

Identification modale numérique-expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites

THÈSE N° 4215 (2008)

PRÉSENTÉE LE 31 OCTOBRE 2008

À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
LABORATOIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET D'ANALYSE DE FIABILITÉ
PROGRAMME DOCTORAL EN MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Marco MATTER

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M.-O. Hongler, président du jury
Prof. T. Gmür, directeur de thèse
Prof. J. F. Dias Rodrigues, rapporteur
Prof. P. Ermanni, rapporteur
Dr A. Schorderet, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2008

A mes parents
A ma soeur

“Ce ne sont pas les idées de la science qui engendrent les passions, ce sont les passions
qui utilisent la science pour soutenir leur cause.”

François Jacob

Remerciements

Je tiens à remercier ici les nombreuses personnes qui m'ont permis d'accomplir ce travail en m'apportant aide, motivation et soutien tout au long de ces quatre années d'efforts. Pour commencer, le Prof. John Botsis, qui m'a accueilli au sein du Laboratoire de mécanique appliquée et d'analyse de fiabilité de l'EPFL.

Je dois sans aucun doute ce travail à la détermination de mon directeur de thèse, le Prof. Thomas Gmür, qui, armé d'une force de persuasion sans faille accompagnée d'arguments finement choisis, a réussi à me convaincre d'entamer cette thèse. Il y serait pourtant difficilement parvenu sans avoir à ses côtés le Dr. Joël Cugnoni, sur qui j'ai toujours pu compter au long de ce projet. Je tiens donc à remercier chaleureusement ces deux personnes pour leurs qualités humaines et scientifiques ainsi que pour leur soutien moral et la confiance qu'ils ont toujours su m'accorder.

Mon travail n'aurait pu être que plus sérieux si je n'avais pas partagé pendant ces années mon bureau avec le Dr. Alain Prenleoup, qui m'a inlassablement évité de divaguer en me ramenant constamment à l'essentiel. Nous avons ainsi pu nous entretenir longuement sur les diverses techniques et sur le matériel le plus adéquat afin de graver les nombreux défis extra-muros que nous nous étions fixés.

Je remercie le Dr. Alain Schorderet, dont la porte était toujours ouverte lorsqu'il m'était nécessaire d'obtenir un avis critique sur ma démarche. Mes remerciements vont également aux membres de l'Atelier de mécanique et de biomécanique, Marc Jeanneret, Nicolas Favre et Stéphane Haldner pour leur disponibilité et leur travail méticuleux, même pour certaines applications à caractère modérément officiel. Je salue également chaleureusement tous les étudiants qui ont contribué à cette thèse par leurs projets de semestre ou de Master.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury, qui ont accepté de faire le déplacement et d'entreprendre la lecture de mon travail pour y apporter une critique fort constructive que j'ai beaucoup appréciée.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, avec qui j'ai passé mon temps libre et partagé certains des meilleurs moments de ces quatre dernières années. Parmi ces personnes, Stéphanie Nguyen mérite tout particulièrement ma reconnaissance pour son soutien, son entrain et sa compréhension.

Résumé

Les matériaux composites appartiennent sans doute à l'une des classes de matériaux les plus étudiées de nos jours. Afin de modéliser le comportement de structures mécaniques réalisées avec ce type de matériaux, il est nécessaire de connaître leurs propriétés constitutives. Cependant, la variété des composites ainsi que leur mise en œuvre – spécifique à chaque application – rendent délicate la connaissance précise de ces dernières. Elles sont usuellement déterminées par comparaison de tests statiques avec un modèle analytique correspondant. Récemment, une nouvelle classe d'essais ne compare plus les tests expérimentaux à un modèle analytique simple mais fait recours à un modèle numérique discret plus complet. Ce dernier n'étant pas inversible, il est dès lors nécessaire de recourir à une procédure itérative d'optimisation afin d'extraire les propriétés constitutives du matériau. Ce type de procédure exige un modèle numérique qui soit en même temps précis et d'exécution rapide, puisque de ce modèle dépendront la précision et la rapidité de la méthode.

Dans ce travail, nous proposons de développer une méthode mixte numérique-expérimentale qui soit capable d'estimer les propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites. Nous choisissons d'étudier les effets dissipatifs intrinsèques à la matière car leur évaluation est nécessaire à la caractérisation complète du comportement vibratoire d'une structure. Au cours de cette étude, nous ne négligeons pas le fait que les propriétés dissipatives des matériaux composites présentent généralement un caractère anisotrope au même titre que leurs propriétés élastiques.

Afin de réaliser cette démarche, nous avons choisi une loi de comportement prenant en compte les effets dissipatifs et intégré celle-ci au sein d'un code d'éléments finis existant. Après avoir étudié les modèles d'amortissement disponibles, nous avons retenu un modèle hystérétique (ou structurel) pour son comportement proche de ce qui a été

observé sur divers échantillons. Nous avons inclus des éléments de coque avec une approximation du déplacement dans l'épaisseur de forme polynomiale d'ordre variable, permettant ainsi de modéliser précisément des structures épaisses. L'association au sein d'un logiciel d'éléments finis d'une loi de comportement dissipative – aboutissant à un problème aux valeurs propres complexe – et d'éléments de coque avec une approximation du déplacement dans l'épaisseur d'ordre variable constitue un nouvel outil performant pour l'analyse modale numérique de structures dissipatives.

Le modèle numérique ainsi développé représente un des éléments clés nécessaires à la création d'une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites. Les autres pôles fondamentaux de cette méthode sont la mesure des propriétés modales de spécimens, l'extraction des données modales à partir des fonctions de réponse en fréquence mesurées ainsi que la routine d'optimisation à proprement parler. Nous avons mis au point une technique de mesure qui utilise l'interférométrie laser de même qu'un système d'excitation – de type acoustique par haut-parleur ou mécanique par pot vibrant – afin d'extraire les fonctions de réponse en fréquence de structures. A partir de ces fonctions de réponse en fréquence, nous extrayons les propriétés modales – fréquences propres, facteurs d'amortissement modal et modes propres complexes – à l'aide d'un logiciel d'analyse modale à plusieurs degrés de liberté. La routine d'identification développée sous Matlab® permet ensuite de faire évoluer le modèle numérique jusqu'à obtenir une réponse simulée proche de la réponse expérimentale en recourant à un algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt utilisant des fonctions d'erreurs spécifiques basées sur les paramètres modaux disponibles.

La procédure ainsi mise au point a été validée numériquement, puis appliquée à plusieurs matériaux en traitant divers exemples expérimentaux. Nous avons vérifié que pour les spécimens de type plaque, les six propriétés élastiques E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , G_{23} et G_{31} s'identifient correctement, avec une erreur variant de 1 à 10% suivant le paramètre en question. En ce qui concerne les propriétés dissipatives, nous avons pu mettre en évidence leur estimation plus délicate que pour les propriétés élastiques correspondantes. Cette difficulté provient avant tout de la mesure des facteurs d'amortissement modal, entachés d'une erreur supérieure à l'estimation des fréquences propres. Cependant, nous obtenons des résultats concluants pour l'identification des tangentes de perte $\tan\delta(E_1)$, $\tan\delta(E_2)$ et $\tan\delta(G_{12})$. Nous avons pu observer que les erreurs résiduelles entre les fréquences propres et les amortissements modaux des modèles expérimental et identifié étaient de l'ordre de 0.2% et 10 % respectivement.

Mots clés

Matériaux composites; identification numérique-expérimentale; propriétés constitutives; tangente de perte; analyse modale; facteur d'amortissement; méthode mixte; amortissement hystérétique, structurel, visqueux.

Abstract

Composite materials undoubtedly belong to one of the most studied classes of materials nowadays. In order to model the behaviour of mechanical structures made of this type of materials, it is necessary to know their constitutive properties. The varieties of composite materials as well as their manufacturing process – almost specific to each application – lead to the difficulty of knowing precisely their mechanical properties. The determination of these properties is usually carried out by static tests compared to analytical models. Recently, a new class of experiments does not compare the experimental results with a simple analytical model any more but uses a more complete discrete numerical model. As the latter is not invertible, it is then necessary to use an iterative optimization procedure to extract the constitutive properties of the material. This type of procedure requires a discrete numerical model which has to be precise while of fast execution, because the model will have a direct influence on the precision and convergence rate of the whole identification method.

In this work, we propose to develop a mixed numerical-experimental method capable of estimating the elastic and dissipative properties of composite materials. The effects of intrinsic dissipation in materials are studied as their evaluation is necessary for the complete vibratory behaviour characterization of a structure. In this study, we take into account the fact that the dissipative properties present an anisotropic character as the elastic properties.

To realize this work, we selected a constitutive law taking into account the dissipative effects and implemented it within an existing finite element code. After studying the available damping models, we retained a hysteretic (or structural) model in order to obtain a behaviour close to what was observed on various samples. We formulated shell elements with a polynomial through-the-thickness displacement approximation

of variable order, allowing to model accurately thick structures. The association within a finite element software of a dissipative behaviour law – leading to a complex eigenvalue problem – and a variable-order shell element constitutes a new useful tool for the numerical modal analysis of dissipative structures.

The numerical model developed represents one of the key elements necessary for the creation of a mixed numerical-experimental method devoted to the identification of the elastic and dissipative properties in composite materials. Other fundamental features of this method are the modal measurements of specimens, the extraction of the modal data from the frequency response functions measured, as well as the optimization routine itself. We developed a measurement technique which is based upon a laser interferometer as well as an excitation system – of acoustic type, by using a loudspeaker, or mechanical type, by using an electrodynamic shaker – to extract the frequency response functions of the structure under investigation. From these functions, we extracted the modal properties – eigenfrequencies, modal damping ratios and complex mode shapes – by means of a modal analysis software using multiple degrees of freedom. The identification routine developed under Matlab® modifies the input parameters of the numerical model until an output close to the experimental data is obtained, by using a Levenberg-Marquardt optimisation algorithm with specific error functions based on the modal parameters.

The procedure has been numerically validated, then applied to several materials through test examples. We verified that for plate-type specimens, the six elastic properties E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , G_{23} and G_{31} are generally correctly identified, with an error from 1 to 10 % depending on the parameter investigated. Regarding the dissipative properties, we highlighted that their estimation is more difficult than the one of the corresponding elastic properties. This resulted mainly from the measure of the modal damping factors, affected by an error larger than the uncertainty on the estimation of the eigenfrequencies. However, we obtained accurate results for the identified loss tangents $\tan\delta(E_1)$, $\tan\delta(E_2)$ and $\tan\delta(G_{12})$. We could demonstrate that the residual error on the eigenfrequencies and the modal damping ratios between the experimental and identified models was of the order of 0.2 % and 10 % respectively.

Keywords

Composite materials; numerical-experimental identification; constitutive properties; loss tangent; modal analysis; damping factor; mixed methods; hysteretic, structural, viscous damping.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1	Motivations et situation	1
1.1.1	La modélisation numérique	1
1.1.2	Les matériaux composites	2
	<i>Les propriétés mécaniques des composites</i>	3
	<i>Les méthodes d'identification inverses</i>	3
1.1.3	L'amortissement dans les composites	4
1.2	Etat de l'art	4
1.2.1	Introduction	4
1.2.2	Méthodes expérimentales	5
1.2.3	Méthodes numériques	5
1.2.4	Méthodes mixtes numériques-expérimentales	7
1.2.5	Résumé et commentaires	9
1.3	Objectifs et démarche	9

Chapitre 2

Modélisation numérique de l'amortissement

2.1	Description générale	11
2.1.1	Types de modèles dissipatifs	12
2.2	Modèle avec amortissement visqueux	13
2.2.1	Dérivation des équations du mouvement	13
	<i>Modèle visqueux en régime harmonique permanent</i>	16

2.2.2	Equation aux valeurs propres	17
2.2.3	Cas particulier: le modèle proportionnel	19
2.2.4	Fonction de réponse en fréquence	22
	<i>Cas particulier de l'amortissement proportionnel</i>	<i>24</i>
2.3	Modèle à amortissement hystérétique	25
2.3.1	Dérivation des équations du mouvement	25
2.3.2	Equation aux valeurs propres	27
	<i>Modèle hystérétique en régime harmonique permanent</i>	<i>28</i>
2.3.3	Fonction de réponse en fréquence	29
2.4	Formulation des éléments finis	30
2.4.1	Éléments finis solides	30
2.4.2	Éléments finis de coque PSDT	32
	<i>Coque ZPST avec terme zig-zag</i>	<i>36</i>
2.4.3	Matrice d'élasticité complexe	37
	<i>Cas hystérétique</i>	<i>37</i>
	<i>Cas visqueux</i>	<i>39</i>
2.5	Intégration de la dissipation dans MAFE	39
2.5.1	Structure de MAFE	40
2.5.2	Résolution du problème aux valeurs propres visqueux	41
2.5.3	Résolution du problème aux valeurs propres hystérétique	42
2.6	Validation et choix d'un modèle d'amortissement	45
2.6.1	Comparaison des deux modèles avec les mesures	45
2.6.2	Comparaison avec la littérature	47
	<i>Plaque en époxy</i>	<i>47</i>
	<i>Plaque en carbone-époxy</i>	<i>48</i>
	<i>Discussion des résultats</i>	<i>49</i>
2.6.3	Comparaison entre modèles solide et coque	49
2.7	Résumé et commentaires	51

Chapitre 3

Mesures modales

3.1	Objectifs	53
3.2	Analyse modale expérimentale	54
3.2.1	Etablissement d'un modèle spatial et temporel	55
3.2.2	Etablissement d'un jeu de fonctions de réponse en fréquence	55
3.2.3	Extraction des paramètres modaux	56
	<i>Fraction rationnelle de polynômes</i>	<i>57</i>
3.3	Système de mesure de réponse sans contact	59
3.3.1	Description	59
3.3.2	Choix du système	59
3.3.3	Spécifications	62
3.3.4	Erreur de mesure	63
3.4	Systèmes d'excitation	64
3.4.1	Types de système d'excitation	64

3.5	Excitation par haut-parleur	65
3.5.1	Matériel utilisé et spécifications	65
3.5.2	Erreur de mesure avec excitation sans contact	66
3.6	Système d'excitation par pot vibrant	68
3.6.1	Description	68
3.6.2	Matériel utilisé	70
3.6.3	Etude et choix du type de tige	70
3.6.4	Erreur de mesure par pot vibrant	72
3.7	Extraction par curve fitting	73
3.7.1	Qualité des paramètres extraits	75
3.8	Résumé et commentaires	77

Chapitre 4

Modélisation numérique des spécimens

4.1	Objectifs	79
4.2	Modèle de plaque pour haut-parleur	80
4.2.1	Modèle en éléments de coque	81
4.2.2	Modèle solide	82
4.3	Modèle de plaque pour excitation par pot vibrant	84
4.3.1	Création d'un modèle	84
4.3.2	Validation numérique	86
	<i>Plaque en éléments solides</i>	88
	<i>Plaque en éléments de coque</i>	89
	<i>Comparaison des résultats</i>	90
4.3.3	Validation expérimentale	90
	<i>Modes de tige</i>	90
	<i>Modes de plaque</i>	92
4.4	Résumé et commentaires	94

Chapitre 5

Procédure d'identification

5.1	Objectifs	97
5.2	Fonctions objectif	98
5.2.1	Description	98
5.2.2	Normes d'erreur	100
	<i>Normes d'erreur basées sur les valeurs propres</i>	100
	<i>Normes d'erreur basées sur les vecteurs propres</i>	101
	<i>Norme globale</i>	104
5.2.3	Validation des normes d'erreur	104
	<i>Cas quasiment isotrope</i>	105
	<i>Cas orthotrope</i>	106
5.3	Procédure d'optimisation	108
5.3.1	Description de la procédure	108

5.3.2	Identification séquentielle	110
5.3.3	Exemples d'identification séquentielle	111
	<i>Amélioration de la convergence du coefficient de Poisson</i>	112
	<i>Amélioration de la robustesse de convergence</i>	115
	<i>Identification des propriétés dissipatives en deux temps</i>	117
5.4	Logiciel d'identification	118
5.4.1	Description du fonctionnement	118
	<i>Définition du modèle de référence (A et B)</i>	118
	<i>Définition du modèle à identifier (C)</i>	119
	<i>Définition de l'espace de paramètres et du gabarit (D et E)</i>	121
	<i>Processus d'optimisation (E, F, G)</i>	121
	<i>Post-traitement (H)</i>	121
5.4.2	Gestion de l'amortissement	122
5.4.3	Gestion de l'excitation par pot vibrant	123
5.5	Validation de la procédure d'identification	123
5.5.1	Identification numérique-numérique	123
5.5.2	Identification numérique-numérique sur un modèle perturbé	126
5.6	Résumé et commentaires	128

Chapitre 6

Validation et exemples

6.1	Objectifs	131
6.2	Méthode de mesure	131
6.2.1	Stratégie d'identification	131
6.2.2	Méthode DMA	132
	<i>Description de la méthode</i>	132
	<i>Configurations de test</i>	133
	<i>Qualité des mesures</i>	135
	<i>Traitement des résultats</i>	136
	<i>Amortissement des mors en flexion bi-encastree</i>	138
6.3	Résultats par type de spécimen	139
6.3.1	Spécimens en PMMA	139
	<i>Description des échantillons</i>	139
	<i>Identification des propriétés</i>	140
	<i>Validation par mesure de type DMA</i>	143
	<i>Comparaison entre les résultats de DMA et d'analyse modale</i>	144
6.3.2	Stratifié en Dyneema	146
	<i>Description du spécimen</i>	146
	<i>Etude de sensibilité</i>	147
	<i>Identification par haut-parleur</i>	148
	<i>Mesure de validation</i>	150
	<i>Identification par pot vibrant</i>	151
	<i>Résultats</i>	151
	<i>Conclusion</i>	153

6.3.3	Stratifié en carbone	153
	<i>Etude de sensibilité</i>	154
	<i>Identification</i>	157
	<i>Modélisation numérique des essais DMA</i>	159
	<i>Mesures DMA</i>	164
	<i>Etude modale en flexion encastrée</i>	166
	<i>Comparaison et analyse des résultats</i>	167
6.4	Constructions de type sandwich	167
6.4.1	Introduction	167
	<i>Cas étudiés</i>	169
	<i>Etude de sensibilité</i>	170
	<i>Modélisation numérique et méthode d'identification</i>	172
	<i>Résultats de l'identification</i>	173
6.5	Résumé et commentaires	177

Chapitre 7

Conclusions

7.1	Synthèse	179
7.2	Performances et limitations	180
7.3	Perspectives	183

Bibliographie

8.1	Publications de l'auteur	185
8.2	Ouvrages de référence	186

Curriculum Vitae

Chapitre 1

Introduction

Ce travail est une contribution à la modélisation des structures composites dissipatives en mécanique vibratoire et à l'identification des propriétés de celles-ci. Dans ce chapitre sont présentés un état de l'art actuel ainsi que les objectifs de ce travail.

1.1 Motivations et situation

1.1.1 La modélisation numérique

Dans le monde de l'ingénierie, les méthodes numériques sont de nos jours très largement utilisées afin de simuler le comportement de structures mécaniques soumises à différents types de contraintes. Le recours à ces modèles se fait dans les étapes de dimensionnement pour leur faculté de prédiction du comportement d'une structure, permettant de la valider avant qu'elle soit produite, mais aussi pour optimiser des structures existantes en permettant d'étudier l'impact de modifications structurelles apportées à un assemblage existant.

De nos jours, les codes de calcul commerciaux recourant à la méthode des éléments finis sont généralement utilisés pour ces applications. Ils disposent d'une librairie de modèles de comportement qui permet de simuler de nombreux cas mettant en jeu différents phénomènes physiques, afin de résoudre des problèmes complexes de sollicitation mécanique impliquant entre autres des effets de température, d'humidité ou de dissipation, le tout à plusieurs échelles de déformation. Un exemple de modélisation numérique est présenté à la figure 1.1, qui montre une étude thermomécanique couplée sur un prototype de capteur modulaire conçu pour l'expérience Atlas au CERN et réalisée par le Département de physique nucléaire et corpusculaire (DPNC) de l'Univer-

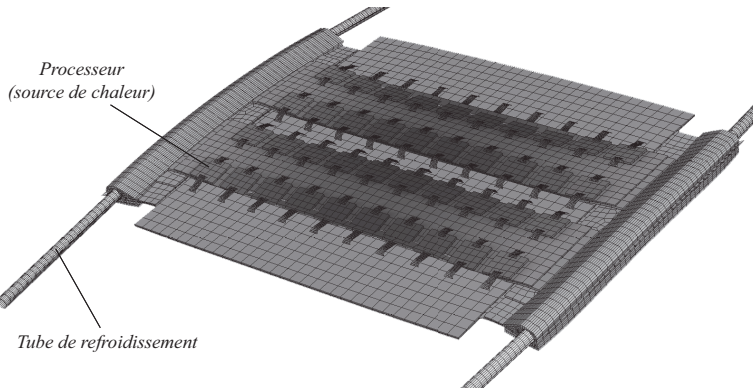


Figure 1.1 Exemple de modélisation numérique: étude thermomécanique couplée d'un capteur pour l'expérience Atlas au CERN, réalisée par le DPNC à l'Université de Genève. Les niveaux de gris indiquent la température.

sité de Genève. Cette étude évalue l'efficacité du refroidissement ainsi que les contraintes et déformations dues aux gradients thermiques dans une structure comportant une dizaine de matériaux différents, pour la majorité anisotropes.

La contrepartie de l'utilisation de modèles de plus en plus sophistiqués est qu'ils nécessitent l'introduction de propriétés de matériau de plus en plus complètes. Ces propriétés ne sont malheureusement pas toujours disponibles et il devient dès lors nécessaire de disposer de méthodes permettant de les mesurer.

