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.

Nous dirons que $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ sont des *exposants de Hölder conjugués* si $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, avec la convention que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Nous aurons souvent affaire à la quantité $\frac{1}{N-2}$ et nous faisons la convention que $\frac{1}{N-2} = \infty$ si $N = 2$. En particulier, nous utiliserons souvent l'exposant de Sobolev conjugué à 2, $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Nous utilisons la notation habituelle $W^{m,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{K})$ pour les espaces de Sobolev, munis des normes usuelles $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ et, s'il n'y a pas de confusion possible, nous écrirons simplement $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ ou encore $W^{m,p}$. Les espaces de Sobolev hilbertiens $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{K})$ sont notés $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{K})$. $H^1(\mathbb{R}^N)$ désignera toujours l'espace de fonctions à valeurs réelles $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Nous utiliserons aussi les notations plus compactes $H = H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $H^* = H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})^*$ et $H^1 = H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $H^{-1} = H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})^*$, où E^* désigne l'espace dual d'un espace vectoriel normé E. Le produit scalaire usuel sur H sera simplement noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ou parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, et la norme correspondante $\|\cdot\|$. Pour $\lambda > 0$, nous utiliserons aussi le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ et la norme $\|\cdot\|_\lambda$, qui sont définis au début de la Section 1.1. De façon générale, $\|\cdot\|_E$ désignera la norme de l'espace vectoriel normé E. Le produit de dualité entre E et son dual sera noté $\langle \varphi, u \rangle_{E^* \times E}$, pour $\varphi \in E^*$ et $u \in E$.

Nous aurons également affaire aux espaces de fonctions (à valeurs réelles) sur la demie-droite, L^2_r et H^1_r, définis au point 1.2.1 et munis respectivement des produits scalaires

$$\langle u, v\rangle_{L^2_r} = \int_0^\infty r^{N-1} uv dr \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle_{r,\lambda} = \langle u', v'\rangle_{L^2_r} + \lambda \langle u, v\rangle_{L^2_r}, \quad \lambda > 0,$$

et des normes correspondantes, $|\cdot|_{L^2_r}$ et $\|\cdot\|_{r,\lambda}$.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F est noté $L(E, F)$. D'autre part, sans précision supplémentaire, lorsque nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est *dérivable*, nous entendrons par là qu'elle est dérivable au sens de Fréchet.

Si E et F sont des espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ et si $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est une fonction de Carathéodory, nous noterons simplement $G : E \to F$, $G(u) = g(x, u)$, sans mentionner explicitement la variable $x \in \mathbb{R}^N$, l'*opérateur de superposition* qui à une fonction $u \in E$ associe la fonction $x \mapsto g(x, u(x))$.

Au Chapitre 1, sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3), nous démontrons l'existence d'un état fondamental de l'équation (E_λ), que nous noterons ψ_λ, pour tout $\lambda > 0$.

Au Chapitre 2, nous serons spécialement intéressés par le cas particulier de l'équation

$$\Delta u - u - K|x|^{-k}|u|^{p-1}u = 0,$$

qui satisfait les hypothèses (H0), (H2) et (H3) pour $k \in (0, 2)$ et $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$. Pour indiquer explicitement la dépendance dans les paramètres, nous noterons $\psi_{K,k}$ un état fondamental de cette équation.

Sauf précision supplémentaire, les symboles $C, C_1, C_2, K, ...$ désigneront des constantes qui peuvent changer de valeur d'une ligne à l'autre et qui dépendent des paramètres d'une façon qui n'est pas essentielle pour l'analyse.

Finalement, signalons que tous les théorèmes, lemmes, propositions, définitions, etc. sont numérotés par le même compteur et de façon continue dans toute la thèse. La numérotation fait référence à la section où se trouve l'objet considéré et les références croisées seront parfois faites en ne citant que le numéro d'un objet. Par exemple, le Théorème 1.1.8 est le huitième objet de la Section 1.1 et l'on pourra s'y référer en disant simplement "comme il a été vu sous 1.1.8...". Nous appelons indifféremment "section" les sections et les sous-sections.

Chapitre 1

États fondamentaux

Dans ce premier chapitre, nous présentons une approche variationnelle du problème elliptique non-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2, \tag{E$_\lambda$}$$

où $p > 1$ et $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Par une méthode de *minimisation sous contrainte* dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3) ci-dessous, nous prouvons dans la Section 1.1 l'existence d'un *état fondamental* de (E$_\lambda$), pour tout $\lambda > 0$.[1] Un état fondamental est une solution de (E$_\lambda$) jouissant de propriétés particulières. Dans la littérature, il existe plusieurs définitions de ce qu'est un état fondamental pour ce genre d'équations, dépendant souvent d'une caractérisation variationnelle d'une telle solution. Pour nous, un état fondamental sera une *solution faible* non-triviale de (E$_\lambda$) qui minimise la fonctionnelle dont (E$_\lambda$) est l'équation d'Euler-Lagrange, sur un certain sous-ensemble de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui contient toutes les solutions faibles non-triviales de (E$_\lambda$). Ces notions seront précisées dans les Définitions 1.1.3 et 1.1.4.

Sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3), la Proposition 1.1.10 affirme qu'à un facteur de signe près, tous les états fondamentaux sont des fonctions positives, radiales et radialement décroissantes. Forts de ce résultat, nous établirons dans la Section 1.2 des propriétés de régularité des états fondamentaux en ayant recours à des équations différentielles ordinaires. Nous verrons, entre autre, qu'une telle solution est (toujours à un facteur de signe près) strictement positive, strictement radialement décroissante et tend vers zéro exponentiellement vite à l'infini. Ces dernières propriétés sont souvent prises comme définition d'état fondamental, ce qui donne une définition indépendante de toute caractérisation variationnelle. Nous verrons ensuite à la Section 1.3 que, sous les hypothèses (H1) à (H4) et pour $N \geq 3$, pour chaque $\lambda > 0$, il n'existe qu'une seule solution de (E$_\lambda$) ayant ces propriétés, et donc qu'un seul état fondamental (au sens de la Définition 1.1.4) positif. Finalement, à la Section 1.4, nous prouverons que, sous les hypothèses (H1) à (H4), un état fondamental est non-dégénéré au sens de la Définition 1.4.2, propriété qui intervient de façon cruciale dans les arguments de continuation utilisés au Chapitre 2.

Avant d'attaquer le problème de l'existence, nous formulons les hypothèses sous lesquelles nous démontrerons les résultats mentionnés ci-dessus.

(H0) $V \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(H1) $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(H2) Il existe un nombre $k \in (0, 2)$ tel que $|x|^k V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$.

[1] Dans le cas particulier où $V(x) = |x|^{-k},\ k \in (0, 2)$, une identité de type 'Pohožaev' montre que, pour $1 < p < 1 + (4 - 2k)/(N - 2)$, (E$_\lambda$) n'admet pas de solution dans $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ si $\lambda \leq 0$.

(H3) $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et V est à symétrie sphérique, radialement strictement décroissante. Si (H1) est vérifiée, la fonction $\widetilde{V} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{V}(r) = V(x)$ pour $r = |x| > 0$ satisfait $\widetilde{V}'(r) < 0$ pour tout $r > 0$.

(H4) La fonction $r\widetilde{V}'(r)/\widetilde{V}(r)$ est décroissante sur $(0, \infty)$.

Cette dernière propriété du coefficient V est cruciale pour démontrer la non-dégénérescence des états fondamentaux et c'est également sous cette hypothèse que l'unicité est établie.

Des exemples typiques de fonctions satisfaisant les hypothèses (H0) à (H4) sont donnés par $\widetilde{V}(r) = r^{-k}$ pour le cas où V est non borné et $\widetilde{V}(r) = 1/(1+r^2)^{k/2}$ pour le cas où V est borné. Dans le Chapitre 2, nous serons particulièrement intéressés par le cas homogène $\widetilde{V}(r) = r^{-k}$ qui intervient dans les problèmes limites de la méthode perturbative utilisée pour obtenir les résultats de bifurcation locale.

Les hypothèses (H0), (H2) et (H3) interviennent dans la démonstration d'existence de la Section 1.1, qui n'utilise pas (H1). Les résultats de la Section 1.2 ne nécessitent (H1) que pour obtenir plus de régularité des solutions trouvées à la Section 1.1. L'hypothèse (H4) ne sera utilisée que dans les Sections 1.3 et 1.4.

1.1 Existence

Nous exposons à présent la formulation variationnelle de (E_λ), qui va nous permettre de prouver l'existence d'états fondamentaux dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nous commencerons par montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on peut définir sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ une fonctionnelle S_λ dont (E_λ) est l'équation d'Euler-Lagrange associée. Ces notions vont de paire avec la notion de solution faible que nous rappelons également ci-dessous. Ensuite, nous présenterons la méthode de minimisation sous contrainte que nous allons employer, ce qui nous conduira naturellement à la définition d'état fondamental. Le reste de la section est consacré à la démonstration d'existence d'un état fondamental de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$.

Nous supposons dans cette section que la fonction V est radiale. Les résultats que nous obtenons sous cette hypothèse seront utiles au Chapitre 2 dans plusieurs contextes. Tout d'abord, dans la Section 2.1, où nous établissons des résultats de bifurcation locale par une méthode perturbative, les équations auxiliaires (2.3) et (2.4) satisfont les hypothèses (H0) à (H4) (elles correspondent au cas où $\widetilde{V}(r) = r^{-k}$). L'existence et les propriétés d'un état fondamental pour ces équations interviennent de façon cruciale dans nos arguments de continuation. Nous établirons les résultats de bifurcation locale sans l'hypothèse que V est radiale.

D'autre part, à la Section 2.2, où nous montrons un résultat de bifurcation globale, nous supposerons cette fois que l'équation (E_λ) elle-même satisfait les hypothèses (H0) à (H4). Nous utiliserons alors le théorème d'existence 1.1.8 et le résultat d'unicité 1.3.2 pour établir l'existence d'une branche globale d'états fondamentaux positifs de (E_λ).

Dès maintenant et dans toute la suite du chapitre, nous notons H l'espace de Sobolev *réel* $H^1(\mathbb{R}^N)$ et H^* son dual topologique. Nous munissons H de la famille de normes équivalentes

$$\|u\|_\lambda = \{|\nabla u|_{L^2}^2 + \lambda |u|_{L^2}^2\}^{1/2} \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

Nous notons simplement $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ la norme usuelle de H. Nous introduisons également la famille de produits scalaires correspondants à ces normes,

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} + \lambda \langle u, v\rangle_{L^2} \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

Dans toute cette section, nous travaillons avec une valeur de $\lambda > 0$ fixée. Néanmoins, nous gardons dans nos notations la dépendance explicite en λ comme indice des objets qui interviennent dans l'analyse, ce pour un usage ultérieur.

Grâce à l'inégalité (A.2) du Lemme A.1, les hypothèses (H0) et (H2) assure que la fonctionnelle $\phi : H \to \mathbb{R}$,

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p+1}dx \tag{1.1}$$

est bien définie et qu'il existe des constantes $K, K_\lambda > 0$ telles que

$$|\phi(u)| \leq K\|u\|^{p+1} \leq K_\lambda \|u\|_\lambda^{p+1} \quad \text{pour tout } u \in H. \tag{1.2}$$

Notez que si, de plus, l'hypothèse (H3) est vérifiée, alors $\phi(u) > 0$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$.

Lemme 1.1.1 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont satisfaites. La fonctionnelle ϕ définie par (1.1) appartient à la classe $C^2(H, \mathbb{R})$. De plus, on a les formules suivantes :*

$$\phi'(u)v = (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1}uvdx \quad \textit{pour tout } u, v \in H$$

et

$$\phi''(u)[v,w] = p(p+1)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1}vwdx \quad \textit{pour tout } u, v, w \in H.$$

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du Lemme B.1(iii). Dans les notations de l'Annexe B, il suffit en effet de poser $z(x) = V(x)|x|^k$ et d'identifier ϕ avec Φ. □

Il découle de (H2) que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$, ce qui permet d'établir la propriété de compacité suivante.

Lemme 1.1.2 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont satisfaites. La fonctionnelle ϕ définie par (1.1) est faiblement séquentiellement continue (f.s.c.) sur H.*

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subset H$ et $u \in H$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans H. Par l'hypothèse (H2), nous avons que

$$|\phi(u_n) - \phi(u)| \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-k}\big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|dx.$$

Pour tout $R > 0$, l'inégalité de Hölder implique

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-k}\big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|dx \leq \{\int_{B(0,R)} |x|^{-kr}dx\}^{1/r}\{\int_{B(0,R)} \big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|^s dx\}^{1/s}$$

pour tout $r \geq 1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1$. La première intégrale du membre de droite converge si $N-kr > 0$, ce qui équivaut à $s > N/(N-k)$. D'autre part, la compacité de l'injection de Sobolev sur les bornés lisses de $\mathbb{R}^N$ et la continuité de l'application $u \mapsto |u|^{p+1}$ de $L^{(p+1)s}(B(0,R))$ dans $L^s(B(0,R))$, $s \geq 1$, impliquent que

$$\big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|_{L^s(B(0,R))} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

si l'on peut choisir $s \geq 1$ tel que $(p+1)s \in [1, \frac{2N}{N-2})$. Il est possible de trouver $s \geq 1$ satisfaisant les deux conditions si $\frac{N}{N-k} < \frac{2N}{(p+1)(N-2)}$. Si $N = 2$, cette inégalité est satisfaite, pour tout $k \in (0,2)$. Si $N \geq 3$, elle est équivalente à $p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$, qui est vrai par (H2). Par conséquent,

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-k}\big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|dx \leq C\big||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\big|_{L^s(B(0,R))} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Pour traiter l'intégrale sur le complément de $B(0,R)$, fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $p+1 \in (2, \frac{2N}{N-2})$, nous avons, pour $R \geq \varepsilon^{-1/k}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |x|^{-k} \big| |u_n|^{p+1} - |u|^{p+1} \big| dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |u_n|^{p+1} + |u|^{p+1} dx \leq C\varepsilon$$

par le plongement de Sobolev et la bornitude de $\{u_n\}$ dans H. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci termine la démonstration. □

Nous définissons à présent la fonctionnelle $S_\lambda : H \to \mathbb{R}$ par

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+1}\phi(u).$$

Il découle du Lemme 1.1.1 que, sous les hypothèses (H0) et (H2), $S_\lambda \in C^2(H, \mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned} S'_\lambda(u)v &= \langle u, v\rangle_\lambda - \frac{1}{p+1}\phi'(u)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1}uv dx \quad \text{pour tout } u, v \in H \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned} S''_\lambda(u)[v,w] &= \langle v, w\rangle_\lambda - \frac{1}{p+1}\phi''(u)[v,w] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla w + \lambda vw dx - p\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1}vw dx \quad \text{pour tout } u, v, w \in H. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Définition 1.1.3 Une fonction $u \in H$ est appelée *solution faible* de (E_λ) si $S'_\lambda(u) = 0$, i.e. si

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1}uv dx = 0 \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Une *solution classique* est une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ qui vérifie (E_λ).
Nous dirons qu'une solution, faible ou classique, est *non-triviale* si elle n'est pas identiquement nulle.

En utilisant la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans H, on montre facilement que toute solution classique est aussi solution faible.

Chercher des solutions faibles de (E_λ) revient donc à chercher des points critiques de S_λ. Il n'est pas difficile de se convaincre que la fonctionnelle S_λ n'est ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement sur H. Par conséquent, on ne peut espérer trouver des points critiques qui soient des points d'extremum global de S_λ. Une façon de contourner cette difficulté est d'utiliser une méthode de minimisation sous contrainte qui remonte à Nehari [33] et qui consiste à minimiser S_λ sur une sous-variété de H qui contient toutes les solutions faibles non-triviales de (E_λ) et qui est parfois appelée *variété de Nehari*. Il s'avère que, restreinte à cette sous-variété, la fonctionnelle S_λ est bornée inférieurement. Nous allons voir que, grâce à la continuité séquentielle faible de ϕ et utilisant la technique de symétrisation de Schwarz, il est possible d'établir l'existence d'un minimiseur de S_λ sur la variété de Nehari qui soit une fonction positive et radiale. Il découle des propriétés de la variété de Nehari et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange que tous les minimiseurs de S_λ sur la variété de Nehari sont des points critiques de S_λ.

La contrainte est donnée par la fonctionnelle $J_\lambda \in C^2(H, \mathbb{R})$ définie par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(u).$$

La variété de Nehari $N_\lambda \subset H$ est ainsi définie par

$$N_\lambda = \{u \in H \setminus \{0\} : J_\lambda(u) = 0\}.$$

Le reste de cette section est consacré à l'étude du problème de minimisation

$$m_\lambda = \inf\{S_\lambda(u) : u \in N_\lambda\}. \tag{1.5}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition du terme 'état fondamental'.

Définition 1.1.4 Une fonction $u \in H$ est appelée *état fondamental* de (E_λ) si c'est un minimiseur du problème (1.5). Le Lemme 1.1.5(v) ci-dessous affirme qu'un état fondamental est une solution faible de (E_λ).

Établissons à présent quelques propriétés importantes de la variété N_λ.

Lemme 1.1.5 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont vérifiées.*

(i) Si $u \in H \setminus \{0\}$ est une solution faible de (E_λ), alors $u \in N_\lambda$.

(ii) Il existe $\delta_\lambda > 0$ tel que $\|u\|_\lambda \geq \delta_\lambda$ pour tout $u \in N_\lambda$.

(iii) N_λ est une sous-variété de H de classe C^2.

(iv) Pour tout $u \in N_\lambda$, $S_\lambda(u) = A(p)\|u\|_\lambda^2$, où $A(p) = \frac{p-1}{2(p+1)} > 0$.

(v) Si $u \in N_\lambda$ et $S_\lambda(u) = m_\lambda$, alors u est une solution faible de (E_λ).

Démonstration. (i) Puisque

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}S'_\lambda(u)u \quad \text{pour tout } u \in H, \tag{1.6}$$

si $u \not\equiv 0$ est solution faible, on a $J_\lambda(u) = 0$ et donc $u \in N_\lambda$.

(ii) Remarquons tout d'abord que

$$\phi(u) = \|u\|_\lambda^2 > 0 \quad \text{pour tout } u \in N_\lambda. \tag{1.7}$$

Maintenant, si $u \in N_\lambda$, (1.2) implique

$$\|u\|_\lambda^2 = \phi(u) \leq K_\lambda \|u\|_\lambda^{p+1},$$

où $K_\lambda > 0$. Le résultat suit du fait que $p > 1$.

(iii) découle du théorème de submersion car, pour tout $u \in N_\lambda$,

$$J'_\lambda(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi'(u)u = \phi(u) - \frac{p+1}{2}\phi(u) = \frac{1-p}{2}\phi(u) < 0 \tag{1.8}$$

par (1.7).

(iv) Pour $u \in N_\lambda$, (1.7) implique

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+1}\phi(u) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u\|_\lambda^2 = \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_\lambda^2.$$

(v) Si $u \in N_\lambda$ et $S_\lambda(u) = m_\lambda$, c'est-à-dire, si u est un minimiseur du problème (1.5), il existe un multiplicateur de Lagrange $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $S'_\lambda(u)v = \xi J'_\lambda(u)v$ pour tout $v \in H$. Posant $v = u$, nous voyons que $S'_\lambda(u)u = \xi J'_\lambda(u)u$. D'une part, $S'_\lambda(u)u = 0$ par (1.6) car $u \in N_\lambda$. D'autre part, nous avons que $J'_\lambda(u)u < 0$ par (1.8). Par conséquent $\xi = 0$ et $S'_\lambda(u) = 0$. □

Remarque 1.1.6
(a) Les points (ii) et (iv) du Lemme 1.1.5 impliquent que $m_\lambda > 0$, de sorte que $S_\lambda > 0$ sur N_λ.
(b) Le point (iv) implique que toute suite minimisante pour le problème (1.5) est bornée.

Le lemme suivant établit l'existence d'une projection lisse de $H \setminus \{0\}$ sur N_λ.

Lemme 1.1.7 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont vérifiées. Il existe une fonction $t_\lambda \in C^2(H \setminus \{0\}, (0, \infty))$ qui jouit des propriétés suivantes.*

(i) Pour $u \in H \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$, $tu \in N_\lambda$ si et seulement si $t = t_\lambda(u)$.

(ii) Pour tout $u \in H \setminus \{0\}$, nous avons que

$$t_\lambda(u) \leq 1 \text{ si } J_\lambda(u) \leq 0 \quad \text{et} \quad t_\lambda(u) \geq 1 \text{ si } J_\lambda(u) \geq 0.$$

Démonstration. On vérifie facilement que la fonction définie par

$$t_\lambda(u) = \left\{ \frac{\|u\|_\lambda^2}{\phi(u)} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{pour tout } u \in H \setminus \{0\}$$

a les propriétés énoncées. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence d'un état fondamental de (E_λ).

Théorème 1.1.8 *Supposons que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont satisfaites. Pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $\psi_\lambda \in N_\lambda$ telle que $S_\lambda(\psi_\lambda) = m_\lambda$. De plus, ψ_λ est positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Démonstration. Considérons une suite $\{u_n\} \subset N_\lambda$ telle que $S_\lambda(u_n) \to m_\lambda$ lorsque $n \to \infty$. Comme $|u| \in H$ si $u \in H$ et S_λ, J_λ ne changent pas lorsqu'on remplace u par $|u|$, nous pouvons supposer que $u_n \geq 0$. Soit alors la suite $\{v_n\} \subset H$ définie par $v_n = t_\lambda(u_n^*)u_n^*$, où u_n^* est la symétrisation de Schwarz de u_n et t_λ est la projection donnée par le Lemme 1.1.7. (Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [32] pour ce qui concerne les propriétés de la symétrisation de Schwarz.) Nous allons montrer que $\{v_n\}$ est aussi une suite minimisante pour le problème (1.5).

Tout d'abord, il découle des propriétés de la symétrisation de Schwarz que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^*)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^*|^2 dx.$$

De plus, puisque la fonction $s \mapsto |s|^{p+1}$ est croissante sur $[0, \infty)$ et comme $V = V^*$ par (H3), nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^{p+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V^*(x)(u_n^{p+1})^* dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n^*)^{p+1} dx.$$

Ainsi, $\|u_n\|_\lambda^2 \geq \|u_n^*\|_\lambda^2$ et $\phi(u_n) \leq \phi(u_n^*)$. Par conséquent, $J_\lambda(u_n^*) \leq J_\lambda(u_n) = 0$ et donc $t_\lambda(u_n^*) \leq 1$ par le Lemme 1.1.7. Maintenant, $v_n \in N_\lambda$ par construction et le Lemme 1.1.5(iv) implique

$$\begin{aligned} m_\lambda \leq S_\lambda(v_n) = A(p)\|v_n\|_\lambda^2 &= A(p)\|t_\lambda(u_n^*)u_n^*\|_\lambda^2 = A(p) t_\lambda(u_n^*)^2 \|u_n^*\|_\lambda^2 \\ &\leq A(p)\|u_n^*\|_\lambda^2 \leq A(p)\|u_n\|_\lambda^2 = S_\lambda(u_n) \to m_\lambda. \end{aligned}$$

Donc $\{v_n\} \subset N_\lambda$ est aussi une suite minimisante. D'après la Remarque 1.1.6, $\{v_n\}$ est bornée dans H. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $v \in H$ tel que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans H. Nous allons montrer que $v \in N_\lambda$ et $S_\lambda(v) = m_\lambda$.

Puisque ϕ est f.s.c. par le Lemme 1.1.2, nous avons que

$$\phi(v) = \lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_\lambda^2 \geq \delta_\lambda^2 > 0$$

par le Lemme 1.1.5(ii). On en déduit que $v \neq 0$. Maintenant, comme $\|\cdot\|_\lambda^2$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement, on a

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(v) \leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(v) = \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \phi(v_n) - \frac{1}{2}\phi(v) = 0$$

et donc $t_\lambda(v) \leq 1$ par le Lemme 1.1.7. Nous allons voir qu'en fait, $t_\lambda(v) = 1$. Puisque $t_\lambda(v)v \in N_\lambda$, on a

$$\begin{aligned} m_\lambda &\leq S_\lambda(t_\lambda(v)v) = A(p)\|t_\lambda(v)v\|_\lambda^2 = A(p)t_\lambda(v)^2\|v\|_\lambda^2 \\ &\leq A(p)\|v\|_\lambda^2 \leq \liminf_{n\to\infty} A(p)\|v_n\|_\lambda^2 = \lim_{n\to\infty} S_\lambda(v_n) = m_\lambda. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ceci montre que $S_\lambda(t_\lambda(v)v) = m_\lambda$ et que $t_\lambda(v) = 1$ car sinon, nous aurions inégalité stricte dans (1.9), i.e. $m_\lambda < m_\lambda$, ce qui est absurde. Finalement, puisque v_n est positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante par construction, v jouit des mêmes propriétés. Nous posons alors $\psi_\lambda = v$ et le théorème est démontré. □

Remarque 1.1.9 En fait, à une sous-suite près, nous avons montré que $\|v\|_\lambda^2 = \phi(v) = \lim \phi(v_n) = \lim \|v_n\|_\lambda^2$ et donc, que $\|v_n - v\|_\lambda \to 0$ puisque nous savions déjà que $v_n \rightharpoonup v$.

La proposition suivante affirme que, sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3), tous les états fondamentaux sont, au signe près, des fonctions positives, radiales et radialement décroissantes. De façon générale, il est clair que si $u \in H \setminus \{0\}$ est un état fondamental de (E_λ), alors $-u$ a aussi cette propriété.

Proposition 1.1.10 *Supposons les hypothèses (H0), (H2) et (H3) vérifiées et soit $u \in N_\lambda$ tel que $S_\lambda(u) = m_\lambda$. Alors $|u| = u^*$, où u^* désigne la symétrisation de Schwarz de $|u|$.*

Démonstration. Nous savons que $|u| \in N_\lambda$ et que $S_\lambda(|u|) = S_\lambda(u) = m_\lambda$. Nous allons montrer que si $|u| \neq u^*$, alors $S_\lambda(t_\lambda(u^*)u^*) < S_\lambda(u)$, où t_λ est la fonction donnée par le Lemme 1.1.7. Comme $t_\lambda(u^*)u^* \in N_\lambda$, c'est une contradiction. Suivant la démonstration du Théorème 1.1.8, nous avons que

$$\|u^*\|_\lambda^2 \leq \|u\|_\lambda^2 \quad \text{et} \quad \phi(u^*) \geq \phi(u). \tag{1.10}$$

Ainsi $J_\lambda(u^*) \leq J_\lambda(u) = 0$, de sorte que $t_\lambda(u^*) \leq 1$. Maintenant,

$$S_\lambda(t_\lambda(u^*)u^*) = A(p)\|t_\lambda(u^*)u^*\|_\lambda^2 = A(p)t_\lambda(u^*)^2\|u^*\|_\lambda^2.$$

Comme $S_\lambda(u) = A(p)\|u\|_\lambda^2$, on aura que $S_\lambda(t_\lambda(u^*)u^*) < S_\lambda(u)$ si $t_\lambda(u^*) < 1$ ou $\|u^*\|_\lambda^2 < \|u\|_\lambda^2$. Tenant compte de (1.10), nous aurons donc $S_\lambda(t_\lambda(u^*)u^*) < S_\lambda(u)$ si $\|u^*\|_\lambda^2 < \|u\|_\lambda^2$ ou $\phi(u^*) > \phi(u)$.

Nous allons montrer que le Théorème 6.1 de [19] s'applique ici et qu'il implique que $\phi(u^*) > \phi(u)$ si $|u| \neq u^*$. Remarquons tout d'abord que $|u| \in F_N$, où F_N est l'ensemble défini à la Section 2 de [19]. Suivant les notations de [19], nous posons $G(|x|, s) = \widetilde{V}(|x|)s^{p+1}$. La fonction g du Théorème 6.1 est donnée par $g : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(r,s) = (p+1)\widetilde{V}(r)s^p$.

Nous montrons maintenant que les hypothèses du Théorème 6.1 de [19] sont vérifiées.

(i) stipule que l'on doit avoir $g(\cdot, s)$ strictement décroissante sur $(0,\infty)$ pour presque tout $s \geq 0$, ce qui découle de (H3).

(ii) Il faut vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |g(|x|,s)|1_{\{s\le v(x)\}}dsdx<\infty$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |g(|x|,s)|1_{\{s\le v^*(x)\}}dsdx<\infty$$

pour les fonctions $v\in F_N$ qui nous intéressent. Or, pour tout $v\in F_N\cap H$, nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |g(|x|,s)|1_{\{s\le v(x)\}}dsdx=(p+1)\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{v(x)}\widetilde{V}(|x|)s^pdsdx=\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{V}(|x|)v(x)^{p+1}dx<\infty.$$

De même,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |g(|x|,s)|1_{\{s\le v^*(x)\}}dsdx=\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{V}(|x|)v^*(x)^{p+1}dx<\infty,$$

où v^* est la symétrisation de Schwarz de v.

(iii) On doit avoir $\lim_{|x|\to\infty}g(|x|,s)=l_s>-\infty$ pour presque tout $s\ge 0$. Cette propriété découle de (H2) avec $l_s\equiv 0$.

Ainsi, on peut appliquer le Théorème 6.1 de [19] qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N}G(|x|,v(x))dx\le\int_{\mathbb{R}^N}G(|x|,v^*(x))dx$$

pour tout $v\in F_N\cap H$, avec égalité si et seulement si $v=v^*$. On en déduit que $\phi(u^*)>\phi(u)$ si $|u|\neq u^*$ et, par conséquent, que $S_\lambda(t_\lambda(u^*)u^*)<S_\lambda(u)$ si $|u|\neq u^*$. □

Remarque 1.1.11 Désormais, si les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont vérifiées, *nous appellerons états fondamentaux les minimiseurs positifs de (1.5)*. Avec cette restriction, sous les hypothèses (H1) à (H4) et en dimension $N\ge 3$, le Corollaire 1.3.2 assure l'unicité de l'état fondamental de (E_λ), pour tout $\lambda>0$.

Nous concluons cette section par un dernier lemme qui interviendra de façon centrale lorsqu'il s'agira de démontrer la non-dégénérescence des états fondamentaux.

Lemme 1.1.12 *Sous les hypothèses du Théorème 1.1.8, considérons la forme bilinéaire symétrique $S''_\lambda(\psi_\lambda):H\times H\to\mathbb{R}$. Nous avons que*

$$S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\psi_\lambda]<0\quad\textit{et}\quad S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi]\ge 0\quad\textit{pour tout }\xi\in H\textit{ tel que }J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi=0.$$

Démonstration. Posons $R_\lambda(u)=S_\lambda(t_\lambda(u)u)$ pour tout $u\in H\setminus\{0\}$, où t_λ est la fonction donnée par le Lemme 1.1.7. Alors $R_\lambda\in C^2(H\setminus\{0\})$ et ψ_λ est un point de minimum local de R_λ par le Théorème 1.1.8. Par conséquent, $R'_\lambda(\psi_\lambda)\xi=0$ et $R''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi]\ge 0$ pour tout $\xi\in H$. Utilisant le fait que $S'_\lambda(\psi_\lambda)=0$, un calcul simple montre que, pour tout $\xi\in H$,

$$R''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi]=(t'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)^2S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\psi_\lambda]+2(t'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\xi]+S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi].\tag{1.11}$$

Pour discuter le signe de $S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi]$, il est utile de récrire les deux premiers termes du membre de droite de (1.11) utilisant J_λ. Puisque $S'_\lambda(u)u=2J_\lambda(u)$, nous avons $S''_\lambda(u)[u,v]+S'_\lambda(u)v=2J'_\lambda(u)v$. Mais $S'_\lambda(\psi_\lambda)=0$ et donc

$$S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\xi]=2J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi\quad\text{pour tout }\xi\in H.\tag{1.12}$$

De plus, comme $J_\lambda(t_\lambda(u)u) = 0$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$, en dérivant cette dernière relation par rapport à u au point ψ_λ, nous obtenons

$$(t'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda + J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in H.$$

Puisque $J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda < 0$ par (1.8), il vient $t'_\lambda(\psi_\lambda)\xi = -(J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)/(J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda)$ pour tout $\xi \in H$. Par conséquent, (1.11) devient

$$\begin{aligned} R''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi] &= 2\frac{(J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)^2}{(J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda)^2}J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda - 4\frac{(J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)}{(J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda)}J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi + S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi] \qquad (1.13)\\ &= -2\frac{(J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi)^2}{J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda} + S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi] \quad \text{pour tout } \xi \in H. \qquad (1.14)\end{aligned}$$

Ainsi $S''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi] = R''_\lambda(\psi_\lambda)[\xi,\xi] \geq 0$ pour tout $\xi \in H$ tel que $J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi = 0$. D'autre part, (1.12) implique $S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\psi_\lambda] = 2J'_\lambda(\psi_\lambda)\psi_\lambda < 0$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 1.1.13

(a) Puisque ψ_λ est une solution faible de (E_λ), il découle de (1.12), (1.4) et (1.3) que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi &= \frac{1}{2}S''_\lambda(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\xi] = \frac{1}{2}\{\langle\psi_\lambda,\xi\rangle_\lambda - \frac{1}{p+1}\phi''(\psi_\lambda)[\psi_\lambda,\xi]\}\\ &= \frac{1}{2}\{\langle\psi_\lambda,\xi\rangle_\lambda - p\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\psi_\lambda^{p-1}\psi_\lambda\xi dx\}\\ &= \frac{1}{2}\{\langle\psi_\lambda,\xi\rangle_\lambda - \frac{p}{p+1}\phi'(\psi_\lambda)\xi\} = \frac{1-p}{2}\langle\psi_\lambda,\xi\rangle_\lambda \quad \text{pour tout } \xi \in H.\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition $J'_\lambda(\psi_\lambda)\xi = 0$ est équivalente à $\langle\psi_\lambda,\xi\rangle_\lambda = 0$ et l'espace tangent à N_λ au point ψ_λ est orthogonal à ψ_λ. Cette propriété est due à la relation fondamentale $J_\lambda(u) = \frac{1}{2}S'_\lambda(u)u$, qui est une conséquence de l'homogénéité de la non-linéarité.

(b) Le Lemme 1.1.12 exprime le fait que l'indice de Morse de S''_λ au point ψ_λ vaut 1.

1.2 Régularité

Dans cette section, nous montrons que l'état fondamental donné par le Théorème 1.1.8 est en fait une solution classique de (E_λ) et nous étudions ses propriétés asymptotiques. Nous travaillons toujours avec $\lambda > 0$ fixé et, pour alléger la notation, nous notons simplement ψ l'état fondamental. Nous verrons, entre autre, que $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ et que ψ et toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 tendent vers zéro exponentiellement vite à l'infini. Nous n'utiliserons ici que les hypothèses (H0) à (H3). Pour $N \geq 3$, l'hypothèse supplémentaire (H4) sera utile à la Section 1.3 pour obtenir l'unicité d'une solution classique ayant de bonnes propriétés de décroissance à l'infini. Sans cette dernière hypothèse, nous ne savons pas s'il existe un seul ou plusieurs états fondamentaux. Comme ψ est une fonction radiale, l'étude de sa régularité se ramène à l'étude de la régularité d'une solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du deuxième ordre.

Nous commençons par introduire deux espaces de fonctions sur la demie-droite.

Définition 1.2.1 Nous définissons les espaces hilbertiens réels L^2_r et $H^1_r \subset L^2_r$ par

$$L^2_r = \{v : (0,\infty) \to \mathbb{R} : \int_0^\infty r^{N-1}v(r)^2 dr < \infty\} \quad \text{et} \quad H^1_r = \{v \in L^2_r : v' \in L^2_r\} \subset L^2_r$$

et nous les munissons respectivement des produits scalaires

$$\langle u,v\rangle_{L^2_r} = \int_0^\infty r^{N-1}uvdr \quad \text{et} \quad \langle u,v\rangle_{r,\lambda} = \langle u',v'\rangle_{L^2_r} + \lambda\langle u,v\rangle_{L^2_r},$$

et des normes correspondantes, $|\cdot|_{L^2_r}$ et $\|\cdot\|_{r,\lambda}$.

Proposition 1.2.2 *Soit $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction à symétrie sphérique et $v:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tel que $u(x)=v(r)$ pour $|x|=r>0$. Alors $u\in H$ si et seulement si $v\in H^1_r$.*

Démonstration. Tout d'abord, on peut montrer que v a une dérivée généralisée $v':(0,\infty)\to\mathbb{R}$ si u possède des dérivées partielles généralisées $\partial_i u(x)$ et que, dans ce cas, $v'(|x|)=\langle x/|x|,\nabla u(x)\rangle$ pour tout $x\neq 0$. Pour ce faire, on commence par montrer que la fonction $w(x)=\langle x/|x|,\nabla u(x)\rangle$ est aussi radiale, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, on montre que, pour $w_\Gamma(x)\equiv w(\Gamma x)$, $\int_{\mathbb{R}^N} w_\Gamma(x)\xi(x)dx$ est indépendant de $\Gamma\in O(N)$, pour tout $\xi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. En intégrant par parties et après un petit calcul, on obtient en fait

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_\Gamma(x)\xi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\{(N-1)\xi(x)/|x| + \langle x/|x|,\nabla\xi(x)\rangle\} \quad \text{pour tout } \Gamma\in O(N).$$

Ensuite, en utilisant cette identité avec $\Gamma=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}$, il n'est pas difficile de vérifier que la fonction v' définie par $v'(r)=w(x)$ pour $r=|x|>0$ est bien la dérivée généralisée de la fonction v.

D'autre part, si l'on suppose que $v\in H^1_r$, on peut montrer que u admet des dérivées partielles généralisées sur $\mathbb{R}^N$ et que $\partial_i u(x)=v'(|x|)x_i/|x|$. Il faut commencer par montrer ce résultat sur $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ puis l'étendre à $\mathbb{R}^N$ en utilisant le fait que $v\in H^1_r$.

Notant ω_N la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$, il suffit alors de remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^2dx = \omega_N\int_0^\infty r^{N-1}v(r)^2dr \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2dx = \omega_N\int_0^\infty r^{N-1}v'(r)^2dr$$

pour conclure. □

Grâce à la Proposition 1.2.2, le résultat suivant réduit l'étude des propriétés de ψ à celle des propriétés d'une fonction de H^1_r, solution d'une EDO du deuxième ordre.

Proposition 1.2.3 *Supposons que la fonction V est radiale et soit $\widetilde{V}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tel que $V(x)=\widetilde{V}(r)$ pour $|x|=r>0$. Soit $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction radiale et $v:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tel que $u(x)=v(r)$ pour $|x|=r>0$. Si $u\in H$ et u est une solution faible de (E_λ), alors $v\in H^1_r$ et v est une solution au sens des distributions de*

$$v'' + \frac{N-1}{r}v' - \lambda v + \widetilde{V}(r)|v|^{p-1}v = 0, \qquad r>0. \tag{1.15}$$

Démonstration. Nous savons par la Proposition 1.2.2 que $v\in H^1_r$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(0,\infty)$ et posons $\xi(x)=\varphi(|x|)$. Alors $\xi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\subset H$ et la Définition 1.1.3 implique

$$0=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\xi + [\lambda - V(x)|u|^{p-1}]u\xi dx = \omega_N\int_0^\infty r^{N-1}\{v'\varphi' + [\lambda-\widetilde{V}(r)|v|^{p-1}]v\varphi\}dr,$$

Ainsi $r^{N-1}v'$ possède une dérivée au sens des distributions $(r^{N-1}v')':(0,\infty)\to\mathbb{R}$ telle que

$$(r^{N-1}v')' = r^{N-1}[\lambda-\widetilde{V}(r)|v|^{p-1}]v.$$

Puisque $r^{1-N} \in C^\infty(0,\infty)$, v' a une dérivée au sens des distributions $v'' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{aligned}(v')' &= (r^{1-N}[r^{N-1}v'])' = (1-N)r^{-N}[r^{N-1}v'] + r^{1-N}[r^{N-1}v']' \\ &= -\frac{(N-1)}{r}v' + [\lambda - \widetilde{V}(r)|v|^{p-1}]v,\end{aligned}$$

ce qui montre que v est une solution au sens des distributions de (1.15). □

Nous savons donc maintenant qu'il existe une fonction $\widetilde{\psi} \in H^1_r$ telle que $\psi(x) \equiv \widetilde{\psi}(|x|)$ et qui satisfait l'équation (1.15). Afin d'établir que ψ est une solution classique de (E_λ) et d'étudier ses propriétés asymptotiques, nous allons considérer l'équation un peu plus générale

$$v'' + \frac{N-1}{r}v' - \gamma v - \frac{\mu}{r^2}v + Q(r)v = 0, \qquad r > 0. \tag{1.16}$$

Nous supposons ici que $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ et $Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $r^k Q(r)$ est bornée sur $(0,\infty)$, où $k \in (0,2)$. Les résultats que nous allons prouver concernant (1.16) nous serons utiles plus tard dans un autre contexte.

Lemme 1.2.4 *Soit $v \in H^1_r$ une solution au sens des distributions de (1.16). Alors $v \in C^2(0,\infty)$ et v est une solution classique de (1.16). Si, de plus, $Q \in C^1(0,\infty)$, alors $v \in C^3(0,\infty)$.*

Démonstration. Comme $v \in H^1_r$, $v \in C(0,\infty)$ et $v' \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. Par conséquent, il découle de (1.16) que $v \in H^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$, ce qui implique $v \in C^1(0,\infty)$. Utilisant à nouveau (1.16), nous voyons que $v \in C^2(0,\infty)$. Si $Q \in C^1(0,\infty)$, (1.16) implique alors $v \in C^3(0,\infty)$. □

Définition 1.2.5 Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert non-borné de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Nous disons que f *tend vers zéro exponentiellement (vite) à l'infini* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\lim_{x\in\Omega,\ |x|\to\infty} e^{\epsilon|x|}f(x) = 0$. Nous écrivons alors $f(x) \to 0$ *exponentiellement (vite) lorsque* $|x| \to \infty$ ou simplement $f \to 0$ *exponentiellement (vite) à l'infini.*

Lemme 1.2.6 *Si $v \in H^1_r$ est une solution de (1.16), alors v jouit des propriétés suivantes.*

(i) *Les limites* $\lim_{r\to 0} v(r)$ *et* $\lim_{r\to 0} rv'(r)$ *existent et sont finies.*
De plus, si $\mu = 0$, on a $\lim_{r\to 0} rv'(r) = 0$.

(ii) *Si $Q \to 0$ exponentiellement à l'infini, alors $v, v' \to 0$ exponentiellement à l'infini.*

Démonstration. Le Lemme 1.2.6 est démontré dans l'Annexe C. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les propriétés principales de l'état fondamental ψ. En fait, le théorème que nous démontrons concerne toutes les solutions de (E_λ), éléments de H, qui sont positives, à symétrie sphérique et radialement décroissantes.

Théorème 1.2.7 *Supposons satisfaites les hypothèses (H0), (H2) et (H3) et soit $u \in H$ une solution non-triviale de (E_λ), positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante. Alors u jouit des propriétés suivantes.*

(i) $u \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ et u est une solution classique de (E_λ). De plus, si V satisfait (H1), alors $u \in C^3(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(ii) u est strictement positive et radialement strictement décroissante sur $\mathbb{R}^N$.

(iii) $u(x) \to 0$ et $|\nabla u(x)| \to 0$ exponentiellement lorsque $|x| \to \infty$.

Démonstration. Soit $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $u(x) = v(|x|)$ pour $|x| > 0$.

(i) La continuité de u découle du Lemme 2.1.4 et en fait, $u \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \tag{1.17}$$

Alors v est borné sur $(0,\infty)$ et l'on obtient que $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ en appliquant le Lemme 1.2.4 à l'équation (1.15) en posant dans (1.16) $\gamma = \lambda$, $\mu = 0$ et $Q(r) \equiv \widetilde{V}(r)|v(r)|^{p-1}$. Ainsi, u est automatiquement une solution classique de (E_λ) sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Par le Lemme 1.2.4, on voit également que l'on a $u \in C^3(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ si $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(ii) Nous savons de la Proposition 1.2.3 et du Lemme 1.2.4 que v est une solution classique non-triviale de l'équation différentielle ordinaire (1.15), ce qui implique qu'elle ne peut être constante sur un intervalle. De plus, par hypothèse, v est une fonction positive et décroissante sur $(0,\infty)$. Elle est donc strictement positive et strictement décroissante sur $(0,\infty)$.