1.1.2 Les matériaux composites

Le cas des matériaux composites est représentatif des problèmes auxquels nous pouvons être confrontés lorsqu'il s'agit de définir leurs propriétés constitutives. Cette classe de matériaux porte son nom du fait de leur constitution, les composites étant une association de plusieurs matériaux. La combinaison de différents matériaux permet d'obtenir des propriétés mécaniques globales qui tirent parti des avantages de chaque constituant. Un exemple connu de matériau composite à hautes performances est l'association de fibres en carbone avec une matrice en époxy. Les fibres disposent d'une rigidité et d'une résistance élevées, en partie grâce à leur faible diamètre qui limite le nombre de défauts présents en leur sein. Associées à une matrice époxy, qui permet de lier les fibres entre elles tout en disposant d'une masse volumique faible, elles forment un composite qui possède d'excellentes propriétés dans leur direction tout en gardant une masse réduite. Cet exemple de composite met en évidence la grande différence avec les matériaux isotropes conventionnels: les propriétés varient selon la direction de chargement. Avec des fibres disposées dans une seule direction, le

matériau composite présentera une rigidité élevée dans cette direction, qui peut être de l'ordre de celle de l'acier, mais bien plus faible dans les directions transverses. Cette anisotropie n'est cependant pas un trait commun à tous les matériaux composites. Certains d'entre eux, avec par exemple des renforts sphériques ou à fibres courtes orientées aléatoirement, peuvent être considérés comme macroscopiquement isotropes. A noter encore le fait que les matériaux composites ne sont pas forcément des matériaux synthétiques, à l'image du bois.

L'avantage majeur des composites est qu'ils peuvent être choisis et réalisés sur mesure de manière à fournir un matériau optimal pour une application donnée. Le rapport entre leurs différents constituants peut être modifié et leurs renforts disposés de manière à offrir les propriétés voulues dans une direction spécifique. Cela permet d'obtenir des structures avec des performances relatives à la masse avantageuses, ce qui – malgré un coût plus important que pour les matériaux plus conventionnels – justifie leur emploi abondant majoritairement dans les domaines de haute technologie ou du sport et une utilisation croissante dans le domaine des transports.

Les propriétés mécaniques des composites

Tous les avantages des composites deviennent des points délicats lorsqu'il s'agit de les modéliser. Les codes de calcul permettent de réaliser des modèles de qualité, intégrant des lois de comportement orthotropes voire anisotropes. Cependant, un des problèmes majeurs est qu'il est nécessaire de fournir au logiciel les propriétés du matériau, qui ne sont pas forcément bien connues. Pour un matériau non isotrope, la mesure du jeu de propriétés nécessaire à sa description demande un nombre de tests de caractérisation important. De plus, les matériaux composites ont des propriétés qui varient fortement selon leur méthode de fabrication, ce qui complique encore quelque peu la tâche. Pour pallier ces problèmes, des méthodes d'identification mixte numérique-expérimentale ont été développées qui permettent d'estimer les propriétés élastiques d'un matériau composite à partir d'un nombre réduit d'essais vibratoires.

Les méthodes d'identification inverses

Les essais de caractérisation de matériaux usuels permettent de déduire directement les propriétés constitutives d'un matériau à partir des résultats expérimentaux obtenus sur une éprouvette en utilisant un modèle mathématique analytique de l'expérience. Bien que ce type de caractérisation soit une référence pour la détermination des propriétés constitutives de matériaux, une nouvelle classe d'essais est utilisée de manière croissante. Ce nouveau type de test utilise un modèle numérique discret en lieu et place du modèle analytique. Comme ce modèle n'est pas inversible, l'obtention des propriétés constitutives se fait généralement par une méthode d'optimisation, en mettant à jour les paramètres d'entrée du modèle numérique jusqu'à obtenir un résultat simulé équivalent au résultat expérimental. Cette classe de procédures est connue sous l'appellation de méthodes d'identification inverses.

1.1.3 L'amortissement dans les composites

Si les propriétés constitutives élastiques d'un matériau sont en quelque sorte les propriétés de base nécessaires à une simulation du comportement mécanique d'une structure, il ne faut cependant pas oublier qu'elles permettent uniquement de modéliser le comportement purement élastique de celle-ci, sans prendre en compte d'autres paramètres comme par exemple la température.

Un phénomène intéressant dans les matériaux composites est la dissipation interne d'énergie lorsqu'ils sont soumis à des vibrations ou, en d'autres mots, leur amortissement interne. Il est connu qu'un amortissement interne élevé permet de limiter l'amplitude des vibrations d'une structure lorsqu'elle est sollicitée dynamiquement. Cette dissipation d'énergie peut être intéressante dans certaines applications où un faible niveau de vibrations est désiré. Au contraire, un amortissement faible peut poser problème, soit de confort en générant un niveau de bruit trop important lors de vibrations, soit mécanique en générant des niveaux de déformation exagérés, pouvant mener à la rupture.

Pourtant, malgré l'intérêt évident de pouvoir intégrer les effets dissipatifs dans un modèle d'analyse modale numérique, il faut admettre qu'actuellement la tâche n'est pas aisée. D'une part, les logiciels commerciaux n'offrent pas vraiment un modèle de référence qui soit aussi bien admis comme réaliste que les modèles utilisés pour la modélisation des effets élastiques. D'autre part, la mesure des propriétés dissipatives est loin d'être évidente, comme nous le verrons au cours de ce travail.

1.2 Etat de l'art

1.2.1 Introduction

L'étude du comportement des matériaux viscoélastiques suit en quelque sorte deux écoles, suivant que nous désirons modéliser leur comportement dans des conditions harmoniques ou transitoires. Dans le cas de l'analyse modale, nous sommes plus proches du cas harmonique et sommes confrontés à des taux de déformation relativement élevés. L'état de l'art présenté ici concerne ainsi les méthodes développées pour l'application au domaine de la dynamique des structures.

L'évaluation de l'amortissement interne dans les matériaux composites, parfois simultanément avec les propriétés élastiques, n'est étudiée que récemment. Pourtant, l'estimation de l'amortissement interne des matériaux n'est pas un sujet si moderne, puisqu'en 1927 déjà une étude basée sur des axes en rotation [1] a pu mettre en évidence l'évolution du comportement dissipatif de différents matériaux avec la fréquence. Cette étude montre que le modèle d'amortissement de type visqueux n'est pas à même de simuler correctement l'évolution du comportement des matériaux testés

avec la fréquence et qu'un modèle de type hystérétique donne des résultats plus réalistes.

Basées en général sur des modèles de type hystérétique [2], les recherches sur la caractérisation des paramètres d'amortissement dans les matériaux composites peuvent être divisées en trois catégories: les méthodes purement expérimentales, les procédures purement analytiques ou numériques et les techniques mixtes numériques-expérimentales.

1.2.2 Méthodes expérimentales

A la première classe de méthodes d'identification appartiennent les procédures d'essai où un nombre réduit de coefficients de matériau, incluant trois facteurs de perte indépendants ou plus, sont mesurés directement en utilisant une méthode d'analyse dynamique (DMA – dynamic mechanical analysis) [3] appliquée à divers types de spécimens unidirectionnels ou indirectement en combinant la méthode du décrétement logarithmique [4] ou l'analyse des fonctions de réponse en fréquence [5, 6] avec un modèle macromécanique complémentaire simplifié pour laminés orthotropes. Les résultats obtenus sont alors généralement comparés aux valeurs analytiques publiées ou à des simulations par éléments finis.

La méthode DMA, décrite au paragraphe 6.2.2, permet d'obtenir les facteurs de perte d'un matériau en le soumettant à un essai harmonique et en mesurant le déphasage entre la force appliquée à celui-ci et le déplacement obtenu. Généralement, ces essais sont réalisés sur des éprouvettes de faibles dimensions à l'aide de machines dédiées à cette application disponibles dans le commerce. La méthode du décrétement logarithmique utilise la diminution dans le temps de l'amplitude des vibrations d'un échantillon due à sa dissipation interne afin d'estimer ses propriétés d'amortissement. La valeur du facteur d'amortissement modal obtenue dépendra alors du mode de vibration de la structure étudiée [7].

1.2.3 Méthodes numériques

Les modélisations analytiques de l'amortissement se divisent en deux classes, suivant qu'il soit choisi de décrire l'amortissement par un modèle de type visqueux ou hystérétique.

Si l'amortissement de type visqueux – où les effets dissipatifs sont liés au taux de déformation – est populaire, c'est certainement avant tout pour la possibilité de l'intégrer facilement dans un modèle de comportement modal. Il est en effet possible, en donnant une structure particulière à la matrice d'amortissement, d'aboutir à des formes propres réelles [8] et donc à une base modale identique à celle du cas conservatif. Cette forme d'amortissement construite d'après les matrices de masse et de rigidité est

appelée proportionnelle. Si un développement ultérieur de cette méthode [9] permet d'obtenir un meilleur comportement de l'amortissement avec la fréquence, elle est toutefois généralement admise comme peu réaliste.

Dans les méthodes recourant aux modèles hystérétiques se trouvent les procédures analytiques [10–13] basées sur l'approche de l'énergie de déformation [14] incluant une théorie des laminés classique ou modifiée. Cette technique permet de calculer les facteurs d'amortissement modal en comparant, pour un mode de déformation donné, l'énergie dissipée sur un cycle et l'énergie élastique de déformation de l'éprouvette avec

$$\zeta = \frac{D}{4\pi W} \quad (1.1)$$

où ζ représente le facteur d'amortissement modal, D l'énergie dissipée sur un cycle et W l'énergie totale associée aux vibrations.

Dans ces recherches, les valeurs des facteurs de perte ou de capacité spécifique d'amortissement (SDC – specific damping capacity) sont supposées données (quantités choisies arbitrairement, mesurées séparément ou trouvées dans la littérature). Une analyse de sensibilité des facteurs d'amortissement modal en fonction de l'orientation des fibres et de leur séquence de lamination ou en fonction de quelques paramètres géométriques est évaluée, mais généralement aucune validation par des tests expérimentaux n'est proposée. Dans certaines publications [15, 16], le comportement du modèle proposé est également comparé à des résultats expérimentaux et, dans les études [17, 18], une matrice de rigidité complexe est utilisée et l'amortissement est ainsi dérivé en recourant à l'approche des modules complexes.

Certaines approches [19–21] partent des propriétés des fibres et de la matrice afin d'estimer les propriétés homogénéisées du matériau. Ces propriétés issues d'un modèle micromécanique sont ensuite injectées dans un modèle analytique ou d'éléments finis afin d'estimer le comportement de la structure, les amortissements étant toujours extraits par la méthode basée sur l'énergie de déformation.

Dans plusieurs autres recherches, la solution analytique est remplacée par un modèle mathématique discret dans lequel les facteurs de perte sont à nouveau fixés arbitrairement ou évalués indépendamment par des mesures comme par exemple des tests DMA. Ces modèles numériques pour plaques et coques orthotropes amorties sont généralement dérivés de formulations par éléments finis basées sur les théories de stratifiés à couche unique équivalente (ESL – equivalent single layer) avec un modèle contenant une approximation des déformations en cisaillement du premier ordre [22–26] ou d'ordre supérieur [27], mais d'autres modèles discrets d'éléments finis ou de Rayleigh-Ritz [28–31] ont aussi été étudiés.

Pour ces modèles, un problème aux valeurs propres complexe généralisé est formulé, qui est résolu directement [23, 24, 26, 27] dans le domaine complexe (formes propres complexes) ou indirectement [22, 25, 28, 29] en négligeant les termes d'amortissement (modes propres réels), les facteurs d'amortissement modal étant alors calculés au travers de la méthode de l'énergie de déformation. Les données modales obtenues sont généralement corrélées avec des résultats expérimentaux [22, 25, 29] et/ou d'autres prédictions numériques [25, 27, 29]. Une alternative à la résolution directe du problème aux valeurs propres est la génération des réponses en fréquence [30, 31], qui permet d'utiliser des propriétés de matériau qui sont fonctions de la fréquence.

1.2.4 Méthodes mixtes numériques-expérimentales

La dernière catégorie de procédures d'estimation de l'amortissement pour les matériaux composites contient sans doute les techniques les plus élaborées puisque les méthodes mixtes numériques-expérimentales [32–39] permettent, à partir de mesures modales, l'estimation des facteurs de perte internes et des propriétés élastiques des plaques ou coques orthotropes modélisées par une formulation numérique. Dans ces procédures d'identification, les paramètres modaux expérimentaux (fréquences propres, formes propres et facteurs d'amortissement modal), mesurés sur un spécimen de plaque [32–34] ou de coque [35–36], sont comparés aux prédictions équivalentes extraites d'un modèle de Rayleigh-Ritz [32, 34] ou d'une formulation par éléments finis de plaque ou de coque [33, 35, 36] basée sur une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre [33, 35] ou d'ordre supérieur [36]. Les propriétés de matériau complexes élastiques et dissipatives choisies dans le modèle numérique pour le spécimen étudié sont alors mises à jour par une méthode recourant à l'énergie de déformation sur la base des modes propres non amortis [32, 35] ou itérativement dans une boucle d'optimisation en minimisant un résidu donné entre l'analyse et l'expérience [33, 34, 36]. Récemment, dans une approche similaire [37, 38], les données modales expérimentales ont été remplacées par une mesure optique des champs de déplacement de plaques minces vibrant à fréquence fixe.

La totalité de ces travaux prennent en compte un amortissement de type hystérétique avec une matrice d'élasticité complexe, à quelques exceptions près utilisant un amortissement de type visqueux [37] voire même proportionnel [39]. Cependant, notons que le choix d'un modèle visqueux ou hystérétique n'a que peu d'influence si l'on ne considère qu'une plage de fréquence restreinte [37]. Les modèles employés peuvent être isotropes [37, 38], orthotropes [32, 33, 35] ou encore orthotropes mais issus d'un modèle d'homogénéisation à partir des deux constituants – fibres et matrice – isotropes du composite [34].

Alors que pour les modèles isotropes – définis par deux propriétés constitutives complexes – l'ensemble des propriétés constitutives élastiques et dissipatives sont identifiées, pour les modèles orthotropes la quantité de propriétés évaluées varie d'une

technique à l'autre. La procédure d'identification la plus complète [32] permet de caractériser les quatre propriétés constitutives complexes dans le plan, en se servant d'un modèle où la matrice d'élasticité complexe est construite de manière totalement similaire au cas conservatif, sans négliger les termes hors-diagonaux. Cette méthode fait recours à plusieurs formes de spécimens simultanément – plaque et poutre – afin d'identifier l'ensemble des propriétés constitutives. Elle utilise une mesure de l'amortissement par décrétement logarithmique de trois spécimens de forme bien choisie: deux spécimens de type poutre, de forme élancée à fibres longitudinales ou transverses, et une plaque dont la géométrie respecte la condition

$$\frac{a}{b} = \sqrt[4]{\frac{E_1}{E_2}} \quad (1.2)$$

avec a et b les longueur et largeur de la plaque et E_1 et E_2 les modules de Young de stockage dans les directions de la longueur et de la largeur de la plaque. Dans ces conditions, les trois premiers modes de la plaque auront des formes bien particulières et apparaîtront toujours dans le même ordre. A partir des cinq facteurs d'amortissement modal ainsi obtenus – le premier mode de chaque poutre et les trois premiers modes pour la plaque –, il est possible de résoudre un système de cinq équations et aboutir aux tangentes de perte du matériau. L'utilisation de plusieurs formes de spécimen autorise la mesure du module de Young complexe, puisque celui-ci interviendra dans la rigidité en flexion des spécimens: un seul échantillon ne permet en effet pas de différencier l'effet du module de Young de celui du coefficient de Poisson sur la rigidité en flexion. Notons que cette étude présente une évaluation des erreurs commises sur les paramètres identifiés, mais ne les compare pas avec des valeurs expérimentales indépendantes. Les erreurs sur les tangentes de perte sont estimées entre 1.5 et 17 % pour les deux modules de Young ainsi que pour le module de cisaillement et à plus de 100% pour le coefficient de Poisson.

Dans les autres études, la partie imaginaire de la matrice de rigidité complexe pour un matériau orthotrope est supposée diagonale, ce qui revient à négliger les effets de Poisson sur le comportement dissipatif de la structure [33, 35]. Lorsqu'un modèle d'homogénéisation à partir de constituants isotropes est utilisé, le coefficient de Poisson peut être considéré comme réel [34], les facteurs de perte des modules de Young des constituants étant alors les seules propriétés dissipatives à identifier. Notons que lorsque les facteurs de perte identifiés sont comparés à des tests DMA [33], l'écart se situe entre 3.5 et 70%.

Si ces travaux font parfois une analyse de l'évolution des diverses propriétés constitutives avec la fréquence, ils utilisent toutefois des modèles numériques avec des paramètres d'entrée qui ne varient pas selon la fréquence.

1.2.5 Résumé et commentaires

Bien qu'améliorée dans les publications récentes, la précision des amortissements mesurés ou estimés reste assez moyenne, de l'ordre de 10%. Souvent présentées comme très sensibles à l'amortissement externe (suspension du spécimen, effet de l'air, bruit de mesure, ...), les mesures expérimentales sont d'une qualité perfectible, ce qui a pour conséquence des erreurs sur les valeurs identifiées relativement élevées. Des développements ultérieurs des méthodes d'identification mixtes numériques-expérimentales, spécialement au niveau de la qualité des mesures réalisées, sont donc nécessaires.

En ce qui concerne la modélisation numérique, rares sont les auteurs qui font appel à un code d'éléments finis qui intègre directement les phénomènes dissipatifs. La majorité d'entre eux se servent de la méthode des éléments finis afin d'obtenir les modes conservatifs, puis calculent les amortissements à l'aide d'une méthode basée sur l'énergie de déformation. Une raison majeure à cela est le fait qu'il n'existe à ce jour aucun code d'éléments finis commercial dédié à l'analyse modale qui intègre une modélisation des effets dissipatifs réaliste. Peu de groupes de recherche disposent de leur propre code d'éléments finis, ce qui explique le recours abondant à la méthode utilisant l'énergie de déformation.

De plus, l'amortissement est modélisé d'une manière variable selon les études: il peut être considéré comme visqueux, proportionnel visqueux ou encore structurel ou hystérétique. Souvent, la matrice constitutive de dissipation est considérée d'une manière simplifiée comme diagonale, sans aucun terme de couplage, négligeant ainsi les effets de Poisson dans le comportement dissipatif de la structure.

1.3 Objectifs et démarche

Ce travail est orienté de manière à combler une lacune dans le monde de la modélisation numérique, en cherchant à proposer un modèle de dissipation valide dans le domaine de la mécanique vibratoire ainsi qu'une méthode permettant d'identifier les propriétés dissipatives d'un matériau à partir d'une procédure mixte numérique-expérimentale. Notre travail est orienté de manière à répondre au postulat suivant:

“En utilisant une procédure modale mixte numérique-expérimentale, il est possible d'identifier les propriétés élastiques et dissipatives d'un matériau composite orthotrope.”

Nous avons ainsi recherché un modèle d'amortissement qui puisse simuler correctement les effets dissipatifs au sein de matériaux orthotropes soumis à des vibrations harmoniques, étant convaincus qu'il existe une demande pour le développement d'un code d'éléments finis prenant en considération les effets dissipatifs en analyse modale.

Ce code se doit d'intégrer non seulement des éléments finis dissipatifs solides, mais peut aussi se distinguer en incluant des éléments finis dissipatifs de coques d'ordre élevé. Un tel code constitue évidemment une base fondamentale nous permettant ensuite de mettre sur pieds une méthode mixte numérique-expérimentale performante d'identification des propriétés constitutives dissipatives de matériaux composites.

Cet ouvrage s'articule comme suit. Dans le deuxième chapitre, nous présentons les démarches entreprises afin d'intégrer à un code d'éléments finis existant un nouveau type de solveur ainsi que des éléments finis adaptés afin d'être aptes à simuler le comportement vibratoire des structures en prenant en compte l'amortissement interne des matériaux. Nous nous sommes focalisés sur deux modèles intégrables dans un code d'analyse modale: le modèle avec un amortissement interne proportionnel au taux de déformation, nommé amortissement visqueux, et le modèle hystérétique, dans lequel la matrice de rigidité est complexe. Ces deux modèles ont été implémentés dans notre code d'éléments finis et nous avons comparé leurs résultats avec diverses mesures, pour finalement choisir le modèle hystérétique comme modèle de référence. Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode d'analyse modale expérimentale utilisée. La configuration de notre installation de mesure est discutée et les types d'excitation retenus sont étudiés. Le quatrième chapitre discute de la manière de modéliser de façon optimale les spécimens utilisés dans le cadre de la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale. L'impact de divers paramètres comme le type d'éléments finis ou encore leur taille sur la précision et la rapidité de calcul est mis en évidence. Le cinquième chapitre s'intéresse à la méthode d'identification développée. Dans le sixième chapitre sont exposés plusieurs exemples d'application, avec pour certains cas des validations sous la forme d'essais DMA. Finalement le dernier chapitre fait office de conclusion à ce travail en le mettant en perspective.

Chapitre 2

Modélisation numérique de l'amortissement

L'intégration des propriétés dissipatives au sein d'un processus d'identification modale nécessite de disposer d'un outil de modélisation numérique qui puisse fournir les propriétés modales amorties d'une structure. Ce chapitre a pour but de présenter plusieurs modèles permettant de simuler le comportement structurel dissipatif et de décrire leur intégration dans un logiciel d'éléments finis.

2.1 Description générale

Afin d'incorporer le caractère dissipatif structurel au sein d'une routine d'identification mixte numérique-expérimentale des propriétés élastiques de matériaux, il est nécessaire d'adapter le code d'éléments finis utilisé afin de le rendre capable d'extraire les propriétés modales amorties. Parmi les différentes manières de mener à bien une telle adaptation, notre choix s'est porté sur la résolution directe du problème dissipatif. L'option de résoudre le problème conservatif dans un premier temps puis de travailler dans la base modale afin d'y ajouter les effets dissipatifs dans un deuxième temps a été en effet mise de côté. Ce choix s'est imposé pour deux raisons fondamentales. Premièrement, le problème direct est soluble sans difficulté majeure si l'on reste dans le cadre d'un modèle dissipatif relativement simple, ce qui est recherché en identification de propriétés mécaniques. Deuxièmement, la résolution du problème direct offre l'avantage de l'élégance, puisque les aspects dissipatifs sont traités d'une manière adjointe au problème élastique et ne nécessitent pas de traitement a posteriori.

2.1.1 Types de modèles dissipatifs

La volonté d'inclure les effets dissipatifs dans une simulation du comportement dynamique d'une structure utilisant la méthode des éléments finis revient à poser un problème aux valeurs propres découlant d'un modèle de comportement physique dissipatif. Si la modélisation d'effets dissipatifs se ramène souvent à utiliser des modèles dont la simplicité est diminuée au profit de la volonté de réalisme, la contrainte de vouloir résoudre le problème aux valeurs propres correspondant de manière aisée et rapide impose de se limiter, pour le moins dans le cadre de ce travail, à des modèles garantissant une intégration réalisable dans le code d'éléments finis disponible au LMAF.

Afin de pouvoir intégrer ces aspects dans ce logiciel, il est nécessaire de développer et d'ajouter à ce code :

- de nouvelles formulations d'éléments finis prenant en compte l'amortissement,
- un nouveau solveur permettant de résoudre le problème aux valeurs propres correspondant.

Plusieurs modèles de comportement dissipatifs sont décrits dans la littérature, certains sont même déjà inclus dans des codes d'éléments finis commerciaux, mais tous ne présentent pas le même degré de réalisme. Parmi les modèles les plus courants en mécanique vibratoire, on peut citer :

- l'amortissement de type visqueux,
- l'amortissement visqueux proportionnel ou de Rayleigh,
- l'amortissement hystérétique ou structurel.

Afin d'évaluer ces modèles, il est nécessaire d'établir des critères de choix permettant de comparer leurs qualités. En premier lieu, de manière analogue aux propriétés élastiques, les propriétés dissipatives doivent être spécifiques au matériau : si nous prenons deux structures de géométries différentes construites avec le même matériau, les propriétés constitutives à fournir au modèle – en particulier pour les propriétés d'amortissement – n'ont pas de raison d'être modifiées d'une structure à l'autre pour obtenir un comportement réaliste. Ensuite, le modèle doit évidemment être le plus fidèle possible à la réalité tout en gardant un maximum de simplicité requise par son utilisation destinée. En effet, au vu de l'intégration dans un processus d'identification, l'efficacité de la méthode sera liée au nombre de paramètres du modèle, qu'il est donc souhaitable de limiter.

2.2 Modèle avec amortissement visqueux

Le modèle avec un amortissement de type visqueux suppose que les effets dissipatifs sont proportionnels au taux de déformation ou à la vitesse de déplacement. L'élément mécanique qui correspond le mieux à ce modèle est l'amortisseur hydraulique, dans lequel le laminage de l'huile produit une force proportionnelle à la vitesse du piston et, d'un point de vue extérieur au système, proportionnelle au taux de déformation de l'amortisseur. Nous allons ici dériver les équations du mouvement et le problème aux valeurs propres ainsi que formuler les fonctions de réponse en fréquence pour ce type de modèle [40].

2.2.1 Dérivation des équations du mouvement

Commençons par décrire l'équation d'équilibre d'un solide conservatif Ω

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ dénote le vecteur associé au tenseur des contraintes, \mathbf{f} est le vecteur des forces volumiques et \mathbf{u} représente le vecteur-déplacement d'un point de coordonnées \mathbf{x} , tandis que ρ est la masse volumique, ∇ symbolise l'opérateur de dérivation et t représente le temps.

Nous considérons ici un modèle de type visqueux où les effets dissipatifs sont supposés proportionnels à la vitesse et au taux de déformation du matériau. Dans ce cas, l'amortissement possède une composante liée aux déformations qui interviendra dans la loi de comportement du matériau définissant $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ ainsi qu'une composante liée aux déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Avec un amortissement proportionnel au taux de déformation, la loi de comportement s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}'(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}''(\mathbf{x})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ représente le vecteur associé au tenseur de déformation, \mathbf{C}' est la matrice d'élasticité et \mathbf{C}'' représente la matrice de dissipation. Ce mécanisme d'amortissement correspond au modèle de Kelvin, qui peut être représenté schématiquement pour un cas unidimensionnel comme à la figure 2.1.

La partie de l'amortissement liée aux déplacements, proportionnelle à la vitesse $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, s'écrit sous la forme du vecteur des forces dissipatives

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}'''(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

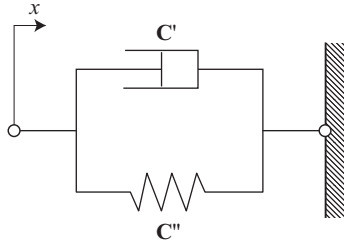


Figure 2.1 Modèle de Kelvin.

avec \mathbf{C}'' la matrice décrivant le comportement visqueux selon les différents axes du repère.

L'équation d'équilibre (2.1) devient alors

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}'''(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

En insérant la relation (2.2) dans l'expression (2.4), nous obtenons, en négligeant les forces volumiques,

$$\nabla^T [\mathbf{C}'(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}''(\mathbf{x})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)] = \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}'''(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

Sous l'hypothèse de linéarité géométrique, la déformation et son taux s'écrivent

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

de sorte que la relation (2.5) devient

$$\nabla^T [\mathbf{C}'(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}''(\mathbf{x})\nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)] - \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{C}'''(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Cette formulation forte est équivalente à la forme intégrale suivante

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \{ \nabla^T [\mathbf{C}'\nabla \mathbf{u} + \mathbf{C}''\nabla \dot{\mathbf{u}}] - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{C}''' \dot{\mathbf{u}} \} d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.9)$$

où $\delta \mathbf{u}$ est le vecteur-déplacement virtuel¹. En intégrant par parties, la formulation (2.9) devient la forme faible

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{C}' \nabla \mathbf{u} + \mathbf{C}'' \nabla \dot{\mathbf{u}}] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T [\mathbf{C}' \nabla \mathbf{u} + \mathbf{C}'' \nabla \dot{\mathbf{u}}] d\partial\Omega \\ - \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{C}''' \mathbf{u} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.10)$$

où \mathbf{N} est l'opérateur des cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface $\partial\Omega$ du corps Ω . En insérant la matrice des fonctions de forme \mathbf{H} pour approcher les déplacements réel et virtuel

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cong \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \\ \delta \mathbf{u} \cong \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où \mathbf{q} et $\delta \mathbf{q}$ sont les vecteurs des déplacements discrets réel et virtuel et l'indice h symbolise le caractère approché, et en supposant la frontière $\partial\Omega$ libre de toute contrainte (conditions aux limites de type libre-libre)

$$\mathbf{N}^T [\mathbf{C}' \nabla \mathbf{u} + \mathbf{C}'' \nabla \dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H} \delta \mathbf{q})^T [\mathbf{C}' \nabla \mathbf{H} \mathbf{q} + \mathbf{C}'' \nabla \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}] d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{H} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{H} \mathbf{q} d\Omega \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{H} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{C}''' \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (2.13)$$

Par la mise en évidence des déplacements virtuels, cette équation devient

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left\{ \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T [\mathbf{C}' \nabla \mathbf{H} \mathbf{q} + \mathbf{C}'' \nabla \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}] d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{q} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{C}''' \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} d\Omega \right\} = 0 \end{aligned} \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (2.14)$$

1. Pour alléger l'écriture, les coordonnées \mathbf{x} et le temps t seront dorénavant omis s'ils ne sont pas nécessaires à la compréhension

Comme cette égalité doit être vérifiée quels que soient les déplacements discrets virtuels, nous arrivons à la forme faible discrète

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T [\mathbf{C}'' \nabla \mathbf{H} \mathbf{q} + \mathbf{C}''' \nabla \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}] d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{C}'''' \mathbf{H} \mathbf{q} d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

En identifiant les matrices globales de rigidité, d'amortissement et de masse comme

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}'' \nabla \mathbf{H} d\Omega \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}''' \nabla \mathbf{H} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{C}'''' \mathbf{H} d\Omega \quad (2.17)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega \quad (2.18)$$

nous aboutissons finalement à la forme matricielle semi-discrète régissant le comportement dynamique en régime libre de la structure à amortissement visqueux

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Si nous supposons que l'amortissement est uniquement dû à la déformation de la structure, ce qui revient à annuler \mathbf{C}'''' , la matrice structurelle d'amortissement s'écrit

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}''' \nabla \mathbf{H} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}''' \mathbf{B} d\Omega \quad (2.20)$$

avec \mathbf{B} la matrice-déformation ($\mathbf{B} = \nabla \mathbf{H}$).

Modèle visqueux en régime harmonique permanent

Étudions la loi de comportement prenant en compte un amortissement de type visqueux pour un système unidimensionnel soumis à des vibrations en régime harmonique permanent.

En supposant une déformation de la forme

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{j\omega t} \quad (2.21)$$

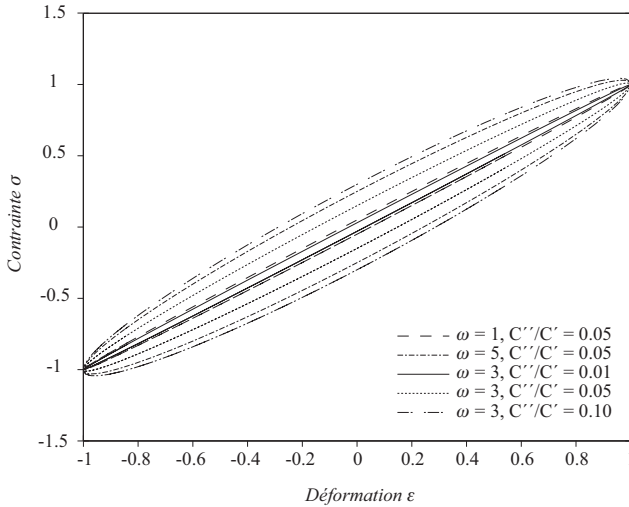


Figure 2.2 Loi de comportement avec amortissement de type visqueux en régime harmonique permanent, valeurs normalisées.

avec $\tilde{\varepsilon}$ la déformation complexe d'amplitude ε et de pulsation ω , la relation (2.2) devient

$$\tilde{\sigma}(t) = C' \tilde{\varepsilon}(t) + j\omega C'' \tilde{\varepsilon}(t) \quad (2.22)$$

Cette relation est représentée dans un diagramme contrainte-déformation à la figure 2.2 pour différentes valeurs de ω et du rapport C''/C' . Nous pouvons remarquer que la courbe contrainte-déformation forme une hystérèse dont l'aire, proportionnelle à l'énergie dissipée, augmente non seulement avec le rapport C''/C' , mais également avec la pulsation ω .

2.2.2 Equation aux valeurs propres

En formulant les déplacements discrets \mathbf{q} sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p} e^{\lambda t} \quad (2.23)$$

où λ est un scalaire et \mathbf{p} est un vecteur de constantes, et en introduisant cette expression dans la relation (2.19), nous arrivons au problème aux valeurs propres suivant

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{D} + \lambda^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

dans lequel λ et \mathbf{p} sont cette fois la valeur propre et le vecteur propre ou la forme modale.

Afin d'être à même de résoudre aisément ce problème aux valeurs propres quadratique de dimension n , il est préférable de le transformer en une forme classique linéaire de taille $2n$. Cette modification est réalisée grâce à la transformation de Duncan par adjonction à la relation (2.19) d'une équation matricielle triviale comme

$$\mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{K}\mathbf{q}(t) \quad (2.25)$$

ce qui conduit à l'expression

$$\mathbf{B}\mathbf{g}(t) - \mathbf{A}\mathbf{g}(t) = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{g} &= \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

où les matrices composites \mathbf{A} et \mathbf{B} d'ordre $2n$ sont symétriques mais non définies strictement positives et la grandeur \mathbf{g} est le vecteur d'état du système.

L'insertion de la solution générale, basée sur (2.23),

$$\mathbf{g}(t) = \{\mathbf{p}e^{\lambda t}, \lambda\mathbf{p}e^{\lambda t}\}^T = e^{\lambda t}\{\mathbf{p}, \lambda\mathbf{p}\}^T \quad (2.28)$$

dans l'expression (2.26) du régime libre permet d'énoncer la forme linéarisée du problème aux valeurs propres généralisé correspondant aux structures dissipatives non tournantes

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

avec

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{p}, \lambda\mathbf{p}\}^T \quad (2.30)$$

où λ et \mathbf{u} forment le couple propre² du problème augmenté de taille $2n$, la valeur propre λ et le sous-vecteur \mathbf{p} de dimension n étant identiques aux grandeurs propres du problème quadratique (2.24).

Dès lors que les matrices augmentées \mathbf{A} et \mathbf{B} sont réelles symétriques mais non définies strictement positives, on montre que pour les systèmes sous-amortis les solutions propres de l'équation matricielle homogène (2.29) consistent en n paires de valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_i = -\alpha_i \pm j\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.31)$$

où les grandeurs positives α_i et ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont respectivement les coefficients modaux d'amortissement et les pulsations propres de la structure, et en n couples de vecteurs propres complexes conjugués \mathbf{u}_i et $\bar{\mathbf{u}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de dimension $2n$, dont les n premières composantes constituent les formes propres \mathbf{p}_i et $\bar{\mathbf{p}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) du système étudié,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B})\mathbf{u}_i &= [(\mathbf{A} - \alpha_i \mathbf{B}) - j\omega_i \mathbf{B}]\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \bar{\lambda}_i \mathbf{B})\bar{\mathbf{u}}_i &= [(\mathbf{A} - \alpha_i \mathbf{B}) + j\omega_i \mathbf{B}]\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

Notons que les grandeurs caractéristiques α_i et ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont liées conventionnellement par les rapports

$$\zeta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.33)$$

où les nombres purs ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont les facteurs d'amortissement modal ou les amortissements relatifs modaux de la structure.

2.2.3 Cas particulier: le modèle proportionnel

Le modèle à amortissement de type proportionnel est un cas particulier du modèle visqueux où la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité. Pour aboutir à ce modèle, nous ne négligeons pas l'amortissement proportionnel à la vitesse de déplacement de la structure et nous choisissons des formes simples pour \mathbf{C}'' et \mathbf{C}''' telles que

$$\mathbf{C}'' = \beta \mathbf{C}' \quad (2.34)$$

$$\mathbf{C}''' = \gamma \quad (2.35)$$

où β et γ sont des constantes.

2. Malgré une notation similaire, le vecteur propre \mathbf{u} ne doit pas être confondu avec le vecteur-déplacement.

Dans ce cas, la matrice d'amortissement vaut

$$\mathbf{D} = \beta \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}' \nabla \mathbf{H} d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega = \beta \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M} \quad (2.36)$$

avec

$$\alpha = \frac{\gamma}{\rho} \quad (2.37)$$

Cette forme particulière de dissipation est aussi appelée amortissement de Rayleigh. Avec ce modèle, on parvient à remplir la condition dite de Caughey [8]

$$\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (2.38)$$

garantissant que les modes vibratoires amortis sont réels (ou dits classiques), ce qui permet de résoudre le problème sans recourir à un solveur aux valeurs propres généralisé complexe. Cet avantage explique pourquoi ce type d'amortissement est souvent inclus dans les codes d'analyse modale par éléments finis commerciaux malgré son faible réalisme.

Avec ces hypothèses, il est aisé d'établir le lien entre α , β et l'amortissement modal c_i de rang i

$$\begin{aligned} c_i &= \mathbf{p}_i^T \mathbf{D} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \mathbf{p}_i \\ &= \alpha \mathbf{p}_i^T \mathbf{M} \mathbf{p}_i + \beta \mathbf{p}_i^T \mathbf{K} \mathbf{p}_i = \alpha m_i + \beta k_i \end{aligned} \quad (2.39)$$

où k_i et m_i sont respectivement les rigidité et masse modales de rang i et \mathbf{p}_i dénote la forme propre de rang i .

Par conséquent, le facteur d'amortissement modal ζ_k de rang k est fonction de la pulsation propre ω_k de rang k

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{c_k}{2m_k \omega_k} = \frac{\alpha m_k}{2m_k \omega_k} + \frac{\beta k_k}{2m_k \omega_k} \\ &= \frac{\alpha}{2\omega_k} + \frac{\beta \omega_k}{2} = \zeta_\alpha + \zeta_\beta \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec $\omega_k^2 = k_k/m_k$.

On remarque qu'avec un amortissement de Rayleigh, l'évolution en fonction de la fréquence du facteur d'amortissement modal est indépendante des masses et rigidités modales. On obtient en effet un facteur ζ_k composé d'un terme proportionnel à ω_k et d'un terme inversement proportionnel à ω_k . Le facteur d'amortissement modal est donc défini uniquement par α , β et la pulsation propre ω_k , la géométrie par exemple n'influençant pas ce facteur. L'allure des facteurs ζ_α , ζ_β et ζ_k en fonction de la fréquence est illustrée à la figure 2.3.

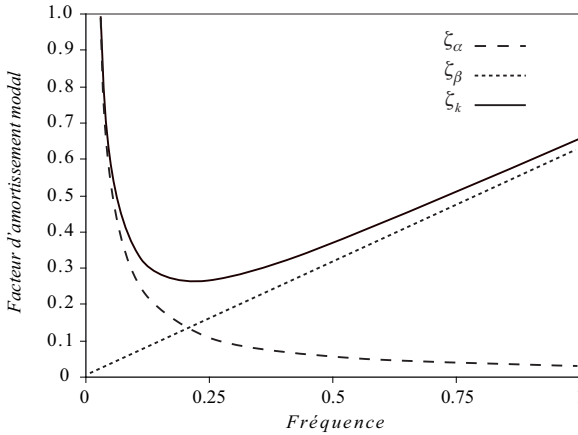


Figure 2.3 Amortissement de Rayleigh. Evolution du facteur d'amortissement modal en fonction de la fréquence, valeurs normalisées.

Il est possible d'étendre cette approche pour arriver à un amortissement proportionnel dit généralisé, où la matrice d'amortissement \mathbf{D} prend la forme [9]

$$\mathbf{D} = \alpha(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{M} + \beta(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K} \tag{2.41}$$

avec $\alpha(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})$ et $\beta(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})$ des fonctions de la fréquence. Les facteurs d'amortissement modaux sont alors donnés par

$$\zeta_k = \frac{\alpha(\omega_k^2)}{2\omega_k} + \frac{\omega_k\beta(\omega_k^2)}{2} \tag{2.42}$$

Compte tenu de la première égalité dans l'expression (2.40), nous trouvons donc, en prenant par exemple $\beta = 0$,

$$\alpha(\omega_k^2) = 2\omega_k \zeta_k = \frac{c_k}{m_k} \quad (2.43)$$

Il devient dès lors possible de trouver des fonctions α et β qui permettent de faire mieux corrélérer les facteurs d'amortissement modal expérimentaux et théoriques que dans le cas strictement proportionnel.

2.2.4 Fonction de réponse en fréquence

Reprenons le système aux valeurs propres augmenté présenté à l'équation (2.29)

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (2.44)$$

Les vecteurs propres de ce système présentent les caractéristiques d'orthogonalité suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} &= \text{diag}[a_1, \dots, a_p, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p, \dots, \bar{a}_n] \\ \mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} &= \text{diag}[b_1, \dots, b_p, \dots, b_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_p, \dots, \bar{b}_n] \end{aligned} \quad (2.45)$$

avec $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \dots, \mathbf{u}_n, \bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_p, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n]$ et où les a_i et b_i sont des constantes complexes, tandis que les valeurs propres s'écrivent

$$\lambda_i = \frac{a_i}{b_i} \quad (2.46)$$

Dans le système augmenté, le vecteur des forces s'écrit

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

où \mathbf{f} est le vecteur des excitations externes.

Par conséquent, pour une excitation harmonique de pulsation ω , nous avons

$$(-\mathbf{A} + j\omega \mathbf{B}) \mathbf{x} e^{j\omega t} = \mathbf{r} e^{j\omega t} \quad (2.48)$$

que nous pouvons expliciter également sous la forme

$$\mathbf{x} = (-\mathbf{A} + j\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r} \quad (2.49)$$

où $\mathbf{H}(\omega)$ est la matrice des fonctions de transfert et \mathbf{x} l'amplitude des oscillations. En pré- et post-multipliant cette matrice par \mathbf{U} et sa transposée

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{H}(\omega) \mathbf{U} &= \mathbf{U}^T (-\mathbf{A} + j\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{U} \\ &= \text{diag} \left[\frac{1}{-a_1 + j\omega b_1}, \dots, \frac{1}{-\bar{a}_n + j\omega \bar{b}_n} \right] \\ &= \text{diag} \left[\frac{1}{b_1(-\lambda_1 + j\omega)}, \dots, \frac{1}{\bar{b}_n(-\bar{\lambda}_n + j\omega)} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \mathbf{U} \text{diag} \left[\frac{1}{b_1(-\lambda_1 + j\omega)}, \dots, \frac{1}{\bar{b}_n(-\bar{\lambda}_n + j\omega)} \right] \mathbf{U}^T \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T}{b_i(-\lambda_i + j\omega)} + \frac{\bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_i^H}{\bar{b}_i(-\bar{\lambda}_i + j\omega)} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si nous désirons extraire une fonction de réponse en fréquence entre deux points r et s de la structure, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} h_{rs}(\omega) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i u_r \cdot i u_s}{b_i(\omega_i \zeta_i + j(\omega - \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \bar{u}_r \cdot i \bar{u}_s}{\bar{b}_i(\omega_i \zeta_i + j(\omega + \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}))} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

en utilisant le fait que $\lambda_i = \omega_i(-\zeta_i + j\sqrt{1 - \zeta_i^2})$. Cette équation peut encore être réduite sous la forme

$$h_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{i u_r \cdot i u_s}{b_i} R_i(\omega) + \frac{i \bar{u}_r \cdot i \bar{u}_s}{\bar{b}_i} S_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega \omega_i} \quad (2.53)$$

avec les coefficients $R_i(\omega)$ et $S_i(\omega)$ définis comme

$$\begin{aligned} R_i(\omega) &= \omega_i \zeta_i + j(\omega + \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}) \\ S_i(\omega) &= \omega_i \zeta_i + j(\omega - \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Cas particulier de l'amortissement proportionnel

Si nous considérons un amortissement proportionnel, l'équation de la fonction de transfert se ramène à une forme beaucoup plus simple. En effet, dans le cas d'un amortissement proportionnel, nous pouvons écrire que

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{D} \mathbf{p}_i = \frac{c_i}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.55)$$

avec m_i et c_i les masse et amortissement modaux de rang i et \mathbf{p}_i le i -ème vecteur propre du système, normé par rapport à la matrice de masse \mathbf{M} .