(iii) La Proposition 4.4 de [45] assure que les solutions classiques de l'équation linéaire $\Delta u - \lambda u + q(x)u = 0$ sur $\mathbb{R}^N$ avec $\lambda > 0$ qui tendent vers zéro à l'infini tendent vers zéro exponentiellement vite à l'infini, pourvu que $q(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. C'est une conséquence du principe du maximum. Grâce à (1.17), nous obtenons donc que $|u(x)| \to 0$ exponentiellement lorsque $|x| \to \infty$ en appliquant cette proposition à (E_λ) avec $q(x) \equiv V(x)|u(x)|^{p-1}$. Il découle alors du Lemme 1.2.6(ii) appliqué à (1.15) que $v' \to 0$ exponentiellement vite à l'infini et donc que $|\nabla u(x)| = |v'(|x|)| \to 0$ exponentiellement lorsque $|x| \to \infty$. $\square$

Remarque 1.2.8 Si, de plus, V est borné, alors $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Voir par exemple le Lemme 4.5 de [45] pour ce résultat. En revanche, sans cette hypothèse supplémentaire, (H2) garantit seulement que la fonction V n' “explose” pas plus vite que $|x|^{-k}$ lorsque $x \to 0$, où $k \in (0,2)$. Mais cette prévention n'est pas suffisante pour assurer que les solutions de (E_λ) sont même dérivables à l'origine. Considérons en effet le cas où $V(x) = |x|^{-k}$ avec $k \in (1,2)$, et montrons que $\psi \notin C^1(\mathbb{R}^N)$. Nous avons vu que la fonction $\widetilde{\psi} \in H^1_r$ telle que $\psi(x) = \widetilde{\psi}(|x|)$ satisfait l'EDO (1.15). Nous avons alors

$$(r^{N-1}\widetilde{\psi}')' = r^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi} - r^{-k}\widetilde{\psi}^p] \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Ainsi, pour $0 < r < 1$,

$$\widetilde{\psi}'(1) - r^{N-1}\widetilde{\psi}'(r) = \int_r^1 t^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi}(t) - t^{-k}\widetilde{\psi}(t)^p]dt$$

et donc

$$\widetilde{\psi}'(r) = r^{1-N}\{\widetilde{\psi}'(1) - \int_r^1 t^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi}(t) - t^{-k}\widetilde{\psi}(t)^p]dt\}.$$

Supposons par l'absurde que $\widetilde{\psi}'$ reste bornée lorsque $r \to 0$. On a alors

$$\widetilde{\psi}'(1) - \int_r^1 t^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi}(t) - t^{-k}\widetilde{\psi}(t)^p]dt \to 0 \quad \text{lorsque } r \to 0.$$

Par la règle de Bernoulli-L'Hospital, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\widetilde{\psi}'(r) &= \lim_{r\to 0}\frac{\widetilde{\psi}'(1) - \int_r^1 t^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi}(t) - t^{-k}\widetilde{\psi}(t)^p]dt}{r^{N-1}} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r^{N-1}[\lambda\widetilde{\psi}(r) - r^{-k}\widetilde{\psi}(r)^p]}{(N-1)r^{N-2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\lambda\widetilde{\psi}(r) - r^{1-k}\widetilde{\psi}(r)^p}{N-1} = -\infty\end{aligned}$$

pour $k > 1$, car $\widetilde{\psi}(0) > 0$. Par conséquent, $\widetilde{\psi}'(r) \to -\infty$ lorsque $r \to 0$, contradiction.

1.3 Unicité

Dans cette section, nous supposons que $N \geq 3$. Nous travaillons sous les hypothèses (H1) à (H4) et avec $\lambda > 0$ fixé. Nous montrons qu'il est alors justifié d'appliquer à (E_λ) un théorème d'unicité dû à Yanagida, le Théorème 2.2 de [53]. Ce théorème très technique fournit un résultat d'unicité des plus généraux concernant les solutions positives de l'équation

$$\Delta u + g(|x|)u + h(|x|)u^p = 0 \tag{1.18}$$

sur $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$ avec $0 < R \leq \infty$, $N \geq 3$ et $p > 1$. Moyennant l'abus de notation $u(x) \equiv u(r)$ pour $|x| = r$, toute solution (classique) radiale de (1.18) satisfait l'EDO du deuxième ordre

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' + g(r)u + h(r)u^p = 0. \tag{1.19}$$

Le papier [53] est consacré à la question de l'unicité des solutions positives de (1.19) sur un intervalle $[0, R]$ où $R > 0$ peut être fini ou infini. Les deux cas sont respectivement traités dans les Théorèmes 2.1 et 2.2. Nous sommes bien sûr intéressés par la situation où $R = \infty$. Dans ce cas-là, la discussion dans [53] porte plus précisément sur l'unicité des solutions de (1.19) qui satisfont

$$u(0) < \infty, \quad u(r) > 0 \text{ pour tout } r > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \tag{1.20}$$

Les hypothèses de base concernant les coefficients g et h sont les suivantes.

(A1) $g, h \in C^1(0, \infty)$.
(A2) $r^{2-\sigma}g(r) \to 0$ et $r^{2-\sigma}h(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ pour un $\sigma > 0$.

L'auteur note que, sous ces conditions, toute solution u de (1.19)-(1.20) appartient à $C[0, R) \cap C^2(0, R)$ et satisfait $ru'(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$. Il renvoie à [34] pour ces résultats.

Dans notre contexte, nous nous intéressons à la situation qui correspond à l'EDO (1.15), à savoir

$$g(r) \equiv -\lambda \quad \text{et} \quad h(r) \equiv \widetilde{V}(r), \tag{1.21}$$

si bien que (A1) et (A2) sont satisfaites puisque, par (H2), $r^{k+\epsilon}\widetilde{V}(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ pour tout $\epsilon > 0$, avec $k \in (0, 2)$. Sous ces hypothèses, le Théorème 2.2 de [53] concernant le cas $R = \infty$ peut être formulé comme suit.

Théorème 1.3.1 *Si les conditions (C1)-(C6) ci-dessous sont satisfaites, alors il existe au plus une solution de (1.19)-(1.20) qui vérifie (C7).*

Nous utilisons maintenant ce théorème pour prouver le résultat d'unicité suivant.

Corollaire 1.3.2 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H4) sont vérifiées et que $N \geq 3$. Il existe au plus une solution non-triviale de (E_λ) qui soit positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Démonstration. Soit u une solution non-triviale de (E_λ) qui soit positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante. Il découle du Théorème 1.2.7 que u satisfait (1.20). Il nous suffit donc d'exposer les conditions (C1) à (C6) intervenant dans le Théorème 1.3.1 (et qui ne concernent que les coefficients de (1.19)), de montrer qu'elles sont satisfaites, puis de vérifier que u satisfait la condition (C7). Les hypothèses (C1) à (C7) portent sur les trois fonctions suivantes, J, G and H, dépendant d'un paramètre $m \in [0, N-2]$:

$$\begin{aligned} J(r; u, m) \equiv & \; r^{m+2} u'(r)^2 + (2N-4-m) r^{m+1} u'(r) u(r) \\ & + (N-2-m)(2N-4-m) r^m u(r)^2/2 \\ & + r^{m+2} g(r) u(r)^2 + 2 r^{m+2} h(r) u(r)^{p+1}/(p+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(r; m) \equiv & \; r^{m+2} g'(r) - 2(N-3-m) r^{m+1} g(r) \\ & + m(N-2-m)(2N-4-m) r^{m-1}/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(r; m) \equiv & \; 2 r^{m+2} h'(r)/(p+1) \\ & - \{2N-4-m-2(m+2)/(p+1)\} r^{m+1} h(r). \end{aligned}$$

Tenant compte de (1.21), ces fonctions sont ici données explicitement par

$$\begin{aligned} J(r; u, m) \equiv & \; r^{m+2} u'(r)^2 + (2N-4-m) r^{m+1} u'(r) u(r) \\ & + (N-2-m)(2N-4-m) r^m u(r)^2/2 \\ & - \lambda r^{m+2} u(r)^2 + 2 r^{m+2} \widetilde{V}(r) u(r)^{p+1}/(p+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(r; m) \equiv & \; 2\lambda (N-3-m) r^{m+1} \\ & + m(N-2-m)(2N-4-m) r^{m-1}/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(r; m) \equiv & \; 2 r^{m+2} \widetilde{V}'(r)/(p+1) \\ & - \{2N-4-m-2(m+2)/(p+1)\} r^{m+1} \widetilde{V}(r). \end{aligned}$$

(C1) exige que $h(r) \geq 0$ pour tout $r > 0$ et $h(r) > 0$ pour un $r > 0$, ce qui est vrai par (H3).

(C2) exige que $G(r; N-2) \leq 0$ pour tout $r > 0$. Dans notre cas, c'est équivalent à $-2\lambda r^{N-1} \leq 0$ pour tout $r > 0$, ce qui est vrai.

(C3) exige que, pour tout $m \in [0, N-2)$, il existe $\alpha(m) \in [0, \infty]$ tel que $G(r; m) \geq 0$ pour $r \in (0, \alpha(m))$ et $G(r; m) \leq 0$ pour $r \in (\alpha(m), \infty)$. Si $\alpha(m) = 0$ (resp. $\alpha(m) = \infty$), cela signifie que $G(r; m) \leq 0$ (resp. $G(r; m) \geq 0$) pour tout $r > 0$. Écrivant G comme

$$G(r; m) = r^{m-1} \{2\lambda (N-3-m) r^2 + m(N-2-m)(N-2-m/2)\},$$

nous voyons que $\alpha(m)$ dépend de m via les coefficients du polynôme du deuxième degré entre accolades.

Si $m \in [0, N-3]$, on a

$$N-3-m \geq 0 \quad \text{et} \quad m(N-2-m)(N-2-m/2) \geq 0$$

et l'on peut choisir $\alpha(m) = \infty$.

Si $m \in (N-3, N-2)$, on a

$$N-3-m < 0 \quad \text{et} \quad m(N-2-m)(N-2-m/2) > 0$$

et $\alpha(m)$ est la racine positive de $2\lambda(N-3-m)r^2 + m(N-2-m)(N-2-m/2) = 0$.

(C4) exige que $H(r;0) \leq 0$ pour tout $r > 0$. Dans notre cas, cela revient à dire que

$$\frac{2}{p+1} r^2 \widetilde{V}'(r) - \left(2N - 4 - \frac{4}{p+1}\right) r\widetilde{V}(r) \leq 0 \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Tout d'abord, par (H3), nous avons que $\widetilde{V}(r) > 0$ et $\widetilde{V}'(r) < 0$ pour tout $r > 0$. D'autre part,

$$2N - 4 - \frac{4}{p+1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p \geq \frac{4-N}{N-2}.$$

Or $\frac{4-N}{N-2} \leq 1$ pour tout $N \geq 3$. Par conséquent, puisque $p > 1$, (C4) est vérifiée.

(C5) exige que, pour tout $m \in (0, N-2]$, il existe $\beta(m) \in [0, \infty]$ tel que $H(r;m) \geq 0$ pour $r \in (0, \beta(m))$ et $H(r;m) \leq 0$ pour $r \in (\beta(m), \infty)$. Si $\beta(m) = 0$ (resp. $\beta(m) = \infty$), cela signifie que $H(r;m) \leq 0$ (resp. $H(r;m) \geq 0$) pour tout $r > 0$. C'est pour cette condition que nous avons besoin de l'hypothèse (H4). Écrivant H comme

$$H(r;m) = r^{m+1}\widetilde{V}(r) \left\{ \left(\frac{2}{p+1}\right) r \frac{\widetilde{V}'(r)}{\widetilde{V}(r)} - a_m \right\}$$

où $a_m = 2N - 4 - m - 2(m+2)/(p+1)$, nous voyons que (C5) est satisfaite si $r\widetilde{V}'(r)/\widetilde{V}(r)$ est décroissante, ce qui est précisément l'hypothèse (H4). Par conséquent, (C5) est vérifiée.

(C6) concerne le cas où $g \equiv 0$ et n'intervient donc pas dans la discussion.

(C7) demande que $J(r; u(r), m) \to 0$ lorsque $r \to \infty$ pour tout $m \in [0, N-2]$, condition satisfaite si u est une solution de (E_λ) vérifiant les hypothèses du Théorème 1.2.7.

Le corollaire est démontré. □

1.4 Non-dégénérescence

Dans cette section, nous travaillons à nouveau avec $N \geq 2$. Pour $\lambda > 0$ fixé, considérons la fonctionnelle $S_\lambda : H \to \mathbb{R}$ définie dans la Section 1.1. Nous savons que $S_\lambda \in C^2(H, \mathbb{R})$ et nous posons $T_\lambda = S'_\lambda \in C^1(H, H^*)$. La fonction T_λ est donnée explicitement par

$$T_\lambda(u) = -\Delta u + \lambda u - V(x)|u|^{p-1}u,$$

où nous interprétons le membre de droite comme un élément de H^* en posant

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^* \times H} \equiv \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{pour tout } u, v \in H, \tag{1.22}$$

et en identifiant L^2 avec un sous-espace de H^* par

$$\langle u, v \rangle_{H^* \times H} \equiv \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \quad \text{pour tout } u \in L^2, v \in H. \tag{1.23}$$

Remarque 1.4.1 Notez qu'avec ces conventions, dire que $u \in H$ est une solution faible de (E_λ) revient à dire que $T_\lambda(u) = -\Delta u + \lambda u - V(x)|u|^{p-1}u = 0$ dans H^*.

Pour tout $u \in H$, $T'_\lambda(u) \in L(H, H^*)$ et nous avons

$$\langle T'_\lambda(u)v, w\rangle_{H^* \times H} = S''_\lambda(u)[v, w] \quad \text{pour tout } u, v, w \in H$$

ou encore, plus explicitement,

$$T'_\lambda(u)v = -\Delta v + \lambda v - pV(x)|u|^{p-1}v \quad \text{pour tout } u, v \in H.$$

Définition 1.4.2 Une solution faible non-triviale de (E_λ), $u \in H \setminus \{0\}$, $T_\lambda(u) = 0$, est dite *non-dégénérée* si $T'_\lambda(u) : H \to H^*$ est un isomorphisme.

Sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3), le Théorème 1.1.8 nous assure qu'il existe un minimiseur ψ_λ du problème variationnel (1.5). D'autre part, ψ_λ est une fonction positive, radiale et strictement radialement décroissante et nous savons par la Proposition 1.1.10 que tout état fondamental a ces propriétés (au signe près). Le but de cette section est de prouver que tout état fondamental (positif) ψ_λ est une solution non-dégénérée de (E_λ). Pour ce faire, nous effectuons une démonstration par l'absurde procédant en plusieurs étapes. Tout d'abord, le lemme suivant montre qu'il nous suffit d'étudier le noyau de l'opérateur $T'_\lambda(\psi_\lambda) : H \to H^*$.

Lemme 1.4.3 *Supposons que V satisfait les hypothèses (H0) et (H2) et soit $z \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. L'opérateur linéaire $C : H \to H^*$ défini par $Cv = V(x)z(x)v$ pour tout $v \in H$ est compact.*

Démonstration. La démonstration du Lemme 1.4.3 est très similaire à celle du Lemme 1.1.2 et nous la laissons au soin du lecteur. □

En effet, ce résultat implique que $T'_\lambda(\psi_\lambda) = -\Delta + \lambda - pV(x)\psi_\lambda^{p-1}$ est une perturbation compacte de $-\Delta + \lambda : H \to H^*$, ce dernier opérateur étant un isomorphisme pour tout $\lambda > 0$. Par conséquent, pour montrer que $T'_\lambda(\psi_\lambda) : H \to H^*$ est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'il est injectif. Nous supposons alors par l'absurde qu'il existe $v \in H \setminus \{0\}$ tel que

$$-\Delta v + \lambda v - pV(x)\psi_\lambda^{p-1}v = 0 \quad \text{dans } H^*. \tag{1.24}$$

Nous procédons ensuite de la façon suivante. Dans un premier temps, nous montrons que si $v \in H$ est solution de (1.24), alors v est une fonction radiale. Nous notons $\widetilde{v} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la fonction qui satisfait $v(x) = \widetilde{v}(|x|)$ pour $|x| > 0$ et $\widetilde{\psi_\lambda} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\psi_\lambda(x) = \widetilde{\psi_\lambda}(|x|)$ pour $|x| > 0$. Nous sommes ramené à l'étude d'une équation différentielle ordinaire pour la fonction $\widetilde{v}$:

$$-\widetilde{v}'' - \frac{N-1}{r}\widetilde{v}' + \lambda\widetilde{v} - p\widetilde{V}(r)\widetilde{\psi_\lambda}^{p-1}\widetilde{v} = 0.$$

Nous appliquons alors à cette équation la théorie spectrale pour les opérateurs différentiels de Sturm-Liouville. Nous obtenons ainsi que, si $v \in H \setminus \{0\}$ est solution de (1.24), la fonction $\widetilde{v}$ possède un et un seul zéro sur $(0, \infty)$. Ce résultat est une conséquence de la caractérisation variationnelle de ψ_λ et, plus précisément, du Lemme 1.1.12 qui implique que l'indice de Morse de l'opérateur $R^{-1}T'_\lambda(\psi_\lambda) : H \to H$ est égal à 1, où $R \equiv -\Delta + 1 : H \to H^*$ est l'isomorphisme de Riesz. Utilisant cette propriété de $\widetilde{v}$ et deux identités intégrales dérivées des EDO satisfaites respectivement par $\widetilde{v}$ et par $\widetilde{\psi_\lambda}$, nous arrivons finalement à contredire la non-trivialité de v.

Avant de montrer que v est radiale, nous avons besoin d'un peu plus de régularité.

Lemme 1.4.4 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont vérifiées et soit $v \in H$ une solution de (1.24). Alors $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Ce résultat découle du Lemme D.1 de l'Annexe D. □

Remarque 1.4.5 La preuve du Lemme 1.4.4 montre que $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ si $2 < N/b$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $0 < b < 2$ lorsque $N \geq 4$, pour $0 < b < 3/2$ si $N = 3$ et pour $0 < b < 1$ si $N = 2$.

Lemme 1.4.6 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H3) sont vérifiées. Si $v \in H$ est solution de (1.24), alors v est une fonction radiale.*

Démonstration. Comme $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, v admet une décomposition en harmoniques sphériques (c.f. Annexe E) de la forme

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} v_k^m(r) Y_k^m(\vartheta), \tag{1.25}$$

où $r = |x|$ et $\vartheta = x/r$ pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Dans cette représentation,

$$a_k = \binom{k}{N+k-1} - \binom{k-2}{N+k-3} \quad \text{pour } k \geq 2, \quad a_1 = N \text{ et } a_0 = 1.$$

Y_k^m, $1 \leq m \leq a_k$, est une harmonique sphérique satisfaisant

$$\Delta Y_k^m = -\frac{\mu_k}{r^2} Y_k^m \quad \text{pour } m = 1, \ldots, a_k, \tag{1.26}$$

avec $\mu_k = k(N+k-2)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\{Y_k^m\}$ est une base orthonormée de $L^2(S^{N-1})$ et la fonction $v_k^m(r)$ est donc donnée par la projection de v sur l'harmonique sphérique Y_k^m :

$$v_k^m(r) = \int_{S^{N-1}} v(r\vartheta) Y_k^m(\vartheta) d\vartheta \quad \text{pour } m = 1, \ldots, a_k, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.27}$$

Remarquons que $v_k^m \in C(0, \infty)$ car $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ par le Lemme 1.4.4. La série (1.25) est convergente au sens de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous allons montrer que $v_k^m \equiv 0$ pour $m = 1, \ldots, a_k$, pour tout $k \geq 1$.

Puisque v satisfait (1.24), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} v\{-\Delta\varphi + \lambda\varphi - pV(x)\psi^{p-1}\varphi\} dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.28}$$

Posant $\varphi(x) = \xi(|x|) Y_k^m(x/|x|)$ pour $\xi \in C_0^\infty(0, \infty)$, on a que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et, utilisant (1.26) et (1.28),

$$\int_0^\infty \int_{S^{N-1}} r^{N-1} v\big\{-\xi'' - \frac{N-1}{r}\xi' + \frac{\mu_k}{r^2}\xi + \lambda\xi - p\widetilde{V}(r)\widetilde{\psi_\lambda}^{p-1}\xi\big\} Y_k^m(\vartheta) d\vartheta dr = 0.$$

Cette relation, (1.27) et le théorème de Fubini impliquent

$$\int_0^\infty r^{N-1} v_k^m \big\{-\xi'' - \frac{N-1}{r}\xi' + \frac{\mu_k}{r^2}\xi + \lambda\xi - p\widetilde{V}(r)\widetilde{\psi_\lambda}^{p-1}\xi\big\} dr = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in C_0^\infty(0, \infty).$$

Il découle alors du Lemme 1.2.4 que $v_k^m \in C^3(0, \infty)$ et que v_k^m est solution de l'EDO

$$(v_k^m)'' + \frac{N-1}{r}(v_k^m)' - \lambda v_k^m - \frac{\mu_k}{r^2} v_k^m + p\widetilde{V}(r)\widetilde{\psi_\lambda}^{p-1} v_k^m = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons $w = v_k^m$. Ainsi, $w \in C^3(0,\infty)$ et

$$w'' + \frac{N-1}{r}w' - \lambda w - \frac{\mu_k}{r^2}w + p\widetilde{V}(r)\widetilde{\psi_\lambda}^{p-1}w = 0. \tag{1.29}$$

Pour la fin de la démonstration, nous posons $\psi = \widetilde{\psi_\lambda}$ et nous rappelons que $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est solution de l'EDO (1.15), i.e. que

$$\psi'' + \frac{N-1}{r}\psi' - \lambda\psi + \widetilde{V}(r)\psi^p = 0. \tag{1.30}$$

Puisque $\psi \in C^3(0,\infty)$ par le Lemme 1.2.4, on peut dériver les deux membres de (1.30) par rapport à r, ce qui donne

$$\psi''' + \frac{N-1}{r}\psi'' - \frac{N-1}{r^2}\psi' - \lambda\psi' + \widetilde{V}'(r)\psi^p + p\widetilde{V}(r)\psi^{p-1}\psi' = 0. \tag{1.31}$$

En posant $\zeta = \psi'$, (1.31) devient

$$\zeta'' + \frac{N-1}{r}\zeta' - \lambda\zeta - \frac{N-1}{r^2}\zeta + \widetilde{V}'(r)\psi^p + p\widetilde{V}(r)\psi^{p-1}\zeta = 0. \tag{1.32}$$

Écrivons maintenant $Su \equiv u'' + \frac{N-1}{r}u' - \lambda u$. Pour $0 \le \alpha < \beta \le \infty$, les équations (1.29) et (1.32) fournissent l'identité de Lagrange suivante pour w et ζ :

$$\begin{aligned} r^{N-1}(\zeta w' - \zeta' w)\,|_\alpha^\beta &= \int_\alpha^\beta r^{N-1}\{\zeta Sw - wS\zeta\}dr \\ &= (\mu_k - N + 1)\int_\alpha^\beta r^{N-3}w\zeta dr + \int_\alpha^\beta r^{N-1}\widetilde{V}'\psi^p w dr. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Supposons maintenant que $w \not\equiv 0$ et, sans perte de généralité, soit (α,β) un intervalle maximal où $w > 0$.
Si $\alpha > 0$, alors $w(\alpha) = 0$ et $w'(\alpha) > 0$.
Si $\beta < \infty$, alors $w(\beta) = 0$ et $w'(\beta) < 0$.
D'autre part, les fonctions w et ψ satisfont les hypothèses du Lemme 1.2.6 et $\zeta' = -(\frac{N-1}{r}\psi' - \lambda\psi + \widetilde{V}(r)\psi^p)$ par (1.30). Par conséquent,

$$\lim_{r\to 0} r^{N-1}(\zeta w' - \zeta' w) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} r^{N-1}(\zeta w' - \zeta' w) = 0.$$

Alors, comme $\zeta = \psi' < 0$, nous avons dans tous les cas que $r^{N-1}(\zeta w' - \zeta' w)\,|_\alpha^\beta \ge 0$. Ainsi (1.33) implique

$$(\mu_k - N + 1)\int_\alpha^\beta r^{N-3}w\zeta dr \ge -\int_\alpha^\beta r^{N-1}\widetilde{V}'\psi^p w dr > 0$$

car $\widetilde{V}' < 0$ par (H3) et $w > 0$ sur (α,β). Mais $\zeta < 0$ et donc $\mu_k - N + 1 < 0$. Comme $\mu_k = k(N + k - 2)$, on doit avoir $k = 0$. Nous avons ainsi prouvé que la seule composante non-triviale dans la décomposition (1.25) est $v_0^1(r)Y_0^1(\vartheta)$. Or la première harmonique sphérique est constante, $Y_0^1 \equiv \omega_N^{-1/2}$, où ω_N est l'aire de S^{N-1}. Nous avons donc montré que $v(x) = \omega_N^{-1/2}v_0^1(|x|)$ et la démonstration est terminée. □

Dès maintenant, jusqu'à la fin de cette section, nous n'aurons affaire qu'à des EDO. Pour simplifier l'écriture, nous noterons $\psi = \widetilde{\psi_\lambda}$ et $w = \widetilde{v}$ les fonctions définies sur $(0,\infty)$ correspondant respectivement aux fonctions radiales ψ_λ et v. Nous avons vu dans la démonstration du Lemme 1.4.6 que $w = \omega_N^{-1/2} v_0^1$ est solution de l'équation (1.29) avec $\mu_k = 0$, soit

$$z'' + \frac{N-1}{r} z' - \lambda z + p\widetilde{V}(r)\psi^{p-1} z = 0. \tag{1.34}$$

De plus, nous savons par le Lemme 1.2.4 que toute solution au sens des distributions de cette équation, appartenant à H_r^1, est en fait une solution classique.

D'autre part, nous savons que ψ satisfait (1.30). Nous commençons par récrire ces deux équations en utilisant la fonction $f(r,s) \equiv -\lambda s + \widetilde{V}(r) s^p$, ce qui donne respectivement

$$z'' + \frac{N-1}{r} z' + \partial_2 f(r,\psi) z = 0 \tag{1.35}$$

et

$$\psi'' + \frac{N-1}{r} \psi' + f(r,\psi) = 0. \tag{1.36}$$

Nous établissons à présent deux identités intégrales qui découlent de ces équations.

Lemme 1.4.7 *Supposons les hypothèses (H0), (H2) et (H3) satisfaites. Soit $z \in H_r^1$ une solution (classique) de (1.35). Nous avons alors*

$$\int_0^\infty r^{N-1} \{ f(r,\psi) - \partial_2 f(r,\psi)\psi \} z dr = 0 \tag{1.37}$$

et

$$\int_0^\infty r^{N-1} \{ 2f(r,\psi) + r\partial_1 f(r,\psi) \} z dr = 0. \tag{1.38}$$

Démonstration. La preuve nécessite plusieurs intégrations par parties. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, en utilisant le Lemme 1.2.6, que tous les termes de bord sont nuls.
Pour prouver (1.37), multiplions (1.36) par $r^{N-1}z$, (1.35) par $r^{N-1}\psi$ et soustrayons. Nous obtenons

$$\int_0^\infty \{ (r^{N-1}\psi')' z - (r^{N-1} z')'\psi + r^{N-1}[f(r,\psi)z - \partial_2 f(r,\psi)\psi z] \} dr = 0.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^\infty r^{N-1} \{ f(r,\psi) z - \partial_2 f(r,\psi)\psi z \} dr = 0.$$

Pour la seconde identité, commençons par multiplier (1.35) par $r^{N-1} r\psi'$ et intégrons :

$$\int_0^\infty \{ (r^{N-1} z')' r\psi' + r^N \partial_2 f(r,\psi) z\psi' \} dr = 0.$$

Intégrant par parties le premier terme, nous avons

$$\int_0^\infty \{ -r^{N-1} z' (r\psi')' + r^N \partial_2 f(r,\psi) z\psi' \} dr = 0.$$

Par (1.36), $(r\psi')' = (2-N)\psi' - rf(r,\psi)$, d'où

$$\int_0^\infty \{ -r^{N-1} z' [(2-N)\psi' - rf(r,\psi)] + r^N \partial_2 f(r\psi) z\psi' \} dr = 0.$$

En intégrant par parties le terme en $z'\psi'$ (qui est absent si $N=2$) et en utilisant à nouveau (1.36), il vient

$$(N-2)\int_0^\infty r^{N-1}f(r,\psi)zdr+\int_0^\infty r^N\{f(r,\psi)z'+\partial_2 f(r,\psi)z\psi'\}dr=0. \tag{1.39}$$

Mais

$$\int_0^\infty r^N f(r,\psi)z'dr=-\int_0^\infty\{Nr^{N-1}f(r,\psi)+r^N\partial_1 f(r,\psi)+r^N\partial_2 f(r,\psi)\psi'\}zdr.$$

Par conséquent, (1.39) devient

$$\begin{aligned}&(N-2)\int_0^\infty r^{N-1}f(r,\psi)zdr\\&+\int_0^\infty\{-Nr^{N-1}f(r,\psi)z-r^N\partial_1 f(r,\psi)z-r^N\partial_2 f(r,\psi)\psi'z+r^N\partial_2 f(r,\psi)z\psi'\}=0,\end{aligned}$$

si bien que

$$\int_0^\infty r^{N-1}\{2f(r,\psi)+r\partial_1 f(r,\psi)\}zdr=0.$$

□

Pour établir que w a précisément un zéro dans $(0,\infty)$, nous allons utiliser la théorie spectrale des opérateurs différentiels agissant dans l'espace L^2_r défini sous 1.2.1. Nous pouvons définir une forme bilinéaire $\beta_\lambda : H^1_r\times H^1_r\to\mathbb{R}$ par

$$\beta_\lambda(y,z)=\int_0^\infty r^{N-1}\{y'z'+\lambda yz-p\widetilde{V}(r)\psi^{p-1}yz\}dr\quad\text{pour tout } y,z\in H^1_r. \tag{1.40}$$

Nous montrons dans l'Annexe F que β_λ est bien définie sur $H^1_r\times H^1_r$ et que, sous les hypothèses (H0), (H2) et (H3), il existe un unique opérateur auto-adjoint $A_\lambda : D(A_\lambda)\subset L^2_r\to L^2_r$ tel que

$$D(A_\lambda)=\{y\in H^1_r:\exists z\in L^2_r\ \forall\xi\in H^1_r\ \beta_\lambda(y,\xi)=\langle z,\xi\rangle_{L^2_r}\}\quad\text{et}\quad A_\lambda y=z. \tag{1.41}$$

La propriété suivante de β_λ est cruciale pour la suite de notre argument.

Lemme 1.4.8 *Supposons que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont vérifiées. La forme bilinéaire $\beta_\lambda : H^1_r\times H^1_r\to\mathbb{R}$ satisfait*

$$\beta_\lambda(\psi,\psi)<0\quad\textit{et}\quad\beta_\lambda(\xi,\xi)\geq 0\quad\textit{pour tout } \xi\in H^1_r \textit{ tel que } \langle\psi,\xi\rangle_{r,\lambda}.$$

Démonstration. Ce résultat est une traduction dans l'espace H^1_r du Lemme 1.1.12 pour les fonctions radiales de H. Il est démontré dans l'Annexe F. □

Nous pouvons alors prouver le résultat qui nous intéresse, conséquence des propriétés spectrales de l'opérateur de Sturm-Liouville A_λ.

Lemme 1.4.9 *Supposons que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont vérifiées et soit $z\in H^1_r$ une solution (classique) non-triviale de (1.34). Alors $z\in\ker(A_\lambda)$ et il existe un unique $r_0\in(0,\infty)$ tel que $z(r_0)=0$ et z change de signe au point r_0.*

Démonstration. Puisque z est une solution de (1.34), nous avons que $\beta_\lambda(z,\xi) = 0$ pour tout $\xi \in H^1_r$. Ainsi $z \in D(A_\lambda)$ et $A_\lambda z = 0$. Comme $z \neq 0$, 0 est donc une valeur propre de A_λ. De plus, c'est une valeur propre de multiplicité finie car, comme il est démontré à l'Annexe F, $\sigma_{\text{ess}}(A_\lambda) \subset [1,\infty)$. Il découle de (1.37) avec $f(r,s) \equiv -\lambda s + \widetilde{V}(r)s^p$ que $\int_0^\infty r^{N-1}\widetilde{V}\psi^p z dr = 0$, ce qui implique que z change de signe sur $(0,\infty)$, au moins une fois. Par conséquent (c.f. [52], Théorème 14.10), z ne peut être une fonction propre pour la plus petite valeur propre de A_λ. Ainsi A_λ a au moins une valeur propre négative, que l'on note $\lambda_1 < 0$. Nous allons voir qu'en fait, A_λ n'a qu'une valeur propre négative. Soit $\xi_1 \in D(A_\lambda)\setminus\{0\}$ tel que $A_\lambda\xi_1 = \lambda_1\xi_1$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda_2 < 0,\ \lambda_2 \neq \lambda_1$ et $\xi_2 \in D(A_\lambda)\setminus\{0\}$ tels que $A_\lambda\xi_2 = \lambda_2\xi_2$. Nous avons alors

$$\beta_\lambda(\xi_1,\xi_2) = \langle A_\lambda\xi_1,\xi_2\rangle_{L^2_r} = \lambda_1\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{L^2_r} \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(\xi_2,\xi_1) = \langle A_\lambda\xi_2,\xi_1\rangle_{L^2_r} = \lambda_2\langle\xi_2,\xi_1\rangle_{L^2_r}.$$

Par la symétrie de β_λ, il vient $(\lambda_1-\lambda_2)\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{L^2_r} = 0$. Donc $\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{L^2_r} = 0$ et $\beta_\lambda(\xi_1,\xi_2) = 0$. Or il est possible de choisir $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R},\ (\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$, tels que $\langle\psi,\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2\rangle_{r,\lambda} = 0$. Mais alors le Lemme 1.4.8 implique

$$\begin{aligned} 0 \le \beta_\lambda(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2) &= \alpha_1^2\beta_\lambda(\xi_1,\xi_1) + \alpha_2^2\beta_\lambda(\xi_2,\xi_2) \\ &= \alpha_1^2\langle A_\lambda\xi_1,\xi_1\rangle_{L^2_r} + \alpha_2^2\langle A_\lambda\xi_2,\xi_2\rangle_{L^2_r} = \alpha_1^2\lambda_1|\xi_1|^2_{L^2_r} + \alpha_2^2\lambda_2|\xi_2|^2_{L^2_r} < 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ainsi, A_λ a exactement une valeur propre négative et, par conséquent, z est une fonction propre de A_λ correspondant à sa deuxième valeur propre. Le Théorème 14.10 de [52] implique alors que z a exactement un zéro $r_0 \in (0,\infty)$ et que z change de signe en ce point. □

Nous pouvons maintenant prouver la non-dégénérescence de l'état fondamental ψ_λ.

Théorème 1.4.10 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H4) sont vérifiées. Tout minimiseur (positif) ψ_λ du problème (1.5) est une solution non-dégénérée de (E_λ).*

Démonstration. D'après les considérations du début de cette section, il suffit de montrer que $T'_\lambda(\psi_\lambda) : H \to H^*$ est injectif. Supposons par l'absurde qu'il existe $v \in H\setminus\{0\}$ tel que $T'_\lambda(\psi_\lambda)v = 0$. Par le Lemme 1.4.6, nous savons que v est radiale et que la fonction $w : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $v(x) = w(|x|)$ pour $|x| > 0$ est une solution classique de l'EDO (1.34). Par conséquent, le Lemme 1.4.9 implique qu'il existe un unique $r_0 \in (0,\infty)$ tel que $w(r_0) = 0$ et w change de signe en r_0. Sans perte de généralité, supposons que $w(r) > 0$ pour tout $r < r_0$ et $w(r) < 0$ pour tout $r > r_0$. Par le Lemme 1.4.7, nous avons que

$$\int_0^\infty r^{N-1}\{C[f(r,\psi) - \partial_2 f(r,\psi)\psi] + [2f(r,\psi) + r\partial_1 f(r,\psi)]\}w dr = 0$$

pour toute constante $C \in \mathbb{R}$. Avec $f(r,s) = -\lambda s + \widetilde{V}(r)s^p$, nous obtenons

$$\int_0^\infty r^{N-1}\{C(1-p)\widetilde{V}\psi^p - 2\lambda\psi + 2\widetilde{V}\psi^p + r\widetilde{V}'\psi^p\}w dr = 0.$$

Puisque $(1-p)\widetilde{V}\psi^p < 0$, nous pouvons récrire cette identité comme

$$\int_0^\infty r^{N-1}(1-p)\widetilde{V}\psi^p\{C - g(r)\}w dr = 0, \tag{1.42}$$

où

$$g(r) = \frac{2\lambda\widetilde{V}(r)^{-1}\psi^{1-p} - 2 - r\widetilde{V}'(r)/\widetilde{V}(r)}{1-p}.$$

Or $1-p < 0$, ψ est strictement décroissante, $\widetilde{V}$ est strictement décroissante par (H3) et $r\widetilde{V}'(r)/\widetilde{V}(r)$ est décroissante par (H4). Donc g est strictement décroissante sur $(0,\infty)$. Par conséquent, avec $C = g(r_0)$, l'intégrant dans (1.42) est strictement positif sur $(0,\infty)\setminus\{r_0\}$. Cette contradiction montre que l'on doit avoir $v = 0$. □

Chapitre 2

Bifurcation

Nous présentons dans ce chapitre des résultats d'existence et de bifurcation concernant l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2, \tag{E_λ}$$

qui a déjà été étudiée au Chapitre 1 par des méthodes variationnelles. *Nous ne supposerons pas que la fonction V est radiale dans la Section 2.1.* Les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11 démontrés dans la Section 2.1.2 sont des résultats *locaux* qui assurent l'existence dans $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ d'une branche de solutions de (E_λ) de la forme

$$\{(\lambda, u_\lambda) : 0 < \lambda < \lambda_0\} \tag{2.1}$$

et d'une branche de solutions de la forme

$$\{(\lambda, u_\lambda) : \lambda^\infty < \lambda < \infty\}. \tag{2.2}$$

Ce qu'on entend par *branche de solutions* est une application continue $\lambda \mapsto u_\lambda$, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeur dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et telle que u_λ est une solution faible de (E_λ). Par extension, nous appelons aussi branche de solutions le graphe d'une telle application. Dans les deux cas mentionnés ci-dessus, nous obtenons que l'application $\lambda \mapsto u_\lambda$ est de classe C^r si $V \in C^r(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, pour $r = 0, 1$. Pour prouver l'existence de la branche (2.1), nous prescrivons le comportement du coefficient V à l'infini et pour (2.2), le comportement de V à l'origine. Plus précisément, nous supposons pour (2.1) qu'il existe $B > 0$ et $b \in (0, 2)$ tels que (H2) est satisfaite avec $k = b$ et que, de plus, $|x|^b V(x) \to B$ lorsque $|x| \to \infty$. C'est-à-dire, nous imposons que V décroisse à l'infini exactement comme $B|x|^{-b}$ et n' "explose" pas plus vite que $B|x|^{-b}$ lorsque $x \to 0$. Pour démontrer l'existence de la branche (2.2), nous supposons qu'il existe $A > 0$ et $a \in (0, 2)$ tels que (H2) est vérifiée avec $k = a$ et que, de plus, $|x|^a V(x) \to A$ lorsque $x \to 0$. Cette fois les rôles sont inversés, nous exigeons que V "explose" précisément comme $A|x|^{-a}$ à l'origine et décroisse au moins comme $A|x|^{-a}$ à l'infini. Dans la Section 2.1.2, nous discutons également de façon détaillée le comportement asymptotique des solutions le long des branches (2.1) et (2.2).

La méthode que nous utilisons pour établir ces résultats locaux possède deux ingrédients importants. Le premier est un argument de *perturbation* qui consiste, après un changement d'échelle, à étudier l'équation (E_λ) au voisinage d'un point limite, $\lambda_{\mathrm{lim}} = 0$ pour la branche (2.1) et $\lambda_{\mathrm{lim}} = +\infty$ pour la branche (2.2). Dans les deux cas, l'*équation limite* obtenue après le changement de variables en laissant $\lambda \to \lambda_{\mathrm{lim}}$ est une équation particulière de la forme (E_λ). Les équations limites en question sont

$$\Delta u - u + B|x|^{-b}|u|^{p-1}u = 0 \quad \text{pour } \lambda_{\mathrm{lim}} = 0 \tag{2.3}$$

et

$$\Delta u - u + A|x|^{-a}|u|^{p-1}u = 0 \quad \text{pour } \lambda_{\mathrm{lim}} = +\infty. \tag{2.4}$$

Notez que ces équations satisfont les hypothèses (H1) à (H4). En particulier, elles sont invariantes par les rotations de $\mathbb{R}^N$, *même si la fonction V ne l'est pas.* Grâce aux résultats du Chapitre 1, nous savons que, pour $K > 0$ et $k \in (0, 2)$, l'équation

$$\Delta u - u + K|x|^{-k}|u|^{p-1}u = 0 \tag{2.5}$$

possède un état fondamental (positif), que nous notons $\psi_{K,k}$, et que $\psi_{K,k}$ est une solution non-dégénérée de (E_λ), au sens de la Définition 1.4.2. De plus, $\psi_{K,k}$ a les propriétés données par le Théorème 1.2.7. Si $N \geq 3$, le Corollaire 1.3.2 implique que $\psi_{K,k}$ est l'unique solution de (2.5) ayant ces propriétés. Notez que l'équation (2.5) satisfait les hypothèses (H1) à (H4) mais aussi les hypothèses (H5) à (H8) ci-dessous, avec $B = A = K$ et $b = a = k$. Pour mettre en oeuvre la méthode perturbative, nous introduisons un nouveau paramètre, $\mu = \lambda^{1/2}$ pour le cas où $\lambda_{\lim} = 0$ et $\tau = \lambda^{-1/2}$ pour le cas où $\lambda_{\lim} = +\infty$ et nous faisons dans chaque cas un changement de variables utilisant le nouveau paramètre, c.f. (2.6) et (2.8). Nous obtenons respectivement dans les nouvelles variables les équations ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et (E'$_\tau$). Notez que $\mu \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$ et que $\tau \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$. Les équations (2.3) et (2.4) correspondent respectivement à ce que l'on obtient en prenant formellement la limite $\mu \to 0$ dans ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et $\tau \to 0$ dans (E'$_\tau$).

Le deuxième ingrédient fondamental de la méthode est un argument de *continuation.* Dans chacune des deux situations, $\lambda_{\lim} = 0$ et $\lambda_{\lim} = +\infty$, l'idée est de produire une branche de solutions pour chacune des équations auxiliaires ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et (E'$_\tau$) en appliquant le théorème des fonctions implicites à une fonction appropriée, au point de $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ associé à la solution de l'équation limite correspondante, à savoir $(0, \psi_{B,b}) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ pour $\lambda_{\lim} = 0$ ($\mu = 0$) et $(0, \psi_{A,a}) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ pour $\lambda_{\lim} = +\infty$ ($\tau = 0$). Un élément essentiel pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites est la *non-dégénérescence* des solutions $\psi_{B,b}$ et $\psi_{A,a}$ des équations limites. L'existence de branches de solutions locales pour les équations auxiliaires ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et (E'$_\tau$) est établie dans la Section 2.1.1.

Dans les nouvelles variables, les solutions des équations ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et (E'$_\tau$) ainsi obtenues convergent respectivement dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, lorsque $\mu \to 0$ et $\tau \to 0$, vers les solutions $\psi_{B,b}$ et $\psi_{A,a}$ des équations limites (2.3) et (2.4). Nous déduisons de ce fait des informations précises concernant le comportement des normes $|u_\lambda|_{L^2}$, $|\nabla u_\lambda|_{L^2}$ et $|u_\lambda|_{L^\infty}$, le long des branches (2.1) et (2.2), lorsque $\lambda \to 0$ et $\lambda \to +\infty$ respectivement. Ces informations nous permettent de discuter divers phénomènes de *bifurcation*, de *bifurcation asymptotique* et de *concentration* pour l'équation (E_λ). Les résultats concernant les branches de solutions (2.1) et (2.2) sont indépendants et font l'objet de la Section 2.1.2.

Comme nous le verrons à la Section 2.1, l'intérêt des changements d'échelle (2.6) et (2.8) réside en ce qu'ils transforment le problème de l'étude de (E_λ) au voisinage de $\lambda = \lambda_{\lim}$ en un problème auquel le théorème des fonctions implicites peut être appliqué, ce qui n'est pas le cas dans les variables initiales, où des phénomènes de bifurcation ont précisément lieu.