En partant de l'équation (2.19) et en effectuant la transformation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x} e^{j\omega t} \\ \dot{\mathbf{q}} &= j\omega \mathbf{x} e^{j\omega t} \\ \ddot{\mathbf{q}} &= -\omega^2 \mathbf{x} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.56)$$

nous obtenons l'équation

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}]\mathbf{x} e^{j\omega t} = \mathbf{f} e^{j\omega t} \quad (2.57)$$

avec \mathbf{f} représentant la force d'excitation. Par conséquent, la fonction de transfert $\mathbf{H}(\omega)$ peut s'obtenir directement de la relation suivante

$$\mathbf{x} = [-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f} \quad (2.58)$$

En pré- et post-multipliant $\mathbf{H}(\omega)$ par la matrice des formes propres (normalisées par rapport à la masse) et sa transposée

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \mathbf{H}(\omega) \mathbf{P} &= \mathbf{P}^T [-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{P} \\ &= \text{diag} \left(\frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{c_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_1}}, \dots, \frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{c_n}{m_n} + \frac{k_n}{m_n}} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n]$, il vient

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{P} \text{diag} \left(\frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{c_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_1}}, \dots, \frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{c_n}{m_n} + \frac{k_n}{m_n}} \right) \mathbf{P}^T$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T}{-\omega^2 + j\omega \frac{c_i}{m_i} + \frac{k_i}{m_i}}$$
(2.60)

L'élément rs de la matrice $\mathbf{H}(\omega)$ a alors pour expression

$$h_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{p_r^i p_s^i}{-\omega^2 + j\omega 2\zeta_i \omega_i + \omega_i^2}$$
(2.61)

avec, rappelons-le,

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$$
(2.62)

et

$$\zeta_i = \frac{c_i}{2\omega_i m_i}$$
(2.63)

2.3 Modèle à amortissement hystérétique

2.3.1 Dérivation des équations du mouvement

Le modèle hystérétique – appelé aussi structurel [41] – permet d'avoir une description réaliste dans le cas où la structure est sujette à des vibrations de type harmonique. Selon ce modèle, la loi de comportement s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{C}'(\mathbf{x}) + j\mathbf{C}''(\mathbf{x})] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$$
(2.64)

avec $\tilde{\mathbf{C}}$ la matrice d'élasticité complexe définie comme

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}' + j\mathbf{C}''$$
(2.65)

la matrice d'élasticité \mathbf{C}' et la matrice de dissipation \mathbf{C}'' formant les parties réelle et imaginaire de la matrice d'élasticité complexe. La matrice de dissipation du cas hysté-

rétiq ue n'est pas identiq ue à celle du cas visqueux (§ 2.2.1); ses éléments n'ont par ailleurs pas la même unité, puisque dans le cas visqueux nous avons des unités de viscosité, alors que dans le cas hystérétique les éléments de la matrice de dissipation sont exprimés en unités de contrainte.

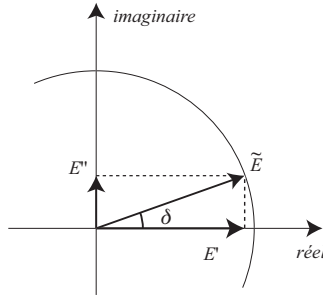


Figure 2.4 Représentation du module de Young complexe dans le plan complexe.

Si nous considérons un problème unidimensionnel, le modèle hystérétique revient à affirmer que lorsqu'on impose une contrainte harmonique σ , la déformation ε aura une fréquence identique à la contrainte mais sera déphasée d'un angle δ . Pour ce cas monodimensionnel, la loi de comportement se ramène alors à

$$\sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon = (E' + jE'')\varepsilon = E'(1 + j \tan \delta(\tilde{E}))\varepsilon \quad (2.66)$$

avec \tilde{E} le module de Young complexe, formé de sa partie réelle ou module de stockage E' et de sa partie imaginaire ou module de perte E'' . La tangente de perte du module de Young $\tan \delta(\tilde{E})$ définie comme le rapport suivant

$$\tan \delta(\tilde{E}) = \frac{E''}{E'} \quad (2.67)$$

est une mesure de l'amortissement du matériau, comme l'illustre à la figure 2.4 le module de Young complexe représenté dans le plan complexe³.

Selon une démarche analogue à celle développée au paragraphe 2.2.1, nous aboutissons à la forme matricielle semi-discrète suivante, régissant le comportement dynamique en régime libre de la structure à amortissement hystérétique,

$$\mathbf{M}\mathbf{q}(t) + (\mathbf{K}' + j\mathbf{K}'')\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

3. Dans la suite du texte, les tildes placés sur les propriétés constitutives complexes seront généralement omises lorsque cela ne prête pas à confusion.

où la matrice de masse est identique à celle de la relation (2.18), mais où les matrices de rigidité de stockage \mathbf{K}' et de perte \mathbf{K}'' s'écrivent

$$\mathbf{K}' = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}' \nabla \mathbf{H} d\Omega \quad (2.69)$$

$$\mathbf{K}'' = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{H}^T \mathbf{C}'' \nabla \mathbf{H} d\Omega \quad (2.70)$$

2.3.2 Equation aux valeurs propres

En recherchant pour le vecteur des déplacements discrets \mathbf{q} des solutions cette fois de la forme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p} e^{j\lambda t} \quad (2.71)$$

le problème aux valeurs propres associé aux vibrations libres de la structure avec amortissement interne a pour expression

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}' + j\mathbf{K}'') \mathbf{p} = (-\lambda^2 \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

Dans cette équation, la quantité $\tilde{\mathbf{K}}$ est la matrice de rigidité complexe formée des parties réelle \mathbf{K}' et imaginaire \mathbf{K}'' . Le problème étant linéaire, il n'est pas nécessaire de revenir à la transformation de Duncan. En vertu de la nature de l'amortissement, les solutions restent cependant complexes et consistent en n paires de valeurs propres complexes conjuguées λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et en n couples de vecteurs propres complexes conjugués \mathbf{p}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de dimension n . Chaque valeur propre prend la forme

$$\lambda_i^2 = \omega_i^2 (1 + j\eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.73)$$

où ω_i et η_i sont la pulsation propre et le facteur d'amortissement modal pour le i -ème mode.

A ce stade, comparons l'écriture des valeurs propres pour les deux types d'amortissement. Pour le modèle hystérétique, nous avons supposé une solution de la forme (2.71), ce qui permet d'explicitier les valeurs propres sous la forme (2.73). Il a été vu précédemment que pour un problème de type visqueux, il est courant de choisir des solutions de la forme (2.23) pour aboutir à l'allure (2.31) des valeurs propres. Dans les deux cas, la valeur propre obtenue est complexe et, en comparant les formes des parties exponentielles de (2.23) et de (2.71) avec l'indice i omis, l'égalité

$$j\lambda_c = \lambda_v \quad (2.74)$$

devrait être respectée, l'indice v ou c rappelant le caractère visqueux ou hystérétique de l'amortissement. Cette comparaison se justifie par le fait qu'il devrait être possible de chercher des solutions de la forme (2.73) à l'équation du comportement dynamique avec un amortissement visqueux (2.19) ou, réciproquement, des solutions de la forme (2.23) à l'équation (2.68). Il s'ensuit que

$$-\lambda_c^2 = \lambda_v^2 \quad (2.75)$$

Or, d'après les égalités (2.31) et (2.73), nous pouvons écrire

$$\lambda_v^2 = (-\alpha + j\omega)^2 = \alpha^2 - \omega^2 - 2j\alpha\omega \quad (2.76)$$

$$\lambda_c^2 = \omega^2(1 + j\eta) = \omega^2 + j\eta\omega^2 \quad (2.77)$$

En supposant α petit face à ω , la relation (2.33) devient

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cong \frac{\alpha}{\omega} \quad (2.78)$$

de sorte que l'expression (2.76) prend la forme

$$\lambda_v^2 \cong -\omega^2 - 2j\zeta\omega^2 \quad (2.79)$$

Par conséquent, la comparaison des formes (2.77) et (2.79) permet d'affirmer que, pour des amortissements faibles, l'égalité (2.74) est vérifiée avec

$$\eta = 2\zeta \quad (2.80)$$

Modèle hystérétique en régime harmonique permanent

Étudions la loi de comportement prenant en compte un amortissement de type hystérétique pour un système unidimensionnel soumis à des vibrations en régime harmonique permanent.

En supposant une déformation de la forme

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{j\omega t} \quad (2.81)$$

avec $\tilde{\varepsilon}$ la déformation complexe d'amplitude ε et de pulsation ω , la relation (2.64) devient

$$\tilde{\sigma}(t) = C' \tilde{\varepsilon}(t) + jC'' \tilde{\varepsilon}(t) \quad (2.82)$$

Cette relation est représentée dans un diagramme contrainte-déformation à la figure 2.5 pour différentes valeurs du rapport C''/C' . Nous pouvons remarquer que la courbe contrainte-déformation forme une hystérèse dont l'aire, proportionnelle à l'énergie dissipée, augmente avec le rapport C''/C' , mais est indépendante de la pulsation ω . L'indépendance des effets dissipatifs avec la fréquence constitue la différence majeure entre les modèles de comportement à amortissement visqueux et hystérétique. Les deux modèles ont une réponse identique lorsque la pulsation ω est égale à 1.

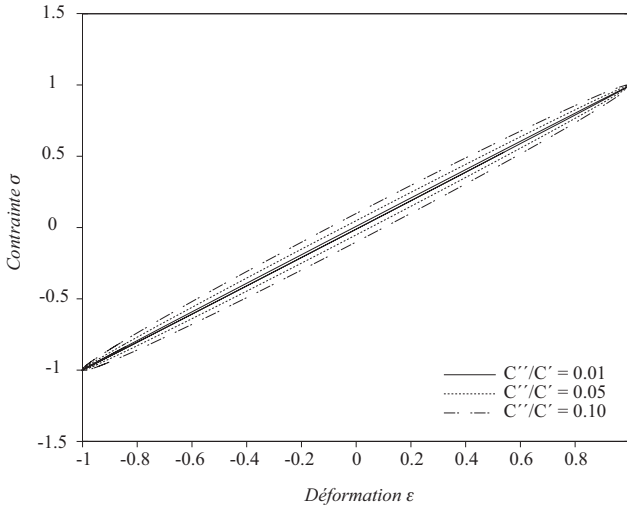


Figure 2.5 Loi de comportement avec amortissement de type hystérétique en régime harmonique permanent, valeurs normalisées.

2.3.3 Fonction de réponse en fréquence

Selon le modèle hystérétique, en partant de l'équation (2.68) avec second membre et en effectuant la transformation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x} e^{j\omega t} \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\omega^2 \mathbf{x} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.83)$$

nous obtenons l'équation

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}' + j\mathbf{K}'']\mathbf{x}e^{j\omega t} = \mathbf{f}e^{j\omega t} \quad (2.84)$$

avec \mathbf{f} représentant la force d'excitation. La fonction de transfert $\mathbf{H}(\omega)$ peut donc être directement tirée de l'expression

$$\mathbf{x} = [-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}' + j\mathbf{K}'']^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{f} \quad (2.85)$$

En pré- et post-multipliant la fonction de transfert par la matrice des formes propres normalisées par rapport à la masse et par sa transposée

$$\mathbf{P}^T[-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}' + j\mathbf{K}'']^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{H}(\omega) \mathbf{P} \quad (2.86)$$

nous pouvons écrire

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{P} \text{diag} \left[\frac{1}{-\omega^2 + \lambda_1^2}, \dots, \frac{1}{-\omega^2 + \lambda_n^2} \right] \mathbf{P}^T = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^T}{-\omega^2 + \lambda_i^2} \quad (2.87)$$

A ce point, il est possible d'extraire la fonction de transfert entre les points r et s du modèle

$$h_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{P_r^i P_s^i}{\omega_i^2 - \omega^2 + j\eta_i \omega_i^2} \quad (2.88)$$

où l'égalité (2.73) a été prise en compte.

2.4 Formulation des éléments finis

2.4.1 Éléments finis solides

Les éléments finis solides constituent les éléments les plus utilisés dans la modélisation de systèmes continus. Leur formulation sert également de base à partir de laquelle les éléments de coque sont engendrés. Pour ce type d'élément, représenté à la figure 2.6, le champ de déplacement approché s'écrit

$$\mathbf{u}^e(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^{e_n} a_i^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{q}_i^e(t) \quad (2.89)$$

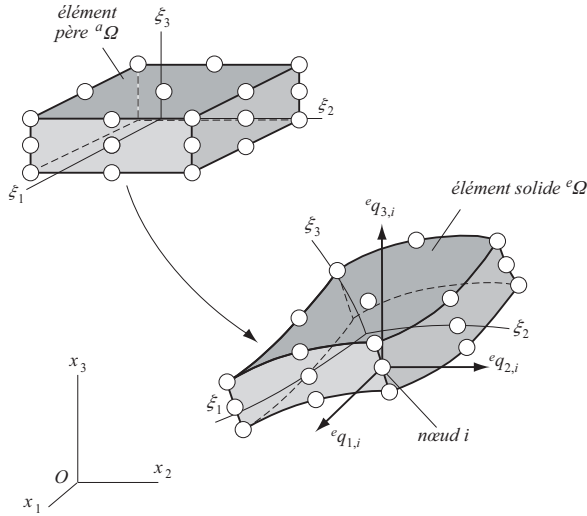


Figure 2.6 Transformation de l'élément père à l'élément déformé solide quadratique à 27 nœuds.

avec ${}^e\mathbf{u}^h$ le vecteur-déplacement généralisé pour l'élément solide ${}^e\Omega$ et ${}^a h_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$) la i -ème fonction de forme de l'élément père ${}^a\Omega$, tandis que $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dénote le vecteur des coordonnées naturelles et t représente le temps. A chaque nœud i ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$) de cet élément fini correspondent ainsi 3 degrés de liberté, qui représentent les translations selon les trois axes du système de coordonnées global et sont stockés dans le vecteur ${}^e\mathbf{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$). L'équation (2.89) peut être écrite de manière compacte comme

$${}^e\mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^{{}^e n} {}^a\mathbf{H}_i(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}_i(t) = {}^a\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}(t) \quad (2.90)$$

en faisant intervenir le vecteur ${}^e\mathbf{q}$ groupant tous les degrés de liberté et la matrice des fonctions de base ${}^a\mathbf{H}$ de l'élément père associé, formée des blocs ${}^a\mathbf{H}_i$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$), avec

$${}^a\mathbf{H}_i = {}^a h_i \mathbf{I} \quad (2.91)$$

où \mathbf{I} représente la matrice-identité d'ordre trois.

La matrice élémentaire de masse s'écrit alors

$${}^e\mathbf{M} = \int_{{}^a\Omega} {}^e\rho {}^a\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} {}^e_j d\Omega \quad (2.92)$$

où ${}^a d\Omega$ représente l'élément infinitésimal de volume dans l'élément père ${}^a\Omega$, ${}^e\rho$ dénote la masse volumique et e_j représente le Jacobien de la transformation de coordonnées de l'élément père ${}^a\Omega$ au e -ème élément ${}^e\Omega$.

Avec un modèle d'amortissement structural hystérétique, les matrices élémentaires de rigidité de stockage et de perte \mathbf{K}' et \mathbf{K}'' forment respectivement les parties réelle et imaginaire de la matrice de rigidité complexe $\tilde{\mathbf{K}}$ et sont construites comme, conformément aux équations (2.69) et (2.70),

$${}^e\mathbf{K}' = \int_{{}^a\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}' {}^e\mathbf{B} {}^e_j d\Omega \quad (2.93)$$

$${}^e\mathbf{K}'' = \int_{{}^a\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}'' {}^e\mathbf{B} {}^e_j d\Omega \quad (2.94)$$

où ${}^e\mathbf{C}'$ et ${}^e\mathbf{C}''$ constituent les matrices globales de stockage et de perte, alors que ${}^e\mathbf{B} = \nabla^a\mathbf{H}$ est la matrice-déformation, ∇ étant l'opérateur de dérivation spatiale. Lorsque le modèle considéré est visqueux, les matrices ${}^e\mathbf{C}'$ et ${}^e\mathbf{C}''$ sont les matrices de comportement élastique et dissipatif qui permettent de construire les matrices de rigidité \mathbf{K} et d'amortissement \mathbf{D} comme

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^a\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}' {}^e\mathbf{B} {}^e_j d\Omega \quad (2.95)$$

$${}^e\mathbf{D} = \int_{{}^a\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}'' {}^e\mathbf{B} {}^e_j d\Omega \quad (2.96)$$

en accord avec (2.16) et (2.20).

2.4.2 Éléments finis de coque PSDT

De nombreux éléments finis de coque ont été proposés pour la modélisation de structures minces à épaisses, isotropes ou anisotropes. Notre choix s'est porté ici sur les éléments finis de coque d'ordre p , qui constituent une généralisation des éléments ESL

bien connus de type C^0 basés sur des théories de déformation en cisaillement transverse du premier ordre (FSDT – first order shear deformation theory) ou du troisième ordre (HSDT – higher order shear deformation theory). Développée au LMAF dans le cadre d'une thèse antérieure [42], la formulation des éléments finis de coque d'ordre p est basée sur l'approximation du champ de déplacement suivante

$${}^e \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^{e_n} \left(a h_i(\xi_1, \xi_2) \sum_{j=0}^p \frac{\xi_3^j}{j!} \mathbf{q}_i^{(j)}(t) \right) \quad (2.97)$$

où ${}^e \mathbf{u}^h$ est le vecteur-déplacement généralisé pour l'élément de coque ${}^e \Omega$ (figure 2.7), $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dénote le vecteur des coordonnées naturelles et t représente le temps. Dans cette série polynomiale, $a h_i(\xi_1, \xi_2)$ ($i = 1, 2, \dots, e_n$) est la i -ème fonction de forme polynomiale de l'élément père ${}^a \Omega$, alors que e_n représente le nombre total de nœuds sur le plan moyen de l'élément. Les inconnues nodales, contenues dans les vecteurs $\mathbf{q}_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, e_n; j = 0, 1, \dots, p$), sont les j -èmes dérivées de l'approximation du déplacement en fonction de la coordonnée locale selon l'épaisseur de la coque ξ_3 . Chaque nœud est par conséquent caractérisé par $3(p + 1)$ degrés de liberté, les trois premiers étant les déplacements au nœud et les suivants représentant les dérivées normalisées du p -ème ordre (tous les degrés de liberté sont mesurés dans le système de coordonnées global).

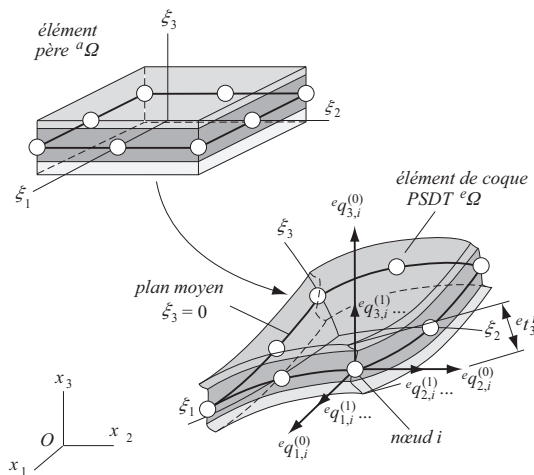


Figure 2.7 Transformation de l'élément père à l'élément déformé de coque PSDT à 9 nœuds.

L'avantage d'une telle formulation réside dans le fait que l'ordre de l'approximation du déplacement transverse est adaptable à la précision souhaitée. On relèvera par

ailleurs que la formulation PSDT englobe toutes les principales modélisations ESL de type C^0 des coques, y compris l'approche FSDT ($p = 1$) et HSDT ($p = 3$), de sorte qu'elle peut être qualifiée de hiérarchique. De plus, le déplacement choisi s'accommode de plaques et coques d'épaisseur relativement importante pour lesquelles une déformation transverse constante est trop imprécise, même en présence d'un facteur approprié de correction du cisaillement [43].

Il est intéressant de noter que l'épaisseur élémentaire ${}^e t_3^i$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$) au point nodal i est implicitement comprise dans les inconnues, mais qu'elle est normalisée, pour des raisons de stabilité numérique, selon la coordonnée dans l'épaisseur $\xi_3 = [-1, +1]$ comme

$${}^e \mathbf{q}_i^{(j)} = \left(\frac{{}^e t_3^i}{2} \right)^j {}^e \mathbf{p}_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, {}^e n; j = 0, 1, \dots, p) \quad (2.98)$$

où les quantités ${}^e \mathbf{p}_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n; j = 0, 1, \dots, p$) sont les j -èmes dérivées de l'approximation du déplacement selon la coordonnée globale dans l'épaisseur de la coque $\chi_3 = [-{}^e t_3^i/2, {}^e t_3^i/2]$ au nœud i .

En collectant les degrés de liberté par nœud dans les vecteurs ${}^e \mathbf{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$), l'équation (2.97) peut être écrite sous la forme compacte

$${}^e \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^{{}^e n} {}^a \mathbf{H}_i(\boldsymbol{\xi}) {}^e \mathbf{q}_i(t) = {}^a \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) {}^e \mathbf{q}(t) \quad (2.99)$$

dans laquelle ${}^a \mathbf{H}$ est la matrice d'interpolation contenant les ${}^e n$ sous-matrices ${}^a \mathbf{H}_i$ ($i = 1, 2, \dots, {}^e n$)

$${}^a \mathbf{H}_i = {}^a h_i \left[\mathbf{I}, \xi_3 \mathbf{I}, \frac{\xi_3^2}{2} \mathbf{I}, \dots, \frac{\xi_3^p}{p!} \mathbf{I} \right] \quad (2.100)$$

où \mathbf{I} représente la matrice-identité d'ordre trois.

Lorsque nous considérons un modèle de stratifié à couche équivalente unique (ESL), la matrice de masse structurelle ${}^e \mathbf{M}$ d'un élément de coque PSDT stratifié composé de ${}^e m$ couches (comme illustré à la figure 2.7) est assemblée de manière classique comme

$${}^e \mathbf{M} = \sum_{k=1}^{{}^e m} \int_{{}^a \Omega_k} {}^e \rho_k {}^a \mathbf{H}^T {}^a \mathbf{H} {}^e d\Omega_k \quad (2.101)$$

où ${}^a\Omega_k$ est l'image, dans l'élément père ${}^a\Omega$, de la k -ème couche dans le e -ème élément ${}^e\Omega$. ${}^e\rho_k$ dénote la masse volumique de la k -ème couche et eJ représente le Jacobien de la transformation de coordonnées de l'élément père au e -ème élément.

Lorsque nous considérons un modèle d'amortissement structural hystérétique, les matrices élémentaires de rigidité de stockage et de perte ${}^e\mathbf{K}'$ et ${}^e\mathbf{K}''$ sont construites comme

$${}^e\mathbf{K}' = \sum_{k=1}^m \int_{{}^a\Omega_k} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}'_k {}^e\mathbf{B} {}^eJ {}^a d\Omega_k \quad (2.102)$$

$${}^e\mathbf{K}'' = \sum_{k=1}^m \int_{{}^a\Omega_k} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}''_k {}^e\mathbf{B} {}^eJ {}^a d\Omega_k \quad (2.103)$$

où ${}^e\mathbf{C}'_k$ et ${}^e\mathbf{C}''_k$ constituent les matrices globales de stockage et de perte pour la k -ème couche, alors que ${}^e\mathbf{B} = \nabla^a \mathbf{H}$ est la matrice-déformation, ∇ étant l'opérateur de dérivation spatiale. Pour le cas visqueux, les matrices ${}^e\mathbf{K}$ et ${}^e\mathbf{D}$ sont construites de manière analogue à ${}^e\mathbf{K}'$ et ${}^e\mathbf{K}''$ en utilisant les matrices ${}^e\mathbf{C}'_k$ et ${}^e\mathbf{C}''_k$ adéquates.

Il est intéressant de relever que les matrices de rigidité de stockage et de perte sont écrites dans le repère global et, par conséquent, il est nécessaire de les aligner avec le repère local de l'élément de coque en effectuant la transformation

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{C}'_k &= {}^e\mathbf{Q}^T {}^e\bar{\mathbf{C}}'_k {}^e\mathbf{Q} \\ {}^e\mathbf{C}''_k &= {}^e\mathbf{Q}^T {}^e\bar{\mathbf{C}}''_k {}^e\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.104)$$

avec ${}^e\bar{\mathbf{C}}'_k$ et ${}^e\bar{\mathbf{C}}''_k$ les matrices locales de stockage et de perte pour la k -ème couche exprimées dans le repère local et ${}^e\mathbf{Q}$ la matrice orthogonale 6x6 permettant de passer de la loi de comportement du repère global à celle du repère local. Les matrices locales de stockage et de perte peuvent encore être exprimées selon les propriétés constitutives des couches du laminé avec

$$\begin{aligned} {}^e\bar{\mathbf{C}}'_k &= {}^e\mathbf{T}_k^T {}^e\mathbf{E}'_k {}^e\mathbf{T}_k \\ {}^e\bar{\mathbf{C}}''_k &= {}^e\mathbf{T}_k^T {}^e\mathbf{E}''_k {}^e\mathbf{T}_k \end{aligned} \quad (2.105)$$

où la matrice de transformation ${}^e\mathbf{T}_k$ permet d'aligner le système de coordonnées local de coque avec le système de référence (repère matériel) de la k -ème couche dont l'orientation diffère à cause de l'angle de stratification de la couche et ${}^e\mathbf{E}'_k$ et ${}^e\mathbf{E}''_k$

sont les matrices de stockage et de perte écrites dans le système de coordonnées du matériau.

Coque ZPST avec terme zig-zag

Lorsque le composite que nous cherchons à modéliser est constitué d'un empilement de couches dont les propriétés varient fortement d'une couche à l'autre, comme dans les structures de type sandwich, nous pouvons observer que l'allure de l'évolution des déplacements selon l'épaisseur de la coque tend vers une forme en dents de scie, que nous appelons ici «effet zig-zag».

Nous avons ainsi étendu la formulation PSDT développée précédemment pour aboutir à la formulation notée ZPST intégrant l'effet zig-zag (ZZ), comme illustré à la figure 2.8 [44].

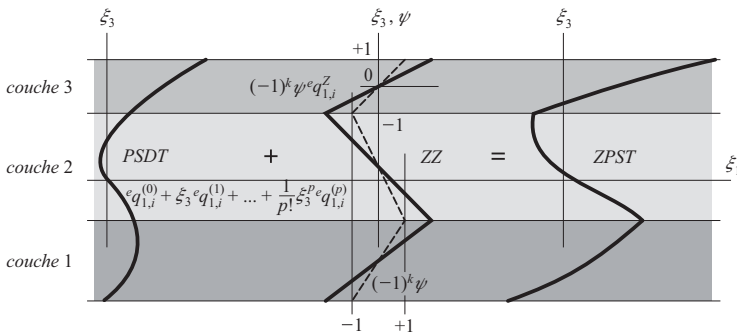


Figure 2.8 Variation des déplacements transverse pour une formulation de coque ZPST.

Nous pouvons reproduire numériquement cet effet par la simple adjonction pour chaque couche d'une fonction linéaire de l'épaisseur normalisée entre -1 et +1 à l'approximation du déplacement transverse issue d'une formulation PSDT telle que développée à l'équation (2.97). En utilisant la coordonnée de la couche ψ , le terme ZZ peut être écrit comme

$$f_{zz} = (-1)^k \psi \quad (k = 1, 2, \dots, e^q) \quad (2.106)$$

où f_{zz} est une fonction polynomiale linéaire par morceaux avec une amplitude unitaire aux interfaces des e^q couches et aux surfaces supérieure et inférieure de la coque. Le vecteur-déplacement généralisé $e^h \mathbf{u}^h$ pour un élément de coque e^Ω s'écrit alors

$${}^e \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^{e_n} a_i h_i(\xi_1, \xi_2) \left[{}^e \mathbf{q}_i^{(0)}(t) + \frac{\xi_1}{1!} {}^e \mathbf{q}_i^{(1)}(t) + (-1)^k \psi^e \mathbf{q}_i^Z(t) \right. \\ \left. + \frac{\xi_2^2}{2!} {}^e \mathbf{q}_i^{(2)}(t) + \dots + \frac{\xi_2^p}{p!} {}^e \mathbf{q}_i^{(p)}(t) \right] \quad (2.107)$$

où ${}^e \mathbf{q}_i^Z$ dénote le vecteur des trois degrés de liberté associés à l'effet zig-zag. Par conséquent, l'ajout d'un terme zig-zag tel que présenté ici fait passer le nombre de degrés de liberté par nœud de $3(p+1)$ à $3(p+2)$.

2.4.3 Matrice d'élasticité complexe

Les matrices globales de rigidité \mathbf{K} et d'amortissement \mathbf{D} pour le cas visqueux tout comme la matrice de rigidité complexe $\tilde{\mathbf{K}}$ pour le cas hystérétique sont construites à partir de la matrice d'élasticité complexe exprimée dans le repère global. Il est nécessaire de formuler cette matrice d'élasticité complexe à partir des propriétés constitutives complexes de matériau. Nous proposons ici une manière d'exprimer cette matrice pour une loi constitutive orthotrope, basée sur la formulation de la matrice d'élasticité pour le cas conservatif, et pouvant être utilisée pour un amortissement interne de type hystérétique ou visqueux. Nous avons voulu éviter d'avoir recours à une formulation simplifiée pour les effets dissipatifs, fondée par exemple sur une forme diagonale pour la partie imaginaire de cette matrice d'élasticité complexe, de manière à rester aussi général que possible.

Cas hystérétique

En accord avec le principe de correspondance viscoélastique, nous supposons que la forme de la matrice d'élasticité complexe pour un type donné d'élément fini est similaire à la configuration de la matrice d'élasticité du cas conservatif correspondant, avec cependant des composantes complexes. Nous définissons ainsi la matrice d'élasticité complexe pour un matériau linéaire orthotrope comme

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

avec les composantes écrites d'après les propriétés constitutives complexes du matériau

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{E}_1 \frac{1 - \tilde{\nu}_{23} \tilde{\nu}_{32}}{\Delta} \quad (2.109)$$

$$\tilde{C}_{12} = \tilde{E}_1 \frac{\tilde{\nu}_{21} + \tilde{\nu}_{31} \tilde{\nu}_{23}}{\Delta} = \tilde{E}_2 \frac{\tilde{\nu}_{12} + \tilde{\nu}_{32} \tilde{\nu}_{13}}{\Delta} \quad (2.110)$$

$$\tilde{C}_{13} = \tilde{E}_1 \frac{\tilde{\nu}_{31} + \tilde{\nu}_{21} \tilde{\nu}_{32}}{\Delta} = \tilde{E}_3 \frac{\tilde{\nu}_{13} + \tilde{\nu}_{12} \tilde{\nu}_{23}}{\Delta} \quad (2.111)$$

$$\tilde{C}_{22} = \tilde{E}_2 \frac{1 - \tilde{\nu}_{13} \tilde{\nu}_{31}}{\Delta} \quad (2.112)$$

$$\tilde{C}_{23} = \tilde{E}_2 \frac{\tilde{\nu}_{32} + \tilde{\nu}_{12} \tilde{\nu}_{31}}{\Delta} = \tilde{E}_3 \frac{\tilde{\nu}_{23} + \tilde{\nu}_{21} \tilde{\nu}_{13}}{\Delta} \quad (2.113)$$

$$\tilde{C}_{33} = \tilde{E}_3 \frac{1 - \tilde{\nu}_{12} \tilde{\nu}_{21}}{\Delta} \quad (2.114)$$

$$\tilde{C}_{44} = \tilde{G}_{23} \quad (2.115)$$

$$\tilde{C}_{55} = \tilde{G}_{31} \quad (2.116)$$

$$\tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12} \quad (2.117)$$

$$\Delta = 1 - \tilde{\nu}_{12} \tilde{\nu}_{21} - \tilde{\nu}_{23} \tilde{\nu}_{32} - \tilde{\nu}_{13} \tilde{\nu}_{31} - 2 \tilde{\nu}_{21} \tilde{\nu}_{32} \tilde{\nu}_{13} \quad (2.118)$$

$$\tilde{\nu}_{ji} = \frac{\tilde{E}_j \tilde{\nu}_{ij}}{\tilde{E}_i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.119)$$

où \tilde{C}_{ij} est la ij -ème composante de la matrice d'élasticité complexe, orientée dans les directions principales du matériau orthotrope, et \tilde{E}_i , $\tilde{\nu}_{ij}$ et \tilde{G}_i sont, respectivement, le module de Young dans la i -ème direction principale, le coefficient de Poisson dans la j -ème direction pour une traction dans la i -ème direction et le module de glissement dans le ij -ème plan. Ces dernières quantités complexes sont définies comme

$$\tilde{E}_i = E_i [1 + j \tan \delta(E_i)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.120)$$

$$\tilde{\nu}_{ij} = \nu_{ij} [1 + j \tan \delta(\nu_{ij})] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.121)$$

$$\tilde{G}_i = G_i[1 + j \tan \delta(G_i)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.122)$$

où $\tan \delta(\cdot)$ est le facteur adimensionnel de perte associé à la quantité complexe $(\tilde{\cdot})$ de phase δ . Il est intéressant de mentionner que dans la loi orthotrope adoptée il est supposé que $\tan \delta$, comme l'ensemble des paramètres, est indépendant de la fréquence et du niveau d'excitation.

Cas visqueux

Dans le cas visqueux, il est possible de garder la même architecture de la matrice d'élasticité complexe, mais en construisant les matrices élémentaires de rigidité et de dissipation à partir des parties réelle et imaginaire de \tilde{C}_{ij}

$${}^e \mathbf{K} = \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{B}^T \Re(\tilde{\mathbf{C}}) {}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (2.123)$$

$${}^e \mathbf{D} = \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{B}^T \Im(\tilde{\mathbf{C}}) {}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (2.124)$$

éventuellement sommées sur les couches si le matériau est stratifié et modélisé en éléments de coque.

En outre, si l'on garde une construction des constantes de l'ingénieur similaire au cas (2.120) à (2.122), il est important de souligner que dans le cas d'un amortissement de type visqueux, la grandeur $\tan \delta$ n'est plus un facteur de perte adimensionnel mais elle prend une dimension temporelle (généralement exprimée en secondes), de manière à ce que les éléments de la matrice d'amortissement ${}^e \mathbf{D}$ aient une unité de viscosité. Il n'est donc pas possible de comparer directement les valeurs des tangentes de perte pour les deux modélisations.

2.5 Intégration de la dissipation dans MAFE

Le programme «MAFE» (a code for Modal Analysis by Finite Elements) est un logiciel d'éléments finis permettant de résoudre des problèmes d'analyse modale développé au sein du LMAF [45]. Ce code en constante évolution a déjà reçu de nombreuses améliorations, mais n'autorise pas la résolution de problèmes classiques où l'ensemble de la structure analysée est sujette à des effets dissipatifs. La résolution dans MAFE de nouveaux types de problèmes aux valeurs propres rendue nécessaire du fait de l'adjonction des effets dissipatifs au comportement modal des structures

nécessite de remanier le code source du programme en y ajoutant de nouvelles routines et en modifiant certaines routines existantes.

2.5.1 Structure de MAFE

MAFE est un code programmé en langage Fortran 77. Il se présente à l'utilisateur comme un fichier exécutable qui, à partir d'un fichier contenant les données d'exécution (extension de nom .dat), va résoudre un problème et inscrire les résultats dans des fichiers de sortie (extension de nom en .plt et .lis, figure 2.9). Le fichier avec extension de nom en .plt (plot) contient l'ensemble des informations modales de la structure et peut être utilisé avec un logiciel de post-traitement afin de pouvoir visualiser les résultats sous forme graphique, alors que le fichier de nom en .lis (listing) est un listage commenté des entrées et sorties.



Figure 2.9 Schéma de principe de l'utilisation de fichiers par MAFE.

Les différences dues à l'ajout des effets dissipatifs vont se ressentir pour l'utilisateur au niveau du fichier de données d'exécution, contenant la définition du problème à résoudre, et dans les fichiers de sortie où de nouvelles informations liées aux aspects dissipatifs y sont ajoutées. Dans le fichier d'entrée, le choix du type de solveur contient désormais deux options supplémentaires, selon qu'il est souhaité de résoudre un problème avec un amortissement de type visqueux ou hystérétique. La définition des tangentes de perte des matériaux nécessite d'inclure 2 ou 9 valeurs supplémentaires, suivant que l'on considère une loi constitutive isotrope ou orthotrope, respectivement.

Il est nécessaire de modifier le code source en plusieurs points afin d'intégrer l'amortissement. L'organigramme de MAFE présenté dans la figure 2.10 montre les routines principales du programme.

De manière résumée, les modifications apportées au code sont les suivantes. La routine INELEM de gestion de la bibliothèque d'éléments finis est modifiée pour gérer les nouveaux éléments dissipatifs. Le sous-programme ADDRES d'adressage doit désormais gérer le stockage de la nouvelle matrice contenant les effets dissipatifs. La routine ASSEMB de construction des matrices structurelles est modifiée afin d'assembler également la matrice représentant les effets dissipatifs, qui peut soit être la matrice

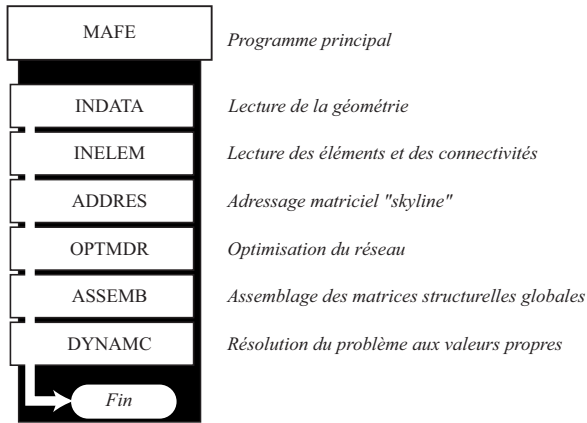


Figure 2.10 Organigramme des routines principales de MAFE.

d'amortissement dans le cas visqueux ou la partie imaginaire de la matrice de rigidité dans le cas hystérétique. Finalement, deux nouvelles routines, SSDAMP et ZSPACE, sont appelées par la routine DYNAMC de gestion du problème dynamique et permettent de piloter la résolution des problèmes aux valeurs propres avec amortissement visqueux ou hystérétique.

Nous avons intégré les deux types d'amortissement aux éléments finis solides, de coque PSDT et de poutre hermitiens. Notons que la formulation de ces derniers n'a pas été décrite à la section 2.4 dès lors qu'elle est très classique. Pour chacun des éléments, la nouvelle loi de comportement a été intégrée pour tenir compte des effets dissipatifs. Dans le cas hystérétique, les parties imaginaire et réelle de la matrice de rigidité sont stockées séparément afin d'avoir un stockage identique pour les deux types d'amortissement. De cette manière, la construction des matrices globales peut être entreprise de façon analogue quel que soit le type d'amortissement choisi.

2.5.2 Résolution du problème aux valeurs propres visqueux

Pour rappel, dans le cas visqueux, nous considérons un comportement régi par le modèle

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{q}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

qui permet d'aboutir à l'équation aux valeurs propres

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{D} + \lambda^2\mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.126)$$

qui peut être transformée en un problème linéaire et résolue comme décrit au paragraphe 2.2.2 en considérant une formulation augmentée du problème. Nous avons implanté une résolution basée sur la méthode des sous-espaces [46], qui utilise une formulation du problème aux valeurs propres dont l'algorithme est décrit dans le tableau 2.11. La résolution du problème d'interaction nécessaire au point 4 du tableau 2.11 est réalisée en utilisant une librairie externe au code. Nous avons fait recours aux librairies NAG et IMSL qui permettent de résoudre ce problème par un algorithme QZ. Notons qu'en vertu des conditions aux limites libre-libre admises pour la structure, la matrice \mathbf{K} n'est pas définie strictement positive (présence de six modes de corps rigide à fréquence nulle), de sorte que numériquement il est nécessaire d'imposer un décalage spectral σ aux valeurs propres en remplaçant \mathbf{K} par $\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M}$.

Tableau 2.11 Implantation de l'algorithme des sous-espaces adapté aux structures amorties.

Définition des variables	
$\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{M}$	Matrices globales de rigidité, d'amortissement et de masse
$\mathbf{Q}_{(k)}^u, \mathbf{Q}_{(k)}^l$	Matrices réelles supérieures et inférieures associées aux vecteurs complexes de Ritz à l'itération k
$\mathbf{A}_{(k)}, \mathbf{B}_{(k)}$	Matrices réelles d'interaction de Rayleigh à l'itération k
$\mathbf{Y}_{(k)}$	Matrice associée aux coordonnées complexes de Ritz à l'itération k
$\Theta_{(k)}$	Matrice associée aux valeurs complexes de Ritz à l'itération k
σ	Décalage spectral
\mathbf{L}	Matrice triangulaire inférieure
Opérations initiales	
1. Factorisation de $\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M}$ en \mathbf{LL}^T	
2. Sélection de $\mathbf{Q}_{(0)}^u, \mathbf{Q}_{(0)}^l$	
Itération: $k = 1, 2, \dots$	
1. Calcul de $\hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^l = -\mathbf{M}\mathbf{Q}_{(k-1)}^l$ et de $\hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^u = -\mathbf{D}\mathbf{Q}_{(k-1)}^u + \hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^l$	
2. Solution des équations simultanées $\mathbf{LL}^T\hat{\mathbf{Q}}_{(k)}^u = \hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^u$	
3. Calcul des opérateurs projetés $\mathbf{A}_{(k)} = (\hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^u)^T\mathbf{Q}_{(k-1)}^u + (\mathbf{Q}_{(k-1)}^u)^T\hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^l$ et $\mathbf{B}_{(k)} = (\hat{\mathbf{Q}}_{(k)}^u)^T\hat{\mathbf{Q}}_{(k-1)}^u - (\mathbf{Q}_{(k-1)}^u)^T\mathbf{M}\mathbf{Q}_{(k-1)}^u$	
4. Résolution du problème d'interaction $\mathbf{A}_{(k)}\mathbf{Y}_{(k)} = \mathbf{B}_{(k)}\mathbf{Y}_{(k)}\Theta_{(k)}$	
5. Formation de la nouvelle base $\mathbf{Q}_{(k)}^u = \hat{\mathbf{Q}}_{(k)}^u\mathbf{Y}_{(k)}$ et $\mathbf{Q}_{(k)}^l = \mathbf{Q}_{(k)}^u\Theta_{(k)}$	
6. Test de convergence	

2.5.3 Résolution du problème aux valeurs propres hystérétique

Dans ce cas, le comportement du solide considéré est supposé régi par la loi

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.127)$$

ce qui correspond au cas conservatif avec une matrice de rigidité écrite sous forme complexe. La partie imaginaire de $\tilde{\mathbf{K}}$ étant représentative des effets dissipatifs, on remarque que lorsque la structure ne comporte pas d'amortissement interne, on retombe bien sur la loi correspondant au cas conservatif.