La Section 2.2 traite de la *continuation globale* des branches de solutions obtenues à la Section 2.1. *Dans toute cette section, nous supposons que la fonction V est radiale.* Nous montrons que, sous les hypothèses (H1) à (H8), avec $N \geq 3$, il existe une unique fonction $u : (0, \infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ qui "réunit" ces deux branches et telle que $u_\lambda \equiv u(\lambda)$ est l'unique état fondamental (positif) de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$. L'hypothèse supplémentaire $N \geq 3$ est nécessaire pour utiliser le théorème d'unicité discuté à la Section 1.3. L'idée centrale de la démonstration est une application itérée du théorème des fonctions implicites. Partant de la branche (2.1) déjà existante, on produit ainsi une suite de branches de solutions, définies sur des intervalles de $\lambda > 0$ de plus en plus grands, et on montre que ce processus ne peut pas s' "arrêter". Il faut tout d'abord vérifier que l'on peut en effet appliquer le théorème des fonctions implicites à une fonction appropriée, en un point "convenable" $(\lambda_1, u_{\lambda_1})$ de la branche (2.1). Pour cela, nous avons besoin que u_{λ_1} soit une solution non-dégénérée de (E_λ). Nous nous assurons qu'un tel point existe en montrant qu'en fait, il existe $\widetilde{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tel que toutes les solutions u_λ sur la branche (2.1) pour $0 < \lambda < \widetilde{\lambda}$ sont des états fondamentaux et donc, d'après le Théorème 1.4.2, des solutions non-dégénérées. Ce résultat est démontré dans la Section 2.2.2. Il faut ensuite voir que l'on ne peut pas sortir de l'ensemble des états fondamentaux le long d'une branche de solution, propriété cruciale pour pouvoir itérer le théorème des fonctions implicites. Ceci nécessite en particulier d'obtenir des bornes *a priori* dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ sur les états fondamentaux de (E_λ). Ces résultats sont établis dans la Section 2.2.1. Le Théorème 2.2.10, qui donne l'existence d'une *branche globale* de solutions de (E_λ), est démontré à la Section 2.2.3.

2.1 Théorie locale

Commençons par formuler les hypothèses supplémentaires qui interviennent dans cette section.

(H5) Il existe $B > 0$ et $b \in (0, 2)$ tels que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^b V(x) = B \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to 0} |x|^b V(x) < \infty.$$

De plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$.

(H6) Posant $W_b(x) = x \cdot \nabla V(x) + bV(x)$, nous avons que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^b W_b(x) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to 0} |x|^b W_b(x) < \infty.$$

(H7) Il existe $A > 0$ et $a \in (0, 2)$ tels que

$$\lim_{x\to 0} |x|^a V(x) = A \quad \text{et} \quad \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a V(x) < \infty.$$

De plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$.

(H8) Posant $W_a(x) = x \cdot \nabla V(x) + aV(x)$, nous avons que

$$\lim_{x\to 0} |x|^a W_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a W_a(x) < \infty.$$

Il est clair que si (H5) ou (H7) est vérifiée, alors (H2) est vérifiée. Les hypothèses (H5) et (H6) sont utilisées pour établir les résultats de bifurcation concernant l'équation (E_λ) au voisinage de $\lambda = 0$ et les hypothèses (H7) et (H8) pour les résultats au voisinage de $\lambda = +\infty$, *qui sont indépendants des résultats au voisinage de* $\lambda = 0$. Bien entendu, les hypothèses (H6) et (H8) présupposent que V satisfait (H1), à savoir que $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Nous verrons que l'on peut s'en passer si l'on se contente d'obtenir des branches de solutions continues et non de classe C^1. Notez que, pour $K > 0$ et $k \in (0, 2)$, la fonction $V(x) = K|x|^{-k}$ satisfait (H5) et (H6) avec $B = K$ et $b = k$ ainsi que (H7) et (H8) avec $A = K$ et $a = k$.

Cette remarque sera amplifiée à la Section 2.2 mais notons déjà que les hypothèses (H5) et (H6) sont compatibles avec les hypothèses (H7) et (H8) pour autant que $0 < a \leq b$.

Dès maintenant et dans tout le chapitre, nous notons H l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, H^* sont dual, $\|\cdot\|$ sa norme usuelle et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire correspondant. Les changements de variables mentionnés dans l'introduction de ce chapitre sont définis de la façon suivante.

Pour l'étude de (E_λ) au voisinage de $\lambda = 0$, soit l'opérateur $T_0(\mu) : H \to H$ défini par

$$T_0(\mu)v(x) = \mu^{\frac{2-b}{p-1}} v(\mu x) \quad \text{pour } \mu > 0 \text{ et } v \in H. \tag{2.6}$$

Il n'est pas difficile de montrer que $T_0 \in C((0,\infty), L(H,H))$ et que $T_0(\mu)$ est inversible pour tout $\mu > 0$. D'autre part, si $u, v \in H$ sont tels que $u = T_0(\mu)v$, alors

$$|u|_{L^2}^2 = \mu^{\beta}|v|_{L^2}^2, \quad |\nabla u|_{L^2}^2 = \mu^{\beta+2}|\nabla v|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad |u|_{L^\infty} = \mu^{\frac{2-b}{p-1}}|v|_{L^\infty}, \tag{2.7}$$

où

$$\beta = \frac{4 - 2b - N(p-1)}{p-1}.$$

Posant alors $\lambda = \mu^2,\ \mu > 0$, $u = T_0(\mu)v$ et $y = \mu x \in \mathbb{R}^N$, l'équation ($E_\lambda$) pour $\lambda > 0$ devient

$$\Delta v - v + \mu^{-b}V(y/\mu)|v|^{p-1}v = 0. \tag{$\widetilde{E}_\mu$}$$

Sous les hypothèses (H0) et (H5), nous avons que $\mu^{-b}V(y/\mu) \to B|y|^{-b}$ lorsque $\mu \to 0$, pour tout $y \neq 0$. Il est donc naturel de considérer l'équation limite

$$\Delta v - v + B|y|^{-b}|v|^{p-1}v = 0. \tag{$\widetilde{E}_0$}$$

Concernant l'étude de (E_λ) au voisinage de $\lambda = +\infty$, nous définissons de façon analogue un opérateur $T_\infty(\tau) : H \to H$ par

$$T_\infty(\tau)v(x) = \tau^{-\frac{2-a}{p-1}} v(\tau^{-1}x) \quad \text{pour } \tau > 0 \text{ et } v \in H. \tag{2.8}$$

On montre également que $T_\infty \in C((0,\infty), L(H,H))$ et que $T_\infty(\tau)$ est inversible pour tout $\tau > 0$. De plus, si $u, v \in H$ vérifient $u = T_\infty(\tau)v$, on a

$$|u|_{L^2}^2 = \tau^{-\alpha}|v|_{L^2}^2, \quad |\nabla u|_{L^2}^2 = \tau^{-\alpha-2}|\nabla v|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad |u|_{L^\infty} = \tau^{-\frac{2-a}{p-1}}|v|_{L^\infty}, \tag{2.9}$$

où

$$\alpha = \frac{4 - 2a - N(p-1)}{p-1}.$$

Avec $\lambda = \tau^{-2},\ \tau > 0$, $u = T_\infty(\tau)v$ et $y = \tau^{-1}x \in \mathbb{R}^N$, l'équation ($E_\lambda$) pour $\lambda > 0$ devient

$$\Delta v - v + \tau^{a}V(\tau y)|v|^{p-1}v = 0. \tag{E'$_\tau$}$$

Sous les hypothèses (H0) et (H7), on a $\tau^a V(\tau y) \to A|y|^{-a}$ lorsque $\tau \to 0$, pour tout $y \neq 0$. Nous sommes donc amenés à considérer l'équation

$$\Delta v - v + A|y|^{-a}|v|^{p-1}v = 0. \tag{E'$_0$}$$

Afin de démontrer l'existence d'une branche de solutions de (E_λ) au voisinage de $\lambda = 0$, respectivement au voisinage de $\lambda = +\infty$, nous allons travailler sur le problème auxiliaire ($\widetilde{E}_\mu$) pour $\mu \geq 0$, respectivement sur le problème (E'$_\tau$) pour $\tau \geq 0$. Puisque ces deux problèmes présentent des analogies importantes, nous les traitons à la Section 2.1.1 dans une approche unifiée.

2.1.1 Étude des problèmes auxiliaires

Nous nous proposons de prouver dans cette section l'existence dans $\mathbb{R} \times H$ d'une branche de solutions de l'équation auxiliaire

$$\Delta u - u + z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u = 0, \tag{P$_s$}$$

où $k \in (0,2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et $z : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ est une fonction pour laquelle interviendront les hypothèses suivantes.

(z1) Il existe $K > 0$ tel que $z(\cdot, x) \in C(\mathbb{R})$ et $z(0,x) = K$ pour tout $x \neq 0$.

(z2) Il existe $M_1 > 0$ tel que $z(s,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $|z(s,\cdot)|_{L^\infty} \leq M_1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(z3) $z(\cdot,x) \in C^1(0,\infty)$ pour tout $x \neq 0$ et il existe $M_2 > 0$ tel que $\partial_s z(s,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $|\partial_s z(s,\cdot)|_{L^\infty} \leq M_2/s$ pour tout $s \in (0,\infty)$.

Nous définissons à présent une fonction non-linéaire $G : \mathbb{R} \times H \to H^*$ par

$$G(s,u) = z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u. \tag{2.10}$$

Il suit des résultats de l'Annexe B que la fonction G est bien définie et que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $G(s,\cdot) : H \to H^*$ est différentiable avec

$$D_u G(s,u)v = pz(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}v \quad \text{pour tout } u,v \in H. \tag{2.11}$$

En outre, la fonction G jouit des propriétés suivantes.

Lemme 2.1.1 *Soit $k \in (0,2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et supposons que les hypothèses (z1) et (z2) sont vérifiées.*

(i) $G \in C(\mathbb{R} \times H, H^*)$.

(ii) $D_u G \in C(\mathbb{R} \times H, L(H,H^*))$.

(iii) Si, en outre, (z3) est vérifiée, alors $G \in C^1((0,\infty) \times H, H^*)$ avec

$$D_s G(s,u) = \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u \quad \textit{pour tout } (s,u) \in (0,\infty) \times H. \tag{2.12}$$

Démonstration. (i) Fixons $(s,u) \in \mathbb{R} \times H$ et considérons $(h,v) \in \mathbb{R} \times H$ comme variable. Nous avons alors

$$\|G(s,u) - G(h,v)\|_{H^*} \leq \|G(s,u) - G(h,u)\|_{H^*} + \|G(h,u) - G(h,v)\|_{H^*},$$

où

$$G(h,u) - G(h,v) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(h, tu + (1-t)v)dt = \int_0^1 D_u G(h, tu + (1-t)v)(u-v)dt$$

et donc

$$\begin{aligned}\|G(h,u) - G(h,v)\|_{H^*} &\leq \int_0^1 \|D_u G(h, tu + (1-t)v)\|_{L(H,H^*)} dt \|u-v\| \\ &\leq D|z(h,\cdot)|_{L^\infty} \int_0^1 \|tu + (1-t)v\|^{p-1} dt \|u-v\|\end{aligned}$$

par le Lemme B.1(ii). Notez que la constante $D > 0$ est indépendante de h, u et v et que $|z(h,\cdot)|_{L^\infty} \leq M_1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ par l'hypothèse (z2). Si $\|u - v\| \leq 1$, nous avons que $\|tu + (1-t)v)\| \leq \|u\| + 1$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où

$$\|G(h,u) - G(h,v)\|_{H^*} \leq DM_1(\|u\| + 1)^{p-1}\|u - v\|$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $\|u - v\| \leq 1$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\|G(h,u) - G(h,v)\|_{H^*} < \varepsilon \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}, \quad \text{si } \|u - v\| < \delta.$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in H$, nous avons

$$\langle G(s,u) - G(h,u), \varphi\rangle_{H^* \times H} = \int_{\mathbb{R}^N} \{z(s,x) - z(h,x)\}|x|^{-k}|u|^{p-1}u\varphi dx.$$

Par conséquent, posant $h = s + r$ et $w_r = z(s,\cdot) - z(s+r,\cdot)$, il vient

$$\|G(s,u) - G(s+r,u)\|_{H^*} \leq \sup_{\varphi \in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |w_r||x|^{-k}|u|^p|\varphi|dx}{\|\varphi\|}.$$

Or $|w_r|_{L^\infty} \leq 2M_1$ et $w_r(x) \to 0$ lorsque $r \to 0$ pour tout $x \neq 0$ par les hypothèses (z1) et (z2). Étant donné $\varepsilon > 0$, le Lemme A.1(ii) implique alors qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\|G(s,u) - G(s+r,u)\|_{H^*} < \varepsilon \quad \text{si } |r| < \delta_1.$$

Ces inégalités montrent la continuité de G au point (s,u).

(ii) Suivant les notations de l'Annexe B, posons

$$B_s(u)v = z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}v \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R},\ u,v \in H.$$

Fixons à nouveau $(s,u) \in \mathbb{R} \times H$ et prenons $(h,v) \in \mathbb{R} \times H$ comme variable. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\|D_uG(s,u) - D_uG(h,v)\|_{L(H,H^*)} \\
&\qquad \leq \|D_uG(s,u) - D_uG(h,u)\|_{L(H,H^*)} + \|D_uG(h,u) - D_uG(h,v)\|_{L(H,H^*)} \\
&\qquad = p\{\|B_s(u) - B_h(u)\|_{L(H,H^*)} + \|B_h(u) - B_h(v)\|_{L(H,H^*)}\}.
\end{aligned}$$

Puisque $|z(h,\cdot)|_{L^\infty} \leq M_1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, la preuve du Lemme B.1(ii) implique (c.f. (B.2)) que les fonctions $\{B_h : H \to L(H,H^*)\}_{h\in\mathbb{R}}$ sont équicontinues au point u et, par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|B_h(u) - B_h(v)\|_{L(H,H^*)} < \varepsilon \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}, \quad \text{si } \|u - v\| < \delta.$$

D'autre part,

$$\|B_s(u) - B_h(u)\|_{L(H,H^*)} \leq \sup_{\varphi,\xi \in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |w_r||x|^{-k}|u|^{p-1}|\varphi||\xi|dx}{\|\varphi\|\|\xi\|}$$

où $h = s + r$ et w_r est comme dans la partie (i). Par le Lemme A.1(ii), nous avons alors

$$\lim_{r\to 0} \|B_s(u) - B_{s+r}(u)\|_{L(H,H^*)} = 0,$$

ce qui prouve la continuité de D_uG au point (s,u).

(iii) Fixons $s \in (0,\infty)$ et $u \in H$. Tout d'abord, remarquons que, par l'hypothèse (z3) et le Lemme B.1(i), $\partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u \in H^*$. Pour $r \neq 0$, nous avons alors

$$\left\langle \frac{G(s+r,u)-G(s,u)}{r} - \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u, \varphi \right\rangle_{H^*\times H} = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{z(s+r,x)-z(s,x)}{r} - \partial_s z(s,x) \right\} |x|^{-k}|u|^{p-1}u\varphi dx$$

pour tout $\varphi \in H$. Ainsi,

$$\left\| \frac{G(s+r,u)-G(s,u)}{r} - \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u \right\|_{H^*} \leq \sup_{\varphi\in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |q_r||x|^{-k}|u|^p|\varphi| dx}{\|\varphi\|}$$

où $q_r = \{z(s+r,\cdot)-z(s,\cdot)\}/r - \partial_s z(s,\cdot)$. Maintenant, pour $r \geq -s/2$ et $x \neq 0$, le théorème des accroissements finis donne

$$|z(s+r,x)-z(s,x)| \leq |\partial_s z(s+tr,x)||r|$$

pour un $t \in [0,1]$ et donc, par (z3),

$$\left| \frac{z(s+r,x)-z(s,x)}{r} \right| \leq \frac{M_2}{s/2} = \frac{2M_2}{s} \quad \text{pour tout } r \geq -s/2,\ x \neq 0.$$

Nous voyons donc que $|q_r|_{L^\infty} \leq 3M_2/s$ pour $r \geq -s/2$. D'autre part, $q_r(x) \to 0$ lorsque $r \to 0$ pour tout $x \neq 0$ et, par conséquent, le Lemme A.1(ii) implique

$$\left\| \frac{G(s+r,u)-G(s,u)}{r} - \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u \right\|_{H^*} \to 0 \quad \text{lorsque } r \to 0.$$

Donc G est dérivable par rapport à s au point $(s,u) \in (0,\infty)\times H$ et

$$D_sG(s,u) = \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u.$$

Finalement, pour $(h,v) \in (0,\infty)\times H$,

$$\|D_sG(s,u) - D_sG(h,v)\|_{H^*} \leq \|D_sG(s,u) - D_sG(h,u)\|_{H^*} + \|D_sG(h,u) - D_sG(h,v)\|_{H^*},$$

où

$$\|D_sG(s,u) - D_sG(h,u)\|_{H^*} \leq \sup_{\varphi\in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_s z(s,x) - \partial_s z(h,x)||x|^{-k}|u|^p|\varphi| dx}{\|\varphi\|}$$

et le Lemme A.1(ii) implique

$$\|D_sG(s,u) - D_sG(h,u)\|_{H^*} \to 0 \quad \text{lorsque } h \to s > 0.$$

D'autre part, puisque $\partial_s z(h,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour $h \geq s/2$, nous savons par le Lemme B.1(iii) que $D_sG(h,\cdot) \in C^1(H,H^*)$ avec

$$D_uD_sG(h,w)\xi = p\partial_s z(h,x)|x|^{-k}|w|^{p-1}\xi \quad \text{pour tout } w,\xi \in H.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|D_uD_sG(h,w)\|_{L(H,H^*)} \leq C\|w\|^{p-1} \quad \text{pour tout } w \in H,$$

où C est indépendant de $h \geq s/2$ car $|\partial_s z(h,\cdot)|_{L^\infty} \leq 2M_2/s$ pour tout $h \geq s/2$. Par conséquent, il suit du même raisonnement qu'au point (i) que

$$\|D_s G(h,u) - D_s G(h,v)\|_{H^*} \leq C(\|u\|+1)^{p-1}\|u-v\|$$

pour tout $h \geq s/2$ et tout $v \in H$ tel que $\|u-v\| \leq 1$, d'où la continuité de D_sG au point (s,u). Ainsi, $D_sG \in C((0,\infty)\times H, H^*)$ et, puisque nous savons déjà que $D_uG \in C((0,\infty)\times H, L(H,H^*))$, nous avons bien $G \in C^1((0,\infty)\times H, H^*)$. □

Nous définissons maintenant une fonction $F : \mathbb{R} \times H \to H^*$ par

$$F(s,u) = \Delta u - u + G(s,u) = \Delta u - u + z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u, \tag{2.13}$$

de sorte que, pour $s \in \mathbb{R}$, $u \in H$ satisfait (P_s) si et seulement si $F(s,u) = 0$. Nous allons prouver l'existence dans $\mathbb{R} \times H$ d'une branche de solutions $(s, U(s))$ de (P_s) en appliquant une version du théorème des fonctions implicites à la fonction F. Pour ce faire, nous avons besoin des ingrédients suivants. Tout d'abord, grâce à l'hypothèse (z1), nous savons que $F(0,\psi_{K,k}) = 0$, où $\psi_{K,k}$ est un état fondamental de (2.5). D'autre part, la fonction F jouit des propriétés suivantes.

Lemme 2.1.2 *Soit $k \in (0,2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et supposons que les hypothèses (z1) et (z2) sont vérifiées.*

(i) $F \in C(\mathbb{R} \times H, H^*)$.

(ii) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $F(s,\cdot) \in C^1(H,H^*)$ avec

$$D_uF(s,u)v = \Delta v - v + pz(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}v \quad \textit{pour tout } u,v \in H.$$

De plus, $D_uF \in C(\mathbb{R}\times H, L(H,H^*))$.

(iii) Si, en outre, (z3) est vérifiée, alors $F \in C^1((0,\infty)\times H, H^*)$ avec

$$D_sF(s,u) = D_sG(s,u) = \partial_s z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u \quad \textit{pour tout } (s,u) \in (0,\infty)\times H.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence triviale de (2.11) et du Lemme 2.1.1. □

Le dernier élément dont nous avons besoin pour utiliser le théorème des fonctions implicites est de savoir que $D_uF(0,\psi_{K,k}) : H \to H^*$ est un isomorphisme. Or il se trouve que

$$D_uF(0,\psi_{K,k})v = \Delta v - v + pK|x|^{-k}\psi_{K,k}^{p-1}v \quad \text{pour tout } v \in H,$$

si bien que, dans le contexte de (P_s), $D_uF(0,\psi_{K,k}) = -T_1'(\psi_{K,k})$ où T_λ est la fonction définie au début de la Section 1.4. Par conséquent, il découle de la non-dégénérescence de $\psi_{K,k}$ (c.f. Définition 1.4.2 et Théorème 1.4.10) que $D_uF(0,\psi_{K,k})$ est un isomorphisme.

Proposition 2.1.3 *Soit $k \in (0,2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et supposons que les hypothèses (z1) et (z2) sont satisfaites. Soit $\psi_{K,k}$ un état fondamental (positif) de (2.5). Il existe un nombre $s_1 > 0$ et une fonction $U \in C((-s_1,s_1),H)$ tels que $U(0) = \psi_{K,k}$ et, pour tout $s \in (-s_1,s_1)$, $U(s)$ est une solution faible non-triviale de (P_s). De plus, pour tout $s \in (-s_1,s_1)$, $U(s) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{|x|\to\infty} U(s)(x) = 0$ et $|U(s)|_{L^\infty} \leq C$, où $C > 0$ ne dépend pas de s.*
En outre, si (z3) est aussi satisfaite, il existe $s_2 \in (0,s_1)$ tel que $U \in C^1((0,s_2),H)$.

Démonstration. Tout d'abord, nous savons que $F(0,\psi_{K,k})=0$. D'autre part, D_uF est continue au point $(0,\psi_{K,k})\in\mathbb{R}\times H$ par le Lemme 2.1.2(ii) et $D_uF(0,\psi_{K,k}):H\to H^*$ est un isomorphisme par le Théorème 1.4.10. Alors, par une version du théorème des fonctions implicites (c.f. [24], Chapitre XVII, Section 4), il existe un ouvert $O\subset\mathbb{R}\times H$, un nombre $\epsilon>0$ et une unique fonction $\eta:(-\epsilon,\epsilon)\to H$ tels que $(0,\psi_{K,k})\in O$ et

$$\{(s,u)\in O : F(s,u)=0\}=\{(s,\eta(s)) : s\in(-\epsilon,\epsilon)\}.$$

Comme F est continue, nous avons $\eta\in C((-\epsilon,\epsilon),H)$. L'unicité de η et le fait que $\psi_{K,k}\neq 0$ impliquent que les solutions $\eta(s)$ sont non-triviales, pour tout $s\in(-\epsilon,\epsilon)$. Sinon, la courbe $\{(s,\eta(s)) : s\in(-\epsilon,\epsilon)\}$ aurait une intersection non vide avec la ligne de solutions triviales $\{(s,0) : s\in\mathbb{R}\}$, ce qui contredirait l'unicité des solutions dans O. Posant $s_1=\epsilon$ et $U=\eta$, la première partie de la proposition est démontrée.

Maintenant, la continuité de D_uF et le fait que l'ensemble des isomorphismes de H dans H^* est un sous-ensemble ouvert de $L(H,H^*)$ impliquent l'existence d'un nombre $\delta\in(0,\epsilon)$ tel que $D_uF(s,\eta(s))$ est un isomorphisme pour tout $s\in(-\delta,\delta)$. Fixons alors $h\in(0,\delta)$. Nous avons que $F(h,\eta(h))=0$. Puisque $D_uF(h,\eta(h))$ est un isomorphisme, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites à F au point $(h,\eta(h))\in\mathbb{R}\times H$ et obtenir ainsi un nombre $\epsilon_1>0$ et une fonction $\tilde\eta:(h-\epsilon_1,h+\epsilon_1)\to H$ tels que $F(s,\tilde\eta(s))=0$ pour tout $s\in(h-\epsilon_1,h+\epsilon_1)$. Pour $\epsilon_1>0$ assez petit, $h-\epsilon_1>0$ et, sous l'hypothèse (z3), le Lemme 2.1.2(iii) implique que $\tilde\eta\in C^1((h-\epsilon_1,h+\epsilon_1),H)$. Ainsi, choisissant ϵ_1 tel que $h-\epsilon_1>0$ et $h+\epsilon_1<\epsilon$, nous concluons en invoquant l'unicité que $\tilde\eta=\eta\mid_{(h-\epsilon_1,h+\epsilon_1)}\in C^1((h-\epsilon_1,h+\epsilon_1),H)$.

Comme ce raisonnement peut être appliqué à n'importe quel $h\in(0,\delta)$, il existe $\epsilon_2\in(0,\epsilon)$ tel que $\eta\mid_{(0,\epsilon_2)}\in C^1((0,\epsilon_2),H)$. Posant $s_2=\epsilon_2$, nous obtenons bien que $U\mid_{(0,s_2)}\in C^1((0,s_2),H)$.

Quitte à choisir $s_1>0$ plus petit, les informations supplémentaires découlent du lemme suivant. □

Lemme 2.1.4 *Supposons que $k\in(0,2)$, $1<p<1+\frac{4-2k}{N-2}$ et soit $\lambda>0$ et $z:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $z(s,\cdot)$ est bornée sur $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, uniformément en $s\in\mathbb{R}$. Pour tout $M>0$, il existe $C(M)>0$ tel que, pour tout $s\in\mathbb{R}$, si $u\in H$ est une solution de*

$$\Delta u-\lambda u+z(s,x)|x|^{-k}|u|^{p-1}u=0$$

vérifiant $\|u\|\leq M$, alors $u\in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $|u|_{L^\infty}\leq C(M)$. De plus, $u(x)\to 0$ lorsque $|x|\to\infty$.

Démonstration. Le Lemme 2.1.4 est démontré dans l'Annexe D. □

Remarque 2.1.5 Sans l'hypothèse supplémentaire $N\geq 3$, nous ne savons pas s'il y a unicité de l'état fondamental (positif) de (2.5). Il pourrait donc y avoir plusieurs branches de solutions construites comme ci-dessus, une pour chaque état fondamental de (2.5).

Le problème ($\widetilde{\mathbf{E}}_\mu$)

Pour appliquer la Proposition 2.1.3 à l'équation ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$), nous posons $s=\mu$ pour $\mu\geq 0$ et nous commençons par étendre le problème à $s\in\mathbb{R}$ en considérant

$$\Delta u-u+z_1(s,x)|x|^{-b}|u|^{p-1}u=0,\quad s\in\mathbb{R}, \qquad (\widetilde{\mathrm{P}}_s)$$

où $z_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$z_1(s,x) = \begin{cases} (|x|/|s|)^b V(x/|s|) & \text{si } s \neq 0, \\ B & \text{si } s = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous supposons alors que (H0) et (H5) sont vérifiées, ce qui implique que z_1 satisfait (z1) et (z2) avec $K = B > 0$. Si l'on suppose, de plus, (H1) et (H6), alors (z3) est aussi vérifiée par z_1. En effet, nous avons que

$$\partial_s z_1(s,x) = -s^{-1}|x/s|^b W_b(x/s) \quad \text{pour tout } s > 0,\ x \neq 0, \tag{2.15}$$

où W_b est la fonction qui apparaît dans l'hypothèse (H6). La Proposition 2.1.3 nous donne alors l'existence d'une branche de solutions $\{(s, U(s)) : s \in (-s_1, s_1)\} \subset \mathbb{R} \times H$ pour le problème $(\widetilde{\mathrm{P}}_s)$. On en déduit en particulier le résultat suivant.

Proposition 2.1.6 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H5) sont vérifiées et soit $\psi_{B,b}$ un état fondamental de $(\widetilde{E}_0)$. Il existe $\mu_1 > 0$ et une fonction $v \in C([0,\mu_1), H)$ tels que $v(0) = \psi_{B,b}$ et, pour tout $\mu \in [0,\mu_1)$, $v(\mu)$ est une solution faible non-triviale de $(\widetilde{E}_\mu)$. De plus, pour tout $\mu \in [0,\mu_1)$, $v(\mu) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{|x|\to\infty} v(\mu)(x) = 0$ et $|v(\mu)|_{L^\infty} \leq C$, où $C > 0$ ne dépend pas de μ.*
En outre, si (H1) et (H6) sont aussi vérifiées, il existe $\mu_2 \in (0,\mu_1)$ tel que $v \in C^1((0,\mu_2), H)$.

Démonstration. Puisque $(\widetilde{\mathrm{P}}_s)$ coïncide avec $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$ pour $s = \mu \geq 0$, le résultat découle de la Proposition 2.1.3 appliquée à $(\widetilde{\mathrm{P}}_s)$. □

Le problème (E'$_\tau$)

Nous appliquons maintenant la Proposition 2.1.3 à (E'$_\tau$). Nous posons $s = \tau$ pour $\tau \geq 0$ et étendons tout d'abord le problème à $s \in \mathbb{R}$ en considérant

$$\Delta u - u + z_2(s,x)|x|^{-a}|u|^{p-1}u = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{P'$_s$}$$

où $z_2 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$z_2(s,x) = \begin{cases} (|s||x|)^a V(|s|x) & \text{si } s \neq 0, \\ A & \text{si } s = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Nous supposons alors que (H0) et (H7) sont vérifiées, ce qui implique que z_2 satisfait (z1) et (z2) avec $K = A > 0$. Si l'on suppose, de plus, (H1) et (H8), alors (z3) est aussi vérifiée par z_2. La Proposition 2.1.3 assure alors l'existence d'une branche de solution $\{(s, U(s)) : s \in (-s_1, s_1)\} \subset \mathbb{R} \times H$ pour le problème (P'$_s$). On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.1.7 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H7) sont vérifiées et soit $\psi_{A,a}$ un état fondamental de (E'$_0$). Il existe $\tau_1 > 0$ et une fonction $w \in C([0,\tau_1), H)$ tels que $w(0) = \psi_{A,a}$ et, pour tout $\tau \in [0,\tau_1)$, $w(\tau)$ est une solution faible non-triviale de (E'$_\tau$). De plus, pour tout $\tau \in [0,\tau_1)$, $w(\tau) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{|x|\to\infty} w(\tau)(x) = 0$ et $|w(\tau)|_{L^\infty} \leq C$, où $C > 0$ ne dépend pas de τ.*
En outre, si (H1) et (H8) sont aussi vérifiées, il existe $\tau_2 \in (0,\tau_1)$ tel que $w \in C^1((0,\tau_2), H)$.

Démonstration. Comme (P'$_s$) coïncide avec (E'$_\tau$) pour $s = \tau \geq 0$, le résultat découle de la Proposition 2.1.3 appliquée à (P'$_s$). □

Nous terminons cette section avec la proposition suivante qui sera utile pour étudier le comportement asymptotique dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ des solutions de (E_λ) le long de la branche (2.2).

Proposition 2.1.8 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H7) sont vérifiées, soit $\psi_{A,a}$ un état fondamental de (E'$_0$) et $w \in C([0,\tau_1), H)$ la fonction correspondante donnée par la Proposition 2.1.7. Si $N = 2$ ou si $N \in \{3,4,5\}$, $a < 3 - N/2$ et $1 < p < \frac{4-2a}{N-2}$, alors $w(\tau) \to \psi_{A,a}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\tau \to 0$.*

Démonstration. Pour $\tau \geq 0$ et $u \in H$, soit $G(\tau,u) = z_2(\tau,x)|x|^{-a}|u|^{p-1}u$ la non-linéarité correspondant à l'équation E'$_\tau$, qui s'écrit ainsi

$$-\Delta u + u = G(\tau,u). \tag{2.17}$$

Il est démontré dans l'Annexe D (c.f. (D.7)) que si $u \in H$ est une solution de (2.17), alors

$$|u|_{L^\infty} \leq C_r |G(\tau,u)|_{L^r} \quad \text{pour tout } r \in (N/2, N/a).$$

Noter que l'intervalle $(N/2, N/a)$ est non vide car $a < 2$. D'autre part, il découle de (E'$_\tau$) que

$$-\Delta(w(\tau) - \psi_{A,a}) + (w(\tau) - \psi_{A,a}) = G(\tau, w(\tau)) - G(0, \psi_{A,a})$$

et le même argument montre que

$$|w(\tau) - \psi_{A,a}|_{L^\infty} \leq C_r |G(\tau,w(\tau)) - G(0,\psi_{A,a})|_{L^r} \quad \text{pour tout } r \in (N/2, N/a).$$

Posant $\varphi_\tau(x) = |\tau x|^a V(\tau x)/A$ pour $\tau > 0$ et $x \neq 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&|G(\tau,w(\tau)) - G(0,\psi_{A,a})|_{L^r}^r \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ar} \big| |\tau x|^a V(\tau x)|w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - A|\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} A^r |x|^{-ar} \big|\varphi_\tau(x)|w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx \\
&\leq C\Big\{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ar}|\varphi_\tau(x) - 1|^r |w(\tau)|^{pr} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ar}\big||w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx\Big\} \\
&= C\Big\{\int_{|x|\leq 1} |x|^{-ar}|\varphi_\tau(x) - 1|^r |w(\tau)|^{pr} dx && (2.18) \\
&\quad + \int_{|x|\geq 1} |x|^{-ar}|\varphi_\tau(x) - 1|^r |w(\tau)|^{pr} dx && (2.19) \\
&\quad + \int_{|x|\leq 1} |x|^{-ar}\big||w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx && (2.20) \\
&\quad + \int_{|x|\geq 1} |x|^{-ar}\big||w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx\Big\}. && (2.21)
\end{aligned}$$

La proposition sera démontrée si nous prouvons qu'il existe un $r \in (N/2, N/a)$ pour lequel les intégrales (2.18)-(2.21) tendent vers zéro lorsque $\tau \to 0$.

Pour (2.18), l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq 1} |x|^{-ar}|\varphi_\tau(x) - 1|^r |w(\tau)|^{pr} dx \\
&\qquad \leq \Big\{\int_{|x|\leq 1} |x|^{-ar\alpha}|\varphi_\tau(x) - 1|^{r\alpha} dx\Big\}^{1/\alpha} \Big\{\int_{|x|\leq 1} |w(\tau)|^{pr\beta} dx\Big\}^{1/\beta} && (2.22)
\end{aligned}$$

pour $\alpha, \beta \geq 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Comme $w(\tau) \to \psi_{A,a}$ dans H lorsque $\tau \to 0$, le théorème de plongement de Sobolev implique que la deuxième intégrale du membre de droite de (2.22) est bornée si

$$2 \leq pr\beta \leq 2^* \quad \text{où } 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad \text{pour } N \geq 3,$$

et si

$$2 \leq pr\beta < \infty, \quad \text{pour } N = 2.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée à la première intégrale, il suffit de vérifier que, sous ces conditions, il est possible de trouver $\alpha \geq 1$ tel que $N - ar\alpha > 0$. En effet, par les hypothèses (H0) et (H7), nous savons que

$$|x|^{-ar\alpha} |\varphi_\tau(x) - 1|^{r\alpha} \to 0 \quad \text{lorsque } \tau \to 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

et qu'il existe une constante K telle que

$$|x|^{-ar\alpha} |\varphi_\tau(x) - 1|^{r\alpha} \leq K |x|^{-ar\alpha}$$

où $|x|^{-ar\alpha} \in L^1(|x| \leq 1)$ si $N - ar\alpha > 0$. Avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, cette condition pour α est équivalente à $\beta > N/(N - ar)$. Par conséquent, il suffit de vérifier que, sous nos hypothèses, il existe $r \in (N/2, N/a)$ tel que

$$\frac{N}{N - ar} < \frac{2N}{pr(N-2)} \quad \text{pour } N \geq 3. \tag{2.23}$$

Si $N = 2$, on prend simplement $\beta > \max\{1, 2/pr, 2/(2 - ar)\}$ quel que soit $r \in (N/2, N/a)$ et les conditions sont satisfaites. Si $N \geq 3$, la condition (2.23) est équivalente à $r < \frac{N}{p\frac{(N-2)}{2} + a}$. Puisque

$$\frac{N}{2} < \frac{N}{p\frac{(N-2)}{2} + a} \quad \Longleftrightarrow \quad p < \frac{4 - 2a}{N - 2},$$

ce qui est vrai par hypothèse, le théorème de convergence dominée montre que le membre de droite de (2.22) tend effectivement vers zéro lorsque $\tau \to 0$, pour tout $\frac{N}{2} < r < \frac{N}{p\frac{(N-2)}{2} + a}$.

Pour (2.19), nous appliquons à nouveau l'inégalité de Hölder et obtenons

$$\int_{|x| \geq 1} |x|^{-ar} |\varphi_\tau(x) - 1|^r |w(\tau)|^{pr} dx$$
$$\leq \{\int_{|x| \geq 1} |x|^{-ar\gamma} |\varphi_\tau(x) - 1|^{r\gamma} dx\}^{1/\gamma} \{\int_{|x| \geq 1} |w(\tau)|^{pr\delta} dx\}^{1/\delta} \tag{2.24}$$

avec $\gamma, \delta \geq 1$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1$. Nous allons de nouveau utiliser le théorème de Lebesgue. Pour ce faire nous avons besoin, d'une part, que la seconde intégrale du membre de droite de (2.24) reste bornée lorsque $\tau \to 0$ et, d'autre part, que $|x|^{-ar\gamma} \in L^1(|x| \geq 1)$. Ces conditions sont satisfaites si γ et δ sont choisis tels que

$$N - ar\gamma < 0 \quad \text{et} \quad 2 \leq pr\delta \leq 2^* \text{ si } N \geq 3, \quad 2 \leq pr\delta < \infty \text{ si } N = 2.$$

En termes de δ, la première de ces inégalités équivaut à $\delta < N/(N - ar)$, qui est compatible avec la seconde si $2/pr < N/(N - ar)$, pour tout $N \geq 2$. Mais cette dernière condition est équivalente à $r > 1/(p/2 + a/N)$. Par conséquent, le membre de droite de (2.24) tend aussi vers zéro lorsque $\tau \to 0$, pour tout $\frac{N}{p\frac{N}{2} + a} < r < \frac{N}{a}$.

En conclusion, les intégrales (2.18) et (2.19) tendent vers zéro lorsque $\tau \to 0$, pour autant que $\frac{N}{p\frac{N}{2}+a} < r < \frac{N}{p\frac{(N-2)}{2}+a}$.

Pour (2.20) et (2.21), nous avons

$$\int_\Omega |x|^{-ar}\big||w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^r dx$$
$$\leq \{\int_\Omega |x|^{-ars}dx\}^{1/s}\{\int_\Omega \big||w(\tau)|^{p-1}w(\tau) - |\psi_{A,a}|^{p-1}\psi_{A,a}\big|^{rt}dx\}^{1/t} \tag{2.25}$$

où $(s,t) = (\alpha,\beta)$ si $\Omega = \{|x| \leq 1\}$ et $(s,t) = (\gamma,\delta)$ si $\Omega = \{|x| \geq 1\}$, avec les mêmes conditions que ci-dessus sur (α,β), respectivement sur (γ,δ). Il découle alors du plongement de Sobolev et de la continuité de l'application $u \mapsto |u|^{p-1}u$ de L^{prt} dans L^{rt} que le membre de droite de (2.25) tend vers zéro lorsque $\tau \to 0$. Ceci prouve que les deux intégrales (2.20) et (2.21) tendent vers zéro lorsque $\tau \to 0$, pour tout $\frac{N}{p\frac{N}{2}+a} < r < \frac{N}{p\frac{(N-2)}{2}+a}$, ce qui termine la démonstration. $\square$

2.1.2 Retour aux variables initiales

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les résultats d'existence et de bifurcation locaux mentionnés au début de ce chapitre. Mais commençons par quelques définitions.

Définition 2.1.9

(a) Nous disons qu'il y a *bifurcation au point* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour* (E_λ) s'il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times H$ telle que u_n est solution de (E_{λ_n}) pour tout n, $\lambda_n \to \lambda$ et $\|u_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Dans ce cas, on dit aussi qu'il y a *bifurcation de la ligne des solutions triviales au point* λ.

(b) Nous disons qu'il y a *bifurcation asymptotique au point* $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ *pour* (E_λ)[1] s'il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}\times H$ telle que u_n est solution de (E_{λ_n}) pour tout n, $\lambda_n \to \lambda$ et $\|u_n\| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

(c) Nous dirons qu'il y a *bifurcation/bifurcation asymptotique dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *au point* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour* (E_λ) si, dans les définitions précédentes, on remplace $\|\cdot\|$ par $|\cdot|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

(d) Nous dirons qu'il y a *bifurcation/bifurcation asymptotique dans* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *au point* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour* (E_λ) si, dans les définitions (a) et (b), on remplace $\|\cdot\|$ par $|\cdot|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

Le théorème suivant établit l'existence et des propriétés détaillées d'une branche de solutions de (E_λ) au voisinage de $\lambda = 0$.

Théorème 2.1.10 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H5) sont vérifiées. Il existe un nombre* $\lambda_0 > 0$ *et une fonction* $u_0 \in C((0,\lambda_0), H)$ *ayant les propriétés suivantes.*

(i) $u_0(\lambda)$ *est une solution faible non-triviale de* (E_λ) *pour tout* $\lambda \in (0,\lambda_0)$.

(ii) $u_0(\lambda) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0(\lambda) > 0$ *et* $u_0(\lambda)(x) \to 0$ *lorsque* $|x| \to \infty$, *pour tout* $\lambda \in (0,\lambda_0)$.

(iii) Les limites suivantes existent et sont finies :

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-\gamma}|\nabla u_0(\lambda)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = L_1 > 0 \quad \text{où } \gamma = \frac{4-2b-(N-2)(p-1)}{2(p-1)} > 0,$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-\gamma+1}|u_0(\lambda)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = L_2 > 0,$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-\alpha}|u_0(\lambda)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \text{pour tout } \alpha < \frac{2-b}{2(p-1)}.$$

[1] $\bar{\mathbb{R}}$ désigne ici la droite réelle achevée, i.e. $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(iv) Au point $\lambda = 0$, on a les résultats de bifurcation suivants. Il y a bifurcation pour (E_λ) *si* $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$ *et bifurcation asymptotique si* $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$*. De même en ce qui concerne la bifurcation dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$*. En revanche, on a bifurcation de la ligne des solutions triviales dans* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *au point* $\lambda = 0$ *pour tout* $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$*.*

(v) Si, de plus, les hypothèses (H1) et (H6) sont vérifiées, alors $u_0 \in C^1((0, \lambda_0), H)$*.*

Démonstration. Utilisant le changement de variables (2.6), nous revenons aux variables initiales en posant $\lambda_0 = \mu_2^2$ et $u_0(\lambda) = T_0(\lambda^{1/2})v(\lambda^{1/2})$ pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, où μ_2 et v sont donnés par la Proposition 2.1.6. Les points (i) et (ii) découlent immédiatement de la Proposition 2.1.6, si ce n'est la positivité de $u_0(\lambda)$ qui est donnée par le Lemme 3.3.4. Les limites sous (iii) sont des conséquences de (2.7) et de la Proposition 2.1.6, qui assure en particulier que $v(\mu)$ reste borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\mu \to 0$. Le point (iv) suit du point (iii) en remarquant simplement que $\gamma > 1$ si $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$ et $\gamma < 1$ si $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$. Finalement, (v) est encore une conséquence de la Proposition 2.1.6. □

Nous présentons maintenant les résultats concernant (E_λ) au voisinage de $\lambda = +\infty$.