Tableau 2.12 Implantation de l'algorithme d'Arnoldi implicitement redémarrée.

Définition des variables	
$\tilde{\mathbf{K}}, \mathbf{M}$	Matrices globales de rigidité complexe et de masse
$\mathbf{H}_{m(k)}$	Matrice d'Hessenberg supérieure d'ordre m à l'itération k
$\mathbf{V}_{m(k)}$	Matrice d'Arnoldi d'ordre m contenant les vecteurs d'Arnoldi à l'itération k
$\mathbf{Q}_{(k)}$	Matrice unitaire issue de la factorisation de \mathbf{H}_m à l'itération k
$\mathbf{f}_{(k)}$	Vecteur de résidus à l'itération k
n	Nombre de valeurs propres voulues
m	Nombre de vecteurs d'itération
σ	Décalage spectral
\mathbf{L}	Matrice triangulaire inférieure
\mathbf{D}	Matrice diagonale
Opérations initiales	
1. Factorisation de $\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M}$ en \mathbf{LDL}^T	
2. Génération de \mathbf{V}_m contenant les m vecteurs aléatoires initiaux	
3. Calcul de la factorisation d'Arnoldi initiale $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{V}_{n(0)} = \mathbf{V}_{n(0)}\mathbf{H}_{n(0)} + \mathbf{f}_{n(0)}\mathbf{e}_{n(0)}^T$	
Itération: $k = 1, 2, \dots$	
1. Extension de la factorisation d'Arnoldi de longueur n à une factorisation de longueur m $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{V}_{m(k-1)} = \mathbf{V}_{n(k-1)}\mathbf{H}_{n(k-1)} + \mathbf{f}_{n(k-1)}\mathbf{e}_{n(k-1)}^T$. Calculs éventuels de produits matrice-vecteur avec $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}$, $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}$ ou \mathbf{M}	
2. Calcul des valeurs propres de $\mathbf{H}_{m(k-1)}$ et séparation de celles-ci dans un jeu de valeurs propres voulues $\theta_{v(k-1)} = \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et non voulues $\theta_{nv(k-1)} = \theta_i$ ($i = n + 1, n + 2, \dots, m$)	
3. Test de convergence	
4. Calcul de $\mathbf{H}_{m(k)} = \mathbf{Q}^H\mathbf{H}_{m(k-1)}\mathbf{Q}$ en utilisant $(m - n)$ étapes de l'algorithme QR sur $\mathbf{H}_{m(k-1)}$ avec $\theta_{nv(k-1)}$ utilisé comme décalage spectral	
5. Calcul de $\mathbf{V}_{n(k)} = \mathbf{V}_{m(k-1)}\mathbf{Q}_n$ pour obtenir la nouvelle factorisation d'Arnoldi $(\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{V}_{m(k)} = \mathbf{V}_{m(k)}\mathbf{H}_{m(k)} + \mathbf{f}_{n(k)}\mathbf{e}_{n(k)}^T$	

Si l'on insère dans la relation matricielle (2.127) la forme exponentielle (2.71), on aboutit au problème aux valeurs propres suivant

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{2.128}$$

Afin de pouvoir intégrer un processus de calcul efficace au code existant, il a été choisi de se servir de la collection de sous-routines externes ARPACK [47]. Cette collection est écrite en Fortran77 et permet de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé de grande taille en utilisant une méthode de type Arnoldi (Implicitly Restarted Arnoldi Iteration, IRAM), décrit dans le tableau 2.12.

Comme le montre schématiquement la figure 2.13, la routine ZNAUPD est ici appelée itérativement au sein de la routine ZSPACE jusqu'à la convergence de l'algorithme. Cette routine demande itérativement de lui fournir le résultat de la multiplication d'un vecteur donné par une matrice structurée. Le recours à cette manière de procéder permet, puisque les matrices structurées de masse et de rigidité complexe ne sont pas intégrées dans ZNAUPD, de choisir librement la méthode de stockage de ces matrices.

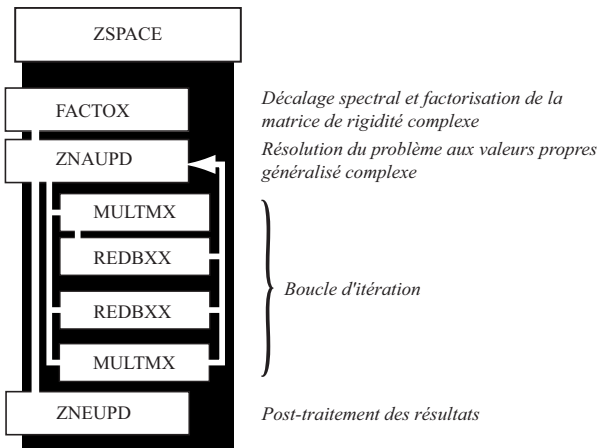


Figure 2.13 Structure de la routine ZSPACE qui utilise la bibliothèque ARPACK.

Les multiplications exigées par ZNAUPD sont réalisées par deux routines codées dans MAFE, nommées REDBXX et MULTMX. Lors de chaque itération, trois cas sont possibles, la routine ZNAUPD pouvant demander d'effectuer l'opération

- $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{K}} - \sigma \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}$
- $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{K}} - \sigma \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x}$
- $\mathbf{y} = \mathbf{M} \mathbf{x}$

à partir du vecteur \mathbf{x} fourni. Ces trois cas peuvent être calculés en tirant parti des routines MULTMX et REDBXX. En effet, MULTMX permet de résoudre l'équation

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (2.129)$$

alors que REDBXX permet d'effectuer

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{K}} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{x} \quad (2.130)$$

Une fois le processus itératif terminé, nous obtenons les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres complexes du problème (2.128) en recourant à la routine ARPACK de post-traitement ZNEUPD. Les fréquences propres et facteurs d'amortissement modal sont alors extraits des valeurs propres à l'aide de l'équation (2.73), alors qu'à partir des vecteurs propres complexes il est aisé d'en déduire leurs amplitude et phase.

2.6 Validation et choix d'un modèle d'amortissement

2.6.1 Comparaison des deux modèles avec les mesures

Nous avons déjà remarqué que la majeure différence entre les deux modèles, à amortissement de type visqueux ou hystérétique, se trouve dans l'évolution des facteurs d'amortissement modal avec la fréquence.

Le choix du type de solveur à utiliser dans le cadre de l'identification des propriétés dissipatives des matériaux va dépendre du réalisme du modèle sous-jacent. Par conséquent, il est intéressant de confronter les deux modèles visqueux et hystérétique à la réalité. Nous avons dans ce but représenté à la figure 2.14 les facteurs d'amortissement modal mesurés en fonction de la fréquence de chaque mode de plusieurs plaques formées de différents matériaux, dont:

- Acier avec une couche adhésive amortissante sur une face (acier 3M)
- Plexiglas GS (PMMA)
- Carbone-époxy, unidirectionnel, en plaque de forme carrée (carbone A) ou rectangulaire (carbone B)

Parmi ces matériaux, les deux premiers sont isotropes alors que les derniers sont orthotropes. Les facteurs d'amortissement modal sont tirés des fonctions de transfert obtenues à l'aide du dispositif de mesure décrit à la section 3.5 et vont pour ces différents cas de 0.3 à 3.3% environ, sur une gamme de fréquence s'étalant jusqu'à 10 kHz.

En regardant l'évolution des facteurs d'amortissement modal mesurés dans la figure 2.14, normalisés à la plus grande valeur, il est difficile d'y voir une dépendance

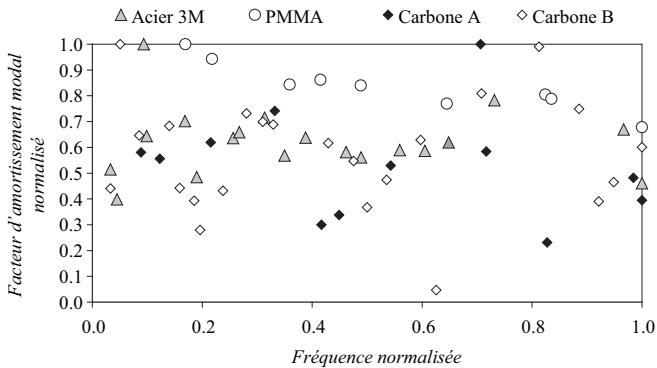


Figure 2.14 Comparaison des facteurs d'amortissement modal mesurés en fonction de la fréquence pour différents matériaux.

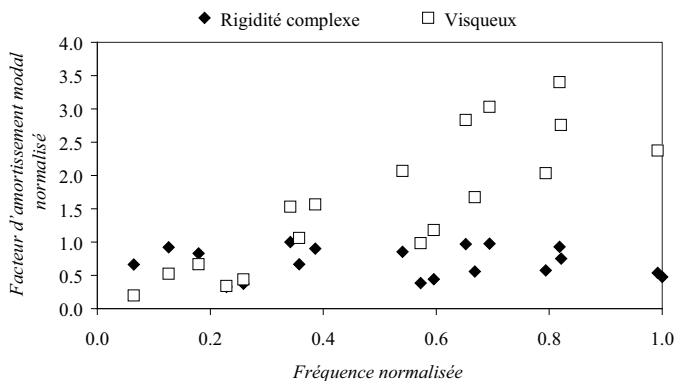


Figure 2.15 Comparaison des résultats numériques obtenus avec les deux différents modèles d'amortissement.

claire avec la fréquence. Certains matériaux, comme le PMMA, semblent avoir un amortissement modal qui décroît légèrement lorsque la fréquence augmente, mais aucun ne montre des effets dissipatifs prenant clairement de l'importance avec la fréquence. Pourtant, si l'on compare les résultats numériques obtenus en utilisant les deux types de modèles avec, pour chacun, des propriétés de matériau équivalentes, la différence se voit immédiatement (figure 2.15). Nous obtenons avec le modèle à amortissement visqueux un comportement des facteurs d'amortissement modal clairement dépendant de la fréquence. Cette variation linéaire des facteurs d'amortissement modal avec la fréquence n'est pas représentative du comportement des matériaux tel qu'observé à la figure 2.14 et, par conséquent, le modèle de type hystérique sera préféré pour une utilisation dans le cadre de l'identification modale.

2.6.2 Comparaison avec la littérature

Afin de valider notre modèle d'éléments finis avec amortissement hystérétique, nous avons établi une comparaison avec les résultats obtenus à la référence [32]. Ces résultats ont l'avantage d'être présentés de manière complète puisque nous avons accès aux valeurs expérimentales, aux propriétés identifiées ainsi qu'au modèle numérique utilisé. Dans cet article, deux cas sont étudiés (tableau 2.16) : le premier présente une plaque en époxy et le deuxième une plaque en composite carbone-époxy. Nous avons modélisé chacune de ces plaques avec 15x15 éléments finis solides quadratiques au sein de notre propre code d'éléments finis et confronté nos résultats avec ceux publiés dans [32].

Tableau 2.16 Caractéristiques des plaques.

Spécimen	Longueur [m]	Largeur [m]	Epaisseur [m]	Masse volumique [kg/m ³]
Epoxy	0.16200	0.16200	0.00296	1211.34
Carbone-époxy	0.29655	0.26715	0.00178	1491.59

Plaque en époxy

Les propriétés de la plaque en époxy présentées dans le tableau 2.17 ont été identifiées à partir des fréquences et facteurs d'amortissement modal mesurés [32]. Nous avons injecté ces propriétés dans notre modèle afin de confronter les résultats de notre formulation avec les mesures réalisées. Cette comparaison, visible dans le tableau 2.18, montre une bonne adéquation des résultats avec une erreur sur les fréquences inférieure à 0.5% et une erreur sur les facteurs d'amortissement modal inférieure à 9%.

Tableau 2.17 Propriétés de l'époxy identifiées dans la littérature [32].

E [GPa]	$\tan\delta(E)$ [-]	ν [-]	$\tan\delta(\nu)$ [-]
3.63	0.0121	0.377	-0.00293

Tableau 2.18 Comparaison entre les valeurs expérimentales tirées de la littérature [32] et celles issues de notre modèle pour une plaque en époxy (FAM = facteur d'amortissement modal).

Mode	Fréquence référence [Hz]	FAM référence mesuré	Fréquence MAFE [Hz]	FAM MAFE	Ecart relatif fréquences	Ecart relatif FAM
1	123.45	0.62%	122.94	0.64%	-0.42%	-2.7%
2	181.01	0.65%	180.96	0.63%	-0.03%	-2.9%
3	238.10	0.59%	238.18	0.54%	0.03%	-8.9%

Ces résultats ne permettent pas à eux seuls de juger de la précision de notre modèle, puisque nous comparons les facteurs d'amortissement modal issus de notre modèle avec des valeurs expérimentales: la précision de la méthode d'identification utilisée dans la référence [32] a donc également une influence dans cette comparaison. Pour confronter directement notre modèle avec la formulation basée sur l'énergie de déformation, nous avons reporté dans le tableau 2.19 les valeurs des facteurs d'amortissement modal numériques issus des deux approches, avec des propriétés constitutives en entrée identiques. La comparaison des deux modèles donne un écart relatif maximal sur les facteurs d'amortissement modal inférieur à 0.5%, soit un écart absolu de 0.003% seulement.

Tableau 2.19 Comparaison entre les valeurs identifiées tirées de la littérature [32] et celles issues de notre modèle pour une plaque en époxy (FAM = facteur d'amortissement modal).

Mode	FAM référence identifié	FAM MAFE	Ecart relatif FAM
1	0.640%	0.640%	0.04%
2	0.626%	0.629%	0.44%
3	0.538%	0.539%	0.19%

Plaque en carbone-époxy

Un deuxième exemple d'identification présenté dans la même référence [32] consiste en une plaque avec des fibres de carbone ($[0^\circ, 90^\circ]_{38}$) dans une matrice en époxy. Le problème étant considéré comme plan, seules 4 propriétés complexes ont été identifiées (tableau 2.20). En insérant ces propriétés dans notre modèle, nous obtenons des résultats proches des résultats expérimentaux, avec moins de 0.2% d'erreur sur les fréquences propres et moins de 10% d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal, comme le montre le tableau 2.21.

Tableau 2.20 Propriétés du carbone identifiées [32].

E_1 [GPa]	$\tan\delta(E_1)$ [-]	E_2 [GPa]	$\tan\delta(E_2)$ [-]	ν_{12} [-]	$\tan\delta(\nu_{12})$ [-]	G_{12} [GPa]	$\tan\delta(G_{12})$ [-]
70.9	0.00061	45.5	0.00097	0.08	0.00258	3.66	0.00912

Tableau 2.21 Comparaison entre les valeurs expérimentales tirées de la littérature [32] et celles issues de notre modèle pour une plaque en carbone-époxy (FAM = facteur d'amortissement modal).

Mode	Fréquence référence [Hz]	FAM référence mesuré	Fréquence [Hz]	FAM	Ecart relatif fréquences	Ecart FAM
1	38.13	0.41%	38.12	0.44%	-0.02%	9.3%
2	139.35	0.040%	139.51	0.037%	-0.11%	-8.5%
3	145.89	0.046%	146.07	0.044%	0.12%	-4.9%

Comme pour le cas du spécimen en époxy, ces résultats sont influencés par la qualité de l'identification. Nous avons à nouveau comparé les résultats du modèle basé sur l'énergie de déformation [32] avec les résultats de MAFE, pour des valeurs en entrée identiques (tableau 2.22). L'écart relatif maximal des facteurs d'amortissement modal obtenus par les deux modèles sur les trois premiers modes est inférieur à 1.6%, ce qui correspond à un écart absolu très faible de 0.0006%.

Tableau 2.22 Comparaison entre les valeurs numériques tirées de la littérature [32] et issues de notre modèle pour une plaque en carbone-époxy (FAM = facteur d'amortissement modal).

Mode	FAM référence identifié	FAM MAFE	Ecart relatif FAM
1	0.4449%	0.4442%	-0.14%
2	0.0372%	0.0366%	-1.56%
3	0.0435%	0.0433%	-0.53%

Discussion des résultats

Les résultats obtenus pour les fréquences sont satisfaisants. Concernant les facteurs d'amortissement modal, il est clair qu'une erreur allant jusqu'à 10% peut paraître importante à première vue. Cependant, il ne faut pas oublier que cet écart n'est pas uniquement dû à la différence entre les modèles de calcul utilisés: il est également nécessaire de prendre en compte l'erreur de mesure des facteurs d'amortissement modal et l'erreur issue du processus d'identification. Selon la référence [32], pour la plaque en carbone, les erreurs relatives sur la mesure des amortissements vont de 1 à 20% et les erreurs totales sur les tangentes de perte identifiées vont de 1.5 à plus de 16%.

En considérant uniquement notre modèle hystérétique développé dans MAFE et celui basé sur les énergies de déformation utilisé dans [32], l'écart sur les facteurs d'amortissement modal se ramène à une valeur relative maximale inférieure à 1.6%. Nous pouvons donc considérer les deux modèles comme équivalents.

2.6.3 Comparaison entre modèles solide et coque

Dans le but de valider notre élément fini dissipatif de type coque PSDT, nous l'avons confronté au modèle de type solide dans un cas amorti. Nous avons choisi comme cas test une plaque rectangulaire de $20 \times 16 \text{ cm}^2$ en carbone-époxy d'empilement $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ recouverte sur une face d'un matériau synthétique de protection en ABS/TPU (tableau 2.23).

Tableau 2.23 Spécifications du laminé.

Couche	Matériau	Orientation	Épaisseur [mm]
1	Carbone-époxy	0°	3
2	Carbone-époxy	90°	3
3	Carbone-époxy	0°	3
4	ABS/TPU	isotrope	1

Le modèle de référence réalisé en éléments solides dispose d'un maillage dans le plan similaire au maillage de type coque constitué de 10x8 éléments quadratiques. Dans l'épaisseur, le maillage en éléments solides est constitué de 4 éléments finis, soit un élément par couche du matériau. Nous avons varié l'ordre p des éléments finis de coque afin d'observer son influence sur la qualité des résultats. Les écarts des fréquences et facteurs d'amortissement modal entre les différents modèles (la formulation solide est prise comme référence) ainsi que les temps de résolution relatifs sont donnés au tableau 2.24. Nous avons considéré les écarts relatifs moyens sur les 19 premiers modes ainsi que les écarts-types correspondants.

Tableau 2.24 Comparaison entre un modèle en éléments solides et un modèle en coques PSDT en fonction de l'ordre p .

Ordre p	Erreur sur les fréquences propres		Erreur sur les facteurs d'amortissement modal		Temps de calcul
	moyenne	écart-type	moyenne	écart-type	écart relatif
1	3.41%	1.88%	5.49%	7.11%	-93.9%
3	0.38%	0.38%	-1.04%	2.03%	-69.8%
5	0.21%	0.21%	-0.61%	1.32%	-13.5%
7	0.13%	0.14%	-0.39%	0.78%	78.8%
9	0.09%	0.10%	-0.25%	0.67%	225%

Ces résultats sont aussi illustrés sur le graphique de la figure 2.25. Sur celle-ci, seuls les résultats pour les coques avec une valeur du terme p inférieure ou égale à 5 sont représentés. Nous observons que les résultats pour un ordre p unitaire sont très médiocres, mais à partir d'un ordre p égal à 3 ils deviennent intéressants. En comparant les écarts sur les temps de calcul (tableau 2.24), nous voyons que l'utilisation d'un élément de coque reste compétitive tant que l'ordre p ne dépasse pas 5. Nous pouvons ainsi considérer que d'une manière générale, un ordre p de 3 ou 5 permet d'obtenir les meilleures performances lorsque la précision des résultats ainsi que le temps de calcul sont pris en compte.

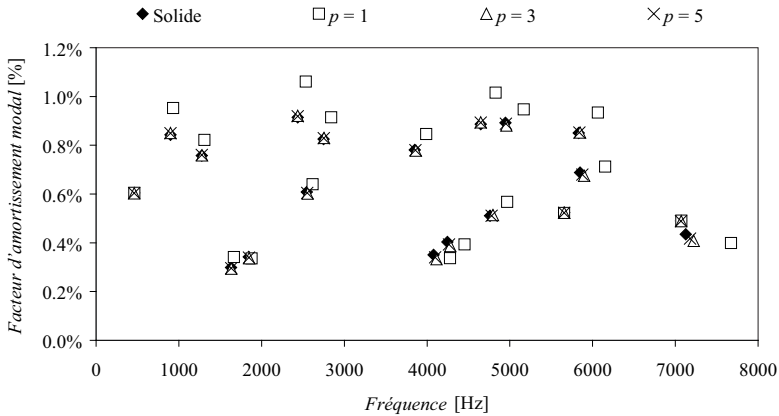


Figure 2.25 Représentation des facteurs d'amortissement modal en fonction de la fréquence des modèles solide et coque pour un ordre p variant de 1 à 5.

2.7 Résumé et commentaires

Nous avons présenté dans ce chapitre une loi d'amortissement qui permet de représenter au mieux les effets dissipatifs dans une structure excitée de manière harmonique tout en étant intégrable dans un code d'éléments finis dédié à la résolution de problèmes d'analyse modale. Ce modèle de type hystérétique a été incorporé dans MAFE, un logiciel développé au sein du LMAF, puisqu'à ce jour aucun logiciel commercial ne dispose de cette fonctionnalité.

Notre modèle d'amortissement est toutefois limité par les deux hypothèses majeures suivantes

- la linéarité des relations de contrainte-déformation,
- l'indépendance des propriétés de matériau avec la fréquence.

La première hypothèse est à considérer sous forme complexe, ce qui revient à dire que non seulement la partie réelle – représentant les effets purement élastiques – mais aussi la partie imaginaire – représentant les effets dissipatifs – du tenseur des contraintes varient linéairement avec les déformations. Ce modèle revêt donc un caractère linéaire et sera à utiliser dans le domaine des petites déformations.

La seconde hypothèse a pour conséquence que ce modèle représente le comportement des matériaux de manière simplifiée. Elle revient à supposer que la vitesse et l'amplitude de chargement n'ont pas d'influence sur la réponse de la structure. Si cette vue idéalisée s'avère justifiée pour certains matériaux et dans certaines conditions, il est

clair qu'elle n'est pas applicable à tous les cas. Il est toutefois souvent possible de définir des bandes de fréquence et de température où le modèle est applicable.

En plus de ces deux hypothèses, il est intéressant de rappeler que le modèle hystérétique est défini directement dans le domaine fréquentiel; il n'a un sens que pour les structures soumises à des vibrations harmoniques permanentes.

Malgré ces restrictions, ce modèle d'amortissement reste clairement plus réaliste que les modèles utilisés à ce jour dans les logiciels commerciaux d'analyse modale. Ceux-ci présentent en effet un comportement dissipatif variant avec la fréquence sans toutefois être d'un grand réalisme. De plus, nous avons intégré la dissipation dans notre modèle de manière orthotrope, ce qui permet d'observer des effets dissipatifs variables en fonction du mode de déformation. Nous pensons que ce modèle, tel que nous l'avons implanté, est une base saine et nécessaire dans le domaine de l'analyse modale numérique.

Chapitre 3

Mesures modales

Dans ce chapitre sont discutées les diverses méthodes développées et utilisées dans le cadre de ce travail afin d'extraire les informations modales des différents spécimens dont nous désirons identifier les propriétés mécaniques.

3.1 Objectifs

Pour obtenir une identification des propriétés élastiques et dissipatives d'un matériau, il ne suffit pas d'avoir un algorithme d'identification performant; il est également nécessaire d'être capable de mesurer correctement les fonctions de réponse en fréquence d'un spécimen donné et d'en extraire les propriétés modales, qui servent de base au processus d'identification, avec autant de précision que possible. Afin de répondre à ces besoins, nous avons mis au point deux méthodes d'extraction des fonctions de réponse en fréquence, l'une utilisant une excitation acoustique sans contact, l'autre se servant d'un pot vibrant, et avons choisi une méthode de traitement de ces fonctions de transfert qui permet d'en extraire les fréquences propres, facteurs d'amortissement modal et modes propres complexes d'une manière efficace et précise.

En analyse modale expérimentale, les contacts entre la pièce ou la structure à étudier et le monde extérieur sont souvent sources de problèmes. Il est par conséquent généralement préférable de réaliser des mesures avec le spécimen se trouvant dans une configuration aussi proche que possible des conditions aux limites libre-libre. La raison à cela est que nous désirons mesurer les propriétés modales de la structure seule: toute liaison avec un objet étranger à la structure (accéléromètre, encastrement, etc.) modifie son comportement et, de ce fait, introduit des erreurs. Pour limiter ces erreurs, il est soit nécessaire de modéliser correctement ces conditions aux limites, soit de s'en

affranchir. De plus, si les fréquences propres sont sensibles aux conditions aux limites, les facteurs d'amortissement modal le sont d'autant plus.

Par conséquent, si nous souhaitons pouvoir mesurer précisément les propriétés modales d'une structure, il existe deux options:

- tenter de limiter au maximum l'effet de la mesure et de la suspension du spécimen,
- caractériser ces effets afin de pouvoir les retrancher en effectuant un post-traitement.

Nous avons opté pour la première solution, en portant notre choix sur des méthodes d'excitation et de mesure non intrusives et en limitant au maximum l'effet des points de fixation du spécimen.

3.2 Analyse modale expérimentale

L'analyse modale est une méthode dynamique qui permet de caractériser une structure en étudiant son comportement vibratoire. Lors de leur utilisation, toutes les structures mécaniques vibrent et le niveau de ces vibrations dépend d'une part des conditions d'utilisation et d'autre part de la géométrie et des propriétés des matériaux qui constituent cette structure. Pour une structure donnée, l'amplitude et la fréquence de l'excitation qui lui sont fournies influencent son niveau vibratoire, mais les vibrations de la structure seront amplifiées uniquement aux fréquences proches des fréquences propres de celle-ci. Ainsi, il est possible de déterminer le comportement vibratoire d'une structure une fois que nous connaissons ses modes et ceux-ci peuvent nous fournir une information sur les propriétés matérielles de la structure.

Bien qu'également applicable dans le domaine temporel, l'analyse modale travaille aujourd'hui généralement dans le domaine fréquentiel et se base sur les fonctions de réponse en fréquence d'un système pour en déduire des informations sur ses modes propres de vibration. Elle comporte par conséquent deux phases principales: l'établissement d'un jeu de fonctions de réponse en fréquence et l'extraction des paramètres propres à partir de celui-ci.

Les propriétés modales sont intéressantes par le fait qu'elles donnent une information sur le comportement global d'une structure, qui est déterminé par les propriétés des matériaux la constituant et sa géométrie. La connaissance des propriétés modales d'une structure permet de disposer d'informations importantes quant à son comportement vibratoire dans un environnement défini. A partir de ces propriétés, il est possible d'estimer sa réponse à une excitation donnée et, notamment, d'évaluer ses amplitudes maximales en chacun de ses points.

3.2.1 Etablissement d'un modèle spatial et temporel

La première étape nécessaire à l'analyse modale d'une structure est l'établissement d'un modèle expérimental. Nous définissons ainsi un maillage expérimental, qui représente une discrétisation de la structure en divers points utilisés comme points de mesure pour l'établissement des fonctions de transfert. Plusieurs points de mesure sont nécessaires afin de construire le modèle modal expérimental de la structure. En effet, bien qu'une seule fonction de transfert mesurée entre deux points bien choisis de la structure permette généralement d'obtenir les facteurs d'amortissement modal et fréquences propres des principaux modes, il est nécessaire de connaître les fonctions de transfert entre plusieurs paires de points pour être capable d'extraire des informations sur la forme des modes. Le maillage expérimental sera ainsi choisi de manière à être capable de reconstituer la forme des modes avec la précision requise. Plus les modes nous intéressant sont d'un ordre élevé, plus il nous faut un maillage fin pour les reconstituer correctement. Ainsi, la discrétisation effectuée sur la structure présentée dans la figure 3.1 permettra par exemple de mieux définir les formes propres selon la longueur de la plaque (x) que selon sa largeur (y).

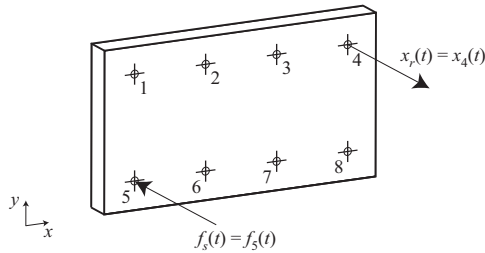


Figure 3.1 Exemple de discrétisation d'une structure de type plaque en 8 points expérimentaux.

Les mesures temporelles de l'excitation f_s au point s et de la réponse x_r au point r du maillage expérimental sont effectuées pour chaque couple de points rs du modèle expérimental pour aboutir à une caractérisation complète de la structure selon celui-ci. Notons ici que pour que le modèle soit entièrement caractérisé, il suffit de varier le point d'excitation en gardant le point de mesure de la réponse fixe ou inversement. Le nombre de mesures nécessaires et suffisantes à une caractérisation complète du modèle expérimental sera donc égal au nombre de points de son maillage.

3.2.2 Etablissement d'un jeu de fonctions de réponse en fréquence

Une fois que les mesures temporelles sont effectuées pour l'ensemble du maillage expérimental, il est nécessaire de passer ces mesures dans le domaine fréquentiel afin

de pouvoir définir les fonctions de réponse en fréquence du système. Cette opération est réalisée en utilisant une transformation de Fourier. Les signaux temporels étant échantillonnés lors de leur acquisition, nous utilisons une transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, FFT) telle que

$$\mathbf{S}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3.1)$$

où $s(n)$ représente le n -ème des N échantillons du signal temporel échantillonné s et \mathbf{S} est la transformée de Fourier – ou spectre – de s , afin d’obtenir les spectres des réponses et des excitations. Le rapport du spectre X_r obtenu en un point r de la réponse x par le spectre F_s obtenu en un point s de l’excitation f donne la fonction de transfert h_{rs}

$$h_{rs} = \frac{X_r}{F_s} \quad (3.2)$$

qui peut également être visualisée comme suit sous forme matricielle, avec ici N dénotant le nombre de points du maillage expérimental,

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \dots \\ X_r(\omega) \\ \dots \\ X_N(\omega) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \dots & h_{1s}(\omega) & \dots \\ \dots & h_{2s}(\omega) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & h_{rs}(\omega) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & h_{Ns}(\omega) & \dots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_s(\omega) \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

où ω est la pulsation de l’excitation. Nous remarquons que le modèle modal fréquentiel est complètement défini lorsqu’une ligne ou une colonne de la matrice \mathbf{H} des fonctions de transfert est totalement définie, étant donné la symétrie de cette matrice.

3.2.3 Extraction des paramètres modaux

La partie d’analyse modale proprement dite commence lorsque nous voulons extraire les paramètres modaux à partir d’un jeu de fonctions de transfert mesurées. Cette étape permet d’aboutir au modèle modal de la structure étudiée. Cette tâche consiste à faire correspondre des fonctions de transfert théoriques issues d’un modèle de comportement du système dynamique à chacune des fonctions de transfert mesurées. Les résultats de l’analyse modale dépendront ainsi d’une part de la technique adoptée et d’autre part du modèle dynamique choisi. Il existe plusieurs méthodes d’extraction, qui se divisent en deux catégories principales, suivant que nous estimons les propriétés d’un

seul mode à la fois (SDOF, single degree of freedom) ou que nous déterminons les propriétés pour un jeu de modes (MDOF, multiple degree of freedom). La première méthode évalue les paramètres modaux à partir d'une partie de la fonction de transfert mesurée en considérant un seul mode présent. Elle est donc valable lorsque les modes d'une structure sont suffisamment distincts et disposent d'un amortissement modal faible. Lorsque ces dernières conditions ne sont pas vérifiées, il devient nécessaire d'utiliser la seconde méthode afin de modéliser correctement le système réel. La détermination des paramètres modaux de la structure peut se faire en utilisant une méthode globale qui prend en compte un jeu de fonctions de réponse en fréquence mesurées en chacun des points du maillage expérimental.

Le modèle dynamique le plus communément utilisé en analyse modale est celui comportant un amortissement visqueux, décrit à la section 2.2. Rappelons la forme de la réponse en fréquence d'un modèle à amortissement de type visqueux à caractère proportionnel, qui sert de modèle de référence en analyse modale,

$$h_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{P_r^i P_s^i}{-\omega^2 + j\omega 2\zeta_i \omega_i + \omega_i^2} \quad (3.4)$$

Il est cependant aussi possible d'utiliser un modèle de type hystérétique, comme décrit à la section 2.3, dont la réponse en fréquence s'écrit

$$h_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{P_r^i P_s^i}{-\omega^2 + \omega_i^2 + j\eta_i \omega_i^2} \quad (3.5)$$

La comparaison de ces deux formulations de la fonction de transfert pour un seul degré de liberté ($N = 1$) permet de se rendre compte qu'elles sont similaires lorsqu'elles sont évaluées à la fréquence propre $\omega = \omega_i$ pour $\eta_i = 2\zeta_i$, ce qui confirme bien le résultat (2.80). De plus, il est possible de montrer que l'écart entre ces deux formulations est suffisamment faible pour être négligé, de sorte que les deux modèles peuvent être considérés comme équivalents à condition de prendre en compte la bonne définition du facteur d'amortissement. Ceci explique pourquoi en analyse modale conventionnelle l'extraction des paramètres modaux d'une structure à faible dissipation est réalisée au moyen d'un modèle visqueux, même si l'allure de l'amortissement réel justifierait plus l'usage d'un modèle hystérétique.

Fraction rationnelle de polynômes

La méthode utilisée ici pour trouver les caractéristiques modales d'après un jeu de fonctions de transfert obtenues pour notre modèle expérimental est celle de la fraction

rationnelle de polynômes (rational fraction polynomial, RFP). Cette méthode approche la fonction de transfert avec la fraction rationnelle suivante [48]

$$\begin{aligned}
 h_{rs}(\omega) &= \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{2N-1} b_k s^k} \Bigg|_{s=j\omega} \\
 &= \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_{2N-1}(j\omega)^{2N-1}}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_{2N}(j\omega)^{2N}}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où les a_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) et les b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) sont les coefficients du monôme d'ordre i .

Afin de faire corréler la fonction de transfert théorique avec les valeurs mesurées, il est ainsi nécessaire de résoudre un problème d'optimisation en minimisant l'erreur suivante

$$\varepsilon^{(k)} = h_{rs}^{(k)}(\omega^{(k)}) - \hat{h}_{rs}^{(k)}(\omega^{(k)}) \tag{3.7}$$

qui peut s'écrire sous la forme plus adaptée

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{(k)} &= [a_0 + a_1(j\omega^{(k)}) + a_2(j\omega^{(k)})^2 + \dots + a_{2N-1}(j\omega^{(k)})^{2N-1}] \\
 &\quad - \hat{h}_{rs}^{(k)}(\omega^{(k)})[b_0 + b_1(j\omega^{(k)}) + b_2(j\omega^{(k)})^2 + \dots + b_{2N}(j\omega^{(k)})^{2N}]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

et qui est définie pour chaque échantillon k de la fonction de transfert mesurée $\hat{h}_{rs}^{(k)}$. Dans cette expression, le nombre de modes N contenus dans la portion de la fonction de transfert étudiée est une inconnue du problème qui doit généralement être fournie par l'utilisateur. Cet aspect est l'un des points faibles de la méthode puisque le bon sens de l'utilisateur est requis afin d'estimer correctement le nombre de modes inclus dans la bande de la fonction de transfert concernée, ce qui peut être délicat lorsque nous avons en présence plusieurs modes proches, voire superposés, ou lorsque l'amortissement est important. Les logiciels d'analyse modale recourant à cette méthode ont généralement des formulations légèrement plus élaborées utilisant des polynômes orthogonaux et ajoutant des termes permettant de prendre en compte l'effet des modes situés en dehors de la bande de fréquence considérée.

Une fois les coefficients de l'équation (3.6) déterminés, nous pouvons revenir aux propriétés modales, le dénominateur permettant d'obtenir les fréquences propres ω_i et les

facteurs d'amortissement modal ζ_i alors que le numérateur permet de déterminer la constante modale complexe, appelée également résidu, qui donne l'amplitude du mode au point de maillage expérimental considéré. Le mode peut être reconstruit si le résidu est défini pour un nombre suffisant de points du maillage. Au niveau algorithmique, les propriétés modales issues du dénominateur sont estimées dans un premier temps et celles issues du numérateur sont définies dans une étape ultérieure.

3.3 Système de mesure de réponse sans contact

3.3.1 Description

L'analyse modale d'une structure nécessite de disposer des fonctions de réponse en fréquence de celle-ci mesurées aux différents points d'un maillage expérimental. Nous avons vu à la section 3.2 que pour obtenir ces fonctions de transfert, il est possible soit de mesurer la réponse du spécimen en un point du maillage et de déplacer l'excitation de manière à parcourir tous les points du maillage, soit de procéder inversement en gardant l'excitation fixe et en mesurant la réponse en chaque point du maillage.

La première possibilité est généralement utilisée lorsque la structure est excitée à l'aide d'un marteau instrumenté. Il est en effet plus facile de modifier le point d'excitation que le point de mesure de la réponse dans ce cas. Cependant, dans la majorité des situations, l'excitation est figée en un point de la structure et la mesure est ainsi réalisée en plusieurs points, car il est généralement plus aisé de modifier le point de mesure que celui d'excitation.

Si nous choisissons d'exciter le système en un seul point, il est possible de mesurer la réponse en plusieurs points simultanément afin d'obtenir l'ensemble des réponses du système en une seule mesure ou de changer successivement la position du point de mesure et de répéter plusieurs fois l'expérience. Mesurer la réponse de la structure en plusieurs points simultanément nécessite d'avoir autant de capteurs que de points de mesure, ce qui résulte généralement - pour des raisons de coût - en un nombre de points de mesure limité. Déplacer le capteur de mesure permet d'avoir un nombre de points de mesure illimité, mais requiert de réaliser autant de mesures qu'il y a de points dans le maillage expérimental. Il est nécessaire dans ce cas que l'influence du capteur sur le comportement modal de la structure soit négligeable ou prise en compte dans le modèle. De plus, il devient indispensable d'avoir une bonne répétabilité de l'excitation afin d'assurer un niveau et une position de l'excitation stables.

3.3.2 Choix du système

Il existe peu de systèmes de mesure sans contact applicables à la mesure de déplacement à relativement haute fréquence telle que rencontrée en analyse modale. Nous

cherchons en effet à pouvoir mesurer des déplacements faibles - entre l'ordre du nm et celui du μm - à des fréquences situées entre 10 Hz et 20 kHz. La méthode la plus adaptée à ces contraintes est l'interférométrie laser à effet Doppler, qui de plus permet de déplacer le point de mesure aisément si nous disposons d'un système avec une tête motorisée.

Nous avons par conséquent opté pour un équipement de type laser à effet Doppler à balayage. Ce système a l'avantage de pouvoir mesurer la vitesse¹ à la surface du spécimen en plusieurs points successivement de manière automatisée. Ainsi, le point de mesure est déplacé rapidement et la mesure du champ de vitesse sur le maillage expérimental est réalisée de manière optimale. Le matériel utilisé est le modèle PSV 200 fabriqué par la marque Polytec (figure 3.2), qui est composé d'un ensemble de mesure complet, comprenant

- une tête laser à balayage, avec caméra vidéo intégrée,
- un boîtier de contrôle et de traitement du signal,
- un ordinateur de contrôle et de mesure, muni d'une carte d'acquisition dynamique à deux canaux,
- un générateur de signal.



Figure 3.2 Système de mesure par interférométrie laser Polytec PSV 200.

Le fonctionnement d'un tel appareil est schématisé à la figure 3.3. La source de lumière utilisée pour cette application est un laser polarisé de type hélium-néon. En

1. Ce système mesurant la vitesse à la surface du spécimen, les fonctions de réponse obtenues ne sont par conséquent pas des réceptances mais des mobilités.

passant dans le diviseur de faisceau D1, elle est séparée en deux signaux à polarisation orthogonale qui serviront comme signaux de mesure et de référence. Le signal de mesure est dirigé sur le spécimen dont la vitesse est à mesurer, réfléchi sur la surface de celui-ci, puis converti en signal électrique par la photodiode PhD1. En même temps, le signal de référence passe par une cellule de Bragg qui permet de modifier sa longueur d'onde, puis est converti en signal électrique par PhD2. Les deux signaux passent par divers diviseurs D1 à D3, le diviseur D3 étant muni d'une lame quart d'onde. La cellule de Bragg est un modulateur optique qui décale la fréquence du faisceau traversant d'une grandeur variable contrôlée f_B afin de générer un battement permettant de mesurer la vitesse du spécimen.

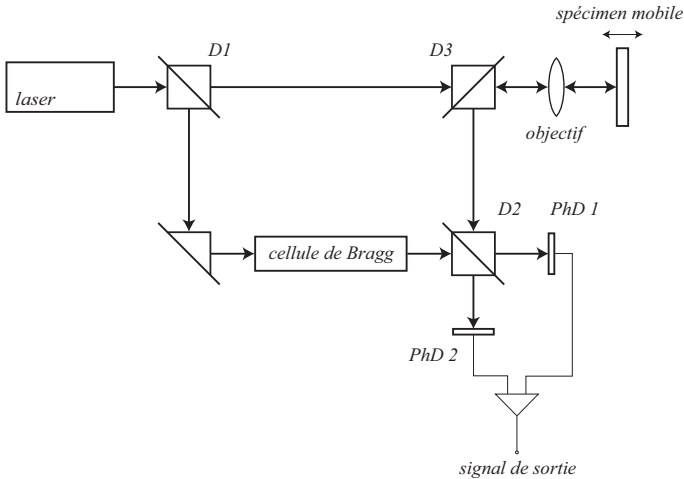


Figure 3.3 Schéma du principe de fonctionnement d'un interféromètre laser.

Les intensités vues par les photodiodes peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2}A^2 \left[1 - \cos\left(2\pi\left(f_B + \frac{2v}{\lambda}\right)t\right) \right] \\
 I_2 &= \frac{1}{2}A^2 \left[1 + \cos\left(2\pi\left(f_B + \frac{2v}{\lambda}\right)t\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

où I représente l'intensité du signal, A et λ l'amplitude et la longueur d'onde du signal du laser, v la vitesse du spécimen mesuré et t le temps. En combinant les signaux issus des deux photodiodes, nous obtenons la tension de sortie V_{out} suivante

$$V_{out} = K \cos\left(2\pi\left(f_B + \frac{2v}{\lambda}\right)t\right) \quad (3.10)$$

avec K une constante dépendant de l'efficacité de conversion opto-électrique des photodiodes.