Théorème 2.1.11 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H7) sont vérifiées. Il existe un nombre* $\lambda^\infty > 0$ *et une fonction* $u^\infty \in C((\lambda^\infty, \infty), H)$ *ayant les propriétés suivantes.*

(i) $u^\infty(\lambda)$ *est une solution faible non-triviale de* (E_λ) *pour tout* $\lambda \in (\lambda^\infty, \infty)$*.*

(ii) $u^\infty(\lambda) \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$*,* $u^\infty(\lambda) > 0$ *sur* $\mathbb{R}^N$ *et* $u^\infty(\lambda)(x) \to 0$ *lorsque* $|x| \to \infty$*, pour tout* $\lambda \in (\lambda^\infty, \infty)$*.*

(iii) Les limites suivantes existent et sont finies :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\gamma^\infty} |\nabla u^\infty(\lambda)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = L_1^\infty > 0 \quad \text{où } \gamma^\infty = \frac{4-2a-(N-2)(p-1)}{2(p-1)} > 0,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\gamma^\infty+1} |u^\infty(\lambda)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = L_2^\infty > 0.$$

Si, de plus, $N = 2$ *ou si* $N \in \{3, 4, 5\}$*,* $a < 3 - N/2$ *et* $1 < p < \frac{4-2a}{N-2}$*, alors la limite suivante existe et est finie :*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{2-a}{2(p-1)}} |u^\infty(\lambda)|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = L_3^\infty > 0.$$

(iv) Au point $\lambda = +\infty$*, on a les résultats de bifurcation suivants. Il y a bifurcation asymptotique pour* (E_λ) *pour tout* $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$*. En revanche, il y a bifurcation asymptotique dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *si* $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N}$ *et bifurcation de la ligne des solutions triviales dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *si* $1 + \frac{4-2a}{N} < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$*. Si* $N = 2$ *ou si* $N \in \{3, 4, 5\}$*,* $a < 3 - N/2$ *et* $1 < p < \frac{4-2a}{N-2}$*, il y a bifurcation asymptotique dans* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

(v) Si, de plus, les hypothèses (H1) et (H8) sont vérifiées, alors $u^\infty \in C^1((\lambda^\infty, \infty), H)$*.*

Démonstration. Nous utilisons ici le changement de variables (2.8) et posons donc $\lambda^\infty = \tau_2^{-2}$ et $u^\infty(\lambda) = T_\infty(\lambda^{-1/2})w(\lambda^{-1/2})$, où τ_2 et w sont donnés par la Proposition 2.1.7. Il est alors clair que (i) et (ii) sont satisfaits, si ce n'est la positivité des solutions qui est donnée par le Lemme 3.3.4. Les limites au point (iii) découlent de (2.9), de la Proposition 2.1.7 et de la Proposition 2.1.8. Le point (iv) est une conséquence du point (iii) et (v) une conséquence de la Proposition 2.1.7. □

Remarque 2.1.12 Notez que si $N = 2$ et $p > 3 - a$ ou si $N \in \{3, 4, 5\}$, $a < 3 - N/2$ et $1 + \frac{4-2a}{N} < p < \frac{4-2a}{N-2}$, nous avons à la fois $|u^\infty(\lambda)|_{L^\infty} \to \infty$ et $|u^\infty(\lambda)|_{L^2} \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$, ce qui met en évidence un phénomène de *concentration* des solutions. Il s'avère que l'intervalle

$(1+\frac{4-2a}{N}, \frac{4-2a}{N-2})$ est non vide si et seulement si $N \in \{2,3\}$. On a donc concentration dans le sens ci-dessus si $N=2$ et $p>3-a$ ou si $N=3$, $a<3/2$ et $1+\frac{4-2a}{3}<p<4-2a$. En fait, ces dernières inégalités impliquent la restriction supplémentaire $a<5/4$. Nous reviendrons sur cette question à la fin du chapitre, quand nous aurons en main une branche globale de solutions.

Remarque 2.1.13 Il est important de remarquer que les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11 ne nécessitent pas l'hypothèse (H3). En particulier, ces résultats sont vrais pour des fonctions V qui ne sont *pas radiales*. D'autre part, tout ce qui a été fait dans cette section est valable en dimension $N \geq 2$.

Remarque 2.1.14 Comme nous verrons au Chapitre 3, les valeurs critiques $p_k = 1+\frac{4-2k}{N}$, $k=a,b$, interviendront de façon cruciale dans la discussion concernant la stabilité des ondes stationnaires qui correspondent aux solutions données par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11.

Nous terminons cette section par la proposition suivante qui décrit plus précisément la nature du phénomène de concentration mentionné sous 2.1.12.

Proposition 2.1.15 *Supposons les hypothèses (H0) et (H7) satisfaites et supposons, de plus, que $N=2$ ou $N \in \{3,4,5\}$, $a<3-N/2$ et $1<p<\frac{4-2a}{N-2}$. Alors, pour tout $\eta>0$, il existe $\lambda_\eta>0$ tel que*

$$|u^\infty(\lambda)(x)| \leq e^{-\sqrt{\lambda}\eta/(2\sqrt{2})} \quad \textit{pour tout } |x| \geq \eta \textit{ et } \lambda \geq \lambda_\eta.$$

Démonstration. Les hypothèses des Propositions 2.1.7 et 2.1.8 sont vérifiées et nous commençons par montrer que, pour $\tau>0$ assez petit, les solutions $w(\tau)$ données par la Proposition 2.1.7 tendent vers zéro exponentiellement vite à l'infini, uniformément en τ.

Par nos hypothèses, il existe $M>0$ tel que $|y|^a V(y) \leq M$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

En outre, nous savons que $|w(\tau)-\psi_{A,a}|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $\tau \to 0$. Par conséquent, il existe $\delta>0$ tel que

$$|w(\tau)|_{L^\infty} \leq |\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1 \quad \text{pour tout } 0<\tau\leq\delta.$$

Posons $R=[2M(|\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1)^{p-1}]^{1/a}$, de sorte que

$$R^{-a}M(|\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1)^{p-1}=\frac{1}{2}.$$

Remarquons maintenant que, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\Delta e^{-s|x|} = e^{-s|x|}\left\{s^2-\frac{s(N-1)}{|x|}\right\} \leq s^2 e^{-s|x|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

D'autre part, nous avons que $w=w(\tau)$ satisfait

$$\Delta w = w\{1-\tau^a V(\tau x)|w|^{p-1}\}.$$

Soit alors $z=z(\tau)=w(\tau)-de^{-s|x|}$, où

$$s=1/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad d=(|\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1)e^{sR}.$$

Posons

$$\Omega=\Omega(\tau)=\{x \in \mathbb{R}^N : |x|>R \text{ et } z(\tau)(x)>0\}.$$

Puisque $w(\tau) \in C(\mathbb{R}^N)$, $z(\tau) \in C(\mathbb{R}^N)$ et Ω est ouvert. Si $x \in \partial\Omega$, $|x| \geq R$, $z(x) \geq 0$ et on doit avoir $|x|=R$ ou $z(x)=0$. Mais si $|x|=R$, alors

$$z(x)=w(x)-de^{-sR}=w(x)-(|\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1) \leq |w(\tau)|_{L^\infty}-(|\psi_{A,a}|_{L^\infty}+1) \leq 0 \quad \text{pour tout } 0<\tau\leq\delta,$$

si bien que l'on a en fait $z(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ si $0 < \tau \leq \delta$. Remarquons encore que $z(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$ puisque $w(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Maintenant, pour $x \in \Omega$, nous avons que

$$\Delta z = \Delta w - d\Delta e^{-s|x|} \geq \Delta w - ds^2 e^{-s|x|} = w\{1 - \tau^a V(\tau x)|w|^{p-1}\} - ds^2 e^{-s|x|},$$

où

$$\tau^a V(\tau x)|w|^{p-1} = |x|^{-a}(\tau|x|)^a V(\tau x)|w|^{p-1} \leq R^{-a} M|w|^{p-1} \leq R^{-a} M(|\psi_{A,a}|_{L^\infty} + 1)^{p-1} = \frac{1}{2}$$

car $|x| \geq R$ et $0 < \tau \leq \delta$. Par conséquent, comme $s^2 = 1/2$, nous avons

$$\Delta z \geq \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}de^{-s|x|} = \frac{1}{2}z > 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Mais alors, si $\Omega \neq \emptyset$, le principe du maximum implique que $z \leq 0$ sur Ω, contradiction. Ainsi, $\Omega = \emptyset$ et donc

$$z(\tau)(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } |x| \geq R \text{ et } 0 < \tau \leq \delta.$$

C'est-à-dire,

$$w(\tau)(x) \leq de^{-s|x|} \quad \text{pour tout } |x| \geq R \text{ et } 0 < \tau \leq \delta.$$

Mais $-w$ satisfait la même équation que w et nous obtenons donc la même inégalité avec $-w$ à la place de w. Nous avons donc

$$|w(\tau)(x)| \leq de^{-|x|/\sqrt{2}} \quad \text{pour tout } |x| \geq R \text{ et } 0 < \tau \leq \delta.$$

Nous en déduisons que

$$|u^\infty(\tau^{-2})(x)| = \tau^{-\frac{2-a}{p-1}}|w(\tau)(\tau^{-1}x)| \leq \tau^{-\frac{2-a}{p-1}} de^{-\tau^{-1}|x|/\sqrt{2}}$$

pour autant que $\tau^{-1}|x| \geq R$ et $0 < \tau \leq \delta$.

Fixons maintenant $\eta > 0$ et soit $|x| \geq \eta$ et $0 < \tau \leq \min\{\delta, \eta/R\}$. Alors $|x| \geq \eta \geq R\tau$ si bien que

$$|u^\infty(\tau^{-2})(x)| \leq \tau^{-\frac{2-a}{p-1}} de^{-\tau^{-1}|x|/\sqrt{2}} \leq \tau^{-\frac{2-a}{p-1}} de^{-\tau^{-1}\eta/\sqrt{2}}.$$

Maintenant, il existe $T = T(d, \eta) > 0$ tel que $\tau^{-\frac{2-a}{p-1}} de^{-\tau^{-1}\eta/(2\sqrt{2})} \leq 1$ pour $0 < \tau \leq T$ et donc, pour $|x| \geq \eta$ et $0 < \tau \leq \min\{\delta, \eta/R, T\}$, nous avons que

$$|u^\infty(\tau^{-2})(x)| \leq e^{-\tau^{-1}\eta/(2\sqrt{2})}.$$

Ainsi, pour tout $\eta > 0$, il existe $\lambda_\eta > 0$ tel que

$$|u^\infty(\lambda)(x)| \leq e^{-\sqrt{\lambda}\eta/(2\sqrt{2})} \quad \text{pour tout } |x| \geq \eta \text{ et } \lambda \geq \lambda_\eta.$$

$\square$

2.2 Théorie globale

Nous supposons désormais et jusqu'à la fin du chapitre que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont vérifiées. En particulier *V est radiale.* Nous ne supposerons (H4) que dans la Section 2.2.3, où nous établirons la continuation globale.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans un premier temps, nous démontrons une propriété d'accumulation des états fondamentaux $\psi_\lambda,\ \lambda > 0$, de (E_λ), la Proposition 2.2.2, qui ne nécessite que les hypothèses (H0), (H3) et (H5). Ce résultat est valable en dimension $N \geq 2$. C'est une propriété de la structure variationnelle de (E_λ), indépendante des résultats de bifurcation établis à la Section 2.1.

Ensuite, à la Section 2.2.2, toujours sous les hypothèses (H0), (H3) et (H5), mais cette fois pour $N \geq 3$, nous montrons en particulier que, pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, si ψ_λ est un état fondamental (positif) de (E_λ), alors $\psi_\lambda = u_0(\lambda)$. C'est-à-dire, ψ_λ est sur la branche de solutions donnée par le Théorème 2.1.10. En particulier, il y a unicité de l'état fondamental de (E_λ) pour $\lambda > 0$ petit, *sans l'hypothèse (H4).* L'hypothèse $N \geq 3$ assure l'unicité de l'état fondamental de $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$, ingrédient essentiel de notre argument. Le résultat principal de cette section est le Théorème 2.2.9.

Nous terminons ce chapitre par un théorème de continuation globale, le Théorème 2.2.10, qui donne l'existence d'une branche de solutions de (E_λ) définie sur tout l'intervalle $(0,\infty)$. Ce théorème nécessite les hypothèses (H4) et $N \geq 3$, qui assurent l'unicité et la non-dégénérescence de l'état fondamental, le résultat 2.2.9 mentionné ci-dessus, ainsi que la propriété d'accumulation 2.2.2. Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, la démonstration utilise une application itérée du théorème des fonctions implicites. Une fois que nous possédons ce résultat global, nous pouvons le combiner avec le Théorème 2.1.11 qui décrit alors le comportement asymptotique de la branche globale lorsque $\lambda \to \infty$, discuté à la fin du chapitre.

2.2.1 Une propriété d'accumulation

Nous travaillons dans toute cette section sous les hypothèses (H0), (H3) et (H5), avec $N \geq 2$. En particulier, l'hypothèse (H2) du Chapitre 1 est aussi vérifiée, avec $k = b$. Nous utilisons les normes $\|\cdot\|_\lambda,\ \lambda > 0$, définie à la Section 1.1.

Pour $\lambda > 0$ fixé, soit G_λ l'ensemble des états fondamentaux de (E_λ). C'est-à-dire,

$$G_\lambda = \{u \in N_\lambda : S_\lambda(u) = m_\lambda \text{ et } u > 0\}.$$

Par le Théorème 1.1.8, nous savons que $G_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$. Pour $u \in H$ et $F \subset H$ non vide, nous définissons la *distance de u à F* par

$$\mathrm{d}(u,F) = \inf\{\|u - v\| : v \in H\}.$$

Le résultat principal de cette section peut être exprimé comme suit. Soit $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset (0,\infty) \times H$ une suite jouissant des propriétés suivantes. $u_n \in G_{\lambda_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe $\bar\lambda > 0$ tel que $\lambda_n \to \bar\lambda$ lorsque $n \to \infty$. Alors les fonctions u_n *s'accumulent sur* $G_{\bar\lambda}$, dans le sens que $\mathrm{d}(u_n, G_{\bar\lambda}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin des bornes *a priori* suivantes sur la norme des états fondamentaux.

Lemme 2.2.1 *Il existe deux fonctions $A_1, A_2 \in C(0,\infty)$ telles que*

$$0 < A_1(\lambda) \leq \|u\| \leq A_2(\lambda) < \infty$$

pour tout $u \in G_\lambda$, pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration. Pour la borne supérieure, nous utilisons un argument présenté par C. A. Stuart dans la preuve du Lemme 5.2 de [45]. L'idée est de considérer les fonctions

$$v_\lambda(x) = e^{-\sqrt{\lambda}|x|}, \quad \lambda > 0.$$

Un calcul direct montre que $v_\lambda \in H$ et

$$\|v_\lambda\|_\lambda^2 = 2C_N \lambda^{1-N/2},$$

où $C_N = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2|y|}dy$. Soit t_λ la fonction donnée par le Lemme 1.1.7. Alors, par la définition de m_λ et le Lemme 1.1.5(iv),

$$\begin{aligned} m_\lambda &\leq S_\lambda(t_\lambda(v_\lambda)v_\lambda) = A(p)\|t_\lambda(v_\lambda)v_\lambda\|_\lambda^2 = A(p)t_\lambda(v_\lambda)^2\|v_\lambda\|_\lambda^2 = A(p)\left\{\frac{\|v_\lambda\|_\lambda^2}{\phi(v_\lambda)}\right\}^{\frac{2}{p-1}}\|v_\lambda\|_\lambda^2 \\ &= A(p)\phi(v_\lambda)^{-\frac{2}{p-1}}\|v_\lambda\|_\lambda^{2\frac{p+1}{p-1}} = A(p)\phi(v_\lambda)^{-\frac{2}{p-1}}[2C_N\lambda^{1-N/2}]^{\frac{p+1}{p-1}} \end{aligned}$$

et donc, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$m_\lambda \leq C\phi(v_\lambda)^{-\frac{2}{p-1}}\lambda^{(1-N/2)\frac{p+1}{p-1}}. \tag{2.26}$$

Maintenant, nos hypothèses sur V impliquent qu'il existe une constante M telle que

$$V(x)(1+|x|)^b \geq M > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \phi(v_\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_\lambda(x)^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)e^{-(p+1)\sqrt{\lambda}|x|}dx = \int_{\mathbb{R}^N} V\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-(p+1)|y|}\lambda^{-N/2}dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} M\left(1+\frac{|y|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-b} e^{-(p+1)|y|}\lambda^{-N/2}dy = M\lambda^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+\frac{|y|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-b}e^{-(p+1)|y|}dy. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Si $\lambda \in (0,1]$, nous avons que $(1+\frac{|y|}{\sqrt{\lambda}})^{-b} \geq \lambda^{b/2}(2|y|)^{-b}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ tel que $|y| \geq 1$. Ainsi, par (2.27), il existe $C_1 = C_1(N,b,p) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \phi(v_\lambda) &\geq M\lambda^{-N/2}\int_{|y|\geq 1}\lambda^{b/2}(2|y|)^{-b}e^{-(p+1)|y|}dy = M2^{-b}\lambda^{\frac{b-N}{2}}\int_{|y|\geq 1}|y|^{-b}e^{-(p+1)|y|}dy \\ &= C_1\lambda^{\frac{b-N}{2}} \quad \text{pour tout } \lambda \in (0,1]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

D'autre part, si $\lambda \geq 1$, alors $(1+\frac{|y|}{\sqrt{\lambda}})^{-b} \geq (1+\lambda^{-1/2})^{-b}$ pour tout $y \in B(0,1)$. Par conséquent, il existe $C_2 = C_2(N,p) > 0$ tel que

$$\phi(v_\lambda) \geq M\lambda^{-N/2}\int_{B(0,1)}(1+\lambda^{-1/2})^{-b}e^{-(p+1)|y|}dy = C_2\lambda^{-N/2}(1+\lambda^{-1/2})^{-b} \quad \text{pour tout } \lambda \geq 1. \tag{2.29}$$

Les estimations (2.26), (2.28) et (2.29) impliquent que

$$m_\lambda \leq \begin{cases} C_1\lambda^\gamma & \text{si } \lambda \in (0,1], \\ C_2(1+\lambda^{-1/2})^{\frac{2b}{p-1}}\lambda^\delta & \text{si } \lambda \geq 1, \end{cases} \tag{2.30}$$

où
$$\gamma = \frac{4-2b-(N-2)(p-1)}{2(p-1)} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{4-(N-2)(p-1)}{2(p-1)}. \tag{2.31}$$

Notez que $\delta > \gamma > 0$ pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$. Les valeurs des constantes C_1 et C_2 ci-dessus ont changé mais nous avons toujours $C_1 = C_1(N,b,p) > 0$ et $C_2 = C_2(N,p) > 0$. Maintenant, si $u \in G_\lambda$, nous avons $\|u\|_\lambda^2 = A(p)^{-1}S_\lambda(u) = A(p)^{-1}m_\lambda$. De plus, $\|u\|^2 \leq \lambda^{-1}\|u\|_\lambda^2$ pour tout $\lambda \in (0,1]$ et $\|u\|^2 \leq \|u\|_\lambda^2$ pour tout $\lambda \geq 1$. Par conséquent, (2.30) implique que

$$\|u\|^2 \leq \begin{cases} C_1\lambda^{\gamma-1} & \text{si } \lambda \in (0,1], \\ C_2\lambda^{\delta} & \text{si } \lambda \geq 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

Les valeurs des constantes C_1 et C_2 ont de nouveau changé mais nous avons toujours $C_1 = C_1(N,b,p) > 0$ et $C_2 = C_2(N,p) > 0$. Nous obtenons la borne continue A_2 en remplaçant dans (2.32) la plus petite des constantes C_1, C_2 par leur maximum.

Pour la borne inférieure A_1, nous multiplions (E_λ) par u et intégrons. Il vient

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p+1}dx \leq K\|u\|^{p+1}, \tag{2.33}$$

où l'inégalité provient de (1.2). Maintenant, pour $\lambda \in (0,1]$, nous avons que $\|u\|^2 \leq \lambda^{-1}\|u\|_\lambda^2$, d'où, par (2.33),

$$\|u\|^2 \leq K\lambda^{-1}\|u\|^{p+1} \Longrightarrow \|u\|^{p-1} \geq K^{-1}\lambda \Longrightarrow \|u\| \geq C\lambda^{\frac{1}{p-1}},$$

où $C = K^{-\frac{1}{p-1}}$. D'autre part, pour $\lambda \geq 1$,

$$\|u\|^2 \leq \|u\|_\lambda^2 \leq K\|u\|^{p+1} \Longrightarrow \|u\|^{p-1} \geq K^{-1} \Longrightarrow \|u\| \geq C.$$

Ainsi,

$$\|u\| \geq \begin{cases} C\lambda^{\frac{1}{p-1}} & \text{si } \lambda \in (0,1], \\ C & \text{si } \lambda \geq 1. \end{cases} \tag{2.34}$$

□

Nous allons maintenant démontrer le résultat principal de cette section.

Proposition 2.2.2 *Soit $\bar{\lambda} > 0$ et $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset (0,\infty) \times H$ une suite telle que*

$$u_n \in G_{\lambda_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lambda_n \to \bar{\lambda} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Il existe alors $\overline{u} \in G_{\bar{\lambda}}$ et une sous-suite $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tels que

$$u_{n_k} \to \overline{u} \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Remarque 2.2.3 Si l'état fondamental $\overline{u}$ est unique, $G_{\bar{\lambda}} = \{\overline{u}\}$, nous avons en fait que toute la suite $\{u_n\}$ converge vers $\overline{u}$. Cette remarque sera justifiée au point 2.2.8.

Démonstration. Il découle du Lemme 2.2.1 et du fait que $\lambda_n \to \bar{\lambda} > 0$ qu'il existe des constantes K_1, K_2 telles que

$$0 < K_1 \leq \|u_n\| \leq K_2 < \infty. \tag{2.35}$$

C'est-à-dire, $\{u_n\} \subset H$ est bornée loin de zéro et est bornée. Par conséquent, il existe $\overline{u} \in H$ et une sous-suite $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tels que $u_{n_k} \rightharpoonup \overline{u}$ faiblement dans H. Nous allons montrer que $\|u_{n_k} - \overline{u}\| \to 0$ et $\overline{u} \in G_\lambda$. Pour simplifier l'écriture, nous notons à nouveau $\{u_n\}$ cette sous-suite pour le reste de la démonstration.

Tout d'abord, puisque ϕ est f.s.c. par le Lemme 1.1.2, comme $u_n \in G_{\lambda_n}$ pour tout n et comme $\{u_n\}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, nous avons que

$$\begin{aligned}\phi(\overline{u}) &= \lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\bar\lambda} + (\lambda_n - \bar\lambda)|u_n|_2^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\bar\lambda} \geq C \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|^2 > 0.\end{aligned}$$

La première inégalité découle du fait que $\|\cdot\|_{\bar\lambda}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$ et la seconde de (2.35). Ainsi, $\phi(\overline{u}) > 0$ et donc $\overline{u} \neq 0$. Notez que nous avons aussi montré que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\bar\lambda} = \phi(\overline{u}). \tag{2.36}$$

Puisque $A(p)\|u_n\|^2_{\lambda_n} = S_{\lambda_n}(u_n) = m_{\lambda_n}$ par le Lemme 1.1.5(iv), ceci implique que la limite $\lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n}$ existe.

Maintenant, par (2.36),

$$J_{\bar\lambda}(\overline{u}) = \frac{1}{2}\|\overline{u}\|^2_{\bar\lambda} - \frac{1}{2}\phi(\overline{u}) \leq \frac{1}{2}\{\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\bar\lambda} - \phi(\overline{u})\} = 0,$$

montrant que $J_{\bar\lambda}(\overline{u}) \leq 0$ et par conséquent, par le Lemme 1.1.7, que $t_{\bar\lambda}(\overline{u}) \leq 1$. Rappelant que $t_{\bar\lambda}(\overline{u})\overline{u} \in N_{\bar\lambda}$ et utilisant le Lemme 1.1.5(iv) et (2.36), il vient alors

$$\begin{aligned}m_{\bar\lambda} &\leq S_{\bar\lambda}(t_{\bar\lambda}(\overline{u})\overline{u}) = A(p)\|t_{\bar\lambda}(\overline{u})\overline{u}\|^2_{\bar\lambda} = A(p)t_{\bar\lambda}(\overline{u})^2\|\overline{u}\|^2_{\bar\lambda} \leq A(p)\|\overline{u}\|^2_{\bar\lambda} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} A(p)\|u_n\|^2_{\bar\lambda} = \lim_{n\to\infty} A(p)\|u_n\|^2_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\lambda_n}(u_n) = \lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Donc

$$m_{\bar\lambda} \leq \lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n}. \tag{2.38}$$

Comme nous allons voir, il suffit de prouver l'inégalité inverse pour conclure. Pour ce faire, soit $v \in G_{\bar\lambda}$. Nous montrons maintenant que $t_{\lambda_n}(v) \to 1$. En effet, comme $v \in N_{\bar\lambda}$,

$$t_{\lambda_n}(v)^{p-1} = \frac{\|v\|^2_{\lambda_n}}{\phi(v)} = \frac{\|v\|^2_{\bar\lambda} + (\lambda_n - \bar\lambda)|v|_2^2}{\phi(v)} = 1 + (\lambda_n - \bar\lambda)\frac{|v|_2^2}{\phi(v)} \to 1.$$

Écrivons simplement t_n pour $t_{\lambda_n}(v)$ dès maintenant. D'une part,

$$S_{\lambda_n}(u) = S_{\bar\lambda}(u) + \frac{1}{2}(\lambda_n - \bar\lambda)|u|_2^2 \quad \text{pour tout } u \in H \tag{2.39}$$

et d'autre part,

$$S_{\bar\lambda}(tv) = \frac{1}{2}t^2\|v\|^2_{\bar\lambda} - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\phi(v) = S_{\bar\lambda}(v) + \frac{1}{2}(t^2-1)\|v\|^2_{\bar\lambda} - \frac{1}{p+1}(t^{p+1}-1)\phi(v) \tag{2.40}$$

pour tout $v \in H$ et tout $t > 0$. En combinant (2.39) et (2.40), il vient

$$\begin{aligned}S_{\lambda_n}(t_nv) &= S_{\bar\lambda}(t_nv) + \frac{1}{2}(\lambda_n - \bar\lambda)|t_nv|_2^2 \\ &= S_{\bar\lambda}(v) + \frac{1}{2}(t_n^2 - 1)\|v\|^2_{\bar\lambda} - \frac{1}{p+1}(t_n^{p+1} - 1)\phi(v) + \frac{1}{2}(\lambda_n - \bar\lambda)t_n^2|v|_2^2 \\ &= m_{\bar\lambda} + \big\{\frac{1}{2}(t_n^2 - 1) - \frac{1}{p+1}(t_n^{p+1} - 1)\big\}\|v\|^2_{\bar\lambda} + \frac{1}{2}(\lambda_n - \bar\lambda)t_n^2|v|_2^2 \\ &= m_{\bar\lambda} + o(1)\end{aligned}$$

car $t_n \to 1$. Par conséquent, $m_{\lambda_n} \leq S_{\lambda_n}(t_n v) = m_{\bar{\lambda}} + o(1)$ si bien que

$$\lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n} \leq m_{\bar{\lambda}}. \tag{2.41}$$

Ainsi, (2.38) et (2.41) impliquent

$$\lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n} = m_{\bar{\lambda}}. \tag{2.42}$$

Mais alors nous devons avoir $t_{\bar{\lambda}}(\overline{u}) = 1$, car $t_{\bar{\lambda}}(\overline{u}) < 1$ dans (2.37) impliquerait $m_{\bar{\lambda}} < m_{\bar{\lambda}}$. Donc $\overline{u} \in N_{\bar{\lambda}}$ et, utilisant à nouveau (2.37), $S_{\bar{\lambda}}(\overline{u}) = m_{\bar{\lambda}}$. Maintenant, $\overline{u} \in N_{\bar{\lambda}}$ entraîne $\phi(\overline{u}) = \|\overline{u}\|^2_{\bar{\lambda}}$ et ainsi, par (2.36),

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\bar{\lambda}} = \phi(\overline{u}) = \|\overline{u}\|^2_{\bar{\lambda}}.$$

Par conséquent, $\|u_n - \overline{u}\| \to 0$, $\overline{u} > 0$ et l'on a bien $\overline{u} \in G_{\bar{\lambda}}$. La proposition est démontrée. □

Remarque 2.2.4 Nous notons en passant quelques jolies propriétés liées à la structure variationnelle de (E_λ).

(a) Il découle de (2.42) que l'application $\lambda \mapsto m_\lambda$ est continue sur $(0, \infty)$.
D'autre part, nous avons vu que $N_{\lambda_n} \to N_{\bar{\lambda}}$, dans le sens que

$$\inf_{u\in N_{\lambda_n}} \mathrm{d}(u, N_{\bar{\lambda}}) \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

(b) Soit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et considérons $u_2 \in N_{\lambda_2}$. Nous avons alors

$$J_{\lambda_1}(u_2) = \frac{1}{2}(\|u_2\|^2_{\lambda_1} - \phi(u_2)) = \frac{1}{2}(\|u_2\|^2_{\lambda_1} - \|u_2\|^2_{\lambda_2}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)|u_2|^2_{L^2}.$$

Par conséquent, par le Lemme 1.1.7, $t_{\lambda_1}(u_2) < 1$ si et seulement si $\lambda_1 < \lambda_2$. Nous voyons donc que les variétés de Nehari N_λ sont "emboîtées" par ordre croissant de $\lambda > 0$, dans le sens que, pour toute direction $u \in H \setminus \{0\}$ donnée, on a $t_{\lambda_1}(u) < t_{\lambda_2}(u)$ si et seulement si $\lambda_1 < \lambda_2$.

(c) Finalement, l'application $\lambda \mapsto m_\lambda$ est strictement monotone croissante. En effet, fixons $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ et $u_2 \in G_{\lambda_2}$. Comme $u_2 \in N_{\lambda_2}$ avec $\lambda_2 > \lambda_1$, nous savons par le point précédent que $t_{\lambda_1}(u_2) < 1$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} m_{\lambda_1} &\leq S_{\lambda_1}(t_{\lambda_1}(u_2)u_2) = A(p)\|t_{\lambda_1}(u_2)u_2\|^2_{\lambda_1} \\ &< A(p)\|u_2\|^2_{\lambda_1} = A(p)\{\|u_2\|^2_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)|u_2|^2_{L^2}\} = S_{\lambda_2}(u_2) + A(p)(\lambda_1 - \lambda_2)|u_2|^2_{L^2} \\ &= m_{\lambda_2} + A(p)(\lambda_1 - \lambda_2)|u_2|^2_{L^2} < m_{\lambda_2}. \end{aligned}$$

2.2.2 Unicité locale des états fondamentaux

Sauf précision supplémentaire, nous travaillons dans toute cette section avec les hypothèses (H0), (H3) et (H5), sous lesquelles le Théorème 2.1.10 assure l'existence d'une branche continue de solutions de (E_λ), dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$. Notons également que (H5) implique (H2) avec $k = b$, si bien que les hypothèses du Théorème 1.1.8 sont aussi satisfaites et que, par conséquent, $G_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $\widetilde{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tel que $G_\lambda = \{u_0(\lambda)\}$ pour tout $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$, où λ_0 et u_0 sont donnés par le Théorème 2.1.10. Pour établir ce résultat, le Théorème 2.2.9, nous travaillerons avec le problème auxiliaire $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$ et sous l'hypothèse $N \geq 3$, qui assure l'unicité de l'état fondamental de $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$, élément essentiel à la preuve du Théorème 2.2.9.

Nous obtenons ainsi un résultat d'unicité des états fondamentaux de (E_λ) pour des $\lambda > 0$ petits sans faire l'hypothèse (H4), requise par le théorème d'unicité de Yanagida, et qui est néanmoins satisfaite par l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$. Pour établir le Théorème 2.2.9, nous exploitons en profondeur la structure variationnelle de (E_λ), d'une façon analogue à la preuve de la Proposition 2.2.2.

Par analogie avec ce qui a été fait dans la Section 1.1, nous commençons par introduire la structure variationnelle correspondant à l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$. Pour $\mu \geq 0$, soit

$$\widetilde{S}_\mu(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{p+1}\phi_\mu(v)$$

où

$$\phi_\mu(v) = \begin{cases} \mu^{-b}\int_{\mathbb{R}^N} V(y/\mu)|v|^{p+1}dy & \text{si } \mu > 0, \\ B\int_{\mathbb{R}^N} |y|^{-b}|v|^{p+1}dy & \text{si } \mu = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Notons que, avec nos hypothèses,

$$0 < \phi_\mu(v) \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{-b}|v|^{p+1}dy \leq C\|v\|^{p+1} \quad \text{pour tout } v \in H \setminus \{0\}, \tag{2.44}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de μ. La dernière inégalité provient de (1.2). Posons alors

$$\widetilde{J}_\mu(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\phi_\mu(v),$$

$$\widetilde{N}_\mu = \{v \in H \setminus \{0\} : \widetilde{J}_\mu(v) = 0\} \quad \text{et} \quad \widetilde{m}_\mu = \inf\{\widetilde{S}_\mu(v) : v \in \widetilde{N}_\mu\}.$$

Des arguments similaires à ceux de la Section 1.1 montrent que $\phi_\mu \in C^2(H, \mathbb{R})$ pour tout $\mu \geq 0$ et, par conséquent, que $\widetilde{S}_\mu, \widetilde{J}_\mu \in C^2(H, \mathbb{R})$ pour tout $\mu \geq 0$. De plus, ϕ_μ est f.s.c. pour tout $\mu \geq 0$.

Il est facile de voir que la variété de Nehari $\widetilde{N}_\mu$ a des propriétés analogues à celles de N_λ, données par le Lemme 1.1.5. En particulier, il découle de (2.44) qu'il existe $\delta = \delta(\mu)$ tel que

$$\|v\| \geq \delta > 0 \quad \text{pour tout } v \in \widetilde{N}_\mu. \tag{2.45}$$

Nous avons aussi que

$$\widetilde{S}_\mu(v) = A(p)\|v\|^2 = A(p)\phi_\mu(v) \quad \text{pour tout } v \in \widetilde{N}_\mu, \tag{2.46}$$

où $A(p) = \frac{p-1}{2(p+1)} > 0$ est la constante qui apparaît dans le Lemme 1.1.5. Nous définissons maintenant l'analogue de la fonction t_λ du Lemme 1.1.7, $\widetilde{t}_\mu \in C^2(H \setminus \{0\}, (0, \infty))$, par

$$\widetilde{t}_\mu = \left\{\frac{\|v\|^2}{\phi_\mu(v)}\right\}^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{pour tout } v \in H \setminus \{0\}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\widetilde{t}_\mu$ jouit des propriétés suivantes.
Pour $v \in H \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$tv \in \widetilde{N}_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad t = \widetilde{t}_\mu(v).$$

Pour tout $v \in H \setminus \{0\}$, nous avons

$$\widetilde{t}_\mu(v) \leq 1 \text{ si } \widetilde{J}_\mu(v) \leq 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{t}_\mu(v) \geq 1 \text{ si } \widetilde{J}_\mu(v) \geq 0. \tag{2.47}$$

Finalement, en suivant la démonstration du Théorème 1.1.8, on montre facilement que, pour tout $\mu \geq 0$, il existe une solution positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante de $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$, qui est un minimiseur de $\widetilde{S}_\mu$ sur $\widetilde{N}_\mu$. De plus, pour $\mu = 0$, sous l'hypothèse $N \geq 3$, le Corollaire 1.3.2 implique que cette solution, $\psi_{B,b}$, est l'unique solution de $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$ ayant ces propriétés. Pour $\mu \geq 0$, nous définissons encore l'ensemble des états fondamentaux de $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$, $\widetilde{G}_\mu$, par

$$\widetilde{G}_\mu = \{v \in \widetilde{N}_\mu : \widetilde{S}_\mu(v) = \widetilde{m}_\mu \text{ et } v > 0\}.$$

Proposition 2.2.5 *Posant $\lambda = \mu^2$ avec $\mu > 0$ et $u = T_0(\mu)v$, $v \in H$, où $T_0(\mu) : H \to H$ est défini par (2.6), nous avons les correspondances suivantes.*

(i) $S_\lambda(u) = \mu^{2\gamma}\widetilde{S}_\mu(v)$ et $J_\lambda(u) = \mu^{2\gamma}\widetilde{J}_\mu(v)$, où $\gamma = \frac{4-2b-(N-2)(p-1)}{2(p-1)}$.

(ii) $t_\lambda(u) = \widetilde{t}_\mu(v)$ si $v \in H \setminus \{0\}$.

(iii) $u \in N_\lambda$ si et seulement si $v \in \widetilde{N}_\mu$.

(iv) $m_\lambda = \mu^{2\gamma}\widetilde{m}_\mu$.

(v) $S_\lambda(u) = m_\lambda$ si et seulement si $\widetilde{S}_\mu(v) = \widetilde{m}_\mu$.

(vi) $u \in G_\lambda$ si et seulement si $v \in \widetilde{G}_\mu$.

Démonstration. (i) et (ii) découlent du fait que, pour $u = T_0(\mu)v$ avec $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$, on a

$$\|u\|_\lambda^2 = \mu^{2\gamma}\|v\|^2 \quad \text{et} \quad \phi(u) = \mu^{2\gamma}\phi_\mu(v).$$

Ces identités se démontrent par calcul direct. Pour (iii), notez que, par (i) et par le fait que $T_0(\mu)$ est inversible pour $\mu > 0$,

$$u \in N_\lambda \iff u \in H \setminus \{0\} \text{ et } J_\lambda(u) = 0 \iff v \in H \setminus \{0\} \text{ et } \widetilde{J}_\mu(v) = 0 \iff v \in \widetilde{N}_\mu.$$

Pour (iv), (i) et (iii) donnent

$$m_\lambda = \inf\{S_\lambda(u) : u \in N_\lambda\} = \inf\{\mu^{2\gamma}\widetilde{S}_\mu(v) : v \in \widetilde{N}_\mu\} = \mu^{2\gamma}\inf\{\widetilde{S}_\mu(v) : v \in \widetilde{N}_\mu\} = \mu^{2\gamma}\widetilde{m}_\mu.$$

Maintenant, (v) découle de (i) et (iv), alors que (vi) découle de (iii) et (v). □

Nous aurons encore besoin du lemme suivant, concernant le comportement de ϕ_μ par rapport à $\mu \geq 0$.

Lemme 2.2.6 *Supposons les hypothèses (H0) et (H5) vérifiées. Soit $\bar{\mu} \geq 0$ et $\{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ tels que $\mu_n \to \bar{\mu}$.*

(i) $\phi_{\mu_n}(v) \to \phi_{\bar{\mu}}(v)$ pour tout $v \in H$.

(ii) $\phi_{\mu_n}(v_n) - \phi_{\bar{\mu}}(v_n) \to 0$ pour toute suite bornée $\{v_n\} \subset H$.

Démonstration. (i) Soit $z_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par (2.14). Nous savons que z_1 satisfait les hypothèses (z1) et (z2). Pour tout $v \in H$, on a

$$\begin{aligned} |\phi_{\mu_n}(v) - \phi_{\bar{\mu}}(v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \{z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)\}|y|^{-b}|v|^{p+1} dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v|^{p+1} dy. \end{aligned}$$

Posant $\xi_n = z_1(\mu_n, \cdot) - z_1(\bar{\mu}, \cdot)$, nous avons que $\xi_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout n avec $|\xi_n|_{L^\infty} \leq 2M_1$, où $M_1 > 0$ est la constante de l'hypothèse (z2). D'autre part, par l'hypothèse (z1), nous voyons que $\xi_n \to 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Par conséquent, le résultat découle du Lemme A.1(ii).

(ii) Soit $\{v_n\} \subset H$ une suite bornée. Pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}
|\phi_{\mu_n}(v_n) - \phi_{\bar{\mu}}(v_n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1} dy \\
&= \int_{|y|\leq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1} dy \\
&\quad + \int_{|y|\geq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1} dy. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder et le théorème de plongement de Sobolev, nous avons que

$$\begin{aligned}
&\int_{|y|\leq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1} dy \\
&\qquad \leq \{\int_{|y|\leq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)|^r |y|^{-br} dy\}^{1/r} \{\int_{|y|\leq R} |v_n|^{(p+1)s} dy\}^{1/s} \\
&\qquad \leq C\{\int_{|y|\leq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)|^r |y|^{-br} dy\}^{1/r} \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

si $r, s \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, peuvent être choisis tels que $(p+1)s \in [1, \frac{2N}{N-2})$. L'inégalité $(p+1)s \geq 1$ est trivialement satisfaite. Si $N = 2$, la seconde inégalité n'impose pas de condition sur $r, s \geq 1$. Pour $N \geq 3$,

$$(p+1)s < \frac{2N}{N-2} \iff r > \frac{2N}{2N - (p+1)(N-2)}. \qquad (2.50)$$

Pour montrer que le membre de droite de (2.49) tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, nous allons appliquer le théorème de convergence dominée. Nous savons que $|z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)|^r |y|^{-br} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $y \neq 0$ et que $|z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)|^r |y|^{-br} \leq (2M_1)^r |y|^{-br}$. Par conséquent, il suffit de montrer que nous pouvons trouver r qui satisfait (2.50) et tel que $|y|^{-br} \in L^1(B(0, R))$. Cette dernière condition est équivalente à $N - br > 0$ et l'on peut trouver r satisfaisant les deux inégalités si et seulement si $\frac{2N}{2N-(p+1)(N-2)} < \frac{N}{b}$. Mais ceci est équivalent à $p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$, qui est vrai par l'hypothèse (H5). Ainsi,

$$\int_{|y|\leq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1} dy \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

pour tout $R > 0$.

Il reste à montrer que la seconde intégrale du membre de droite de (2.48) tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse (H5), il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x| \geq R_\varepsilon \implies \left|V(x)|x|^b - B\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors,

$$|y| \geq \bar{\mu} R_\varepsilon \implies |z_1(\bar{\mu}, y) - B| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|y| \geq \mu_n R_\varepsilon \implies |z_1(\mu_n, y) - B| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout n. Puisque $\mu_n \in (0, \infty)$ et $\mu_n \to \bar{\mu}$, nous avons $K \equiv \sup \mu_n \in (0, \infty)$. Choisissant $R = \max\{1, \bar{\mu} R_\varepsilon, K R_\varepsilon\}$, il vient

$$|z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b} \leq \varepsilon \quad \text{pour } |y| \geq R, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $2 < p+1 < \frac{2N}{N-2}$, le plongement de Sobolev et la bornitude de $\{v_n\} \subset H$ impliquent alors que

$$\int_{|y|\geq R} |z_1(\mu_n, y) - z_1(\bar{\mu}, y)||y|^{-b}|v_n|^{p+1}dy \leq \varepsilon \int_{|y|\geq R} |v_n|^{p+1}dy \leq \varepsilon C,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n et de ε. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve est terminée. □

Le lemme suivant exprime le résultat principal de cette section dans les variables du problème $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$. Il sera donc central dans la preuve du Théorème 2.2.9.

Lemme 2.2.7 *Supposons que les hypothèses (H0), (H3) et (H5) sont vérifiées et que* $N \geq 3$. *Soit* $\{(\mu_n, v_n)\} \subset (0, \infty) \times H$ *tel que* $\mu_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$ *et* $v_n \in \widetilde{G}_{\mu_n}$ *pour tout* n. *Alors* $\|v_n - \psi_{B,b}\| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$, *où* $\psi_{B,b}$ *est l'unique état fondamental (positif) de* $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$.

Démonstration. La démonstration est très similaire à celle de la Proposition 2.2.2. Pour simplifier l'écriture, nous posons $\psi = \psi_{B,b}$ dans toute la preuve.

Par hypothèse, $v_n \in \widetilde{N}_{\mu_n}$ et $\widetilde{S}_{\mu_n}(v_n) = \widetilde{m}_{\mu_n}$ pour tout n. Alors par (2.46), nous avons que

$$\|v_n\|^2 = A(p)^{-1}\widetilde{S}_{\mu_n}(v_n) = A(p)^{-1}\widetilde{m}_{\mu_n} = A(p)^{-1}\mu_n^{-2\gamma}m_{\mu_n^2},$$

où la dernière égalité découle de la Proposition 2.2.5(iv). Mais, par (2.30), $m_{\mu^2} \leq C_1\mu^{2\gamma}$ pour $\mu \in (0, 1]$, où $C_1 > 0$ ne dépend pas de n. Ainsi, $\|v_n\|^2 \leq A(p)^{-1}C_1$ pour n assez grand. Donc $\{v_n\}$ est bornée dans H et possède une sous-suite faiblement convergente, $v_{n_j} \rightharpoonup v^* \in H$. Nous allons montrer que $v^* = \psi$ et que $\|v_{n_j} - \psi\| \to 0$ lorsque $j \to \infty$. En fait, nous verrons à la fin de la preuve que toute la suite $\{v_n\}$ converge vers ψ. En attendant, pour simplifier l'écriture, nous noterons encore $\{v_n\}$ la sous-suite faiblement convergente.

Nous remarquons tout d'abord que $v^* \not\equiv 0$. En effet, comme ϕ_0 est f.s.c. et $\{v_n\}$ est bornée, le Lemme 2.2.6(ii) et (2.45) impliquent que

$$\phi_0(v^*) = \lim \phi_0(v_n) = \lim \phi_{\mu_n}(v_n) + [\phi_0(v_n) - \phi_{\mu_n}(v_n)] = \lim \|v_n\|^2 \geq \delta^2 > 0$$

car $\phi_{\mu_n}(v_n) = \|v_n\|^2$ puisque $v_n \in \widetilde{N}_{\mu_n}$. Par conséquent, $v^* \not\equiv 0$ et

$$\lim \|v_n\|^2 = \phi_0(v^*). \tag{2.51}$$

Mais alors

$$\widetilde{J}_0(v^*) = \frac{1}{2}\|v^*\|^2 - \frac{1}{2}\phi_0(v^*) \leq \frac{1}{2}\left\{\liminf \|v_n\|^2 - \phi_0(v^*)\right\} = 0,$$

de sorte que $\widetilde{t}_0(v^*) \leq 1$ par (2.47). Ainsi,

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_0 &\leq \widetilde{S}_0(\widetilde{t}_0(v^*)v^*) = A(p)\|\widetilde{t}_0(v^*)v^*\|^2 = A(p)\widetilde{t}_0(v^*)^2\|v^*\|^2 \leq A(p)\|v^*\|^2 \\ &\leq A(p)\liminf \|v_n\|^2 = \lim A(p)\|v_n\|^2 = \lim \widetilde{S}_{\mu_n}(v_n) = \lim \widetilde{m}_{\mu_n},\end{aligned} \tag{2.52}$$

ce qui montre que $\lim \widetilde{m}_{\mu_n}$ existe et que

$$\widetilde{m}_0 \leq \lim \widetilde{m}_{\mu_n}. \tag{2.53}$$

Maintenant, par le Lemme 2.2.6(i), nous avons que

$$\widetilde{t}_{\mu_n}(\psi)^{p-1} = \frac{\|\psi\|^2}{\phi_{\mu_n}(\psi)} \to \frac{\|\psi\|^2}{\phi_0(\psi)} = 1.$$

Donc $\widetilde{t}_{\mu_n}(\psi) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Mais alors

$$\widetilde{S}_{\mu_n}(\widetilde{t}_{\mu_n}(\psi)\psi) = \widetilde{S}_0(\psi) + o(1) = \widetilde{m}_0 + o(1).$$

En effet, posant $t_n = \widetilde{t}_{\mu_n}(v_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{\mu_n}(t_n\psi) &= \frac{1}{2}\|t_n\psi\|^2 - \frac{1}{p+1}\phi_{\mu_n}(t_n\psi) = \frac{1}{2}t_n^2\|\psi\|^2 - \frac{1}{p+1}t_n^{p+1}\phi_{\mu_n}(\psi)\\ &= \frac{1}{2}\|\psi\|^2 - \frac{1}{p+1}\phi_0(\psi) + \frac{1}{2}(t_n^2-1)\|\psi\|^2 - \frac{1}{p+1}\{t_n^{p+1}\phi_{\mu_n}(\psi) - \phi_0(\psi)\}\\ &= \widetilde{S}_0(\psi) + o(1)\end{aligned}$$

car $\phi_{\mu_n}(\psi) - \phi_0(\psi) \to 0$ par le Lemme 2.2.6(i). Par conséquent,

$$\widetilde{m}_{\mu_n} \leq \widetilde{S}_{\mu_n}(\widetilde{t}_{\mu_n}(\psi)\psi) = \widetilde{m}_0 + o(1),$$

de sorte que

$$\lim \widetilde{m}_{\mu_n} \leq \widetilde{m}_0. \tag{2.54}$$

Finalement, (2.53) et (2.54) impliquent que $\lim \widetilde{m}_{\mu_n} = \widetilde{m}_0$. Revenant à (2.52), nous voyons que l'on doit avoir $\widetilde{t}_0(v^*) = 1$ et $\widetilde{S}_0(v^*) = \widetilde{m}_0$. Maintenant, $\|v_n - v^*\| \to 0$ découle de (2.51) et du fait que $\phi_0(v^*) = \|v^*\|^2$ puisque $v^* \in \widetilde{N}_0$. Ainsi, comme $v_n > 0$, on a $v^* > 0$ et $v^* \in \widetilde{G}_0$. En conséquence, puisque $\widetilde{G}_0 = \{\psi\}$, nous avons $v^* = \psi$.

Il reste à montrer qu'en fait, toute la suite $\{v_n\}$ converge vers ψ et pas seulement une sous-suite. Supposons par l'absurde que ça n'est pas vrai. Il existe alors $\epsilon > 0$ et une sous-suite $\{v_{n_j}\}$ tels que $\|v_{n_j} - \psi\| \geq \epsilon$ pour tout j. Comme $\{v_{n_j}\}$ est bornée et $v_{n_j} \in \widetilde{G}_{\mu_{n_j}}$ pour tout j, avec $\mu_{n_j} \to 0$ lorsque $j \to \infty$, nous pouvons appliquer les arguments précédents à $\{v_{n_j}\}$ et en extraire une sous-suite qui converge vers ψ, contradiction. □

Remarque 2.2.8 La dernière partie de la démonstration donne l'argument qui permet de justifier la Remarque 2.2.3.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.2.9 *Supposons que les hypothèses (H0), (H3) et (H5) sont vérifiées et que $N \geq 3$. Soit $\lambda_0 > 0$ et $u_0 \in C((0,\lambda_0), H)$ donnés par le Théorème 2.1.10. Il existe $\widetilde{\lambda} \in (0,\lambda_0)$ tel que $G_\lambda = \{u_0(\lambda)\}$ pour tout $\lambda \in (0,\widetilde{\lambda})$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe $\lambda_1 \in (0,\lambda_0)$ tel que $u_0(\lambda) \in G_\lambda$ pour tout $\lambda \in (0,\lambda_1)$. Supposons par l'absurde que pour tout $\lambda_1 \in (0,\lambda_0)$, il existe $\lambda \in (0,\lambda_1)$ tel que $u_0(\lambda)$ est une solution de (E_λ) qui n'est pas un minimiseur de S_λ sur N_λ. C'est-à-dire, $S'_\lambda(u_0(\lambda)) = 0$, et ainsi $u_0(\lambda) \in N_\lambda$, mais $S_\lambda(u_0(\lambda)) > m_\lambda$. En utilisant la Proposition 2.2.5, nous pouvons donc construire une suite $\{(\mu_n, v_n)\} \subset (0,\infty) \times H$ telle que $\mu_n \to 0$ et $v_n = v(\mu_n) \in \widetilde{N}_{\mu_n} \setminus \widetilde{G}_{\mu_n}$ pour tout n, où v est la fonction donnée par la Proposition 2.1.6. Soit alors une suite $\{w_n\} \subset H$ telle que $w_n \in \widetilde{G}_{\mu_n}$ pour tout n. Par le Lemme 2.2.7, puisque $\mu_n \to 0$, nous avons donc que $w_n \to \psi_{B,b}$ lorsque $n \to \infty$. Or, d'après la démonstration de la Proposition 2.1.3, il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R} \times H$, $(0,\psi_{B,b}) \in O$, tel que si $(\mu, w) \in O$ et w est solution de ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$), alors $w = v(\mu)$. Par conséquent, il existe n_1 tel que $w_n = v(\mu_n)$ pour tout $n \geq n_1$. Donc $w_n = v_n \in \widetilde{N}_{\mu_n} \setminus \widetilde{G}_{\mu_n}$ pour tout $n \geq n_1$, contradiction.

Il reste à prouver qu'il existe $\lambda_2 \in (0,\lambda_0)$ tel que si $u \in G_\lambda$ avec $\lambda \in (0,\lambda_2)$, alors $u = u_0(\lambda)$. Supposons que ça n'est pas le cas. La Proposition 2.2.5 assure alors l'existence d'une suite

$\{(\mu_n, w_n)\} \subset (0,\infty) \times H$ telle que $\mu_n \to 0$, $w_n \in \widetilde{G}_{\mu_n}$ et $w_n \neq v(\mu_n)$ pour tout n. Mais le Lemme 2.2.7 implique que $w_n \to \psi_{B,b}$ lorsque $n \to \infty$. Par l'argument d'unicité locale des solutions évoqué ci-dessus, il existe donc un entier n_2 tel que $w_n = v(\mu_n)$ pour tout $n \geq n_2$, contradiction.

Nous posons alors $\widetilde{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ et la preuve est terminée. □

2.2.3 Continuation globale

Nous avons maintenant en main toutes les informations qui vont nous permettre de démontrer la continuation globale de la branche de solutions amorcée par le Théorème 2.1.10.

Théorème 2.2.10 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H6) sont vérifiées, avec $N \geq 3$. Il existe une unique fonction $u \in C^1((0,\infty), H)$ telle que $u(\lambda)$ est une solution faible de (E_λ) pour tout $\lambda > 0$ et qui jouit des propriétés suivantes.*

(i) $u(\lambda) = u_0(\lambda)$ pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, où u_0 et λ_0 sont donnés par le Théorème 2.1.10.

(ii) Il existe deux fonctions $A_1, A_2 \in C(0,\infty)$ telles que

$$0 < A_1(\lambda) \leq \|u(\lambda)\| \leq A_2(\lambda) < \infty, \ \textit{pour tout } \lambda > 0.$$

(iii) $u(\lambda) \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, pour tout $\lambda > 0$.

(iv) $u(\lambda)$ est strictement positive, à symétrie sphérique et strictement radialement décroissante sur $\mathbb{R}^N$, pour tout $\lambda > 0$.

(v) $u(\lambda)(x) \to 0$ et $|\nabla u(\lambda)(x)| \to 0$ exponentiellement lorsque $|x| \to \infty$, pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration. Par le Théorème 1.1.8, le Corollaire 1.3.2 et le Théorème 1.4.10, nous savons que, pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique état fondamental (positif) ψ_λ, qui est une solution non-dégénérée de (E_λ). Définissons $u : (0,\infty) \to H$ par $u(\lambda) = \psi_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$. La propriété (ii) est donnée par le Lemme 2.2.1 et les propriétés (iii) à (v) sont données par le Théorème 1.2.7. Il reste à voir que $u \in C^1((0,\infty), H)$. Il apparaîtra clairement que (i) est aussi vérifié.

Nous savons déjà par le Théorème 2.2.9 que

$$u\,|_{(0,\widetilde{\lambda})} = u_0\,|_{(0,\widetilde{\lambda})} \in C^1((0,\widetilde{\lambda}), H).$$

Posons

$$\Lambda \equiv \sup\{\lambda > 0 : u\,|_{(0,\lambda)} \in C^1((0,\lambda), H)\}.$$

Clairement $0 < \widetilde{\lambda} \leq \Lambda \leq \infty$. Nous allons montrer que $\Lambda = \infty$. Supposons par l'absurde que $\Lambda < \infty$. Par la Proposition 2.2.2 et par unicité (c.f. 2.2.3), nous avons que

$$u(\lambda_n) \to u(\Lambda) \quad \text{pour toute suite } \{\lambda_n\} \subset (0,\infty) \text{ telle que } \lambda_n \to \Lambda. \tag{2.55}$$

Définissons $\Xi : (0,\infty) \times H \to H^*$ par

$$\Xi(\lambda, u) = \Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u,$$

de sorte que u est une solution de (E_λ) si et seulement si $\Xi(\lambda, u) = 0$. En particulier, on a que $\Xi(\Lambda, \psi_\Lambda) = 0$. Il découle du Lemme B.1 que $\Xi \in C^1((0,\infty) \times H, H^*)$ avec

$$D_u\Xi(\lambda, u)v = \Delta v - \lambda v + pV(x)|u|^{p-1}v = -T'_\lambda(u)v \quad \text{pour tout } u, v \in H,$$

où $T_\lambda : H \to H^*$ est défini au début de la Section 1.4. Par le Théorème 1.4.10, ψ_Λ est une solution non-dégénérée de (E_Λ), ce qui signifie précisément que $D_u\Xi(\Lambda, \psi_\Lambda) \equiv -T'_\Lambda(\psi_\Lambda) : H \to H^*$ est un isomorphisme. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction Ξ au point (Λ, ψ_Λ). Nous obtenons ainsi un ouvert $O \subset (0,\infty) \times H$, $(\Lambda, \psi_\Lambda) \in O$, un nombre $\epsilon > 0$ et une unique fonction $\eta \in C^1((\Lambda - \epsilon, \Lambda + \epsilon), H)$ tels que

$$\{(\lambda, u) \in O : \Xi(\lambda, u) = 0\} = \{(\lambda, \eta(\lambda)) : \lambda \in (\Lambda - \epsilon, \Lambda + \epsilon)\}.$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, il découle alors de (2.55) que $\eta(\lambda) = u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in (\Lambda - \epsilon, \Lambda + \epsilon)$. Par conséquent, $u \mid_{(0,\Lambda+\epsilon)} \in C^1((0, \Lambda + \epsilon), H)$, ce qui contredit la définition de Λ. Le théorème est démontré. □

Grâce au Théorème 2.1.10, nous avons déjà des informations détaillées sur le comportement de la branche lorsque $\lambda \to 0$. Nous terminons ce chapitre par le corollaire suivant, qui permet de discuter le comportement asymptotique de la branche globale lorsque $\lambda \to \infty$. Nous supposons satisfaites les hypothèses du Théorème 2.2.10, ainsi que celles du Théorème 2.1.11, qui donne l'existence d'une branche locale au voisinage de $\lambda = \infty$. Par unicité dans le Théorème 2.2.10, on obtient donc que les deux branches, locale et globale, coïncident pour $\lambda > \lambda^\infty$ et l'on peut déduire le comportement asymptotique lorsque $\lambda \to \infty$ de la branche globale de celui de la branche locale. Cette discussion est faite dans la Remarque 2.2.13 ci-dessous.

Corollaire 2.2.11 *Si les hypothèses (H1) à (H8) sont satisfaites, avec $N \geq 3$ et $a \in (0, b]$, alors les résultats des Théorèmes 2.1.10, 2.1.11 et 2.2.10 sont vrais et, de plus, $u^\infty = u \mid_{(\lambda^\infty,\infty)}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les hypothèses (H5) et (H6) sont compatibles avec les hypothèses (H7) et (H8) si $a \in (0, b]$. Le corollaire est alors une conséquence immédiate des Théorèmes 2.1.10, 2.1.11 et 2.2.10. □

Sous les hypothèses du Corollaire 2.2.11, la fonction u donnée par le Théorème 2.2.10 connecte (au sens de la connexité) les deux branches locales données par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11. Une fonction V satisfaisant les hypothèses du Corollaire 2.2.11 se comporte asymptotiquement comme $A|x|^{-a}$ à l'origine et comme $B|x|^{-b}$ à l'infini.

Remarque 2.2.12 On peut engendrer un grand nombre de fonctions satisfaisant les hypothèses (H1) à (H4) et qui vérifient de plus (H5)-(H6) et/ou (H7)-(H8). Considérons par exemple les hypothèses suivantes.

(H9) Il existe une constante $\nu > 0$ et une fonction décroissante $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\widetilde{V}(r) = \nu \exp \int_1^r \frac{h(s)}{s} ds.$$

(H10) Il existe $b \in (0, 2)$ et $\epsilon_\infty > 0$ tels que $-b \leq h(r) < 0$ pour tout $r > 0$ et

$$\lim_{r\to\infty} r^{\epsilon_\infty} |h(r) + b| = 0.$$

De plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$.

(H11) Il existe $a \in (0, 2)$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que $-\infty < h(r) \leq -a$ pour tout $r > 0$ et

$$\lim_{r\to 0} r^{-\epsilon_0} |h(r) + a| = 0.$$

De plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$.

On vérifie alors que, si $\widetilde{V}$ est donné par (H9), $r\widetilde{V}'(r)/\widetilde{V}(r) = h(r)$ pour tout $r > 0$ et que la fonction V correspondant à $\widetilde{V}$ satisfait les hypothèses (H1) à (H4). Notez que $\nu = \widetilde{V}(1)$. Si l'on suppose, de plus, que (H10) est vérifiée, alors V satisfait (H5) et (H6). En effet, notant $\widetilde{W_b} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction correspondant à la fonction radiale W_b de l'hypothèse (H6), nous avons

$$r^b\widetilde{V}(r) = \nu \exp \int_1^r \frac{h(s)+b}{s} ds \quad \text{et} \quad r^b\widetilde{W_b}(r) = r^b\widetilde{V}(r)[h(r)+b] \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Il est alors facile de voir que (H10) implique (H5) et (H6) avec $B = \nu \exp(\int_1^\infty \frac{h(r)+b}{r} dr) \in (0,\infty)$. De même, si (H11) est vérifiée, alors V satisfait (H7)-(H8) avec $A = \nu \exp(-\int_0^1 \frac{h(r)+a}{r} dr) \in (0,\infty)$. En outre, il est clair que (H10) et (H11) sont compatibles si $a \in (0,b]$.

D'autre part, notons encore que, sous l'hypothèse (H10), on obtient les fonctions typiques $\widetilde{V}(r) = r^{-b}$ et $\widetilde{V}(r) = 1/(1+r^2)^{b/2}$ en posant respectivement dans (H9) $\nu = 1$, $h(r) \equiv -b$ et $\nu = 2^{-b/2}$, $h(r) = -br^2/(1+r^2)$.

Sous les hypothèses du Corollaire 2.2.11, les résultats de bifurcation/bifurcation asymptotique donnés par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11 sont maintenant associés aux propriétés de la fonction u. Nous les résumons dans la

Remarque 2.2.13 Tout d'abord, nous avons que

$\lim_{\lambda\to 0} |\nabla u(\lambda)|_{L^2} = 0$ et $\lim_{\lambda\to\infty} |\nabla u(\lambda)|_{L^2} = \infty$ pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2} \leq 1 + \frac{4-2a}{N-2}$.

Concernant $|u(\lambda)|_{L^2}$, nous avons que

$\lim_{\lambda\to 0} |u(\lambda)|_{L^2} = 0$ si $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$ et

$\lim_{\lambda\to 0} |u(\lambda)|_{L^2} = \infty$ si $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$, alors que

$\lim_{\lambda\to\infty} |u(\lambda)|_{L^2} = \infty$ si $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N}$ et

$\lim_{\lambda\to\infty} |u(\lambda)|_{L^2} = 0$ si $1 + \frac{4-2a}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$.

Notez que ce dernier intervalle est non vide si $N = 2$ pour tout $a \in (0,b]$ et qu'il est non vide pour $N \geq 3$ si et seulement si $2 - (2-b)\frac{N}{N-2} < a \leq b$, ce qui est possible car $b < 2$.
Concernant $|u(\lambda)|_{L^\infty}$, nous avons

$\lim_{\lambda\to 0} |u(\lambda)|_{L^\infty} = 0$ pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$ et

$\lim_{\lambda\to\infty} |u(\lambda)|_{L^\infty} = \infty$ si $N = 2$ ou si $N \in \{3,4,5\}$, $a < 3 - N/2$ et $1 < p < \frac{4-2a}{N-2}$.

Nous voyons en particulier que pour certaines valeurs des paramètres, on aura *concentration* des solutions lorsque $\lambda \to \infty$, dans le sens qu'il y a bifurcation asymptotique dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et bifurcation de la ligne des solutions triviales dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ce sera le cas si $N = 2$ et $p > 3 - 2a$. Pour $N \geq 3$, ce sera le cas si et seulement si $a < 3 - N/2$ et $1 + \frac{4-2a}{N} < p < \min\{1 + \frac{4-2b}{N-2}, \frac{4-2a}{N-2}\}$. Or il s'avère que, sous l'hypothèse $0 < a \leq b$, cet intervalle pour p est non vide si et seulement si $N = 3$, $0 < b < 7/4$ et $3b - 4 < a < 5/4$. Plus précisément, la Proposition 2.1.15 montre que, dans ces conditions, lorsque $\lambda \to \infty$, les solutions $u(\lambda)$ convergent uniformément exponentiellement vers zéro, en dehors de tout ouvert qui contient l'origine.

Remarque 2.2.14 Nous verrons au Chapitre 3 que la stabilité orbitale des ondes stationnaires associées au solutions $u(\lambda)$ est liée à la monotonie de la fonction $\lambda \mapsto |u(\lambda)|_{L^2}$. Nous prouverons en fait que, sous les hypothèses du Corollaire 2.2.11,

$\lambda \mapsto |u(\lambda)|_{L^2}$ est strictement croissante/décroissante dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$ si $p < 1 + \frac{4-2b}{N}/p > 1 + \frac{4-2b}{N}$, et que

$\lambda \mapsto |u(\lambda)|_{L^2}$ est strictement croissante/décroissante dans un voisinage de $\lambda = +\infty$ si $p < 1 + \frac{4-2a}{N}/p > 1 + \frac{4-2a}{N}$.

Nous constatons d'ores et déjà que ces résultats sont cohérents avec les limites de la remarque précédente et nous verrons au Chapitre 3 qu'ils impliquent respectivement la stabilité/instabilité orbitale des ondes stationnaires pour des fréquences λ dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$ et des fréquences λ dans un voisinage de $\lambda = +\infty$.

Chapitre 3

Stabilité

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des ondes stationnaires pour l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t w + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0 \quad w = w(t,x) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ N \geq 2, \tag{NLS}$$

où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Δ désigne ici le laplacien par rapport à la variable d'espace, $x \in \mathbb{R}^N$. Il est naturel de chercher des solutions de (NLS) dans le sens suivant.

Définition 3.0.1 On dit que w est une *solution de (NLS)* s'il existe $T \in (0, \infty]$ tel que

$$w \in C([0,T), H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})) \cap C^1((0,T), H^{-1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))$$

et

$$i\partial_t w + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ pour tout } t \in (0,T),$$

où $H^{-1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ désigne l'espace dual de $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. On interprète le membre de gauche de l'équation comme un élément de $H^{-1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ en faisant les identifications analogues à celle faites dans le cas réel, c.f. (1.22) et (1.23).
La solution est dite *globale en temps* ou simplement *globale* si on peut prendre $T = \infty$. Sinon, elle est dite *locale en temps* ou simplement *locale*.

Une *onde stationnaire* est une solution de (NLS) de la forme $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. C'est donc une solution globale. Si la variable $t \in \mathcal{I}$ représente le temps, le paramètre λ est interprété physiquement comme une *fréquence*. Une telle fonction est solution de (NLS) si et seulement si $u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation de Schrödinger stationnaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)|u|^{p-1}u = 0 \quad u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2, \tag{E$_\lambda$}$$

qui a été étudiée dans les Chapitres 1 et 2. Nous avons vu qu'il convient en effet de chercher des solutions de (E$_\lambda$) dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et, sous des hypothèses appropriées sur p et V, nous avons montré l'existence d'états fondamentaux ψ_λ de (E$_\lambda$), pour tout $\lambda > 0$. Nous avons donc déjà prouvé l'existence d'ondes stationnaires de la forme $\varphi_\lambda(t,x) = e^{i\lambda t}\psi_\lambda(x),\ \lambda > 0$, pour l'équation (NLS) et nous connaissons des propriétés importantes des fonctions $\varphi_\lambda(t,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, nous savons que $\lim_{|x|\to\infty} |\varphi_\lambda(t,x)| = 0$ exponentiellement, uniformément en $t \in \mathbb{R}$. L'interprétation physique de ce résultat est que l'onde stationnaire φ_λ représente un état *localisé dans l'espace* du système décrit par (NLS). Cette propriété de localisation est un effet typiquement non-linéaire qui motive les terminologies souvent employées d'*onde solitaire* ou encore de *soliton*, qui désignent de façon générale une onde stationnaire localisée spatialement, solution d'une équation dispersive non-linéaire.

Notez que φ_λ est une solution *périodique* en temps (en fait harmonique en temps) de l'équation (NLS) qui est *autonome par rapport au temps* (i.e. qui ne dépend pas explicitement du temps). La notion de stabilité appropriée dans ce contexte est celle de *stabilité orbitale*.

Définition 3.0.2 Une onde stationnaire de la forme $\varphi_\lambda(t,x) = e^{i\lambda t}u_\lambda(x)$, où u_λ est une solution (faible) de (E_λ), est dite *orbitalement stable*, ou simplement *stable*, dans $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $w : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de (NLS) satisfaisant $\|w(0,\cdot) - u_\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})} < \delta$, on a

$$\sup_{t\geq 0} \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|w(t,\cdot) - e^{i\theta}u_\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Nous dirons qu'elle est *instable* si elle n'est pas stable.

Remarque 3.0.3 Notez que la solution w de (NLS) considérée dans la définition ci-dessus est supposée globale en temps.

Pour tout $w \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, nous définissons l'*orbite*[1] de w comme l'ensemble

$$\Theta(w) = \{e^{i\theta}w : \theta \in \mathbb{R}\} \subset H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}). \tag{3.2}$$

Dit grossièrement, une onde stationnaire $\varphi_\lambda(t) = e^{i\lambda t}u_\lambda$, d'orbite $\Theta(u_\lambda)$, est stable si toute solution $w(t,\cdot)$ de (NLS) avec condition initiale $w(0,\cdot)$ "proche" de $\Theta(u_\lambda)$ reste "proche" de $\Theta(u_\lambda)$ pour tout $t \geq 0$.

Une théorie générale de la stabilité orbitale a été établie dans [17]. Elle est également exposée en détail dans [50], où une attention particulière est portée au cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Il découle du Théorème 3 de [17] que, dans notre contexte, la stabilité orbitale de l'onde stationnaire $\varphi_\lambda(t,x) = e^{i\lambda t}u_\lambda(x)$ dépend de ce qu'on appelle parfois la *condition de pente* ou encore la *condition de Vakhitov-Kolokolov*[2]. Sous certaines hypothèses portant sur le spectre d'opérateurs associés à la linéarisation de (NLS) au point φ_λ, cette condition dit que, si

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^2 dx > 0, \tag{3.3}$$

alors l'onde stationnaire φ_λ est orbitalement stable et que, si

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^2 dx < 0, \tag{3.4}$$

alors l'onde stationnaire φ_λ est instable. Bien entendu, ce critère nécessite que le membre de gauche de (3.3) soit bien défini, d'où l'importance dans cette discussion des résultats du Chapitre 2. Nous allons appliquer la condition de pente, ou, plus précisément, le Théorème 3 de [17], pour établir la stabilité/instabilité des ondes stationnaires dont l'existence est assurée par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11 (et qui ne correspondent donc pas forcément à des états fondamentaux de (E_λ)). Nous obtiendrons ainsi des résultats de stabilité pour des ondes stationnaires de "basses fréquences" $0 < \lambda < \lambda_0$ et pour des ondes stationnaires de "hautes fréquences" $\lambda^\infty < \lambda < \infty$. Ces résultats font l'objet du Théorème 3.4.2.

[1]Pour une solution u_λ de (E_λ), $\Theta(u_\lambda)$ est l'orbite de u_λ par rapport à l'action du groupe $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ sur $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et, dans notre contexte, c'est également l'orbite de l'onde stationnaire $\varphi_\lambda(t) = e^{i\lambda t}u_\lambda$ dans le sens des systèmes dynamiques.

[2]Il semble en effet que cette condition soit apparue pour la première fois sous cette forme dans le papier [51] de Vakhitov et Kolokolov.

Nous n'utiliserons pas la continuation globale des solutions obtenues à la Section 2.2 et *tous les résultats de ce chapitre sont valables en dimension $N \geq 2$, sans hypothèse de symétrie sur la fonction V.*

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante. Tout d'abord, dans la Section 3.1, nous discutons le problème de Cauchy associé à (NLS) et établissons des conditions sous lesquelles ce problème admet des solutions locales ou globales. Nous définissons également dans cette section les fonctionnelles appelées “énergie” et “charge” qui, sous des hypothèses appropriées, sont des constantes du mouvement pour (NLS). Puis, à la Section 3.2, nous expliquons comment inscrire (NLS) dans le cadre des systèmes hamiltoniens, auxquels la théorie générale de [17] s'applique. Nous montrons également comment la condition de pente découle du Théorème 3 de [17]. Ensuite, dans la Section 3.3, nous étudions les conditions spectrales portant sur des opérateurs linéarisés associés à (NLS) et qui sont des hypothèses requises par le Théorème 3 de [17]. Finalement, à la Section 3.4, le critère (3.3)/(3.4) nous permet d'établir des conditions précises sous lesquelles on a stabilité/instabilité.

Dans ce chapitre, nous noterons respectivement H et H^1 les espaces de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ et $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ ainsi que H^* et H^{-1} leurs espaces duaux respectifs. $\|\cdot\|$ désigne toujours la norme standard sur H. Selon le contexte, et s'il n'y pas de confusion possible, nous noterons simplement L^q les espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ ou $L^q(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$.

3.1 Le problème de Cauchy

Nous considérons dans cette section le problème de Cauchy

$$i\partial_t w + \Delta w + g(w) = 0, \quad w(0) = \varphi \in H^1, \tag{PC}$$

où $g \in C(H^1, H^{-1})$ est une non-linéarité qui, dans le contexte de (NLS), est donnée comme l'opérateur de superposition $u \mapsto g(u) = V(x)|u|^{p-1}u$. La théorie générale d'existence de solutions locales/globales en temps de problèmes du type (PC) est bien établie et est exposée en détail dans l'ouvrage [7]. Nous montrons dans cette section que, sous des hypothèses appropriées sur (NLS), les résultats de [7] garantissent que le problème de Cauchy correspondant possède des solutions locales/globales, au sens de la Définition 3.0.1. Nous commençons par énoncer un théorème général, qui résume le contenu des Théorèmes 4.3.1, 6.1.1 et 6.1.4 de [7], sous une forme bien adaptée à (NLS). Nous définissons pour cela deux fonctionnelles $E, Q : H^1 \to \mathbb{R}$, appelées respectivement l'*énergie* et la *charge*, par

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p+1} dx \quad \text{et} \quad Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx. \tag{3.5}$$

Il est clair que $Q \in C^2(H^1,\mathbb{R})$ et il découle du Lemme B.1 que $E \in C^2(H^1,\mathbb{R})$.

Théorème 3.1.1 *Soit $g \in C(H^1, H^{-1})$ une non-linéarité de la forme $g = g_1 + g_2$, où $g_1, g_2 \in C(H^1, H^{-1})$ satisfont les hypothèses suivantes.*

(a) $g_i(0) = 0$ et il existe $G_i \in C^1(H^1,\mathbb{R})$ tel que $G_i(0) = 0$ et $g_i = G_i'$.

(b) Il existe $r_i, \rho_i \in [2, 2^*)$ tels que, pour tout $M > 0$, il existe $C_i(M) > 0$ tel que

$$|g_i(u) - g_i(v)|_{L^{\rho_i'}} \leq C_i(M)|u - v|_{L^{r_i}}$$

pour tout $u, v \in H^1$ satisfaisant $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq M$.

Alors, pour tout $\varphi \in H^1$, il existe $T = T(\varphi) > 0$ et une unique solution

$$w \in C([0,T), H^1) \cap C^1((0,T), H^{-1})$$

de (PC). En outre, il y a conservation de la charge et de l'énergie, dans le sens que

$$Q(w(t)) = Q(\varphi) \quad et \quad E(w(t)) = E(\varphi) \quad pour\ tout\ t \in [0,T).$$

(c) Si, de plus, il existe $\epsilon \in (0,1)$ et une fonction $\eta \in C([0,\epsilon),[0,\infty))$, telle que $\eta(0) = 0$, qui satisfont

$$G_1(u) + G_2(u) \leq \frac{1-\epsilon}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \eta(|u|_{L^2}) \text{ pour tout } u \in H^1 \text{ tel que } \|u\|_{H^1} < \epsilon,$$

alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in H^1$ satisfaisant $\|\varphi\|_{H^1} \leq \delta$, on peut poser $T(\varphi) = \infty$ et on a, de plus, $\sup\{\|w(t)\|_{H^1} : t \geq 0\} \leq \epsilon$.

(d) Finalement, s'il existe $\epsilon \in (0,1)$ et une fonction $\eta \in C([0,\infty),[0,\infty))$, telle que $\eta(0) = 0$, qui satisfont

$$G_1(u) + G_2(u) \leq \frac{1-\epsilon}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \eta(|u|_{L^2}) \text{ pour tout } u \in H^1,$$

alors on peut poser $T(\varphi) = \infty$ pour tout $\varphi \in H^1$.

Remarque 3.1.2 Le résultat d'existence locale qui découle des hypothèses (a) et (b) est contenu dans le Théorème 4.3.1 de [7], alors que les énoncés (c) et (d) sont respectivement des conséquences des Théorèmes 6.1.4 et 6.1.1 de [7]. Le résultat (c) assure l'existence globale pour des conditions initiales suffisamment "petites" et (d) garantit l'existence globale pour toute condition initiale dans H^1.

Lemme 3.1.3 *Supposons les hypothèses (H0) et (H2) vérifiées et posons $g(u) = V(x)|u|^{p-1}u$. Alors il existe g_1 et g_2 tels que $g = g_1 + g_2$ et qui satisfont les hypothèses (a) et (b) du Théorème 3.1.1. D'autre part, la partie (c) du Théorème 3.1.1 est vraie. Si, de plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$, alors (d) est aussi vraie.*

Remarque 3.1.4 Nous verrons à la Section 3.4 que l'hypothèse $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$, qui assure que (PC) admet une solution globale, correspond précisément à la condition de stabilité orbitale des ondes stationnaires de "basse fréquence" pour $k = b$, et des ondes stationnaires de "haute fréquence" pour $k = a$.

Démonstration. Posons

$$g_1(u) = \chi_{B(0,1)}(x)g(u) \quad \text{et} \quad g_2(u) = [1 - \chi_{B(0,1)}(x)]g(u)$$

pour tout $u \in H^1$, où χ_Ω désigne la fonction caractéristique de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Par (H0) et (H2), il découle du Lemme B.1(iii) que, pour $i = 1, 2$, g_i satisfait (a) avec

$$G_1(u) = \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} \xi_1(x)|x|^{-k}|u|^{p+1}dx \quad \text{et} \quad G_2(u) = \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} \xi_2(x)|x|^{-k}|u|^{p+1}dx,$$

où

$$\xi_1(x) = \chi_{B(0,1)}(x)V(x)|x|^k \quad \text{et} \quad \xi_2(x) = [1 - \chi_{B(0,1)}(x)]V(x)|x|^k.$$

Pour (b), supposons que $u, v \in H^1$ sont tels que $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq M$ pour un $M > 0$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subset H^1$. Pour g_1, nous utilisons l'inégalité de Hölder avec quatre exposants $\alpha, \beta, r_1, \rho_1 \geq 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} = 1$, et le théorème de plongement de Sobolev. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} [g_1(u) - g_1(v)]\varphi \, dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B(0,1)}(x)|V(x)| \left||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\right| |\varphi| dx \\
&\leq C \int_{B(0,1)} |x|^{-k} \left|\int_0^1 p|tu + (1-t)v|^{p-1}(u-v)dt\right| |\varphi| dx \\
&\leq C \int_{B(0,1)} |x|^{-k} \left(|u| + |v|\right)^{p-1} |u - v||\varphi| dx \\
\leq C\{\int_{B(0,1)} |x|^{-k\alpha} dx\}^{1/\alpha} &\{\int_{B(0,1)} (|u| + |v|)^{(p-1)\beta} \, dx\}^{1/\beta} |u - v|_{L^{r_1}} |\varphi|_{L^{\rho_1}} \\
\leq C_1 \big||u| + |v|\big|^{p-1}_{L^{(p-1)\beta}} |u-v|_{L^{r_1}} |\varphi|_{L^{\rho_1}} &\leq C_1 \left(|u|_{L^{(p-1)\beta}} + |v|_{L^{(p-1)\beta}}\right)^{p-1} |u - v|_{L^{r_1}} |\varphi|_{L^{\rho_1}} \\
\leq C_2(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1})^{p-1} |u - v|_{L^{r_1}} |\varphi|_{L^{\rho_1}} &\leq C_2 M^{p-1} |u - v|_{L^{r_1}} |\varphi|_{L^{\rho_1}}
\end{aligned}$$

si $\alpha, \beta > 1$ vérifient $N - k\alpha > 0$ et $(p-1)\beta \in [1, 2^*]$ si $N \geq 3$, $(p-1)\beta \geq 1$ si $N = 2$. Pour $N = 2$, il est clair que l'on peut toujours satisfaire les deux conditions. Si $N \geq 3$, il n'est pas difficile de vérifier que ces conditions seront satisfaites si l'on peut choisir $r_1 = \rho_1 \in (r_0, 2^*)$, où $r_0 = \frac{4N}{2N-2k-(p-1)(N-2)}$. Or l'intervalle $(r_0, 2^*)$ est non vide si et seulement si $p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$, ce qui est vrai par hypothèse. Par conséquent, l'hypothèse (b) du Théorème 3.1.1 est vérifiée par g_1. D'autre part, puisque $|x|^{-k} \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)$, nous obtenons, par l'inégalité de Hölder avec trois exposants et par le plongement de Sobolev,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} [g_2(u) - g_2(v)]\varphi \, dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} [1 - \chi_{B(0,1)}(x)]|V(x)| \left||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\right| |\varphi| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |x|^{-k} \left|\int_0^1 p|tu + (1-t)v|^{p-1}(u-v)dt\right| |\varphi| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} (|u| + |v|)^{p-1} |u - v||\varphi| dx \\
&\leq C_1 \big\||u| + |v|\big\|^{p-1}_{H^1} |u - v|_{L^{p+1}} |\varphi|_{L^{p+1}} \leq C_1 M^{p-1} |u - v|_{L^{p+1}} |\varphi|_{L^{p+1}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que g_2 satisfait l'hypothèse (b) avec $r_2 = \rho_2 = p + 1 \in [2, 2^*)$, pour tout $N \geq 2$.

Pour (c), remarquons que, pour $\alpha > 1$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,

$$\begin{aligned}
|G_1(u)| &\leq \frac{|\xi_1|_{L^\infty}}{p+1} \int_{B(0,1)} |x|^{-k} |u|^{p+1} dx \leq C\{\int_{B(0,1)} |x|^{-k\alpha} dx\}^{1/\alpha} \{\int_{B(0,1)} |u|^{(p+1)\beta} dx\}^{1/\beta} \\
&\leq C(\alpha)\{\int_{B(0,1)} |u|^{(p+1)\beta} dx\}^{1/\beta},
\end{aligned}$$

où $C(\alpha) < \infty$ pour autant que $N - k\alpha > 0$. Comme $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$, nous pouvons choisir $\alpha \in (1, \frac{N}{k})$ tel que $2 < (p+1)\beta < 2^*$. En fait, $\frac{k}{N} < 1 - \frac{p+1}{2^*}$ et nous pouvons prendre n'importe quel α tel que $\frac{1}{\alpha} \in (\frac{k}{N}, 1 - \frac{p+1}{2^*})$. Alors

$$|G_1(u)| \leq C(\alpha) |u|^{p+1}_{L^{(p+1)\beta}} \quad \text{pour tout } u \in H^1$$

et, puisque $L^{(p+1)\beta}$ est injecté continûment dans H^1, il existe $\epsilon \in (0,1)$ tel que $|u|_{L^{(p+1)\beta}} \leq 1$ pour tout $u \in H^1$ tel que $\|u\|_{H^1} < \epsilon$. Par conséquent,

$$|G_1(u)| \leq C(\alpha) |u|^2_{L^{(p+1)\beta}} \quad \text{pour tout } u \in H^1 \text{ tel que } \|u\|_{H^1} < \epsilon.$$

Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, il existe une constante $C(N,(p+1)\beta)$ telle que

$$|u|_{L^{(p+1)\beta}} \leq C(N,(p+1)\beta)\|u\|_{H^1}^{\gamma}|u|_{L^2}^{1-\gamma} \quad \text{pour tout } u \in H^1,$$

où $\gamma = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{(p+1)\beta})$. Ainsi, pour tout $u \in H^1$ tel que $\|u\|_{H^1} < \epsilon$,

$$|G_1(u)| \leq C(\alpha)C(N,(p+1)\beta)^2\|u\|_{H^1}^{2\gamma}|u|_{L^2}^{2(1-\gamma)},$$

où $0 < 2\gamma < 2$ car $2 < (p+1)\beta < 2^*$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_1(\varepsilon)$ telle que

$$|G_1(u)| \leq \varepsilon\|u\|_{H^1}^2 + C_1(\varepsilon)|u|_{L^2}^2 \quad \text{pour tout } u \in H^1 \text{ tel que } \|u\|_{H^1} < \epsilon.$$

D'autre part, comme $p+1 > 2$, quitte à choisir $\epsilon > 0$ plus petit, nous avons aussi que

$$\begin{aligned}|G_2(u)| &\leq \frac{|\xi_2|_{L^\infty}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,1)}|x|^{-k}|u|^{p+1}dx \leq \frac{|\xi_2|_{L^\infty}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx \\ &\leq C_1|u|_{L^{p+1}}^2 \quad \text{pour tout } u \in H^1 \text{ tel que } \|u\|_{H^1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Une application similaire de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_2(\varepsilon)$ telle que

$$|G_2(u)| \leq \varepsilon\|u\|_{H^1}^2 + C_2(\varepsilon)|u|_{L^2}^2 \quad \text{pour tout } u \in H^1 \text{ tel que } \|u\|_{H^1} < \epsilon.$$

Nous voyons ainsi que les hypothèses du point (c) sont vérifiées.

Pour (d), observons que, pour $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$, nous avons $\frac{k}{N} < 1 + \frac{2}{N} - \frac{p+1}{2} < 1 - \frac{p+1}{2^*}$. Dans l'estimation de $|G_1(u)|$, nous pouvons donc choisir α tel que $\frac{1}{\alpha} \in (\frac{k}{N}, 1 + \frac{2}{N} - \frac{p+1}{2})$ et, dans ce cas, $(p+1)\gamma < 2$, où $\gamma = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{(p+1)\beta})$, et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ comme avant. Nous obtenons alors, pour tout $u \in H^1$,

$$|G_1(u)| \leq C(\alpha)|u|_{L^{(p+1)\beta}}^{p+1} \leq C(\alpha)C(N,(p+1)\beta)^{p+1}\|u\|_{H^1}^{(p+1)\gamma}|u|_{L^2}^{(p+1)(1-\gamma)}$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_1(\varepsilon)$ telle que

$$|G_1(u)| \leq \varepsilon\|u\|_{H^1}^2 + C_1(\varepsilon)|u|_{L^2}^{\mu} \quad \text{pour tout } u \in H^1,$$

où $\mu = \frac{2(1-\gamma)(p+1)}{2-(p+1)\gamma} > 0$.

De façon similaire, pour tout $u \in H^1$,

$$|G_2(u)| \leq C_2|u|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq C_2C(N,p+1)^{p+1}\|u\|_{H^1}^{(p+1)\gamma_1}|u|_{L^2}^{(p+1)(1-\gamma_1)},$$

où $\gamma_1 = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})$ et $(p+1)\gamma_1 < 2$ car $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_2(\varepsilon)$ telle que

$$|G_2(u)| \leq \varepsilon\|u\|_{H^1}^2 + C_2(\varepsilon)|u|_{L^2}^{\mu_1} \quad \text{pour tout } u \in H^1,$$

où $\mu_1 = \frac{2(1-\gamma_1)(p+1)}{2-(p+1)\gamma_1} > 0$. Nous voyons donc que, pour $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$, les hypothèses du point (d) sont vérifiées. □

3.2 Formalisme hamiltonien

Nous invitons le lecteur à consulter la Section 7 de [50], qui explique en détail comment une équation de Schrödinger générale de la forme $i\partial_t w + \Delta w + f(x, |w|^2)w = 0$ peut être vue comme un système hamiltonien et qui discute différentes questions liées à l'existence et à la stabilité d'ondes stationnaires pour cette équation. Nous nous contenterons ici de donner les éléments essentiels dans le cas qui nous intéresse.

Nous faisons dès maintenant l'identification

$$H \subset L^2 \cong L^2 \subset H^*,$$

où $L^2 = L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donc utilisé comme espace pivot. $R = -\Delta + 1 : H \to H^*$ désigne l'isomorphisme de Riesz associé à H et nous renvoyons le lecteur au début de la Section 1.4 pour une explication de l'identification ci-dessus et de la notation utilisée pour l'isomorphisme R. Nous notons $\mathcal{J} : H \hookrightarrow H^*$ l'injection ainsi définie.

La théorie de stabilité développée dans [17] concerne des systèmes hamiltoniens réels de dimension infinie qui sont une forme faible de

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = JE'(\varphi(t)) \tag{3.6}$$

avec $\varphi : \mathcal{I} \to X$, $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle, X un espace hilbertien réel, $J : D(J) \subset X^* \to X$ un opérateur linéaire anti-symétrique et $E : X \to \mathbb{R}$ le hamiltonien. Dans notre contexte, nous posons

$$X = H \times H \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}^{-1} \\ -\mathcal{J}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour étudier (NLS) dans le formalisme de (3.6), nous identifions donc H^1 avec $X = H \times H$ par

$$H^1 \ni w \leftrightarrow \phi = (\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w) \in X.$$

A identification près, le hamiltonien $E \in C^2(X, \mathbb{R})$ est la fonctionnelle définie en (3.5). La traduction de la notion de solution introduite sous 3.0.1 en termes du système hamiltonien (3.6) est la suivante. On dit que φ est solution de (3.6) s'il existe $T \in (0, \infty]$ tel que

$$\varphi \in C([0, T), X) \cap C^1((0, T), X^*)$$

et

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = JE'(\varphi(t)) \quad \text{pour tout } t \in (0, T),$$

où le membre de droite est interprété comme un élément de X^* en faisant l'identification

$$X \subset L^2 \times L^2 \subset X^*.$$

Cette notion de solution est en fait un peu plus forte que celle considérée dans [17] (c.f. les équations (2.12) et (2.13) de [17]). Avec les définitions ci-dessus, on voit facilement qu'une fonction de la forme

$$\varphi(t) = (\operatorname{Re} w(t, \cdot), \operatorname{Im} w(t, \cdot))$$

est solution de (3.6) si et seulement si w est solution de (NLS).

L'équation (3.6) est supposée invariante par l'action du groupe à 1-paramètre d'isométries $\{T(\theta) : X \to X\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ défini par

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos\theta)I & -(\sin\theta)I \\ (\sin\theta)I & (\cos\theta)I \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $I : H \to H$ est l'identité. Notez que, si $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in X$, alors

$$T(\theta)\phi = (\cos\theta\phi_1 - \sin\theta\phi_2, \sin\theta\phi_1 + \cos\theta\phi_2).$$

D'autre part,

$$e^{i\theta}(\phi_1 + i\phi_2) = \cos\theta\phi_1 - \sin\theta\phi_2 + i(\sin\theta\phi_1 + \cos\theta\phi_2),$$

de sorte que l'action du groupe $\{T(\theta)\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ sur X correspond à l'action du groupe $\{e^{i\theta}\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ sur H^1. Dans le cadre général de [17], les ondes stationnaires sont des solutions de (3.6) de la forme $\varphi(t) = T(\lambda t)\phi$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\phi \in X$. En correspondance avec la définition (3.2), l'*orbite* de $\phi \in X$ est donc l'ensemble $\Theta(\phi) = \{T(\theta)\phi\}_{\theta\in\mathbb{R}} \subset X$. Dans notre contexte, pour une solution de cette forme, (3.6) est réduite à l'équation stationnaire

$$E'(\phi) + \lambda Q'(\phi) = 0, \tag{3.7}$$

où $Q \in C^2(X, \mathbb{R})$ est, à identification près, la fonctionnelle définie à la Section 3.1. Avec les identifications ci-dessus, on vérifie sans peine que (3.7) est équivalente à

$$-\Delta w - V(x)|w|^{p-1}w + \lambda w = 0 \quad \text{dans } H^{-1}. \tag{3.8}$$

Notez que, si dans l'onde stationnaire $\varphi(t) = T(\lambda t)\phi$, ϕ est de la forme $\phi = (u, 0) \leftrightarrow w = u \in H$, alors (3.8) devient simplement (E_λ). Les résultats des chapitres précédents fournissent donc l'existence et d'importantes propriétés d'ondes stationnaires $\varphi(t) = T(\lambda t)\phi$ particulières.

Le fait que la stabilité des ondes stationnaires dépend de la condition de pente (3.3)/(3.4) est une conséquence du Théorème 3 de [17]. Ce théorème nécessite les Hypothèses 1 à 3 suivantes.

Hypothèse 1 Pour que la stabilité découle de (3.3), il faut que le problème de Cauchy possède une solution globale, pour toute condition initiale. D'après le Lemme 3.1.3 et le Théorème 3.1.1, cette hypothèse est vérifiée si V satisfait (H0) et (H2) avec, de plus, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$. En outre, nous savons que le problème de Cauchy admet une solution locale pour toute condition initiale, pour tout $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$.

Hypothèse 2 Pour pouvoir appliquer la condition de pente, il faut qu'il existe un intervalle $(\lambda_1, \lambda_2) \subset \mathbb{R}$ et une application de classe C^1, $\lambda \mapsto \phi_\lambda$, définie sur cet intervalle, à valeur dans X, telle que ϕ_λ est une solution non-triviale de (3.7) pour tout $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Cette hypothèse est vérifiée respectivement sur les intervalles $(0, \lambda_0)$ et (λ^∞, ∞) grâce aux Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11.

Remarque 3.2.1 Nous discuterons l'Hypothèse 3 ci-dessous à la section suivante en utilisant les résultats des Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11. Cependant, nous ne ferons pas appel à la positivité des solutions (point (ii) de ces théorèmes) car elle sera démontrée dans le Lemme 3.3.4.

Pour formuler l'Hypothèse 3, nous devons introduire quelques notations supplémentaires. Dans le cadre général de [17], sous les Hypothèses 2 et 3, le critère donnant la stabilité/instabilité de l'onde stationnaire $T(\lambda t)\phi_\lambda$ est formulé en termes de la fonction $d : (\lambda_1, \lambda_2) \to \mathbb{R}$ définie par

$$d(\lambda) = E(\phi_\lambda) + \lambda Q(\phi_\lambda).$$

On définit un opérateur linéaire borné $H_\lambda : X \to X^*$ par

$$H_\lambda = E''(\phi_\lambda) + \lambda Q''(\phi_\lambda), \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2).$$

Le *spectre* de H_λ est défini comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$S(H_\lambda) = \big\{\xi \in \mathbb{R} : H_\lambda - \xi\widetilde{R} : X \to X^* \text{ n'est pas un isomorphisme}\big\}, \quad \text{où } \widetilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Comme nous le verrons dans le Lemme 3.3.3 ci-dessous, $\widetilde{R}^{-1}H_\lambda : X \to X$ est un opérateur auto-adjoint borné dont le spectre coïncide avec $S(H_\lambda)$. C'est-à-dire, $S(H_\lambda) = \sigma(\widetilde{R}^{-1}H_\lambda)$, où, comme d'habitude, $\sigma(A)$ désigne le spectre d'un opérateur auto-adjoint A agissant dans l'espace hilbertien X.

Hypothèse 3 Il faut que, pour tout λ dans un intervalle ouvert $(a, b) \subset (\lambda_1, \lambda_2)$, les propriétés suivantes soient vérifiées.

(**P1**) Il existe $\nu_\lambda < 0$ tel que $S(H_\lambda) \cap (-\infty, 0) = \{\nu_\lambda\}$ et $\dim\ker(H_\lambda - \nu_\lambda\widetilde{R}) = 1$.

(**P2**) $\ker H_\lambda = \operatorname{span}\{T'(0)\phi_\lambda\}$, où $T'(\theta) = \frac{d}{d\theta}T(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(**P3**) $S(H_\lambda) \setminus \{\nu_\lambda, 0\}$ est borné loin de zéro dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2.2 Si $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in X$, on a $T'(0)\phi = (-\phi_2, \phi_1)$. D'autre part, dans (P2), on aura $\phi_\lambda = (u_0(\lambda), 0)$ ou $\phi_\lambda = (u^\infty(\lambda), 0)$ selon que $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, \lambda_0)$ ou $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda^\infty, \infty)$, respectivement.

Sous les Hypothèses 1 à 3, le Théorème 3 de [17] assure que, pour tout $\lambda \in (a, b)$, l'onde stationnaire $T(\lambda t)\phi_\lambda$ est orbitalement stable si la fonction $d : (a, b) \to \mathbb{R}$ définie ci-dessus est strictement convexe dans un voisinage de λ. Elle est instable si d est strictement concave dans un voisinage de λ. Or, dans notre contexte, nous avons que

$$d'(\lambda) = E'(\phi_\lambda)\frac{d}{d\lambda}\phi_\lambda + Q(\phi_\lambda) + \lambda Q'(\phi_\lambda)\frac{d}{d\lambda}\phi_\lambda = Q(\phi_\lambda)$$

car $E'(\lambda) + \lambda Q'(\phi_\lambda) = 0$ par (3.7). Nous voyons donc que, pour (NLS), le critère de stabilité du Théorème 3 de [17] correspond bien à la condition de pente (3.3)/(3.4).

Remarque 3.2.3 Il ressort clairement de la discussion ci-dessus que, une fois réglée la question du problème de Cauchy associé à (NLS), la stabilité des ondes stationnaires repose entièrement sur les propriétés de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (E_λ).

3.3 Les conditions spectrales

Nous discutons dans cette section la validité des conditions (P1) à (P3) sur les intervalles $(0, \lambda_0)$ et (λ^∞, ∞), où l'Hypothèse 2 ci-dessus est satisfaite en vertu des Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11. Nous montrons les résultats suivants.

(I) Sous les hypothèses du Théorème 2.1.10, il existe un nombre $\lambda_* \in (0, \lambda_0)$ tel que (P1)-(P3) sont vérifiées sur $(0, \lambda_*)$, avec $\phi_\lambda = (u_0(\lambda), 0)$.

(II) Sous les hypothèses du Théorème 2.1.11, il existe un nombre $\lambda^* \in (\lambda^\infty, \infty)$ tel que (P1)-(P3) sont vérifiées sur (λ^*, ∞), avec $\phi_\lambda = (u^\infty(\lambda), 0)$.

Pour ce faire, nous utilisons les changements de variables (2.6) et (2.8) introduits à la Section 2.1 et nous traduisons les conditions (P1) à (P3) dans les nouvelles variables. Il s'avère que les propriétés des solutions $\psi_{B,b}$ et $\psi_{A,a}$ des équations limites ($\widetilde{\mathrm{E}}_0$) et (E'$_0$) fournissent des informations précieuses concernant le spectre des opérateurs linéaires $L_0(0), M_0(0), L_\infty(0), M_\infty(0) : H \to H$ définis ci-dessous, qui correspondent, dans les nouvelles variables, aux composantes de H_λ dans les limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$, respectivement. En particulier, le fait que l'indice de Morse de ces solutions vaut 1 (c.f. 1.1.12 et 1.1.13) a des conséquences sur la structure du spectre des opérateurs $L_0(0)$ et $L_\infty(0)$. Ces informations permettent de vérifier que H_λ satisfait (P1)-(P3) dans les limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$. On procède ensuite par perturbation.

Dans le même esprit que ce qui a été fait à la Section 2.1, nous allons utiliser les analogies structurelles importantes existant entre les équations ($\widetilde{\mathrm{E}}_\mu$) et (E'$_\tau$) pour donner une approche unifiée de l'étude sur les deux intervalles. Nous noterons donc (λ_1, λ_2) l'intervalle générique qui deviendra, à la fin de cette section, $(0, \lambda_0)$ dans le cas (I) et (λ^∞, ∞) dans le cas (II). Nous écrirons simplement u_λ, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, pour les solutions de (E_λ) données par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11. C'est-à-dire que $u_\lambda = u_0(\lambda)$ pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ et $u_\lambda = u^\infty(\lambda)$ pour tout $\lambda \in (\lambda^\infty, \infty)$.

Nous rappelons ce qui a déjà été dit à la Remarque 3.2.1, à savoir que *nous n'utiliserons pas la positivité des solutions* u_λ car elle ne sera démontrée que dans le Lemme 3.3.4.

Les conditions (P1) à (P3) portent sur l'opérateur $H_\lambda - \xi\widetilde{R} : X \to X^*$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, qui est donné explicitement par

$$H_\lambda - \xi\widetilde{R} = \begin{pmatrix} A(\lambda) - \xi R & 0 \\ 0 & B(\lambda) - \xi R \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2),$$

où les opérateurs $A(\lambda), B(\lambda) : H \to H^*$ sont définis par

$$A(\lambda) = -\Delta + \lambda - pV(x)|u_\lambda|^{p-1} \quad \text{et} \quad B(\lambda) = -\Delta + \lambda - V(x)|u_\lambda|^{p-1}.$$

Avec (P3) en tête, nous commençons par montrer que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $S(H_\lambda) \cap (-\infty, \varepsilon)$ est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$.

Lemme 3.3.1 *Supposons que les hypothèses (H0) et (H2) sont satisfaites et soit $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Alors $H_\lambda - \xi\widetilde{R} : X \to X^*$ est un opérateur de Fredholm pour tout $\xi < \min\{1, \lambda\}$. De plus, $S(H_\lambda) \cap (-\infty, \min\{1, \lambda\})$ ne contient qu'un nombre fini de points.*

Démonstration. Il est clairement suffisant de montrer ces propriétés séparément pour les opérateurs $A(\lambda) - \xi R : H \to H^*$ et $B(\lambda) - \xi R : H \to H^*$. Pour $\xi \neq 1$,

$$A(\lambda) - \xi R = (1-\xi)\big\{-\Delta + \frac{\lambda - \xi}{1-\xi} - \frac{p}{1-\xi}V(x)|u_\lambda|^{p-1}\big\}.$$

Nous savons que $u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que $|x|^k V(x)$ est aussi borné sur $\mathbb{R}^N$. Il découle alors du Lemme 1.4.3 que $Cv = pV(x)|u_\lambda|^{p-1}v$ définit un opérateur linéaire compact $C : H \to H^*$. Nous savons également que $-\Delta + \zeta : H \to H^*$ est un isomorphisme pour tout $\zeta > 0$. En combinant ces propriétés, nous voyons que $A(\lambda) - \xi R : H \to H^*$ est un opérateur de Fredholm si $\xi < \min\{1, \lambda\}$. Ceci implique que $R^{-1}A(\lambda) - \xi I : H \to H$ est un opérateur de Fredholm si $\xi < \min\{1, \lambda\}$. Mais un argument analogue à celui utilisé pour prouver la partie (i) du Lemme 3.3.3 montre que $R^{-1}A(\lambda) : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint borné, si bien que la propriété précédente implique $\sigma_{\text{ess}}(R^{-1}A(\lambda)) \subset [\min\{1,\lambda\},\infty)$, où σ_{ess} désigne le spectre essentiel. Nous voyons donc que l'opérateur $R^{-1}A(\lambda)-\xi I : H \to H$ est un isomorphisme, sauf pour un nombre fini de points $\xi \in (-\infty,\min\{1,\lambda\})$. Par conséquent, $A(\lambda)-\xi R : H \to H^*$ est un isomorphisme, sauf pour un nombre fini de points $\xi \in (-\infty,\min\{1,\lambda\})$.

L'opérateur $B(\lambda)-\xi R$ peut être discuté exactement de la même façon. $\square$

Grâce au lemme précédent, pour tout $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$, l'étude de $S(H_\lambda) \cap (-\infty,\min\{1,\lambda\})$ est réduite à celle de $\ker(H_\lambda - \xi\widetilde{R})$ pour $\xi < \min\{1,\lambda\}$. Pour mener à bien cette étude au voisinage des points limites, $\lambda_1 = 0$ dans le cas (I) et $\lambda_2 = \infty$ dans le cas (II), nous transformons les opérateurs $A(\lambda), B(\lambda) : H \to H^*$ en utilisant les changements de variables (2.6) et (2.8) de la façon suivante.

Cas (I) : $(\lambda = \mu^2)$

$$\begin{pmatrix} T_0(\mu)u \\ T_0(\mu)v \end{pmatrix} \in \ker(H_{\mu^2} - \xi\widetilde{R}) \iff$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} \mu^2\widetilde{A}_0(\mu) - \xi(-\mu^2\Delta+1) & 0 \\ 0 & \mu^2\widetilde{B}_0(\mu) - \xi(-\mu^2\Delta+1) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

avec

$$\widetilde{A}_0(\mu) = -\Delta + 1 - p\mu^{-b}V(x/\mu)|v(\mu)|^{p-1} \quad \text{et}$$
$$\widetilde{B}_0(\mu) = -\Delta + 1 - \mu^{-b}V(x/\mu)|v(\mu)|^{p-1} \quad \text{pour tout } \mu \in (0,\mu_2),$$

où $\mu_2 = \lambda_0^{1/2} > 0$ et $v \in C([0,\mu_2),H)$ sont donnés par la Proposition 2.1.6. Rappelons que $v(\mu)$ est solution de $(\widetilde{\mathrm{E}}_\mu)$ pour tout $\mu \in (0,\mu_2)$ et que $v(0) = \psi_{B,b}$ est un état fondamental de l'équation limite $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$. En se souvenant que $\mu^{-b}V(x/\mu) \to B|x|^{-b}$ lorsque $\mu \to 0$, pour tout $x \neq 0$, nous sommes naturellement conduits à définir les opérateurs limites

$$\widetilde{A}_0(0) = -\Delta + 1 - pB|x|^{-b}\psi_{B,b}^{p-1}, \quad \widetilde{B}_0(0) = -\Delta + 1 - B|x|^{-b}\psi_{B,b}^{p-1}.$$

Nous définissons finalement $L_0(\mu), M_0(\mu) : H \to H$ par

$$L_0(\mu) = R^{-1}\widetilde{A}_0(\mu) \quad \text{et} \quad M_0(\mu) = R^{-1}\widetilde{B}_0(\mu) \quad \text{pour tout } \mu \in [0,\mu_2).$$

Cas (II) : $(\lambda = \tau^{-2})$

$$\begin{pmatrix} T_\infty(\tau)u \\ T_\infty(\tau)v \end{pmatrix} \in \ker(H_{\tau^{-2}} - \xi\widetilde{R}) \iff$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} \tau^{-2}\widetilde{A}_\infty(\tau) - \xi(-\tau^{-2}\Delta+1) & 0 \\ 0 & \tau^{-2}\widetilde{B}_\infty(\tau) - \xi(-\tau^{-2}\Delta+1) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

avec

$$\widetilde{A}_\infty(\tau) = -\Delta + 1 - p\tau^a V(\tau x)|w(\tau)|^{p-1} \quad \text{et}$$
$$\widetilde{B}_\infty(\tau) = -\Delta + 1 - \tau^a V(\tau x)|w(\tau)|^{p-1} \quad \text{pour tout } \tau \in (0,\tau_2),$$

où $\tau_2 = \lambda_\infty^{-1/2} > 0$ et $w \in C([0,\tau_2),H)$ sont donnés par la Proposition 2.1.7. Nous savons que $w(\tau)$ est solution de (E'$_\tau$) pour tout $\tau \in (0,\tau_2)$ et que $w(0) = \psi_{A,a}$ est un état fondamental de l'équation limite (E'$_0$). Pusique $\tau^a V(\tau x) \to A|x|^{-a}$ lorsque $\tau \to 0$, pour tout $x \neq 0$, nous définissons les opérateurs limites

$$\widetilde{A}_\infty(0) = -\Delta + 1 - pA|x|^{-a}\psi_{A,a}^{p-1}, \quad \widetilde{B}_\infty(0) = -\Delta + 1 - A|x|^{-a}\psi_{A,a}^{p-1}.$$

Nous introduisons alors les opérateurs $L_\infty(\tau), M_\infty(\tau) : H \to H$,

$$L_\infty(\tau) = R^{-1}\widetilde{A}_\infty(\tau) \quad \text{et} \quad M_\infty(\tau) = R^{-1}\widetilde{B}_\infty(\tau) \quad \text{pour tout } \tau \in [0, \tau_2).$$

Remarquons à présent que

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_0(\mu) &= -\Delta + 1 - pz_1(\mu, x)|x|^{-b}|v(\mu)|^{p-1}, \\
\widetilde{B}_0(\mu) &= -\Delta + 1 - z_1(\mu, x)|x|^{-b}|v(\mu)|^{p-1} \quad \text{pour tout } \mu \in [0, \mu_2)
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_\infty(\tau) &= -\Delta + 1 - pz_2(\tau, x)|x|^{-a}|w(\tau)|^{p-1}, \\
\widetilde{B}_\infty(\tau) &= -\Delta + 1 - z_2(\tau, x)|x|^{-a}|w(\tau)|^{p-1} \quad \text{pour tout } \mu \in [0, \tau_2),
\end{aligned}$$

où z_1 et z_2 sont les fonctions définies en (2.14) et (2.16). Afin d'établir simultanément les propriétés spectrales qui nous intéressent pour les opérateurs $\widetilde{A}_0(\mu), \widetilde{B}_0(\mu) : H \to H^*$ d'une part et pour les opérateurs $\widetilde{A}_\infty(\tau), \widetilde{B}_\infty(\tau) : H \to H^*$ d'autre part, nous nous proposons d'étudier les opérateurs $\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s) : H \to H^*$ définis par

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(s) &= -\Delta + 1 - pz(s, x)|x|^{-k}|U(s)|^{p-1} \quad \text{et} \\
\widetilde{B}(s) &= -\Delta + 1 - z(s, x)|x|^{-k}|U(s)|^{p-1} \quad \text{pour tout } s \in [0, s_2).
\end{aligned}$$

Nous supposons ici que $k \in (0, 2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et que $z : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses (z1) et (z2) de la Section 2.1.1. La fonction $U \in C([0, s_2), H)$ est alors donnée par la Proposition 2.1.3 et est telle que $U(s)$ est solution de (P$_s$) pour tout $s \in [0, s_2)$. Rappelons en particulier que

$$\widetilde{A}(0) = -\Delta + 1 - pK|x|^{-k}U(0)^{p-1} \quad \text{et} \quad \widetilde{B}(0) = -\Delta + 1 - K|x|^{-k}U(0)^{p-1},$$

où $U(0) = \psi_{K,k}$ est un état fondamental de

$$\Delta u - u + K|x|^{-k}|u|^{p-1}u = 0. \tag{3.11}$$

Nous définissons les opérateurs $L(s), M(s) : H \to H$ par

$$L(s) = R^{-1}\widetilde{A}(s) \quad \text{et} \quad M(s) = R^{-1}\widetilde{B}(s) \quad \text{pour tout } s \in [0, s_2)$$

et nous introduisons encore les formes quadratiques $a_s, b_s, c_s : H \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
a_s(u) &= \langle \widetilde{A}(s)u, u\rangle_{H^* \times H} = \langle L(s)u, u\rangle_{H \times H}, \quad s \in [0, s_2), \\
b_s(u) &= \langle \widetilde{B}(s)u, u\rangle_{H^* \times H} = \langle M(s)u, u\rangle_{H \times H}, \quad s \in [0, s_2), \\
c_s(u) &= \langle (-\theta(s)\Delta + 1)u, u\rangle_{H^* \times H} = \int_{\mathbb{R}^N} \theta(s)|\nabla u|^2 + u^2 dx, \quad s > 0,
\end{aligned}$$

où $\theta \in C(0, \infty)$ est une fonction strictement positive qui deviendra $\mu \mapsto \mu^2$ dans le cas (I) et $\tau \mapsto \tau^{-2}$ dans le cas (II). Ces fonctions seront utiles dans la démonstration du Lemme 3.3.3. Notons d'ores et déjà que

$$a_s(u) = -\langle D_u F(s, U(s))u, u\rangle_{H^* \times H} \quad \text{et} \quad b_s(u) = -\frac{1}{p}\langle D_u F(s, U(s))u, u\rangle_{H^* \times H}$$

pour tout $s \in [0, s_2)$ et tout $u \in H$, où $F : \mathbb{R} \times H \to H^*$ est la fonction définie par (2.13). D'autre part,

$$c_s(u) = \theta(s)\|u\|^2_{\theta(s)^{-1}} \quad \text{pour tout } u \in H,$$

où $\|\cdot\|_\lambda$, $\lambda > 0$, est la norme définie au début de la Section 1.1. Nous voyons ainsi que c_s est une forme quadratique positive définie sur H pour tout $s > 0$.

Remarque 3.3.2 Nous ne supposons pas que z satisfait (z3) car nous n'utiliserons pas dans cette section la dernière partie de la Proposition 2.1.3. En effet, nous nous contentons ici de la continuité des branches de solutions données par les Propositions 2.1.6 et 2.1.7. La différentiabilité interviendra dans la section suivante, lorsque nous discuterons la condition de pente (3.3)/(3.4). C'est pourquoi nous travaillons déjà ici sur l'intervalle réduit $[0, s_2)$.

Si $A : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint borné, nous notons respectivement $\sigma(A)$ et $\sigma_{\text{ess}}(A)$ le spectre de A et le spectre essentiel de A.

Lemme 3.3.3 *Supposons que $k \in (0, 2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$, que $z : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses (z1) et (z2) de la Section 2.1.1 et soit $\psi_{K,k}$ un état fondamental de (3.11). Soit alors $U \in C([0, s_2), H)$ la fonction correspondante donnée par la Proposition 2.1.3.*

(i) $L(0) : H \to H$ est un isomorphisme auto-adjoint, $\inf \sigma_{\text{ess}}(L(0)) \geq 1$ et $\gamma \equiv \inf \sigma(L(0))$ est une valeur propre simple de $L(0)$ telle que $\gamma < 0$ et

$$\ker\{L(0) - \gamma I\} = \operatorname{span}\{\eta\} \quad \textit{pour un } \eta \in H.$$

De plus, il existe $\delta_L > 0$ tel que

$$\sigma(L(0)) \setminus \{\gamma\} \subset [\delta_L, \infty).$$

(ii) $M(0) : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint borné, $\inf \sigma_{\text{ess}}(M(0)) \geq 1$, $0 = \inf \sigma(M(0))$ est une valeur propre simple de $M(0)$ et

$$\ker M(0) = \operatorname{span}\{U(0)\}.$$

De plus, il existe $\delta_M > 0$ tel que

$$\sigma(M(0)) \setminus \{\gamma\} \subset [\delta_M, \infty).$$

(iii) Il existe $s^* \in (0, s_2)$ tel que, pour tout $s \in (0, s^*)$, il existe $\gamma(s) \in (-\infty, 0)$ qui satisfait

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{A}(s) - \xi(-\theta(s)\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{\gamma(s)\}.$$

De plus, pour tout $s \in (0, s^*)$,

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{B}(s) - \xi(-\theta(s)\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{0\}.$$

D'autre part, pour tout $s \in (0, s^*)$, il existe $\varphi(s) \in H$ tel que

$$\ker[\widetilde{A}(s) - \gamma(s)(-\theta(s)\Delta + 1)] = \operatorname{span}\{\varphi(s)\}$$

et

$$\ker \widetilde{B}(s) = \operatorname{span}\{U(s)\}.$$

Nous avons aussi que, pour $s \in (0, s^*)$, $U(s)(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Démonstration. (i) Pour $u, v \in H$, nous avons que

$$\begin{aligned}\langle L(0)u, v\rangle_{H\times H} = \langle \widetilde{A}(0)u, v\rangle_{H^*\times H} &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla v + [1 - pK|x|^{-k}U(0)^{p-1}]uvdx\\ &= S_1''(\psi_{K,k})[u, v],\end{aligned}$$

où $U(0) = \psi_{K,k} > 0$ et $S_1 \in C^2(H, \mathbb{R})$ est la fonctionnelle définie au Chapitre 1, correspondant à (E_λ), dans le cas particulier où $\lambda = 1$ et $V(x) = K|x|^{-k}$. Ceci montre que $L(0) : H \to H$ est borné et auto-adjoint. Définissant $C : H \to H^*$ par $Cu = pK|x|^{-k}U(0)^{p-1}u$, il découle du Lemme 1.4.3 que C est un opérateur compact. Mais alors $L(0) = (-\Delta + 1)^{-1}\widetilde{A}(0) = I - R^{-1}C$ avec $R^{-1}C : H \to H$ compact. Par conséquent, $L(0) - \xi I : H \to H$ est un opérateur de Fredholm pour tout $\xi < 1$ et donc $\sigma_{\text{ess}}(L(0)) \subset [1, \infty)$.

Le fait que $L(0) : H \to H$ est un isomorphisme est une conséquence du Théorème 1.4.10. En effet, si $T_1 = S_1' \in C^1(H, H^*)$ est l'opérateur défini au début de la Section 1.4, nous avons que $\widetilde{A}(0) = -T_1'(\psi_{K,k}) : H \to H^*$ et, avec la Définition 1.4.2, le Théorème 1.4.10 affirme que cet opérateur est un isomorphisme. Ainsi, H admet une décomposition orthogonale $H = X \oplus Y$ pour laquelle il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned} L(0)X = X, \quad \langle L(0)u, u\rangle_{H\times H} &\le -\epsilon\|u\|^2 \text{ pour tout } u \in X,\\ L(0)Y = Y, \quad \langle L(0)u, u\rangle_{H\times H} &\ge \epsilon\|u\|^2 \text{ pour tout } u \in Y.\end{aligned}$$

Mais maintenant, le Lemme 1.1.12 implique que $\dim X = 1$. Posant $X = \text{span}\{\eta\}$ et $\delta_L = \epsilon$, le point (i) est démontré.

(ii) Comme au point (i),

$$M(0) = R^{-1}\widetilde{B}(0) = I - R^{-1}C : H \to H \quad \text{et} \quad M(0) - \xi I = (1-\xi)I - R^{-1}C,$$

où maintenant $C : H \to H^*$ est défini par $Cu = K|x|^{-k}U(0)^{p-1}u$. Alors $M(0) - \xi I : H \to H$ est un opérateur de Fredholm auto-adjoint borné pour tout $\xi < 1$ et, par conséquent, $\inf \sigma_{\text{ess}}(M(0)) \ge 1$. Nous observons ensuite que $U(0) > 0$ et que $M(0)U(0) = 0$ car $U(0)$ est solution de (3.11). Ainsi $0 \in \sigma(M(0))$. Mais $M(0) \in L(H, H)$ est auto-adjoint et donc

$$\begin{aligned} 0 \ge \Lambda \equiv \inf\sigma(M(0)) &= \inf\{\langle M(0)w, w\rangle_{H\times H} : w \in H \text{ et } \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} w^2dx = 1\}\\ &= \inf\{\langle[-\Delta + 1 - K|x|^{-k}U(0)^{p-1}]w, w\rangle_{H^*\times H} : w \in H \text{ et } \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} w^2dx = 1\}\\ &= \inf\{\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + [1 - K|x|^{-k}U(0)^{p-1}]w^2dx : w \in H \text{ et } \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} w^2dx = 1\}.\end{aligned}$$

Puisque $\Lambda < 1 = \inf \sigma_{\text{ess}}(M(0))$, Λ est une valeur propre de $M(0)$ et tous les minimiseurs de la forme quadratique ci-dessus sont des fonctions propres associées à Λ. Donc, si $M(0)\phi = \Lambda\phi$ avec $\phi \in H \setminus \{0\}$, nous avons aussi que $M(0)|\phi| = \Lambda|\phi|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle M(0)U(0), |\phi|\rangle_{H\times H} = \langle U(0), M(0)|\phi|\rangle_{H\times H} = \Lambda\langle U(0), |\phi|\rangle_{H\times H}\\ &= \Lambda\langle RU(0), |\phi|\rangle_{H^*\times H} = \Lambda\int_{\mathbb{R}^N}[(-\Delta+1)U(0)]|\phi|dx = \Lambda\int_{\mathbb{R}^N}[K|x|^{-k}U(0)^p]|\phi|dx.\end{aligned}$$

Comme $U(0) > 0$ sur $\mathbb{R}^N$, nous avons donc $\Lambda = 0$. Mais alors $\widetilde{B}(0)|\phi| = 0$ et il découle du Lemme D.1 de l'Annexe D que $|\phi| \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Puisque $[1 - K|x|^{-k}U(0)^{p-1}(x)]$ est borné sur les compacts de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, l'inégalité de Harnack (Théorème 8.20 de [16]) implique que $|\phi(x)| > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Par conséquent, ϕ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et ainsi $\int_{\mathbb{R}^N} \phi U(0)dx \neq 0$ pour toute fonction propre ϕ correspondant à la valeur propre $\Lambda = 0$. Par suite, $0 = \inf \sigma(M(0))$ est une valeur propre simple de $M(0)$. Il existe donc $\delta_M > 0$ tel que $b_0(u) = \langle M(0)u, u\rangle_{H\times H} \geq \delta_M\|u\|^2$ pour tout $u \in U(0)^\perp$, où $U(0)^\perp$ désigne l'orthogonal de span$\{U(0)\}$ dans H.

(iii) Pour tout $s \in (0, s_2)$ et tout $u \in H \setminus \{0\}$, nous avons

$$\frac{a_s(u) - a_0(u)}{\|u\|^2} = -\frac{\langle [D_uF(s, U(s)) - D_uF(0, U(0))]u, u\rangle_{H^*\times H}}{\|u\|^2}.$$

Il découle alors du Lemme 2.1.2(ii) qu'il existe $s^* \in (0, s_2)$ tel que, pour tout $s \in (0, s^*)$,

$$\left|\frac{a_s(u) - a_0(u)}{\|u\|^2}\right| \leq \frac{\delta_L}{2} \quad \text{pour tout } u \in H \setminus \{0\},$$

où $\delta_L > 0$ est donné par (i). Par conséquent,

$$a_s(u) \geq \frac{\delta_L}{2}\|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in \eta^\perp.$$

Comme $L(0)\eta = \gamma\eta$ et $\gamma < 0$, s^* peut être choisi tel que $a_s(\eta) \leq \frac{\gamma}{2}\|\eta\|^2 < 0$ pour tout $s \in (0, s^*)$. Fixons maintenant $s \in (0, s^*)$ et considérons le problème de minimisation

$$m_s = \inf\{a_s(u) : u \in H \text{ et } c_s(u) = 1\} = \inf\left\{\frac{a_s(u)}{c_s(u)} : u \in H \setminus \{0\}\right\}.$$

Nous avons que $m_s \leq a_s(\eta)/c_s(\eta) < 0$ et que

$$a_s(u) = \|u\|^2 - \langle C_s u, u\rangle_{H^*\times H} \quad \text{pour tout } u \in H,$$

où $C_s : H \to H^*$ est l'opérateur défini par $C_s u = pz(x)|x|^{-k}|U(s)|^{p-1}u$ pour tout $u \in H$. Puisque $U(s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous savons que C_s est compact. Ceci implique que $a_s : H \to \mathbb{R}$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement. Soit alors une suite minimisante $\{u_n\} \subset H$: $a_s(u_n) \to m_s$ et $c_s(u_n) = 1$ pour tout n. La suite $\{u_n\}$ étant bornée dans H, nous pouvons supposer que $u_n \rightharpoonup u_*$ faiblement dans H. Alors $a_s(u_*) \leq \liminf_{n\to\infty} a_s(u_n) = m_s < 0$ et donc $u_* \neq 0$. De façon similaire, $t = c_s(u_*) \leq 1$ et comme $u_* \neq 0$, $t > 0$. Ainsi $c_s(t^{-1/2}u_*) = 1$ et

$$m_s \leq a_s(t^{-1/2}u_*) = t^{-1}a_s(u_*) \leq t^{-1}m_s \leq m_s.$$

Par conséquent, $t = c_s(u_*) = 1$ et $a_s(u_*) = m_s$. Il existe donc un multiplicateur de Lagrange $\gamma(s)$ tel que $\widetilde{A}(s)u_* = \gamma(s)(-\theta(s)\Delta + 1)u_*$ et, en fait, $\gamma(s) = m_s < 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $\xi \leq 0$ et $z \in H \setminus \{0\}$ tels que $\widetilde{A}(s)z = \xi(-\theta(s)\Delta + 1)z$. Supposons de plus, par l'absurde, que $\xi \neq \gamma(s)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\xi\langle(-\theta(s)\Delta + 1)z, u_*\rangle_{H^*\times H} &= \langle\widetilde{A}(s)z, u_*\rangle_{H^*\times H} = \langle\widetilde{A}(s)u_*, z\rangle_{H^*\times H}\\ &= \gamma(s)\langle(-\theta(s)\Delta + 1)u_*, z\rangle_{H^*\times H} = \gamma(s)\langle(-\theta(s)\Delta + 1)z, u_*\rangle_{H^*\times H}.\end{aligned}$$

Ainsi $\langle(-\theta(s)\Delta + 1)z, u_*\rangle_{H^*\times H} = \langle\widetilde{A}(s)z, u_*\rangle_{H^*\times H} = 0$ car $\xi \neq \gamma(s)$. Maintenant, comme

$$\langle(-\theta(s)\Delta + 1)z, u_*\rangle_{H^*\times H} = \lambda c_s(u_*) = \lambda$$

si $z = \lambda u_*$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons que z et u_* sont linéairement indépendants. De plus, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$a_s(\lambda u_* + \mu z) = \lambda^2 a_s(u_*) + \mu^2 a_s(z) + 2\lambda\mu\langle\widetilde{A}(s)z, u_*\rangle_{H^*\times H} = \lambda^2\gamma(s) + \mu^2\xi c_s(z) \leq 0,$$

ce qui montre que $a_s(u) \leq 0$ pour tout $u \in Z = \text{span}\{u_*, z\}$. Comme $\dim Z = 2$, $Z \cap Y \neq \{0\}$, ce qui conduit à une contradiction car $a_s(u) > 0$ pour tout $u \in Y \setminus \{0\}$. Par conséquent, on doit avoir $\xi = \gamma(s)$, ce qui implique à nouveau que $a_s(u) \leq 0$ pour tout $u \in Z$. La positivité de a_s sur Y implique alors que $\dim Z = 1$. Posant $\varphi(s) = u_*$, nous avons donc montré que

$$\ker[\widetilde{A}(s) - \gamma(s)(-\theta(s)\Delta + 1)] = \text{span}\{\varphi(s)\}$$

et que

$$\ker[\widetilde{A}(s) - \xi(-\theta(s)\Delta + 1)] = \{0\} \quad \text{pour tout } \xi \in (-\infty, 0] \setminus \{\gamma(s)\}.$$

Penchons-nous à présent sur les propriétés de $\widetilde{B}(s)$. La constante s^* peut être ajustée de sorte que, pour tout $s \in (0, s^*)$,

$$\left|\frac{b_s(u) - b_0(u)}{\|u\|^2}\right| = \frac{1}{p}\left|\frac{a_s(u) - a_0(u)}{\|u\|^2}\right| \leq \frac{\delta_M}{2} \quad \text{pour tout } u \in H \setminus \{0\},$$

où $\delta_M > 0$ est donné par (ii). Nous avons alors que

$$b_s(u) \geq \frac{\delta_M}{2}\|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in G = U(0)^\perp.$$

Puisque $\widetilde{B}(s)U(s) = -F(s, U(s))$, nous avons que $U(s) \in \ker \widetilde{B}(s)$. Supposons qu'il existe $\xi \leq 0$ et $z \in H \setminus \{0\}$ tels que $\widetilde{B}(s)z = \xi(-\theta(s)\Delta + 1)z$. Supposons de plus, par l'absurde, que $\xi < 0$. Nous avons

$$\xi\langle(-\theta(s)\Delta + 1)z, U(s)\rangle_{H^* \times H} = \langle\widetilde{B}(s)z, U(s)\rangle_{H^* \times H} = \langle\widetilde{B}(s)U(s), z\rangle_{H^* \times H} = 0,$$

ce qui implique que $U(s)$ et z sont linéairement indépendants car $\xi < 0$. Mais alors $b_s(u) \leq 0$ pour tout $u \in T = \text{span}\{U(s), z\}$, ce qui contredit le fait que $b_s(u) > 0$ pour tout $u \in G \setminus \{0\}$. Par conséquent $\xi = 0$ et nous avons que $b_s(u) = 0$ pour tout $u \in T$. Ainsi $T \cap G = \{0\}$ et donc, comme G est de codimension 1 dans H, on doit avoir $\dim T = 1$ et $z \in \text{span}\{U(s)\}$. Nous avons donc montré que $\ker \widetilde{B}(s) = \text{span}\{U(s)\}$ et que $\ker[\widetilde{B}(s) - \xi(-\theta(s)\Delta + 1)] = \{0\}$ pour tout $\xi < 0$.

Pour finir, posant

$$M_s = \inf\{b_s(u) : u \in H \text{ et } c_s(u) = 1\},$$

nous obtenons comme pour m_s que, si $M_s < 0$ alors M_s est atteint et il existe $w_* \in H$ tel que $c_s(w_*) = 1$ et $\widetilde{B}(s)w_* = M_s(-\theta(s)\Delta+1)w_*$. Comme $\ker[\widetilde{B}(s)-\xi(-\theta(s)\Delta+1)] = \{0\}$ si $\xi < 0$, nous avons alors que $M_s \geq 0$ et, par conséquent, $M_s = 0$ car $b_s(U(s)) = 0$. Mais $b_s(|U(s)|) = b_s(U(s))$, si bien que $\widetilde{B}(s)|U(s)| = 0$ et donc $|U(s)| \in \text{span}\{U(s)\}$. Se souvenant que $U(s) \to U(0) > 0$ dans H lorsque $s \to 0$, on aura $U(s) \geq 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$ pour tout $s \in (0, s^*)$ si $s^* > 0$ est choisi assez petit. D'autre part, puisque $z(s,x)|x|^{-k}|U(s)|^{p-1}$ est borné sur les compacts de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, l'inégalité de Harnack appliquée à l'opérateur $\widetilde{B}(s)$ implique $U(s) > 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. □

Nous déduisons maintenant du Lemme 3.3.3 les propriétés suivantes des opérateurs $\widetilde{A}_0(\mu)$, $\widetilde{B}_0(\mu)$, $\widetilde{A}_\infty(\tau)$ et $\widetilde{B}_\infty(\tau)$ définis ci-dessus.

Lemme 3.3.4

(I) Supposons que les hypothèses (H0) et (H5) sont vérifiées.

(I.i) $L_0(0) : H \to H$ *est un isomorphisme auto-adjoint,* $\inf \sigma_{\rm ess}(L_0(0)) \geq 1$ *et l'on a que* $\gamma_0 \equiv \inf \sigma(L_0(0))$ *est une valeur propre simple de* $L_0(0)$ *telle que* $\gamma_0 < 0$ *et*

$$\ker\{L_0(0) - \gamma_0 I\} = \mathrm{span}\{\eta_0\} \quad \textit{pour un } \eta_0 \in H.$$

De plus, il existe $\delta_L > 0$ *tel que*

$$\sigma(L_0(0)) \setminus \{\gamma_0\} \subset [\delta_L, \infty).$$

(I.ii) $M_0(0) : H \to H$ *est un opérateur auto-adjoint borné,* $\inf \sigma_{\rm ess}(M_0(0)) \geq 1$ *et l'on a que* $0 = \inf \sigma(M_0(0))$ *est une valeur propre simple de* $M_0(0)$ *et*

$$\ker M_0(0) = \mathrm{span}\{v(0)\}.$$

De plus, il existe $\delta_M > 0$ *tel que*

$$\sigma(M_0(0)) \setminus \{\gamma_0\} \subset [\delta_M, \infty).$$

(I.iii) Il existe $\mu^* \in (0, \mu_2)$ *tel que, pour tout* $\mu \in (0, \mu^*)$*, il existe* $\gamma_0(\mu) \in (-\infty, 0)$ *qui satisfait*

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{A}_0(\mu) - \xi(-\mu^2\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{\gamma_0(\mu)\}.$$

De plus, pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$*,*

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{B}_0(\mu) - \xi(-\mu^2\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{0\}.$$

D'autre part, pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$*, il existe* $\varphi_0(\mu) \in H$ *tel que*

$$\ker[\widetilde{A}_0(\mu) - \gamma_0(\mu)(-\mu^2\Delta + 1)] = \mathrm{span}\{\varphi_0(\mu)\}$$

et

$$\ker \widetilde{B}_0(\mu) = \mathrm{span}\{v(\mu)\}.$$

Nous avons aussi que, pour $\mu \in (0, \mu^*)$*,* $v(\mu)(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$*.*

(II) Supposons que les hypothèses (H0) et (H7) sont vérifiées.

(II.i) $L_\infty(0) : H \to H$ *est un isomorphisme auto-adjoint,* $\inf \sigma_{\rm ess}(L_\infty(0)) \geq 1$ *et l'on a que* $\gamma_\infty \equiv \inf \sigma(L_\infty(0))$ *est une valeur propre simple de* $L_\infty(0)$ *telle que* $\gamma_\infty < 0$ *et*

$$\ker\{L_\infty(0) - \gamma_\infty I\} = \mathrm{span}\{\eta_\infty\} \quad \textit{pour un } \eta_\infty \in H.$$

De plus, il existe $\delta_L > 0$ *tel que*

$$\sigma(L_\infty(0)) \setminus \{\gamma_\infty\} \subset [\delta_L, \infty).$$

(II.ii) $M_\infty(0) : H \to H$ *est un opérateur auto-adjoint borné,* $\inf \sigma_{\rm ess}(M_\infty(0)) \geq 1$ *et l'on a que* $0 = \inf \sigma(M_\infty(0))$ *est une valeur propre simple de* $M_\infty(0)$ *et*

$$\ker M_\infty(0) = \mathrm{span}\{w(0)\}.$$

De plus, il existe $\delta_M > 0$ *tel que*

$$\sigma(M_\infty(0)) \setminus \{\gamma_\infty\} \subset [\delta_M, \infty).$$

(II.iii) Il existe $\tau^* \in (0, \tau_2)$ tel que, pour tout $\tau \in (0, \tau^*)$, il existe $\gamma_\infty(\tau) \in (-\infty, 0)$ qui satisfait

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{A}_\infty(\tau) - \xi(-\tau^{-2}\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{\gamma_\infty(\tau)\}.$$

De plus, pour tout $\tau \in (0, \tau^*)$,

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \ker[\widetilde{B}_\infty(\tau) - \xi(-\tau^{-2}\Delta + 1)] \neq \{0\}\} \cap (-\infty, 0] = \{0\}.$$

D'autre part, pour tout $\tau \in (0, \tau^*)$, il existe $\varphi_\infty(\tau) \in H$ tel que

$$\ker[\widetilde{A}_\infty(\tau) - \gamma_\infty(\tau)(-\tau^{-2}\Delta + 1)] = \mathrm{span}\{\varphi_\infty(\tau)\}$$

et

$$\ker \widetilde{B}_\infty(\tau) = \mathrm{span}\{w(\tau)\}.$$

Nous avons aussi que, pour $\tau \in (0, \tau^*)$, $w(\tau)(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Démonstration. Pour démontrer les parties (I) et (II) du Lemme 3.3.4, il suffit d'appliquer le Lemme 3.3.3 respectivement au cas où $z = z_1$ est défini par (2.14) et $U(s) \equiv v(\mu)$ est donné par la Proposition 2.1.6 et au cas où $z = z_2$ est défini par (2.16) et $U(s) \equiv w(\tau)$ est donné par la Proposition 2.1.7. On remplacera simplement $\theta(s)$ par μ^2 dans le cas (I) et $\theta(s)$ par τ^{-2} dans le cas (II). □

Remarque 3.3.5 La positivité de $v(\mu)$, $\mu \in (0, \mu^*)$, respectivement de $w(\tau)$, $\tau \in (0, \tau^*)$, sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ implique la positivité des solutions $u_0(\lambda)$, $0 < \lambda < \lambda_0$, et $u^\infty(\lambda)$, $\lambda^\infty < \lambda < \infty$, données par les Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11, pour autant que l'on choisisse λ_0 assez petit et λ^∞ assez grand. Cette remarque complète les preuves des Théorèmes 2.1.10 et 2.1.11.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal de cette section.

Lemme 3.3.6

(I) Supposons que les hypothèses (H0) et (H5) sont satisfaites. Il existe un nombre $\lambda_* \in (0, \lambda_0)$ tel que (P1)-(P3) sont vérifiées sur $(0, \lambda_*)$ avec $\phi_\lambda = (u_0(\lambda), 0)$, $u_0 \in C((0, \lambda_0), H)$ étant donné par le Théorème 2.1.10.

(II) Supposons que les hypothèses (H0) et (H7) sont satisfaites. Il existe un nombre $\lambda^* \in (\lambda^\infty, \infty)$ tel que (P1)-(P3) sont vérifiées sur (λ^*, ∞) avec $\phi_\lambda = (u^\infty(\lambda), 0)$, $u^\infty \in C((\lambda^\infty, \infty), H)$ étant donné par le Théorème 2.1.11.

Démonstration. (I) Par (3.9) et la première partie du Lemme 3.3.4, nous avons que, pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$,

$$S(H_{\mu^2}) \cap (-\infty, 0] = \{\mu^2\gamma_0(\mu), 0\},$$

que

$$\ker(H_{\mu^2} - \mu^2\gamma_0(\mu)\widetilde{R}) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} T_0(\mu)\varphi_0(\mu) \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

et que

$$\ker H_{\mu^2} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ T_0(\mu)v(\mu) \end{pmatrix}\}.$$

Posant $\lambda_* = (\mu^*)^2$, $\nu_\lambda = \lambda\gamma_0(\lambda^{1/2})$ pour tout $0 < \lambda < \lambda_*$ et rappelant que $u_0(\lambda) = T_0(\lambda^{1/2})v(\lambda^{1/2})$, le résultat découle des Lemmes 3.3.1 et 3.3.4.

(II) D'après (3.10) et la seconde partie du Lemme 3.3.4, pour tout $\tau \in (0, \tau^*)$,

$$S(H_{\tau^{-2}}) \cap (-\infty, 0] = \{\tau^{-2}\gamma_\infty(\tau), 0\},$$

$$\ker(H_{\tau^{-2}} - \tau^{-2}\gamma_\infty(\tau)\widetilde{R}) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} T_\infty(\tau)\varphi_\infty(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

et

$$\ker H_{\tau^{-2}} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ T_\infty(\tau)w(\tau) \end{pmatrix}\}.$$

Nous posons alors $\lambda^* = (\tau^*)^{-2}$ et $\nu_\lambda = \lambda\gamma_\infty(\lambda^{-1/2})$ pour tout $\lambda > \lambda^*$. Comme $u^\infty(\lambda) = T_\infty(\lambda^{-1/2})w(\lambda^{-1/2})$, la preuve de (II) suit également des Lemmes 3.3.1 et 3.3.4. □

Remarque 3.3.7 Nous pourrions donner une démonstration plus simple de la partie (I) dans le cas radial. En effet, si (H0), (H3) et (H5) sont vérifiés, le Théorème 2.2.9 assure que, dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$, toutes les solutions $u_0(\lambda)$ sont des états fondamentaux. Avec un raisonnement analogue à celui élaboré pour démontrer les points (I.i) et (I.ii) du Lemme 3.3.3, on obtient les propriétés spectrales désirées ponctuellement, sans utiliser d'argument perturbatif.

3.4 La condition de pente

Nous commençons par un lemme qui sera utile pour discuter la condition de pente sur les intervalles $(0, \lambda_*)$ et (λ^*, ∞). Nous restreignons respectivement les fonctions $v \in C^1((0, \mu_2), H)$ et $w \in C^1((0, \tau_2), H)$ données par les Propositions 2.1.6 et 2.1.7 aux intervalles $(0, \mu^*)$ et $(0, \tau^*)$ donnés par le Lemme 3.3.4, de sorte que $v(\mu) > 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$ et $w(\tau) > 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $\tau \in (0, \tau^*)$.

Lemme 3.4.1

(I) Supposons que les hypothèses (H1), (H5) et (H6) sont satisfaites et soit $v \in C^1((0, \mu^*), H)$ la fonction donnée par la Proposition 2.1.6. Notant $\dot{v}(\mu) = \frac{d}{d\mu}v(\mu)$, nous avons que

$$\lim_{\mu \to 0} \langle v(\mu), \mu\dot{v}(\mu)\rangle_{L^2} = 0.$$

(II) Supposons que les hypothèses (H1), (H7) et (H8) sont satisfaites et soit $w \in C^1((0, \tau^*), H)$ la fonction donnée par la Proposition 2.1.7. Notant $\dot{w}(\tau) = \frac{d}{d\tau}w(\tau)$, nous avons que

$$\lim_{\tau \to 0} \langle w(\tau), \tau\dot{w}(\tau)\rangle_{L^2} = 0.$$

Démonstration. Soit $F : \mathbb{R} \times H \to H^*$ la fonction définie par (2.13) avec $k = b$ et $z = z_1$, où z_1 est défini par (2.14). Nous avons que $F(\mu, v(\mu)) = 0$ pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$. En dérivant cette relation par rapport à μ, il vient

$$D_sF(\mu, v(\mu)) + D_uF(\mu, v(\mu))\dot{v}(\mu) = 0,$$

où D_sF et D_uF désignent respectivement les dérivées partielles de F par rapport à sa première et sa deuxième variable. Comme $D_uF(0, v(0)) : H \to H^*$ est un isomorphisme par le Théorème 1.4.10, la continuité de l'application $\mu \mapsto D_uF(\mu, v(\mu))$ entraîne que, quitte à choisir μ^* plus petit, $D_uF(\mu, v(\mu))$ est un isomorphisme pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mu\dot{v}(\mu) &= -\mu D_uF(\mu, v(\mu))^{-1}D_sF(\mu, v(\mu)) = -\mu D_uF(\mu, v(\mu))^{-1}D_sG(\mu, v(\mu)) \\ &= D_uF(\mu, v(\mu))^{-1}\mu^b W_b(x/\mu)v(\mu)^p \quad \text{pour tout } \mu \in (0, \mu^*), \end{aligned}$$

où $G(\mu, u) = z_1(\mu, x)|x|^{-b}|u|^{p-1}u$ est la fonction définie par (2.10), avec $k = b$ et $z = z_1$, et W_b est la fonction qui apparaît dans l'hypothèse (H6). La dernière égalité ci-dessus découle de (2.12) et (2.15). En utilisant le théorème de l'application ouverte et les propriétés de F, il n'est pas difficile de se convaincre que

$$D_uF(\mu, v(\mu))^{-1} \to D_uF(0, v(0))^{-1} \quad \text{dans } L(H, H^*) \quad \text{lorsque } \mu \to 0.$$

Par conséquent, (I) sera démontré si nous prouvons que $\mu^b W_b(x/\mu)v(\mu)^p \to 0$ dans H^* lorsque $\mu \to 0$. Posant $q(\mu, x) = (|x|/\mu)^b W_b(x/\mu)$, nous devons montrer que $q(\mu, x)|x|^{-b}v(\mu)^p \to 0$ dans H^* lorsque $\mu \to 0$. Mais

$$\begin{aligned} \|q(\mu, x)|x|^{-b}v(\mu)^p\|_{H^*} &\leq \sup_{\varphi \in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |q(\mu, x)||x|^{-b}v(\mu)^p|\varphi|dx}{\|\varphi\|} \\ &\leq \sup_{\varphi \in H\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |q(\mu, x)||x|^{-b}\big|v(\mu)^p - v(0)^p\big||\varphi|dx}{\|\varphi\|} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |q(\mu, x)||x|^{-b}v(0)^p|\varphi|dx}{\|\varphi\|}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Notez que, par (H1) et (H6), $q(\mu, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $|q(\mu, \cdot)|_{L^\infty} \leq M$ pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$, où $M = \sup_{x\neq 0} |x|^b W_b(x)$. De plus, $q(\mu, x) \to 0$ lorsque $\mu \to 0$ pour tout $x \neq 0$. Par conséquent, le second terme du membre de droite de (3.12) tend vers zéro lorsque $\mu \to 0$ par le Lemme A.1(ii). D'autre part, le théorème des accroissements finis et le Lemme A.1(i) entraînent que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |q(\mu, x)||x|^{-b}\big|v(\mu)^p - v(0)^p\big||\varphi|dx}{\|\varphi\|} \leq pMD\|v(\mu) + v(0)\|^{p-1}\|v(\mu) - v(0)\|,$$

où $D > 0$ est une constante qui ne dépend pas de μ. Par conséquent, le premier terme du membre de droite de (3.12) tend aussi vers zéro lorsque $\mu \to 0$, ce qui termine la preuve de la partie (I).

La partie (II) se démontre de façon tout à fait analogue en utilisant cette fois les fonctions F et G définies avec $k = a$ et $z = z_2$, ainsi que la fonction W_a de l'hypothèse (H8). □

Nous pouvons maintenant établir les résultats principaux de ce chapitre.

Théorème 3.4.2

(I) Supposons que les hypothèses (H1), (H5) et (H6) sont satisfaites et soit $u_0 \in C^1((0, \lambda_0), H)$ la fonction donnée par le Théorème 2.1.10. Il existe $\underline{\lambda} \in (0, \lambda_0)$ tel que, pour tout $\lambda \in (0, \underline{\lambda})$,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(\lambda)^2 dx > 0 \quad \text{si } p < 1 + \frac{4 - 2b}{N} \tag{3.13}$$

et

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(\lambda)^2 dx < 0 \quad \text{si } p > 1 + \frac{4 - 2b}{N}. \tag{3.14}$$

Ainsi l'onde stationnaire $e^{i\lambda t}u_0(\lambda)$ est orbitalement stable pour $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$ et elle est instable pour $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$.

(II) Supposons que les hypothèses (H1), (H7) et (H8) sont satisfaites et soit $u^\infty \in C^1((\lambda^\infty, \infty), H)$ la fonction donnée par le Théorème 2.1.11. Il existe $\overline{\lambda} \in (\lambda^\infty, \infty)$ tel que, pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, \infty)$,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} u^\infty(\lambda)^2 dx > 0 \quad \text{si } p < 1 + \frac{4 - 2a}{N} \tag{3.15}$$

et

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} u^\infty(\lambda)^2 dx < 0 \quad \text{si } p > 1 + \frac{4 - 2a}{N}. \tag{3.16}$$

Ainsi l'onde stationnaire $e^{i\lambda t}u^\infty(\lambda)$ est orbitalement stable pour $1 < p < 1 + \frac{4-2a}{N}$ et elle est instable pour $1 + \frac{4-2a}{N} < p < 1 + \frac{4-2a}{N-2}$.

Démonstration. Avec $\lambda = \mu^2$ et $u_0(\lambda) = T_0(\lambda^{1/2})v(\lambda^{1/2})$, il découle de (2.7) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(\lambda)^2 dx &= \frac{d}{d\lambda}|u_0(\lambda)|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\mu^{-1}\frac{d}{d\mu}\{\mu^\beta |v(\mu)|_{L^2}^2\} \\ &= \mu^{\beta-2}\{(\beta/2)|v(\mu)|_{L^2}^2 + \langle v(\mu), \mu\dot{v}(\mu)\rangle_{L^2}\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, intervalle sur lequel les conditions spectrales (P1) à (P3) sont vérifiées en vertu du Lemme 3.3.6. Il découle alors du fait que $|v(\mu)|_{L^2}^2 \to |v(0)|_{L^2}^2 > 0$ lorsque $\mu \to 0$ et du Lemme 3.4.1(I) qu'il existe $\underline{\lambda} \in (0, \lambda_*)$ tel que, pour tout $\lambda \in (0, \underline{\lambda})$, le membre de droite de (3.17) a le même signe que β, pour autant que $\beta \neq 0$. Rappelant que

$$\beta = \frac{4 - 2b - N(p-1)}{p-1},$$

nous voyons que (3.13) et (3.14) sont vrais pour tout $\lambda \in (0, \underline{\lambda})$. Puisque les Hypothèses 1 à 3 de la Section 3.2 sont satisfaites sur l'intervalle $(0, \underline{\lambda})$, la stabilité/instabilité découle de (3.13)/(3.14).

Pour (II), nous utilisons (2.9) qui implique, avec $\lambda = \tau^{-2}$ et $u^\infty(\lambda) = T_\infty(\lambda^{-1/2})w(\lambda^{-1/2})$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} u^\infty(\lambda)^2 dx &= \frac{d}{d\lambda}|u^\infty(\lambda)|_{L^2}^2 = -\frac{1}{2}\tau^3\frac{d}{d\tau}\{\tau^{-\alpha}|w(\tau)|_{L^2}^2\} \\ &= \tau^{2-\alpha}\{(\alpha/2)|w(\tau)|_{L^2}^2 - \langle w(\tau), \tau\dot{w}(\tau)\rangle_{L^2}\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

pour tout $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$, où λ^* est donné par le Lemme 3.3.6. Puisque $|w(\tau)|_{L^2}^2 \to |w(0)|_{L^2}^2 > 0$ lorsque $\tau \to 0$, le Lemme 3.4.1(II) entraîne qu'il existe $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, \infty)$ tel que, pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, \infty)$, le membre de droite de (3.18) a le même signe que α si $\alpha \neq 0$. La preuve est terminée en rappelant que

$$\alpha = \frac{4 - 2a - N(p-1)}{p-1}$$

et que les Hypothèses 1 à 3 de la Section 3.2 sont vérifiées sur l'intervalle $(\overline{\lambda}, \infty)$. □

Nous terminons ce chapitre par la remarque suivante concernant la stabilité des ondes stationnaires associées aux solutions de (E_λ) le long de la branche globale donnée par le Théorème 2.2.10.

Remarque 3.4.3 Sous les hypothèses du Corollaire 2.2.11, comme il a déjà été mentionné à la Remarque 2.2.14, nous constatons que la norme $|u(\lambda)|_{L^2}$ des solutions $u(\lambda)$ sur la branche globale a le comportement suivant.

(a) Si $1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}$, $|u(\lambda)|_{L^2}$ est strictement croissante dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$ et strictement croissante dans un voisinage de $\lambda = +\infty$. Par conséquent, les ondes stationnaires de (NLS) correspondant aux solutions $u(\lambda)$ sont stables dans ces deux régions.

(b) Si $1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2a}{N}$ (dans le cas où $a < b$), $|u(\lambda)|_{L^2}$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$ et strictement croissante dans un voisinage de $\lambda = +\infty$. Ainsi, les ondes stationnaires correspondantes sont instables au voisinage de $\lambda = 0$ et stables au voisinage de $\lambda = +\infty$.

(c) Si $1 + \frac{4-2a}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$, $|u(\lambda)|_{L^2}$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de $\lambda = 0$ et strictement décroissante dans un voisinage de $\lambda = +\infty$. En conséquence, les ondes stationnaires de (NLS) correspondantes sont instables dans ces deux régions.

Dans les situations (a) et (c), il est naturel d'espérer obtenir un résultat de stabilité, respectivement d'instabilité, valable sur toute la branche globale. Malheureusement, malgré d'importants efforts dans cette direction, nous ne sommes pas parvenu à démontrer un tel résultat.

D'autre part, dans le cas (b), nous savons qu'il y a un changement dans la monotonie de $\lambda \mapsto |u(\lambda)|_{L^2}$ sur l'intervalle $(0, \infty)$. Il serait intéressant d'approfondir l'étude de cette fonction et, notamment, de déterminer si elle possède un seul ou plusieurs points d'extremum.

Perspectives

Comme il a été mentionné dans l'introduction, nous n'avons pas pu présenter tous les résultats que nous avons obtenus dans le présent rapport. Nous avons déjà expliqué que les résultats locaux, au voisinage de $\lambda = 0$, concernant l'existence, la bifurcation et la stabilité orbitale des ondes stationnaires de (NLS) on pu être étendus à des non-linéarités plus générales, voir [12]. Dans cet ordre d'idée, deux questions intéressantes se présentent naturellement. D'une part, est-il possible d'obtenir une généralisation du même genre pour les résultats locaux au voisinage de $\lambda = +\infty$. C'est-à-dire, peut-on obtenir des théorèmes du type 2.1.11 et 3.4.2(II) pour des non-linéarités satisfaisant des hypothèses analogues à celles de [12] ? D'autre part, dans le cas radial, quelles conditions doit-on imposer sur la non-linéarité f dans (NLSG) pour obtenir un résultat de continuation globale du type 2.2.10 ?

Nous regrettons de ne pas avoir eu le temps, avant la rédaction de ce rapport, d'approfondir la question de l'unicité en dimension 2. C'est un point que nous aimerions éclaircir prochainement.

Dans l'introduction, nous avons également mentionné que le cas $N = 1$, qui n'est pas du tout envisagé dans ce rapport, présente aussi un intérêt pour la physique. En effet, dans ce cas, nous connaissons des applications de (NLSG) en optique non-linéaire. Nous avons des raisons de penser que sous la forme précise que nous étudions ici, l'équation trouve aussi des applications physiques pour d'autres dimensions. Nous développerons ces questions dans de prochains travaux.

Du point de vue purement mathématique, la situation où $N = 1$ est intéressante à plusieurs niveaux. D'une part, comme il sera bientôt montré dans [15], les résultats d'existence et de bifurcation peuvent être obtenus par des méthodes plus élémentaires que celles présentées ici. D'autre part, sous les hypothèses qui permettent d'établir la continuation globale des solutions, nous sommes en mesure de prouver un résultat de stabilité valable sur toute la branche globale.

Il faut encore noter que, dans le cas $N = 1$, notre méthode perturbative utilisant une équation limite du genre $(\widetilde{\mathrm{E}}_0)$ ne fonctionne que pour $b \in (0, 1)$. Pourtant, dans le cas où V est borné, Stuart a obtenu des résultats de bifurcation sous des hypothèses analogues aux nôtres, pour tout $b \in (0, 2)$, voir [39, 41]. Les méthodes mises en oeuvre dans [41] sont purement variationnelles et il serait intéressant de trouver un autre moyen de prouver la bifurcation le long de courbes continues, sous les hypothèses envisagées par Stuart.

Nous terminons donc ce travail de rédaction avec une jolie palette de problèmes à résoudre, que nous nous réjouissons d'attaquer très bientôt.

Annexe A

Estimations utiles

Dans le lemme ci-dessous, H désigne soit $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, soit $H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ et, dans les deux cas, $\|\cdot\|$ désigne la norme standard sur H.

Lemme A.1 *Soit $k\in(0,2)$ et $1<p<1+\frac{4-2k}{N-2}$, pour $N\geq 2$.*
(i) Il existe une constante $C=C(N,k,p)>0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|z||x|^{-k}\big||u|^{p-1}-|v|^{p-1}\big||\varphi||\xi|dx\leq C\big\{\big|z(|u|^{p-1}-|v|^{p-1})\big|_{L^\beta}|\varphi|_{L^\gamma}|\xi|_{L^\gamma}$$
$$+\big|z(|u|^{p-1}-|v|^{p-1})\big|_{L^\sigma}|\varphi|_{L^\tau}|\xi|_{L^\tau}\big\} \tag{A.1}$$

pour tout $z\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u,v,\varphi,\xi\in H$, où $(p-1)\beta=\gamma\equiv q\in(\frac{N(p+1)}{N-k},2^*)$ et $(p-1)\sigma=\tau\equiv p+1$. En particulier, il existe $D=D(N,k,p)>0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|z||x|^{-k}|u|^{p-1}|\varphi||\xi|dx\leq D|z|_{L^\infty}\|u\|^{p-1}\|\varphi\|\|\xi\| \tag{A.2}$$

pour tout $z\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u,\varphi,\xi\in H$.
(ii) Pour $s\in\mathbb{R}$, soit $z_s\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $|z_s|_{L^\infty}\leq M<\infty$ pour tout $s\in\mathbb{R}$ et $z_s\to 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $s\to 0$. Alors

$$\lim_{s\to 0}\sup_{\varphi,\xi\in H\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|z_s||x|^{-k}|u|^{p-1}|\varphi||\xi|dx}{\|\varphi\|\|\xi\|}=0$$

pour tout $u\in H$.

Démonstration. Pour (i), l'inégalité de Hölder avec quatre exposants donne

$$\int_{B(0,1)}|z||x|^{-k}\big||u|^{p-1}-|v|^{p-1}\big||\varphi||\xi|dx\leq\{\int_{B(0,1)}|x|^{-k\alpha}\}^{1/\alpha}\big|z(|u|^{p-1}-|v|^{p-1})\big|_{L^\beta}|\varphi|_{L^\gamma}|\xi|_{L^\gamma},$$

où β et γ sont choisis comme dans l'énoncé. Avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\gamma}=1$, on a alors $\alpha=\frac{q}{q-(p+1)}$ et on vérifie sans peine que

$$N-k\alpha>0\quad\Longleftrightarrow\quad q>\frac{N(p+1)}{N-k}.$$

Ainsi, il existe $K>0$ tel que

$$\int_{B(0,1)}|z||x|^{-k}\big||u|^{p-1}-|v|^{p-1}\big||\varphi||\xi|dx\leq K\big|z(|u|^{p-1}-|v|^{p-1})\big|_{L^\beta}|\varphi|_{L^\gamma}|\xi|_{L^\gamma},$$

le membre de droite étant fini pour tout $u, v, \varphi, \xi \in H$ car $(p-1)\beta = \gamma \in (2, 2^*)$. D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder avec trois exposants,

$$\int_{|x|\geq 1} |z||x|^{-k}\big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big||\varphi||\xi|dx \leq \big|z(|u|^{p-1} - |v|^{p-1})\big|_{L^\sigma}|\varphi|_{L^\tau}|\xi|_{L^\tau},$$

où $\sigma, \tau \in (2, 2^*)$ sont choisis comme dans l'énoncé. Il suffit donc de poser $C = \max\{K, 1\}$ pour obtenir (A.1). Pour (A.2), il suffit de poser $v = 0$ dans (A.1) et d'utiliser les inégalités de Sobolev.

Pour (ii), remarquons que (A.1) et les inégalités de Sobolev entraînent qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_s||x|^{-k}|u|^{p-1}|\varphi||\xi|dx \leq \big\{\big|z_s|u|^{p-1}\big|_{L^\beta} + \big|z_s|u|^{p-1}\big|_{L^\sigma}\big\}\|\varphi\|\|\xi\|$$

pour tout $u, \varphi, \xi \in H$. Mais nous avons que

$$\big|z_s|u|^{p-1}\big|^\beta \leq M^\beta|u|^q \quad \text{et} \quad \big|z_s|u|^{p-1}\big|^\sigma \leq M^\sigma|u|^{p+1},$$

où $|u|^q, |u|^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ par le théorème de plongement de Sobolev et par nos hypothèses sur p et q. Le résultat découle alors du théorème de convergence dominée. □

Annexe B

Continuité et différentiabilité de quelques opérateurs

Dans le lemme ci-dessous, H désigne soit $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, soit $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et, dans les deux cas, $\|\cdot\|$ désigne la norme standard sur H.

Lemme B.1 *Soit $N \geq 2$, $k \in (0,2)$ et $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$. Pour $z \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous définissons*

$$\Psi(u) = z|x|^{-k}|u|^{p-1}u \quad \textit{et} \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p+1}dx.$$

(i) $\Psi \in C(H, H^*)$ et il existe une constante $C_1 = C_1(N, k, p, |z|_{L^\infty}) > 0$ telle que

$$\|\Psi(u)\|_{H^*} \leq C_1\|u\|^p \quad \textit{pour tout } u \in H.$$

(ii) Pour $u, v, w \in H$, nous posons

$$\Theta(u)[v, w] = \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p-1}vwdx.$$

Alors $\Theta(u)$ est une forme bilinéaire symétrique bornée pour tout $u \in H$. Il existe donc un opérateur $B(u) \in L(H, H^*)$ tel que

$$\Theta(u)[v, w] = \langle B(u)v, w\rangle_{H^*\times H} \quad \textit{pour tout } v, w \in H.$$

De plus, $B \in C(H, L(H, H^*))$ et

$$\|B(u)\|_{L(H,H^*)} \leq C_1\|u\|^{p-1} \quad \textit{pour tout } u \in H.$$

En outre, $\Psi \in C^1(H, H^*)$ et $\Psi'(u) = pB(u)$ pour tout $u \in H$.

(iii) Finalement, $\Phi \in C^2(H, \mathbb{R})$ avec

$$\Phi'(u)v = (p+1)\langle\Psi(u), v\rangle_{H^*\times H} = (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p-1}uvdx \quad \textit{pour tout } u, v \in H$$

et

$$\Phi''(u)[v, w] = p(p+1)\Theta(u)[v, w] = p(p+1)\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p-1}vwdx \quad \textit{pour tout } u, v, w \in H.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\big||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\big| \leq |u|^{p-1}|u-v| + \big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big||v|.$$

Ainsi, pour tout $u, v, \varphi \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}\big||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\big||\varphi|dx \leq &\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p-1}|u-v||\varphi|dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}\big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big||v||\varphi|dx. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Posant $v = 0$, (A.2) implique

$$\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^p|\varphi|dx \leq D|z|_{L^\infty}\|u\|^p\|\varphi\|,$$

ce qui montre que $\Psi(u) \in H^*$ avec $\|\Psi(u)\|_{H^*} \leq D|z|_{L^\infty}\|u\|^p$ pour tout $u \in H$. Maintenant, utilisant (A.1) et (A.2) dans (B.1), ainsi que les inégalités de Sobolev, nous voyons qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}\big||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\big||\varphi|dx \leq &D|z|_{L^\infty}\|u\|^{p-1}\|u-v\|\|\varphi\| \\ &+ K|z|_{L^\infty}\big\{\big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\beta} + \big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\sigma}\big\}\|v\|\|\varphi\|,\end{aligned}$$

où β et σ sont définis dans le Lemme A.1. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{H^*} \leq &D|z|_{L^\infty}\|u\|^{p-1}\|u-v\| \\ &+ K|z|_{L^\infty}\big\{\big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\beta} + \big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\sigma}\big\}\|v\|.\end{aligned}$$

Or l'application $u \mapsto |u|^{p-1}$ est continue de $L^{(p-1)\beta}$ dans L^β et de $L^{(p-1)\sigma}$ dans L^σ. Il découle alors du plongement de Sobolev que $\Psi \in C(H, H^*)$. Posant $C_1 = D|z|_{L^\infty}$, (i) est démontré.

Utilisant à nouveau (A.2), nous avons que

$$\big|\Theta(u)[v,w]\big| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |z||x|^{-k}|u|^{p-1}|v||w|dx \leq D|z|_{L^\infty}\|u\|^{p-1}\|v\|\|w\|$$

pour tout $u, v, w \in H$, ce qui montre que, pour tout $u \in H$, $\Theta(u)$ est une forme bilinéaire bornée et que $\|B(u)\| \leq D|z|_{L^\infty}\|u\|^{p-1} = C_1\|u\|^{p-1}$. La symétrie de Θ est évidente. Maintenant, (A.1) implique

$$\big\langle [B(u) - B(v)]w, \varphi\big\rangle_{H^* \times H} \leq K|z|_{L^\infty}\big\{\big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\beta} + \big||u|^{p-1} - |v|^{p-1}\big|_{L^\sigma}\big\}\|w\|\|\varphi\| \tag{B.2}$$

pour tout $u, v, w, \varphi \in H$. Mais nous avons déjà vu que $u \mapsto |u|^{p-1}$ est continu de H dans L^β et de H dans L^σ. Ainsi $B \in C(H, L(H, H^*))$.

Il reste à voir que $\Psi \in C^1(H, H^*)$ avec $\Psi' = pB$ et à étudier la dérivabilité de Φ. En fait, il suffit de montrer que Φ est dérivable au sens de Gâteaux avec $\Phi' = (p+1)\Psi$, puis que Ψ est dérivable au sens de Fréchet avec $\Psi' = pB$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $u, v \in H$, nous avons que

$$\frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}\frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t}dx.$$

Or, par le théorème des accroissements finis, il existe $s = s(t,x) \in [0,1]$ tel que

$$|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1} \le (p+1)|u+stv|^{p-1}(u+stv)tv$$

et donc

$$\left|\frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t}\right| \le (p+1)|u+stv|^{p}|v| \le (|u|+|v|)^p|v|$$

pour $0 < |t| \le 1$. Maintenant, puisque $|u|+|v| \in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (c.f. Proposition 2.2 de [20] pour le cas où $H = H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$), (A.2) implique que $z|x|^{-k}(|u|+|v|)^p|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et il vient

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p-1}uvdx.$$

Ainsi, Φ est dérivable au sens de Gâteaux au point $u \in H$ et $\Phi'(u)v = \langle \Psi(u), v\rangle_{H^*\times H}$ pour tout $v \in H$.

Pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $u,v,w \in H$, nous avons que

$$\left\langle \frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}, w\right\rangle_{H^*\times H} = \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}\frac{|u+tv|^{p-1}(u+tv)-|u|^{p-1}u}{t}wdx.$$

Utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis, nous obtenons

$$|u+tv|^{p-1}(u+tv)-|u|^{p-1}u \le p(|u|+|v|)^{p-1}|tv|$$

pour $0 < |t| \le 1$. Ainsi,

$$\left|z|x|^{-k}\frac{|u+tv|^{p-1}(u+tv)-|u|^{p-1}u}{t}w\right| \le p|z||x|^{-k}(|u|+|v|)^{p-1}|v||w|. \tag{B.3}$$

Il suit à nouveau de (A.2) que $|z||x|^{-k}(|u|+|v|)^{p-1}|v||w| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et le théorème de convergence dominée donne alors

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}, w\right\rangle_{H^*\times H} = p\langle B(u)v, w\rangle_{H^*\times H} \quad \text{pour tout } u,v,w \in H.$$

Cela signifie que pour tout $u,v,w \in H$, $\langle \Psi(u+sv), w\rangle_{H^*\times H}$ est dérivable par rapport à $s \in \mathbb{R}$ et que $\frac{d}{ds}\langle \Psi(u+sv), w\rangle_{H^*\times H} = p\langle B(u+sv)v, w\rangle_{H^*\times H}$, qui est une fonction continue de la variable $s \in \mathbb{R}$ par le point (ii) ci-dessus. Par conséquent,

$$\langle \Psi(u+v)-\Psi(u), w\rangle_{H^*\times H} = \int_0^1 \frac{d}{ds}\langle \Psi(u+sv), w\rangle_{H^*\times H}ds = \int_0^1 p\langle B(u+sv)v, w\rangle_{H^*\times H}ds,$$

si bien que

$$\langle \Psi(u+v)-\Psi(u)-pB(u)v, w\rangle_{H^*\times H} = \int_0^1 p\big\langle [B(u+sv)-B(u)]v, w\big\rangle_{H^*\times H}ds.$$

Mais alors

$$\big|\langle \Psi(u+v)-\Psi(u)-pB(u)v, w\rangle_{H^*\times H}\big| \le p\int_0^1 \|B(u+sv)-B(u)\|_{L(H,H^*)}ds\|v\|\|w\|,$$

ce qui montre que

$$\|\Psi(u+v)-\Psi(u)-pB(u)v\|_{H^*} \le p\int_0^1 \|B(u+sv)-B(u)\|_{L(H,H^*)}ds\|v\|$$

et donc que Ψ est différentiable au sens de Fréchet au point $u \in H$ avec $\Psi'(u) = pB(u)$. □

Annexe C

EDO, comportement asymptotique

Nous allons déduire le Lemme 1.2.6 du comportement asymptotique des solutions générales de l'équation différentielle ordinaire (1.16). Soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Nous dirons que $f(r) \to \infty$ exponentiellement lorsque $r \to \infty$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $e^{-\epsilon r} f(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$.

Lemme C.1 *Soit $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ et $Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $r^k Q(r)$ est bornée sur $(0,\infty)$, où $k \in (0,2)$, et $Q(r) \to 0$ exponentiellement lorsque $r \to \infty$. Considérons alors l'équation différentielle ordinaire*

$$v'' + \frac{N-1}{r} v' - \gamma v - \frac{\mu}{r^2} v + Q(r) v = 0, \quad r > 0. \tag{C.1}$$

(A) Il existe deux solutions linéairement indépendantes η_0, η_1 de (C.1) sur $(0,\infty)$ telles que, pour $\alpha_\pm = (2 - N \pm \sqrt{(N-2)^2 + 4\mu})/2$, nous avons :

(Ai) Si $(N,\mu) \neq (2,0)$, $\eta_0(r) = [1 + \delta_0(r)] r^{\alpha_+}$ et $\eta_0'(r) = [\alpha_+ + \varrho_0(r)] r^{\alpha_+ - 1}$ au voisinage de 0^+, où $\delta_0(r), \varrho_0(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Si $(N,\mu) = (2,0)$, $\eta_0(r) = 1 + \delta_0(r)$ et $\eta_0'(r) = \varrho_0(r) r^{-1} (\ln r)^{-1}$ au voisinage de 0^+, où $\delta_0(r), \varrho_0(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

(Aii) Si $(N,\mu) \neq (2,0)$, $\eta_1(r) = [1 + \delta_1(r)] r^{\alpha_-}$ et $\eta_1'(r) = [\alpha_- + \varrho_1(r)] r^{\alpha_- - 1}$ au voisinage de 0^+, où $\delta_1(r), \varrho_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Si $(N,\mu) = (2,0)$, $\eta_1(r) = [1 + \delta_1(r)] \ln r$ et $\eta_1'(r) = [1 + \varrho_1(r)] r^{-1}$ au voisinage de 0^+, où $\delta_1(r), \varrho_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

(B) Il existe deux solutions linéairement indépendantes ξ_0, ξ_1 de (C.1) sur $(0,\infty)$ telles que :

(Bi) $\xi_0(r) = [1 + \varepsilon_0(r)] r^{\frac{1-N}{2}} e^{-\sqrt{\gamma} r}$ et $\xi_0'(r) = [-\sqrt{\gamma} + \nu_0(r)] r^{\frac{1-N}{2}} e^{-\sqrt{\gamma} r}$ au voisinage de $+\infty$, où $\varepsilon_0(r), \nu_0(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$.

(Bi) $\xi_1(r) = [1 + \varepsilon_1(r)] r^{\frac{1-N}{2}} e^{\sqrt{\gamma} r}$ et $\xi_1'(r) = [\sqrt{\gamma} + \nu_1(r)] r^{\frac{1-N}{2}} e^{\sqrt{\gamma} r}$ au voisinage de $+\infty$, où $\varepsilon_1(r), \nu_1(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$.

Démonstration du Lemme 1.2.6. Nous supposons que $v \in H_r^1$ est une solution de (C.1). Nous devons donc avoir $r^{N-1} v^2 \in L^1(0,\infty)$ et $r^{N-1} (v')^2 \in L^1(0,\infty)$. Concernant le comportement de v au voisinage de 0^+ dans le cas $(N,\mu) \neq (2,0)$, nous voyons que v doit avoir le comportement (Ai). En effet, puisque $N - 1 + 2(\alpha_- - 1) = -1 - \sqrt{(N-2)^2 + 4\mu} < -1$ pour $(N,\mu) \neq (2,0)$, $r^{N-1}(v')^2$ ne peut être sommable au voisinage de 0^+ si v a le comportement (Aii). En revanche, $N - 1 + 2\alpha_+ = 1 + \sqrt{(N-2)^2 + 4\mu}$ et $N - 1 + 2(\alpha_+ - 1) = -1 + \sqrt{(N-2)^2 + 4\mu} > -1$ pour $(N,\mu) \neq (2,0)$, de sorte que $r^{N-1} v^2$ et $r^{N-1}(v')^2$ sont bien sommables au voisinage de 0^+ si v a le comportement (Ai). Ainsi, comme $\alpha_+ \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mu = 0$, nous avons bien que les limites $\lim_{r\to 0} v(r)$ et $\lim_{r\to 0} rv'(r)$ existe et que $\lim_{r\to 0} rv'(r) = 0$ si $N \neq 2$ et $\mu = 0$.

Dans le cas $(N, \mu) = (2, 0)$, nous voyons aussi que v ne peut avoir le comportement (Aii) au voisinage de 0^+ car $r\eta_1'(r)^2 = [1 + \varrho_1(r)]^2 r^{-1}$ n'est pas sommable au voisinage de 0^+. En revanche, on a bien que $r\eta_0(r)^2 = r[1 + \delta_0(r)]^2 \in L^1(0, \varepsilon)$ et que $r\eta_0'(r)^2 = \varrho_0(r)^2 r^{-1}(\ln r)^{-2} \in L^1(0, \varepsilon)$ pour tout $0 < \varepsilon < 1$. En effet,

$$\int_0^\varepsilon \frac{1/r}{(\ln r)^2} dr = -\frac{1}{\ln r}\Big|_0^\varepsilon = -\frac{1}{\ln \varepsilon}.$$

Donc v a encore le comportement (Ai) dans le cas $(N, \mu) = (2, 0)$ et nous voyons que $\lim_{r\to 0} v(r)$ existe et que $\lim_{r\to 0} rv'(r) = 0$.

Finalement, il est clair que v doit avoir le comportement (Bi) au voisinage de $+\infty$. □

Démonstration du Lemme C.1. Nous utilisons le Théorème 9.1, Chapitre XI, du livre [21]. Nous considérons tout d'abord le comportement lorsque $r \to 0$. Nous récrivons (C.1) sous la forme

$$(r^{N-1}v')' + r^{N-1}[-\gamma - \mu/r^2 + Q(r)]v = 0. \tag{C.2}$$

Pour étudier cette équation sur l'intervalle $(0, 1)$, nous faisons le changement de variables

$$r = 1 - t, \quad u(t) = v(1 - t) \quad \text{et} \quad h(t) = Q(1 - t), \quad 0 < t < 1.$$

L'équation (C.2) devient alors

$$[(1 - t)^{N-1}u']' + (1 - t)^{N-1}[-\gamma - \mu/(1 - t)^2 + h(t)]u = 0. \tag{C.3}$$

Nous allons déduire le comportment de v lorsque $r \to 0^+$ du comportment de u lorsque $t \to 1^-$. Dans les notations du Théorème 9.1, Chapitre XI, de [21], nous avons

$$\omega = 1, \quad p(t) = (1 - t)^{N-1} \quad \text{et} \quad q(t) = (1 - t)^{N-1}[-\gamma - \mu/(1 - t)^2 + h(t)].$$

Lorsque $t \to 1$, le terme dominant de (C.3) est (potentiellement) $-\mu/(1 - t)^{N-3}$. Nous comparons donc (C.3) avec

$$[(1 - t)^{N-1}x'(t)]' - \mu(1 - t)^{3-N}x(t) = 0. \tag{C.4}$$

C'est-à-dire, nous choisissons $q_0(t) = -\mu(1 - t)^{3-N}$ dans le Théorème 9.1. Nous traiterons à part le cas $(N, \mu) = (2, 0)$. Mais supposons dans un premier temps que $(N, \mu) \neq (2, 0)$. L'équation (C.4) est non-oscillante à $t = 1$ (dans le sens défini à la page 351 de [52]) et admet des solutions principales et non-principales sur $(0, 1)$ respectivement données par

$$x_0(t) = (1 - t)^{\alpha_+} \quad \text{et} \quad x_1(t) = (1 - t)^{\alpha_-},$$

où

$$\alpha_\pm = \frac{2 - N \pm \sqrt{(N - 2)^2 + 4\mu}}{2}.$$

Notez que $\alpha_- < 0$ car $(N, \mu) \neq (2, 0)$. D'autre part, $\alpha_+ \geq 0$ pour tout $\mu \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mu = 0$. (Si $(N, \mu) = (2, 0)$, nous avons $\alpha_- = \alpha_+ = 0$, les solutions x_0 et x_1 ne sont pas linéairement indépendantes et elles ne peuvent être utilisées dans le cadre du Théorème 9.1.) Nous vérifions maintenant l'hypothèse d'intégrabilité (9.22) du Théorème 9.1. Nous avons que

$$\begin{aligned}\int^\omega |x_0(t)x_1(t)| \cdot |q(t) - q_0(t)|dt &= \int^1 |1 - t|^{2-N}|1 - t|^{N-1}| - \gamma + h(t)|dt \\ &\leq \int^1 \gamma|1 - t|dt + \int^1 |1 - t||h(t)|dt < \infty\end{aligned}$$

car $|1-t||h(t)| = |1-t|^k|h(t)||1-t|^{1-k}$ avec $|1-t|^k|h(t)|$ borné et $1-k > -1$. ($\int^\omega$ signifie que l'on intègre sur un voisinage à gauche de ω.) Ainsi, les hypothèses du Théorème 9.1 sont satisfaites. Par conséquent, (C.3) possède deux solutions linéairement indépendantes sur $(0,1)$, u_0, u_1, telles que, lorsque $t \to 1$,

$$u_i \sim x_i \tag{C.5}$$

et

$$\frac{p\,u_i'}{u_i} = \frac{p\,x_i'}{x_i} + o\left(\frac{1}{|x_0x_1|}\right), \tag{C.6}$$

pour $i = 0, 1$. (C.5) donne immédiatement

$$u_0(t) = [1+\tilde{\delta}_0(t)](1-t)^{\alpha_+} \quad \text{et} \quad u_1(t) = [1+\tilde{\delta}_1(t)](1-t)^{\alpha_-} \quad \text{au voisinage de } t = 1,$$

où $\tilde{\delta}_0(t), \tilde{\delta}_1(t) \to 0$ lorsque $t \to 1$. Dans les variables initiales, ceci implique l'existence de deux solutions de (C.1) linéairement indépendantes sur $(0,1)$, η_0, η_1, ($\eta_i(r) = u_i(1-r)$) telles que

$$\eta_0(r) = [1+\delta_0(r)]r^{\alpha_+} \quad \text{et} \quad \eta_1(r) = [1+\delta_1(r)]r^{\alpha_-} \quad \text{au voisinage de } r = 0,$$

où $\delta_0(r), \delta_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$. Pour les fonctions dérivées correspondantes, (C.6) implique

$$\frac{(1-t)^{N-1}u_i'}{u_i} = \frac{(1-t)^{N-1}x_i'}{x_i} + o((1-t)^{N-2}), \quad i = 0, 1.$$

Après un petit calcul, nous trouvons que, au voisinage de $t = 1$,

$$u_0'(t) = [-\alpha_+ + \tilde{\varrho}_0(t)](1-t)^{\alpha_+-1} \quad \text{et} \quad u_1'(t) = [-\alpha_- + \tilde{\varrho}_1(t)](1-t)^{\alpha_--1},$$

où $\tilde{\varrho}_0(t), \tilde{\varrho}_1(t) \to 0$ lorsque $t \to 1$. Dans les variables initiales, nous obtenons alors

$$\eta_0'(r) = [\alpha_+ + \varrho_0(r)]r^{\alpha_+-1} \quad \text{et} \quad \eta_1'(r) = [\alpha_- + \varrho_1(r)]r^{\alpha_--1} \quad \text{au voisinage de } r = 0,$$

où $\varrho_0(r), \varrho_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Considérons à présent le cas $(N,\mu) = (2,0)$. Nous comparons (C.3) sur $(0,1)$ avec

$$[(1-t)x'(t)]' = 0. \tag{C.7}$$

Cette équation est non-oscillante au point $t = 1$ et possède les solutions principales et non-principales

$$x_0(t) \equiv 1 \quad \text{et} \quad x_1(t) = \ln(1-t).$$

L'hypothèse d'intégrabilité du Théorème 9.1 est vérifiée car maintenant $q_0 \equiv 0$ et donc

$$\begin{aligned}\int^\omega |x_0(t)x_1(t)| \cdot |q(t) - q_0(t)|dt &= \int^1 |\ln(1-t)||1-t||-\gamma + h(t)|dt \\ &\leq \int^1 \gamma|\ln(1-t)||1-t|dt + \int^1 |\ln(1-t)||1-t||h(t)|dt < \infty.\end{aligned}$$

En effet, d'une part, $|\ln(1-t)||1-t| \to 0$ lorsque $t \to 1$ et, d'autre part, puisque $k \in (0,2)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1-k-\varepsilon > -1$ et donc

$$|\ln(1-t)||1-t||h(t)| = |1-t|^k|h(t)||\ln(1-t)||1-t|^\varepsilon|1-t|^{1-k-\varepsilon}$$

est sommable au voisinage de $t = 1^-$ car $|1-t|^k|h(t)|$ est borné et $|\ln(1-t)||1-t|^\varepsilon \to 0$. Ainsi les hypothèses du Théorème 9.1 sont satisfaites et une discussion analogue à celle faite dans le cas $(N,\mu) \neq (2,0)$ montre que (C.3) possède deux solutions linéairement indépendantes sur $(0,1)$, u_0, u_1, qui satisfont, lorsque $t \to 1$,

$$u_0(t) = 1 + \tilde{\delta}_0(t) \quad \text{et} \quad u_1(t) = [1 + \tilde{\delta}_1(t)] \ln(1-t),$$

où $\tilde{\delta}_0(t), \tilde{\delta}_1(t) \to 0$ lorsque $t \to 1$. Nous obtenons que les fonctions dérivées, u_0', u_1', on le comportement asymptotique

$$u_0'(t) = \tilde{\varrho}_0(t)[(1-t)\ln(1-t)]^{-1} \quad \text{et} \quad u_1'(t) = [-1 + \tilde{\varrho}_1(t)](1-t)^{-1},$$

où $\tilde{\varrho}_0(t), \tilde{\varrho}_1(t) \to 0$ lorsque $t \to 1$. Revenant aux variables initiales, nous voyons qu'il existe deux solutions de (C.1) linéairement indépendantes sur $(0,1)$, η_0, η_1, telles que

$$\eta_0(r) = 1 + \delta_0(r) \quad \text{et} \quad \eta_1(r) = [1 + \delta_1(r)] \ln r \quad \text{au voisinage de } r = 0,$$

où $\delta_0(r), \delta_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ et

$$\eta_0'(r) = \varrho_0(r) r^{-1} (\ln r)^{-1} \quad \text{et} \quad \eta_1'(r) = [1 + \varrho_1(r)] r^{-1} \quad \text{au voisinage de } r = 0,$$

où $\varrho_0(r), \varrho_1(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$. La partie (A) est démontrée.

Nous étudions à présent le comportement des solutions lorsque $r \to \infty$. Avec le changement de variables $v(r) = r^{\frac{1-N}{2}} \psi(r)$, (C.1) devient

$$\psi'' - \gamma\psi - \left[\frac{(N-1)(N-3)}{4} + \mu\right] \frac{1}{r^2} \psi + Q(r)\psi = 0. \tag{C.8}$$

Nous comparons cette équation avec $x'' - \gamma x = 0$, qui admet des solutions principales et non-principales respectivement données par

$$x_0(r) = e^{-\sqrt{\gamma} r} \quad \text{and} \quad x_1(r) = e^{\sqrt{\gamma} r}.$$

Les hypothèses du Théorème 9.1 sont satisfaites car

$$\int^{\infty} |x_0(r) x_1(r)| \cdot |q(r) - q_0(r)| dr = \int^{\infty} \left| Q(r) - \left[\frac{(N-1)(N-3)}{4} + \mu\right] \frac{1}{r^2} \right| dr < \infty$$

par la décroissance exponentielle de Q à l'infini. Alors (C.8) possède deux solutions ψ_0, ψ_1 telles que

$$\psi_i \sim x_i \tag{C.9}$$

et

$$\frac{\psi_i'}{\psi_i} = \frac{x_i'}{x_i} + o\left(\frac{1}{|x_0 x_1|}\right) \quad \text{lorsque } r \to \infty, \tag{C.10}$$

pour $i = 0, 1$. Par conséquent, au voisinage de $+\infty$,

$$\psi_0(r) = [1 + \theta_0(r)] e^{-\sqrt{\gamma} r}, \quad \psi_1(r) = [1 + \theta_1(r)] e^{\sqrt{\gamma} r}$$

et

$$\frac{\psi_i'}{\psi_i} = \pm\sqrt{\gamma} + \lambda_i(r),$$

où $\theta_i(r), \lambda_i(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$ pour $i = 0, 1$. Revenant aux variables initiales, il n'est pas difficile de voir que l'on a bien les deux comportements (Bi) et (Bii). □

Annexe D

Régularité par 'boot-strap'

Le but de cette annexe est d'établir des propriétés de régularité de solutions de certaines équations elliptiques, linéaires et non-linéaires. Plus précisément, nous allons démontrer les Lemmes 1.4.4 et 2.1.4. Nous prouverons en fait un résultat un peu plus général que 1.4.4, le Lemme D.1 ci-dessous, qui est aussi utile dans la preuve du Lemme 3.3.3. Nous commençons par énoncer la proposition suivante, résultat contenu dans la Proposition 4.3 de [45], qui nous sera fort utile.

Proposition D.1 *Soit h une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^N$ et considérons l'équation*

$$\Delta u - \lambda u + h = 0 \tag{D.1}$$

dans le sens des distributions, pour $\lambda > 0$.

(i) Il existe une unique distribution tempérée satisfaisant (D.1).

(ii) Si $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour un $1 \leq r \leq \infty$, alors la solution $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$. De plus, si $1 < r < \infty$, alors $u \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_{W^{2,r}} \leq C(\lambda, r)|h|_{L^r}.$$

Nous travaillons avec des fonctions à valeurs réelles. Le résultat concernant les équations linéaires est le suivant.

Lemme D.1 *Pour $N \geq 2$, soit $k \in (0,2)$, $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et $z \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $z(x) \to 0$ exponentiellement vite lorsque $|x| \to \infty$. Si $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfait*

$$\Delta v - \lambda v + z|x|^{-k} v = 0 \tag{D.2}$$

au sens des distributions, alors $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Posant $Kv = z|x|^{-k}v$, l'équation (D.2) s'écrit $\Delta v - \lambda v + Kv = 0$. Par un argument de 'boot-strap', nous allons montrer que $Kv \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour tout $r \in [1, N/k)$. Par la Proposition D.1, nous aurons alors que $v \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $r \in (1, N/k)$. Puisque $N/k > N/2$ par hypothèse, le résultat suit alors du théorème de plongement de Sobolev.

Nous commençons par le cas où $N = 2$ qui est plus facile. Puisque z est bornée, pour tout $r \in [1, 2/k)$, l'inégalité de Hölder et les inégalités de Sobolev impliquent que

$$\int_{|x|\leq 1} |Kv|^r dx \leq C \int_{|x|\leq 1} |x|^{-kr}|v|^r dx \leq C\{\int_{|x|\leq 1} |x|^{-kr\alpha} dx\}^{1/\alpha}\{\int_{|x|\leq 1} |v|^{r\beta} dx\}^{1/\beta}, \tag{D.3}$$

où le membre de droite est fini si $\alpha, \beta \geq 1$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, satisfont à la fois $2 - kr\alpha > 0$ et $1 \leq r\beta < \infty$. Les conditions sur β sont triviales et l'on peut toujours choisir $\alpha \in [1, 2/kr)$ si $r \in [1, 2/k)$. D'autre part,

$$\int_{|x|\geq 1} |Kv|^r dx \leq C\{\int_{|x|\geq 1} |z|^{r\gamma} dx\}^{1/\gamma}\{\int_{|x|\geq 1} |v|^{r\delta} dx\}^{1/\delta}, \tag{D.4}$$

où le membre de droite est fini pour tout $\gamma, \delta \geq 1$ tels que $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ et $r\delta \geq 2$. En effet, la décroissance exponentielle de z assure la convergence de la première intégrale du membre de droite de (D.4), quel que soit $\gamma \geq 1$. En conclusion, $Kv \in L^r(\mathbb{R}^2)$ pour tout $r \in [1, 2/k)$ et la preuve est terminée.

Supposons à présent que $N \geq 3$. Nous savons déjà que $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Supposons que $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $q \geq 2^*$. Par (D.3), nous aurons que $\int_{|x|\leq 1} |Kv|^r dx < \infty$ si

$$N - kr\alpha > 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq r\beta \leq q. \tag{D.5}$$

D'autre part, nous voyons grâce à (D.4) que $\int_{|x|\geq 1} |Kv|^r dx < \infty$ pour tout $r \geq 1$. Il n'est pas difficile de voir que l'on peut trouver α et β conjugués qui satisfont (D.5) si $r < Nq/(qk+N)$. Par conséquent, nous aurons que

$$Kv \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } r \in [1, r_q), \quad \text{où } r_q = \frac{1}{\frac{1}{q} + \frac{k}{N}}.$$

Observons que r_q est strictement croissant en $q \in [2^*, \infty)$ et que $r_{2^*} > 1$. Il découle alors de la Proposition D.1 que

$$v \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } r \in (1, r_q). \tag{D.6}$$

Maintenant, par le théorème de plongement de Sobolev,

$$v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N) \quad \text{si } r_q > \frac{N}{2}, \quad \text{i.e. si } q > \frac{N}{2-k}.$$

Nous pouvons donc supposer dès maintenant que $N/(2-k) \geq 2^*$, sinon quoi la preuve est terminée. Cette condition est équivalente à $N \geq 2(3-k)$. Sous cette hypothèse, pour $q \in [2^*, \frac{N}{2-k}]$, (D.6) et le théorème de Sobolev impliquent

$$v \in L^\tau(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } \tau \in (1, T(q)),$$

où

$$T(q) = \frac{Nr_q}{N - 2r_q} = \frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{2-k}{N}} \quad \text{pour } q < \frac{N}{2-k} \quad \text{et} \quad T(\frac{N}{2-k}) = \infty.$$

Remarquez que $T(q)$ est strictement croissant en $q \in [2^*, \frac{N}{2-k})$.

Nous discutons maintenant deux cas séparément.

Cas (a) : Si $N = 2(3-k)$, l'intervalle $[2^*, \frac{N}{2-k}]$ est dégénéré et nous avons $T(2^*) = \infty$. Alors

$$v \in L^\tau(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } \tau \in (1, \infty)$$

et donc

$$Kv \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } r \in [1, r_\infty) \quad \text{et} \quad v \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } r \in (1, r_\infty),$$

où $r_\infty = N/k > N/2$. Par conséquent, $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

Cas (b) : Si $N > 2(3-k)$, alors l'intervalle $[2^*, \frac{N}{2-k})$ n'est pas vide. Posons

$$q_0 = 2^* \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} = T(q_n) \quad \text{si} \quad q_n < \frac{N}{2-k}.$$

Supposons que $q_n < N/(2-k)$ pour tout n. Alors $\{q_n\} \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante bornée et

$$2^* \leq Q \equiv \lim_{n\to\infty} q_n \leq \frac{N}{2-k}.$$

Par la définition de T, nous obtenons

$$Q = T(Q) = \frac{1}{\frac{1}{Q} - \frac{2-k}{N}},$$

ce qui est équivalent à $1 = 1 + Q(2-k)/N$. Comme $k \neq 2$, ceci implique $Q = 0$, contradiction. Par conséquent, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $q_{n_0} \in [2^*, \frac{N}{2-k})$ et $T(q_{n_0}) \geq N/(2-k)$. Ainsi,

$$v \in L^\tau(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } \tau \in (1, T(q_{n_0})).$$

En fait, pour tout $q \in [2^*, \frac{N}{2-k})$, $v \in L^\tau(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\tau \in (1, T(q))$. Puisque $T(q) \to \infty$ lorsque $q \to N/(2-k)$, nous voyons donc que $v \in L^\tau(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\tau \in (1, \infty)$. Donc, comme dans le cas (a), $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. □

Nous démontrons maintenant le Lemme 2.1.4, qui concerne la régularité des solutions de diverses équations non-linéaires, notamment (E_λ) au Chapitre 1 et l'équation auxiliaire (P_s) de la Section 2.1.1.

Démonstration du Lemme 2.1.4. Utilisant la fonction $G : \mathbb{R} \times H \to H^*$ définie par (2.10), l'équation considérée s'écrit $\Delta u - \lambda u + G(s,u) = 0$. Par un argument de 'boot-strap' analogue à celui présenté ci-dessus et avec la Proposition D.1, nous allons montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est une solution de (P_s), alors $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ et

$$|u|_{L^\infty} \leq C_r |G(s,u)|_{L^r} \quad \text{pour tout } r \in (N/2, N/k), \tag{D.7}$$

où $C_r > 0$ est une constante que ne dépend pas de $s \in \mathbb{R}$. Nous verrons également que, pour tout $M > 0$, il existe une constante $C(M) > 0$ telle que

$$\|u\| \leq M \quad \Longrightarrow \quad |u|_{L^\infty} \leq C(M). \tag{D.8}$$

Nous commençons par le cas $N = 2$. Tout d'abord, par nos hypothèses sur G, nous avons que, pour $r \geq 1$,

$$\int_{|x|\leq 1} |G(s,u)|^r dx \leq C \int_{|x|\leq 1} |x|^{-kr} |u|^{pr} dx \leq C \{\int_{|x|\leq 1} |x|^{-kr\alpha} dx\}^{1/\alpha} \{\int_{|x|\leq 1} |u|^{pr\beta} dx\}^{1/\beta} \tag{D.9}$$

si $\alpha, \beta \geq 1$ sont des exposants de Hölder conjugués tels que $2 - kr\alpha > 0$ et $pr\beta \geq 1$. D'autre part,

$$\int_{|x|\geq 1} |G(s,u)|^r dx \leq C \int_{|x|\geq 1} |x|^{-kr} |u|^{pr} dx \leq C \{\int_{|x|\geq 1} |x|^{-kr\gamma} dx\}^{1/\gamma} \{\int_{|x|\geq 1} |u|^{pr\delta} dx\}^{1/\delta} \tag{D.10}$$

si $\gamma, \delta \geq 1$ sont des exposants de Hölder conjugués qui satisfont $2 - kr\gamma < 0$ et $pr\delta \geq 2$. Seules les conditions sur γ et δ sont non triviales et on voit facilement qu'elles sont satisfaites pour autant que $r > 2/(p+k)$. Nous voyons donc que, pour tout $r > \max\{1, 2/(p+k)\}$, $G(s,u) \in L^r(\mathbb{R}^2)$ avec

$|G(s,u)|_{L^r} \leq C\|u\|^p$, où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de s. Maintenant, puisque $W^{2,r}(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$ avec injection continue pour tout $r > 1$, la Proposition D.1 implique que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$ satisfait (D.7) et (D.8).

Supposons dès maintenant que $N \geq 3$. Par le théorème de plongement de Sobolev, nous savons que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Supposons que $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $q \geq 2^*$. Nous utilisons à nouveau (D.9) et (D.10). Maintenant, nous imposons les conditions suivantes sur les exposants de Hölder. Tout d'abord, $\alpha, \beta \geq 1$ doivent vérifier

$$N - kr\alpha > 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq pr\beta \leq q.$$

Avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, il n'est pas difficile de voir que ces conditions peuvent être satisfaites si et seulement si

$$r < R_q \equiv \frac{1}{\frac{p}{q} + \frac{k}{N}}.$$

Remarquons que R_q est strictement croissant en $q \geq 2^*$ et que $R_{2^*} > 1$ car $p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ et $N \geq 2$. D'autre part, pour que le membre de droite de (D.10) soit fini, nous imposons que

$$N - kr\gamma < 0 \quad \text{et} \quad 2 \leq pr\delta \leq q.$$

On peut trouver $\gamma, \delta \geq 1$ conjugués satisfaisant ces conditions si et seulement si

$$r > R \equiv \frac{1}{\frac{p}{2} + \frac{k}{N}}.$$

Nous voyons donc que, si $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $q \geq 2^*$, nous aurons que $G(s,u) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour tout

$$r \in (\max\{1, R\}, R_q).$$

Commençant avec $q = 2^*$, nous pouvons répéter l'argument de 'boot-strap' employé dans la preuve du Lemme D.1 en utilisant R_q à la place de r_q. La fonction $T(q)$ doit être remplacée par

$$T_1(q) = \frac{1}{\frac{p}{q} - \frac{2-k}{N}} \quad \text{pour tout } q \in [2^*, \frac{pN}{2-k}) \quad \text{et} \quad T_1(\frac{pN}{2-k}) = \infty.$$

Dans le cas (b), on aboutit également à une contradiction car

$$Q = T_1(Q) \iff p = 1 + \frac{Q}{N}(2-k) \quad \text{et} \quad 1 + \frac{Q}{N}(2-k) \geq 1 + \frac{4-2k}{N-2} \text{ pour tout } \quad Q \geq 2^*.$$

Par conséquent, le 'boot-strap' donne $G(s,u) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ avec $r > N/2$ en un nombre fini d'étapes. La propriété (D.7) découle alors du plongement de Sobolev et de la Proposition D.1. Pour voir que (D.8) est également vrai, il suffit de constater qu'à chaque étape, utilisant la Proposition D.1 et les inégalités de Sobolev, $|G(s,u)|_{L^r}$ pourra être borné par une puissance de $|u|_{L^{2^*}}$. Finalement, sachant que u peut être approximée dans $W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ par des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, le fait que $u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$ découle de la continuité de l'injection $W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$. □

Annexe E

Harmoniques sphériques

Nous montrons dans cette annexe que toute fonction $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ admet une décomposition de la forme (1.25). Il est généralement démontré dans les livres (voir par exemple [9], Sections 8.6.7 et 8.6.8) que toute fonction $\varphi \in L^2(S^{N-1})$ possède une décomposition en harmoniques sphériques de la forme

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} \varphi_k^m Y_k^m(\vartheta) \quad \text{pour } \vartheta \in S^{N-1},$$

où les notations sont celles introduites dans la preuve du Lemme 1.4.6. Ici, S^{N-1} désigne la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$. Nous allons utiliser ce résultat classique pour montrer qu'une décomposition de la forme (1.25) a bien lieu pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une fonction $\widetilde{v} : (0, \infty) \times S^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ telle que

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx = \int_0^{\infty} \int_{S^{N-1}} r^{N-1} \widetilde{v}(r, \vartheta)^2 d\vartheta dr. \tag{E.1}$$

Ainsi, par le théorème de Fubini, $\int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r, \vartheta)^2 d\vartheta < \infty$ pour presque tout $r > 0$. C'est-à-dire, $\widetilde{v}(r, \cdot) \in L^2(S^{N-1})$ et, par conséquent, pour presque tout $r > 0$ fixé, il existe des coefficients $v(r)_k^m$ tels que

$$\widetilde{v}(r, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} v(r)_k^m Y_k^m(\vartheta),$$

la série étant convergente dans le sens de $L^2(S^{N-1})$. De plus, les coefficients $v(r)_k^m$ sont donnés par

$$v(r)_k^m = \int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r, \vartheta) Y_k^m(\vartheta) d\vartheta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(S^{N-1})$, nous avons alors

$$(v(r)_k^m)^2 \leq \int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r, \vartheta)^2 d\vartheta \int_{S^{N-1}} Y_k^m(\vartheta)^2 d\vartheta = \int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r, \vartheta)^2 d\vartheta,$$

de sorte que

$$\int_0^{\infty} r^{N-1} (v(r)_k^m)^2 dr \leq \int_0^{\infty} r^{N-1} \int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r, \vartheta)^2 d\vartheta dr < \infty$$

par (E.1) et par le théorème de Fubini, ce qui montre que $v(r)_k^m \in L_r^2$. Nous posons alors

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{a_k} v(r)_k^m Y_k^m(\vartheta) \quad \text{pour } r = |x|,\ \vartheta = x/r,\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

et nous montrons que $\|S_n - v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En effet, utilisant l'orthogonalité des fonctions Y_k^m dans $L^2(S^{N-1})$ et l'identité de Parseval, nous avons

$$\begin{aligned} r^{N-1} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} v(r)_k^m Y_k^m(\vartheta) \right\|_{L^2(S^{N-1})}^2 &= r^{N-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} (v(r)_k^m)^2 \\ &\leq r^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} (v(r)_k^m)^2 \\ &= r^{N-1} \|\widetilde{v}(r,\cdot)\|_{L^2(S^{N-1})}^2 \\ &= r^{N-1} \int_{S^{N-1}} \widetilde{v}(r,\vartheta)^2 d\vartheta \in L^1(0,\infty). \end{aligned}$$

Il découle alors du théorème de Fubini et du théorème de convergence dominée que

$$\begin{aligned} \|S_n - v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} r^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{a_k} v(r)_k^m Y_k^m(\vartheta) - \widetilde{v}(r,\vartheta) \right|^2 d\vartheta dr \\ &= \int_0^\infty r^{N-1} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} v(r)_k^m Y_k^m(\vartheta) \right\|_{L^2(S^{N-1})}^2 dr \to 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$.

Annexe F

Opérateurs différentiels ordinaires, théorie spectrale

Nous commençons par établir quelques propriétés de la forme bilinéaire β_λ définie par (1.40). Nous travaillons avec $\lambda > 0$ fixé. Tout d'abord, nous montrons que β_λ est bien définie et nous prouvons le Lemme 1.4.8. Ensuite, nous montrons que β_λ satisfait les hypothèses du 'First Representation Theorem' de Kato [25], c.f. les Théorèmes 2.1 et 2.6 du Chapitre VI. Ces résultats assurent que (1.41) définit bien un opérateur auto-adjoint. Nous établissons ensuite les propriétés supplémentaires de A_λ requises par le Théorème 14.10 de [52], que nous utilisons dans la preuve du Lemme 1.4.9.

Nous faisons l'abus de notation $u(x) = u(|x|)$ si u est une fonction radiale. En particulier, $\psi(x) \equiv \psi(r)$ désigne un état fondamental de (E_λ).

Remarquons tout d'abord que β_λ est essentiellement la restriction aux fonctions radiales de H de la forme bilinéaire $S''_\lambda(\psi) : H \times H \to \mathbb{R}$. Plus précisément, si $u, v \in H$ sont des fonctions radiales, nous avons que

$$\beta_\lambda(u,v) = \omega_N^{-1} S''_\lambda(\psi)[u,v],$$

où ω_N est l'aire de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$. Puisque, par la Proposition 1.2.2, il y a une correspondance biunivoque entre les fonctions radiales de H et les fonctions de H^1_r, il découle du fait que $S_\lambda \in C^2(H,\mathbb{R})$ que $\beta_\lambda : H^1_r \times H^1_r \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique bornée. D'autre part, le Lemme 1.4.8 est alors une conséquence immédiate du Lemme 1.1.12.

Nous considérons maintenant β_λ comme une forme bilinéaire agissant dans L^2_r. Nous définissons $B_\lambda : D(B_\lambda) \subset L^2_r \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée,

$$D(B_\lambda) = H^1_r \quad \text{et} \quad B_\lambda(u) = \beta_\lambda(u,u) \text{ pour tout } u \in D(B_\lambda).$$

Lemme F.1 *Soit $N \geq 2$ et supposons que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont satisfaites. Alors $B_\lambda : D(B_\lambda) \subset L^2_r \to \mathbb{R}$ est bornée inférieurement et fermée.*

Démonstration. Nous avons explicitement

$$B_\lambda(u) = \int_0^\infty r^{N-1}\{(u')^2 + \lambda u^2 - p\widetilde{V}\psi^{p-1}u^2\}dr = \omega_N^{-1}\big\{|\nabla u|^2_{L^2} + \lambda |u|^2_{L^2} - \int_{\mathbb{R}^N} pV\psi^{p-1}u^2 dx\big\}. \tag{F.1}$$

Or, par (H2),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} pV\psi^{p-1}u^2dx\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-k}u^2dx \leq C\big\{\int_{|x|\leq 1}|x|^{-k}u^2dx + |u|_{L^2}^2\big\}.$$

Maintenant,

$$\int_{|x|\leq 1}|x|^{-k}u^2dx \leq \{\int_{|x|\leq 1}|x|^{-k\alpha}dx\}^{1/\alpha}\{\int_{|x|\leq 1}u^{2\beta}dx\}^{1/\beta} \leq C|u|_{L^{2\beta}}^2$$

si $\alpha, \beta \geq 1$ sont des exposants de Hölder conjugués tels que $N - k\alpha > 0$, i.e. $\beta > \frac{N}{N-k}$. Puisque $k < 2$, nous pouvons choisir $\beta \in (\frac{N}{N-k}, \frac{N}{N-2})$ et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg donne

$$|u|_{L^{2\beta}}^2 \leq C(N, 2\beta)\big\{|\nabla u|_{L^2}^2 + |u|_{L^2}^2\big\}^\gamma |u|_{L^2}^{2(1-\gamma)},$$

où $\gamma = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta}) \in (0,1)$. Utilisant l'inégalité de Young, nous voyons donc que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_{|x|\leq 1}|x|^{-k}u^2dx \leq C\big\{\gamma\varepsilon^{1/\gamma}(|\nabla u|_{L^2}^2 + |u|_{L^2}^2) + C_\varepsilon|u|_{L^2}^2\big\} = C\big\{\gamma\varepsilon^{1/\gamma}|\nabla u|_{L^2}^2 + (\gamma\varepsilon^{1/\gamma} + C_\varepsilon)|u|_{L^2}^2\big\}$$

et donc qu'il existe une constante $K_\varepsilon > 0$ telle que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} pV\psi^{p-1}u^2dx\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-k}u^2dx \leq C_1\big\{\gamma\varepsilon^{1/\gamma}|\nabla u|_{L^2}^2 + K_\varepsilon|u|_{L^2}^2\big\}.$$

Revenant à (F.1), nous avons alors

$$B_\lambda(u) \geq \omega_N^{-1}\big\{(1 - C_1\gamma\varepsilon^{1/\gamma})|\nabla u|_{L^2}^2 + (\lambda - C_1K_\varepsilon)|u|_{L^2}^2\big\} = \Lambda\omega_N^{-1}|u|_{L^2}^2 = \Lambda|u|_{L_r^2}^2, \tag{F.2}$$

où l'on a posé $\varepsilon = (1/C_1\gamma)^\gamma$ et $\Lambda = (\lambda - C_1K_\varepsilon)$. Ainsi, $B_\lambda : D(B_\lambda) \subset L_r^2 \to \mathbb{R}$ est bien bornée inférieurement.

Pour montrer que B_λ est fermée, considérons une suite $\{u_n\} \subset D(B_\lambda)$ telle que

$$u_n \to u \text{ dans } L_r^2 \quad \text{et} \quad B_\lambda(u_n - u_m) \to 0 \text{ lorsque } n, m \to \infty. \tag{F.3}$$

Nous devons voir que ces propriétés impliquent $u \in D(B_\lambda)$ et $B_\lambda(u_n - u) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Nous déduisons de (F.2) que

$$\begin{aligned} B_\lambda(u_n - u_m) &\geq (1 - C_1\gamma\varepsilon^{1/\gamma})\int_0^\infty r^{N-1}(u_n' - u_m')^2dr + (\lambda - C_1K_\varepsilon)\int_0^\infty r^{N-1}(u_n - u_m)^2dr \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^\infty r^{N-1}(u_n' - u_m')^2dr + (\lambda - C_1K_\varepsilon)\int_0^\infty r^{N-1}(u_n - u_m)^2dr \end{aligned}$$

si l'on choisit $\varepsilon \leq (1/2C_1\gamma)^\gamma$. Par conséquent, (F.3) implique que $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans H_r^1 et donc $u \in H_r^1 = D(B_\lambda)$. Finalement, il découle de la continuité de $B_\lambda : H_r^1 \to \mathbb{R}$ que $B_\lambda(u_n - u) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $B_\lambda : D(B_\lambda) \subset L_r^2 \to \mathbb{R}$ est bien une forme quadratique fermée. □

Le lemme suivant concerne l'existence et les propriétés principales de l'opérateur $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset L_r^2 \to L_r^2$ mentionné sous (1.41) et justifie l'utilisation du Théorème 14.10 de [52], dans la preuve du Lemme 1.4.9.

Lemme F.2 *Soit $N \geq 2$ et supposons que les hypothèses (H0), (H2) et (H3) sont satisfaites.*

(i) Il existe un unique opérateur auto-adjoint et borné inférieurement, $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset L^2_r \to L^2_r$, qui vérifie (1.41).

(ii) De plus, A_λ est un opérateur de Sturm-Liouville avec conditions de bord séparées, dans le sens défini à la page 61 de [52], et $\inf \sigma_{\text{ess}}(A_\lambda) > 0$ *pour tout $\lambda > 0$.*

Démonstration. La partie (i) découle du Lemme F.1 et du Théorème 2.6, page 323, de [25].

Pour établir (ii), nous allons utiliser la théorie spectrale pour les opérateurs différentiels ordinaires exposée dans [52]. Il s'agit d'étudier les extensions auto-adjointes dans L^2_r de l'expression différentielle formelle

$$\tau(u) = r^{1-N}\{-(r^{N-1}u')' + r^{N-1}[\lambda - Q(r)]u\}, \quad \text{où} \quad Q(r) = p\widetilde{V}(r)\psi^{p-1}(r), \quad 0 < r < \infty.$$

Notez que l'on a ici affaire à une expression différentielle du type 'Sturm-Liouville singulier' (c.f. pp. 7, 43 et 48 de [52]). Suivant la démarche de [52], nous allons associer à τ plusieurs opérateurs différentiels agissant dans L^2_r et nous verrons que l'opérateur A_λ en est une réalisation auto-adjointe qui a les propriétés (ii). Nous commençons par définir l'opérateur $T : D(T) \subset L^2_r \to L^2_r$ par $Tu = \tau(u)$ sur le domaine

$$D(T) = \{u \in L^2_r : u, u' \in AC(0,\infty) \text{ et } \tau(u) \in L^2_r\},$$

où $AC(0,\infty)$ désigne l'espace des fonctions réelles absolument continues sur $(0,\infty)$. Il découle du Théorème 3.10 de [52] que, pour tout $u, v \in D(T)$,

$$[u,v]_\theta \equiv \lim_{r\to\theta} r^{N-1}\{u(r)v'(r) - u'(r)v(r)\}$$

existe et est fini, pour $\theta = 0$ et $\theta = \infty$. Nous pouvons ainsi définir un opérateur $T_0 \subset T$ par

$$D(T_0) = \{u \in D(T) : [u,v]_0 = [u,v]_\infty = 0 \text{ pour tout } v \in D(T)\}$$

et $T_0u = \tau(u)$ pour tout $u \in D(T_0)$. Nous définissons finalement $T_c : D(T_c) \subset L^2_r \to L^2_r$ par $D(T_c) = C_0^\infty(0,\infty)$ et $T_cu = \tau(u)$ pour tout $u \in D(T_c)$. Nous avons donc trois opérateurs $T_c \subset T_0 \subset T$ et il découle des résultats du Chapitre 3 de [52] que T et T_0 sont fermés, que $T_0 = T^*$ et que T_0 est la fermeture de T_c.

Nous montrons maintenant que $T_0 \subset A_\lambda$. Soit $u \in D(T_0)$. Puisque T_0 est la fermeture de T_c, il existe une suite $\{u_n\} \subset D(T_c) = C_0^\infty(0,\infty)$ telle que $u_n \to u$ et $T_cu_n \to T_0u$ dans L^2_r lorsque $n \to \infty$. Alors, intégrant par parties,

$$\begin{aligned} B_\lambda(u_n - u_m) &= \int_0^\infty r^{N-1}\{(u_n' - u_m')^2 + \lambda(u_n - u_m)^2 - Q(r)(u_n - u_m)^2\}dr \\ &= \int_0^\infty r^{N-1}[T_c(u_n - u_m)](u_n - u_m)dr \to 0 \end{aligned}$$

et donc, puisque B_λ est fermée, nous avons que $u \in D(B_\lambda) = H^1_r$ et $B(u_n - u) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En fait, la preuve du Lemme F.1 montre que $u_n \to u$ dans H^1_r, ce qui implique que

$$\beta_\lambda(u,v) = \lim_{n\to\infty} \beta_\lambda(u_n,v) = \lim_{n\to\infty} \langle T_cu_n, v\rangle_{L^2_r} = \langle T_0u, v\rangle_{L^2_r}$$

pour tout $v \in H^1_r$, d'où $u \in D(A_\lambda)$ et $A_\lambda u = T_0u$.

Ainsi $T_0 \subset A_\lambda$ et, par conséquent, le Théorème 5.8 de [52] implique que $T_0 \subset A_\lambda \subset T$. Utilisant les résultats de la Section 2.3 du Chapitre VI de [25], il n'est pas difficile de voir que A_λ est l'extension de Friederichs de T_0. Cependant, une description plus explicite de A_λ peut être donnée par le Théorème 5.8 de [52]. Pour ce faire, nous allons déterminer les indices de défaut de l'opérateur T_0 en utilisant les résultats de l'Annexe C et le Théorème 5.7 de [52]. Les Théorèmes 5.7 et 5.8 de [52] sont des conséquences de l'alternative de Weyl, c.f. Théorème 5.6 de [52].

Rappelons tout d'abord que τ est dit de type *cercle limite* (c.l.) au point $r = 0$ (respectivement $r = \infty$) si, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, toutes les solutions de $\tau(u) = \mu u$ sont 'à gauche' dans L^2_r (respectivement 'à droite' dans L^2_r), dans le sens que $r^{\frac{N-1}{2}} u$ est intégrable dans un voisinage de 0^+ (respectivement dans un voisinage de $+\infty$). Si τ n'est pas de type c.l., τ est dit de type *point limite* (p.l.). Utilisant le Lemme C.1 avec $\mu = 0$, nous voyons que

pour $N = 2, 3$, τ est de type c.l. au point $r = 0$ et de type p.l. au point $r = \infty$,

pour $N \geq 4$, τ est de type p.l. au point $r = 0$ et de type p.l. au point $r = \infty$.

Par conséquent, le Théorème 5.7 de [52] implique que, pour $N \geq 4$, T_0 a les indices de défaut $(0, 0)$ et donc, par le Théorème 5.8, $T_0 = A_\lambda$ est l'unique extension auto-adjointe de T_0. Pour $N = 2, 3$, T_0 a les indices de défaut $(1, 1)$, T_0 n'est pas auto-adjoint et il existe une solution réelle non-triviale w de $\tau(u) = 0$ telle que

$$D(A_\lambda) = \{u \in D(T) : [u, w]_0 = 0\}.$$

Ainsi, pour tout $N \geq 2$, A_λ est un opérateur de Sturm-Liouville avec conditions de bord séparées.

Finalement, le Lemme C.1 implique que l'opérateur $\tau - \mu$ est non-oscillant sur $(0, \infty)$ (dans le sens défini à la page 219 de [52]) pour tout $\mu < \lambda$. Il découle alors du Théorème 14.9 de [52] que $\inf \sigma_{\text{ess}}(A_\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$. $\square$

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti et M. Badiale, *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), no. 6, 1131-1161.

[2] A. Ambrosetti et A. Malchiodi, "Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^n$", Birkhäuser (2006).

[3] H. Berestycki et T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981), no. 9, 489-492.

[4] H. Berestycki et P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I, II*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313-375.

[5] H. Berestycki et P.-L. Lions, *Théorie des points critiques et instabilité des ondes stationnaires pour des équations de Schrödinger non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300** (1985), no. 10, 319-322.

[6] A. De Bouard et R. Fukuizumi, *Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), no. 6, 1157-1177.

[7] T. Cazenave, "Semilinear Schrödinger Equations", Courant Lecture Notes in Mathematics, AMS (2003).

[8] T. Cazenave et P.-L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), no. 4, 549-561.

[9] S. Chatterji, "Cours d'Analyse", Vol. 3, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (1998).

[10] R. Fukuizumi et M. Ohta, *Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), no. 1, 145-158.

[11] F. Genoud et C. A. Stuart, *Schrödinger equations with a spatially decaying nonlinearity : existence and stability of standing waves*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 137-186.

[12] F. Genoud, *Existence and orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, perturbation of a model case*, soumis à J. Differential Equations.

[13] F. Genoud, *A smooth global branch of solutions for a semilinear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, soumis à J. London Math. Soc.

[14] F. Genoud, *Existence and stability of high frequency standing waves for a nonlinear Schrödinger equation*, soumis à Discrete Contin. Dyn. Syst.

[15] F. Genoud, *Bifurcation and stability of TE-modes in nonlinear planar waveguides*, en préparation.

[16] D. Gilbarg et N. S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Second Edition, Springer (1983).

[17] M. Grillakis, J. Shatah et W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160-197.

[18] M. Grillakis, J. Shatah et W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal. **94** (1990), no. 2, 308-348.

[19] H. Hajaiej, *Cases of equality and strict inequality in the extended Hardy-Littlewood inequalities*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **135** (2005), no. 3, 643-661.

[20] H. Hajaiej et C. A. Stuart, *On the variational approach to the stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation*, Adv. Nonlinear Stud. **4** (2004), 469-501.

[21] P. Hartman, “Ordinary Differential Equations”, Birkhaüser (1982).

[22] H. Jeanjean et C. A. Stuart, *Nonlinear eigenvalue problems having an unbounded branch of symmetric bound states*, Adv. Differential Equations **4** (1999), no. 5, 639-670.

[23] L. Jeanjean et S. Le Coz, *An existence and stability result for standing waves of nonlinear Schrödinger equations*, Adv. Differential Equations **11** (2006), no. 7, 813-840.

[24] L. Kantorovitch et G. Akilov, “Analyse fonctionnelle”, Vol. II, Editions Mir (1981).

[25] T. Kato, “Perturbation Theory for Linear Operators”, Springer (1995).

[26] T. Küpper et D. Riemer, *Necessary and sufficient conditions for bifurcation from the continuous spectrum*, Nonlinear Anal. **3** (1979), no. 4, 555-561.

[27] S. Le Coz, *A note on Berestycki-Cazenave's classical instability result for nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[28] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 2, 109-145.

[29] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 4, 223-283.

[30] J. B. McLeod, C. A. Stuart et W. C. Troy, *Stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Differential Integral Equations **16** (2003), no. 9, 1025-1038.

[31] R. J. Magnus, *On the asymptotic properties of solutions to a differential equation in a case of bifurcation without eigenvalues*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **104** (1986), no. 1-2, 137-159.

[32] J. Mossino, “Inégalités Isopérimétriques et Applications en Physique”, Paris, Hermann (1984).

[33] Z. Nehari, *On a class of nonlinear integral equations*, Math. Z. **72** (1959/1960), 175-183.

[34] W.-M. Ni et S. Yotsutani, *Semilinear elliptic equations of Matukuma-type and related topics*, Japan J. Appl. Math. **5** (1988), no. 1, 1-32.

[35] J. Shatah, *Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), no. 3, 313-327.

[36] J. Shatah et W. A. Strauss, *Instability of nonlinear bound states*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), no. 2, 173-190.

[37] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), no. 2, 149-162.

[38] C. A. Stuart, *A variational method for bifurcation problems when the linearisation has no eignevalues*, Atti del 3° S.A.F.A. (1978), Confer. Sem. Mat. Univ. Bari (1979), 157-180.

[39] C. A. Stuart, *Bifurcation pour des problèmes de Dirichlet et de Neumann sans valeurs propres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), no. 16, A761-A764.

[40] C. A. Stuart, *Bifurcation for variational problems when the linearisation has no eigenvalues*, J. Funct. Anal. **38** (1980), no. 2, 169-187.

[41] C. A. Stuart, *Bifurcation for Neumann problems without eigenvalues*, J. Differential Equations **36** (1980), no. 3, 391-407.

[42] C. A. Stuart, *Bifurcation for Dirichlet problems without eigenvalues*, Proc. London Math. Soc. (3) **45** (1982), 169-192.

[43] C. A. Stuart, *A variational approach to bifurcation in L^p on an unbounded symmetrical domain*, Math. Ann. **263** (1983), 51-59.

[44] C. A. Stuart, *A global branch of solutions to a semilinear equation on an unbounded interval*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101** (1985), no. 3-4, 273-282.

[45] C. A. Stuart, *Bifurcation in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for a semilinear elliptic equation*, Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988), no. 3, 511-541.

[46] C. A. Stuart, *Bifurcation of homoclinic orbits and bifurcation from the essential spectrum*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 1145-1171.

[47] C. A. Stuart, *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rational Mech. Anal. **113** (1990), no. 1, 65-96.

[48] C. A. Stuart, *Guidance properties of nonlinear planar waveguides*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** (1993), no. 2, 145-200.

[49] C. A. Stuart, *Uniqueness and stability of ground states for some nonlinear Schrödinger equations*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **8** (2006), no. 2, 399-414.

[50] C. A. Stuart, *Lectures on the orbital stability of standing waves and application to the nonlinear Schrödinger equation*, à paraître dans Milan J. Math.

[51] M. G. Vakhitov et A. A. Kolokolov *Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation*, Radiophys. Quantum Electron., 16 (1973), 783-785.

[52] J. Weidmann, "Spectral Theory of Ordinary Differential Operators", Springer (1987).

[53] E. Yanagida, *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ in R^n*, Arch. Ration. Mech. Anal. **115** (1991), no. 3, 257-274.

Curriculum Vitae

Formation

2005-2008 Thèse de doctorat sous la direction du Prof. C. A. Stuart, EPFL, Lausanne, Suisse.

2005 Diplôme de physicien (MSc, phys. dipl. epf.) sous la supervision du Prof. C.-É. Pfister, EPFL.

2002-2003 Une année d'échange à l'ETH, Zürich, Suisse.

2000-2005 Études en physique à l'EPFL.

Écoles d'été

Dynamique des équations aux dérivées partielles, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Grenoble, France, 20 juin - 8 juillet 2005.

Evolution equations, ETH, Zürich, organisée par le Clay Mathematics Institute, 23 juin - 18 juillet 2008.

Expérience d'enseignement

2005-2008 Assistant à la Section de Mathématiques et à la Section de Physique de l'EPFL pour les cours suivants :

- Analyse III-IV (Prof. C. A. Stuart)
- Analyse fonctionnelle (Prof. C. A. Stuart, B. Buffoni)
- Méthodes mathématiques de la physique (Prof. C.-É. Pfister)

2003 Rédaction des notes du cours Analyse I (Prof. T. S. Ratiu).

2001-2005 Assistant-étudiant pour divers cours en Section de Physique et au Cours de Mathématiques Spéciales (CMS) de l'EPFL :

- Probabilités et statistique (Prof. C.-É. Pfister)
- Mécanique quantique (Prof. C. Gruber)
- Analyse, Géométrie analytique (O. Woringer, CMS)
- Physique générale (G. Burmeister, CMS)

Conférences, Séminaires

Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, séminaire donné dans le groupe de Physique Mathématique, ETH, Zürich, 1er juin 2007.

Comme auditeur :

Spectral theory and mathematical physics, conférence organisée pour les 60 ans de Barry Simon, California Institute of Technology, USA, 27 mars - 31 mars 2006.

Systèmes dynamiques, équations différentielles et applications, 6ième conférence internationale AIMS, Université de Poitiers, France, 25 - 28 juin 2006.

Some topics in nonlinear analysis and applications to partial differential equations, conférence organisée pour les 60 ans de Norman Dancer, Université de Rome La Sapienza, Italie, 29 janvier - 1er février 2007.