3.3.3 Spécifications

La chaîne de mesure comprenant le système à interférométrie laser est illustrée à la figure 3.4. La partie excitation, présentée en traits pointillés, sera discutée à la section 3.4. L'ensemble du système est géré par un ordinateur (PC), qui sert non seulement pour le contrôle mais également pour l'acquisition des mesures. Cet ordinateur est connecté d'une part au contrôleur du laser et d'autre part au générateur de signal qui servira pour l'excitation du spécimen. Le contrôleur du laser comporte une partie de traitement du signal qui comprend des filtres passe-bas. Afin de ne pas introduire de déphasage parasite entre la mesure de l'excitation et celle de la réponse, le signal provenant de la mesure de l'excitation passe également dans cette partie du contrôleur.

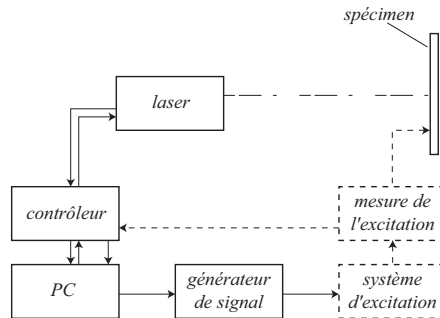


Figure 3.4 Schéma du dispositif de mesure par interférométrie laser.

Tableau 3.5 Plages de mesure du système d'interférométrie laser.

Plage de mesure [mms ⁻¹ V ⁻¹]	Sortie pleine échelle [mm/s]	Résolution [mm/s]	Fréquence maximale [kHz]	Accélération maximale [g]
1	20	0.3	10	70
5	100	0.3	10	200
10	200	0.5	250	15000
25	500	2	250	40000
125	2500	5	250	200000
1000	20000	10	250	1600000

Le système laser utilisé permet d'entreprendre des mesures de 0.5Hz à 250 kHz, avec des résolutions dépendant de la plage de mesure utilisée et décrites dans le tableau 3.5. L'acquisition sur l'ordinateur du signal provenant du système laser est réalisée à travers une carte d'acquisition dynamique à deux voies, d'une résolution de 14 bits avec processeur FFT embarqué permettant d'établir des spectres sur 3200 points. Le générateur de signal de type HP 33120A est piloté par l'ordinateur au travers d'une interface GPIB. L'utilisation d'un signal d'excitation périodique en régime permanent permet de se passer de fenêtres temporelles, ce qui limite les erreurs dues au traitement du signal.

3.3.4 Erreur de mesure

Afin d'assurer une bonne réflectivité du rayon laser, il est nécessaire d'appliquer des éléments réfléchissants à la surface du spécimen, ce qui a l'inconvénient d'ajouter de la masse et de l'amortissement à ce dernier. Pour cela, nous utilisons une bande adhésive réfléchissante, dans un premier temps en recouvrant complètement la surface de mesure du spécimen, puis en limitant son utilisation aux points de mesure uniquement. De cette manière, l'amortissement additionnel devient négligeable. Pour quantifier cet amortissement supplémentaire, nous avons réalisé des essais sur une plaque en aluminium carrée de 13 cm de côté et 5 mm d'épaisseur, avec trois configurations :

- sans adhésif réfléchissant,
- avec adhésif réfléchissant aux points de mesure,
- avec bande adhésive réfléchissante sur l'ensemble de la surface de mesure,

L'aluminium permettant de se passer d'éléments réfléchissants grâce à sa surface dotée d'une bonne réflectivité naturelle. La plaque est excitée par un haut-parleur et suspendue en un point par un fil fin en nylon. Les écarts absolus des facteurs d'amortissement modal entre les configurations avec de l'adhésif réfléchissant et celle avec la plaque nue sont représentés pour chaque mode à la figure 3.6.

Nous remarquons que l'effet de l'adhésif sur la valeur absolue de l'amortissement modal mesuré est inférieur à 0.04 % lorsque l'ensemble de la plaque en est recouvert et est inférieur à 0.02% quand seuls les points de mesure sont dotés d'adhésif. Par conséquent, il est préférable d'utiliser de l'adhésif uniquement aux points de mesure, en particulier lorsque l'amortissement de la structure est faible ou si son épaisseur devient petite par rapport à ses autres dimensions. Notons pour terminer que la masse ajoutée par la bande réfléchissante, qui a un impact sur les fréquences propres de la structure, est prise en compte dans le calcul de la masse volumique du matériau.

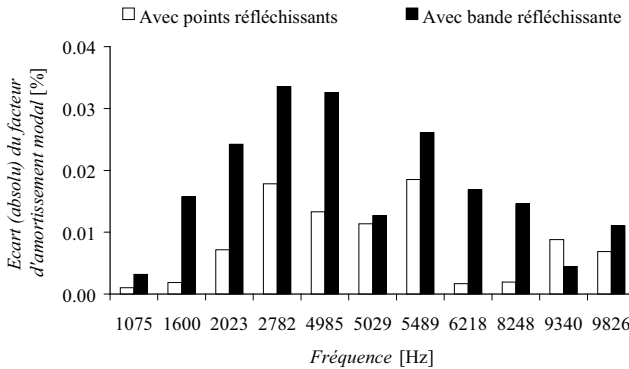


Figure 3.6 Effet de l'ajout d'un adhésif réfléchissant sur les facteurs d'amortissement modal d'une plaque en aluminium.

3.4 Systèmes d'excitation

3.4.1 Types de système d'excitation

L'excitation du spécimen est un point critique lors d'une analyse modale puisque les mesures que nous obtenons sont directement dépendantes du type de système d'excitation choisi. Un tel système doit pouvoir exciter la structure à tester avec une amplitude suffisante sur une large bande de fréquence. Parmi les méthodes d'excitation disponibles, nous pouvons citer

- l'excitation par marteau,
- l'excitation par pot vibrant,
- l'excitation par haut-parleur.

L'excitation par marteau est une excitation par impact. Elle nécessite que la structure à exciter soit fixe à moins que la mesure de la réponse de la structure soit embarquée sur celle-ci (en utilisant par exemple des accéléromètres), afin de ne pas être sensible aux modes de corps rigide. Ce type d'excitation permet d'obtenir des amplitudes de vibrations satisfaisantes, mais sur une bande de fréquence limitée et variable, dépendant de la structure à exciter. Son utilisation n'est pas adaptée à notre travail où nous désirons mesurer une structure en conditions libre-libre, sans masse ajoutée due à des capteurs de mesure de sa réponse, et dans des bandes de fréquence allant de 10Hz à 20 kHz environ.

L'excitation par pot vibrant permet d'exciter la structure au travers d'une liaison mécanique. En général, une tige de faible diamètre est utilisée pour transmettre la force d'excitation du pot vibrant en un point du spécimen testé. L'avantage de ce type d'excitation est qu'il est aisé de mesurer la force transmise au spécimen et par conséquent l'amplitude, la phase et la position de l'excitation peuvent être déterminées précisément. Il est de plus possible de transmettre des forces élevées et d'exciter le spécimen sur une plage de fréquence raisonnablement large, allant de moins de 10 Hz à quelques kHz pour des forces d'excitation importantes (de l'ordre du kN), voire 20 kHz pour des faibles forces d'excitation (de l'ordre de 20N). Le souci majeur que présente l'excitation par pot vibrant provient de la liaison mécanique qui connecte le spécimen à la source d'excitation, puisque cette liaison influence le comportement modal du spécimen et doit donc être prise en compte lors de l'analyse des résultats. Nous avons développé cette solution, décrite à la section 3.6.

Le haut-parleur présente la solution la plus élégante à première vue lorsqu'il s'agit d'utiliser une excitation sans contact. L'excitation est transmise au travers de l'air et permet, en utilisant des systèmes de mesure adéquats, de réaliser une analyse modale du spécimen dans une configuration aussi proche que possible d'une configuration libre-libre. Le désavantage majeur de cette technique est la difficulté de mesure de la force d'excitation transmise au spécimen. L'excitation étant transmise par le biais d'ondes acoustiques, elle n'est pas ponctuelle mais diffuse. Par conséquent, si nous voulions pouvoir la connaître précisément, il faudrait pouvoir mesurer l'amplitude et la phase du champ de pression exercé sur l'ensemble de la surface du spécimen, ce qui n'est pas réalisable. Il s'ensuit que nous devons nous contenter de mesurer l'excitation au moyen d'un microphone placé aussi près que possible de la surface du spécimen et à l'endroit où l'excitation est maximale, soit en face du haut-parleur. Ce désavantage entraîne que le rapport des spectres de réponse du microphone et du système de mesure du déplacement du spécimen n'est en fait qu'une approximation de ses fonctions de réponse en fréquence, les résultats ainsi obtenus se situent donc à cheval entre des fonctions de réponse en fréquence et des réponses opérationnelles. Un autre inconvénient de cette méthode est l'amplitude modeste des vibrations engendrées au sein de la structure, imputable à la transmission par voie aérienne de l'excitation. Malgré cela, nous avons choisi d'utiliser cette méthode d'excitation suite aux bons résultats obtenus précédemment [42].

3.5 Excitation par haut-parleur

3.5.1 Matériel utilisé et spécifications

Nous avons à chaque fois utilisé pour l'excitation un seul haut-parleur. Le haut-parleur est branché sur un amplificateur de courant qui est commandé par le générateur de

signal. L'amplitude et la phase de l'excitation fournie par le haut-parleur sont mesurées par un microphone actif, qui utilise un préamplificateur.

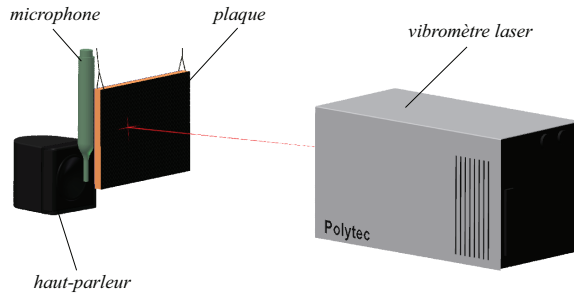


Figure 3.7 Dispositif de mesure avec excitation par haut-parleur.

Haut-parleur

- Bose Acoustimass 6 Series II
- Pioneer TS W253 F

Amplificateur

- Harmann Kardon AVR3000
- Bruel & Kjaer 2718

Microphone

- Micro Earthworks M30BX et préamplificateur Earthworks LAB1

3.5.2 Erreur de mesure avec excitation sans contact

Afin d'évaluer l'erreur de mesure à l'aide du dispositif sans contact, nous avons mesuré les fréquences et facteurs d'amortissement modal de spécimens en aluminium, matériau dont le comportement est proche d'un matériau purement élastique et par conséquent dont l'amortissement est particulièrement faible. Cette méthode permet d'évaluer l'importance de l'amortissement ajouté par les fils, l'air ambiant et la dissipation acoustique. Nous pouvons en effet émettre l'hypothèse que ces sources d'erreur affectent l'amortissement modal mesuré d'une manière absolue et non relative. Nous avons mesuré des facteurs d'amortissement modal inférieurs à 0.12% sur une plage de fréquence allant de 0 à 10 kHz, comme présenté dans la figure 3.8. Dans cette figure, nous avons également inclus les résultats issus d'un modèle numérique isotrope amorti de cette plaque. Il nous est impossible de faire corréler les facteurs d'amortissement modal des modes issus du modèle numérique avec ceux des résultats expérimentaux,

alors que les fréquences et les modes propres sont pourtant très proches. A moins que le modèle utilisé ne soit pas réaliste, cela signifie certainement que, pour de si faibles amortissements, l'erreur de mesure des facteurs d'amortissement modal domine et n'autorise pas de tirer de conclusion sur le niveau réel de l'amortissement interne du spécimen. Rappelons cependant que nous étudions ici un matériau peu amorti, de telle manière à ce que les erreurs de mesure des facteurs d'amortissement modal induites par l'amortissement émanant de la fixation du spécimen et de l'air ambiant, de l'erreur de mesure de l'excitation acoustique et des autres erreurs de mesure deviennent relativement importantes. Nous pouvons ainsi admettre qu'à géométries de spécimen équivalentes, l'erreur de mesure absolue due à l'amortissement induit par les fils et l'air ambiant est inférieure à 0.12%. A titre comparatif, l'aluminium a été souvent étudié et l'on trouve dans la littérature des valeurs de facteur d'amortissement modal proches de 0.06%.

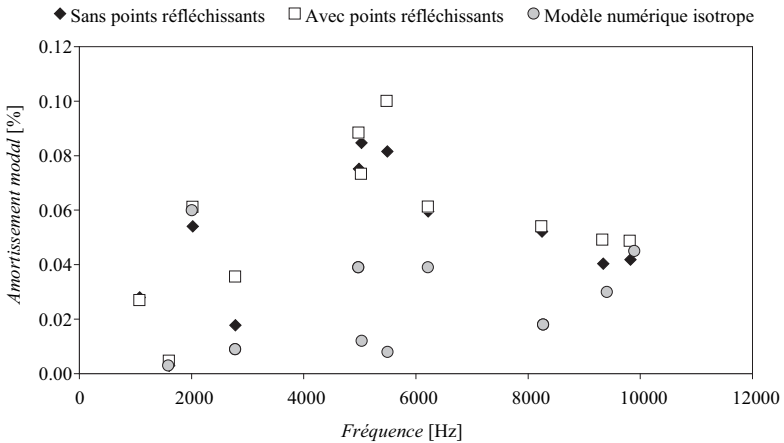


Figure 3.8 Mesure et calcul des facteurs d'amortissement modal sur une plaque en aluminium.

L'erreur de mesure illustrée à la figure 3.8 comprend la dissipation induite par l'excitation acoustique. L'erreur due à cet effet peut par contre être évaluée en comparant l'amortissement modal obtenu d'après la fonction de transfert avec l'amortissement découlant de la mesure du décrément logarithmique. Pour mesurer le décrément logarithmique, nous avons excité séparément chacun des quatre premiers modes avec le haut-parleur dans une configuration identique à celle utilisée pour mesurer la fonction de transfert de la plaque, puis coupé l'excitation et mesuré le signal temporel décroissant en un point de la plaque à l'aide du système de mesure par interférométrie laser. Ainsi, dans la mesure de l'amortissement par le décrément logarithmique, le couplage

acoustique entre la plaque et le haut-parleur n'intervient pas. La différence entre les amortissements obtenus par ces deux méthodes est visible dans la figure 3.9. Elle est inférieure à 0.025% et, par conséquent, montre que la dissipation apportée par le couplage entre le haut-parleur et la plaque est inférieure à cette valeur.

Bien entendu, l'erreur de mesure ne provient pas uniquement de la configuration expérimentale proprement dite mais également du bruit de mesure et de la méthode de post-traitement qui seront discutés à la section 3.7.

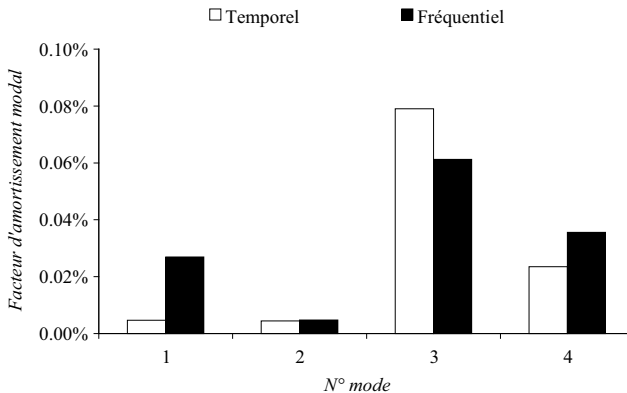


Figure 3.9 Comparaison du facteur d'amortissement modal obtenu dans le domaine temporel avec celui obtenu dans le domaine fréquentiel pour une plaque en aluminium.

3.6 Système d'excitation par pot vibrant

3.6.1 Description

Bien que le système d'excitation par haut-parleur présente de nombreuses qualités, nous avons également développé un système d'excitation utilisant un pot vibrant lié mécaniquement au spécimen à étudier, représenté schématiquement à la figure 3.10. Une excitation par pot vibrant permet d'éliminer les deux défauts rencontrés avec une excitation acoustique sans contact: la connaissance approximative de la force d'excitation et le niveau d'excitation modeste.

Nous avons réalisé un système d'excitation avec comme objectif de modifier aussi peu que possible le comportement modal du spécimen à mesurer. Les fonctions de transfert que nous mesurons représentent le comportement de l'ensemble de la structure situé entre la mesure de la force appliquée et la mesure du déplacement résultant. Cela

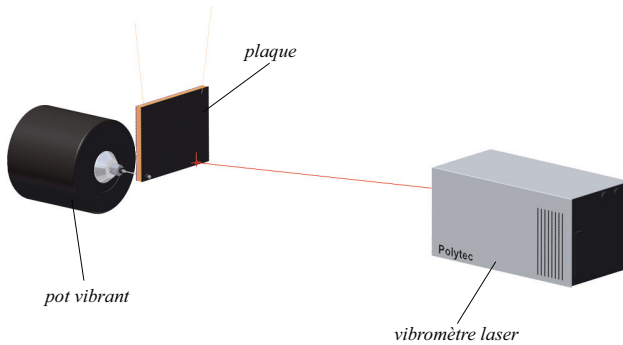


Figure 3.10 Configuration expérimentale avec excitation par pot vibrant.

signifie que ces fonctions de transfert mesurent le comportement de la plaque y compris la partie de la liaison avec le pot vibrant située entre la plaque et l'élément de mesure de la cellule de charge. C'est par conséquent cette dernière partie qu'il convient d'optimiser si nous désirons obtenir des fonctions de transfert aussi proches que possible de celles de la plaque mesurée en conditions libre-libre. Les effets de la liaison sur le comportement modal du spécimen seront ensuite pris en compte en utilisant un modèle numérique du spécimen incorporant cette partie de la liaison.

La manière de réaliser la liaison qui semble a priori être la plus efficace est de lier la cellule de charge directement sur le spécimen. Cependant, il faut garder en tête qu'une cellule de charge permet généralement de mesurer une force dans une seule direction. La lier directement au spécimen aura pour effet de transmettre des forces au spécimen hors direction de mesure du capteur, qui auront une incidence sur le comportement de la structure sans qu'elles ne soient mesurées. Nous avons ainsi choisi de monter le capteur de force directement sur la tête du pot vibrant et de le lier au spécimen à exciter par le biais d'une tige. La tige a pour but de transmettre à la structure uniquement des efforts qui sont mesurés par la cellule de charge: elle doit être rigide en compression et souple en flexion. Nous l'avons dimensionnée de manière à ce qu'elle soit aussi légère que possible tout en transférant la force correctement au spécimen, ce qui nous a amenés à considérer l'utilisation de fibres de carbone unidirectionnelles.

Cette configuration, dont le premier prototype est représenté à la figure 3.11, est peu conventionnelle. Il est en effet commun d'installer la cellule de charge sur la structure à étudier et de la lier au pot vibrant par une tige, mais cela implique qu'il est nécessaire de prendre en compte l'inertie ajoutée par la cellule de charge, en translation comme en rotation. Alors que généralement les structures étudiées en analyse modale sont de dimensions et de masse suffisantes pour que l'effet de l'inertie de la cellule de charge soit négligeable – ce qui rend cette solution pratique –, cette simplification ne se justi-

fié pas dans notre cas où la masse ajoutée par la cellule de charge est considérable relativement à la masse de la structure, de quelques centaines de grammes. Pour cette raison, nous avons voulu limiter autant que possible la masse ajoutée sur la structure en évitant de la lier directement à la cellule de charge.

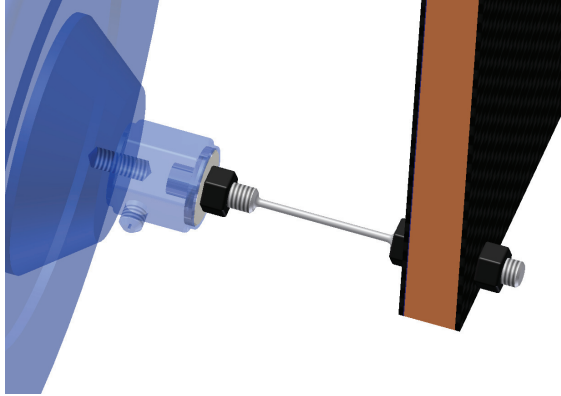


Figure 3.11 Vue de la liaison avec le pot vibrant. Premier prototype avec tige en acier. De gauche à droite sont représentés: le pot vibrant, la cellule de charge, la tige et le spécimen à exciter.

3.6.2 Matériel utilisé

Le matériel utilisé est en grande partie similaire à celui retenu pour l'excitation par haut-parleur. La différence majeure est due à l'utilisation des éléments suivants:

Pot vibrant

- Bruel & Kjaer 4809, 45 N

Amplificateur

- Bruel & Kjaer 2718, 75 VA

Cellule de charge

- Bruel & Kjaer 8230, 45 N.

3.6.3 Etude et choix du type de tige

Afin de déterminer la configuration qui perturbe le moins possible le comportement modal du spécimen à mesurer, nous avons étudié différentes variantes. Nous avons abouti à un système tel que représenté à la figure 3.12. Nous utilisons une tige de faible diamètre qui est collée d'un côté dans un trou réalisé dans le spécimen à exciter et

de l'autre côté dans un insert fileté qui est vissé dans le capteur de force. Cette configuration a l'avantage d'être vraiment légère, la masse ajoutée étant de l'ordre de 10 grammes. Dans cette masse ajoutée sont compris la tige, la colle, l'insert fileté ainsi que la masse dynamique de la cellule de charge. En effet, une partie de la masse de la cellule de charge intervient dans la force qu'elle mesure lors d'une excitation dynamique à cause des effets d'inertie de la partie entre son élément piézoélectrique et son extrémité de mesure. Après plusieurs essais, nous avons choisi d'utiliser les matériaux suivants pour cette liaison:

- tige en carbone-époxy unidirectionnelle pultrudée,
- insert fileté en acier,
- colle de type cyanoacrylate.

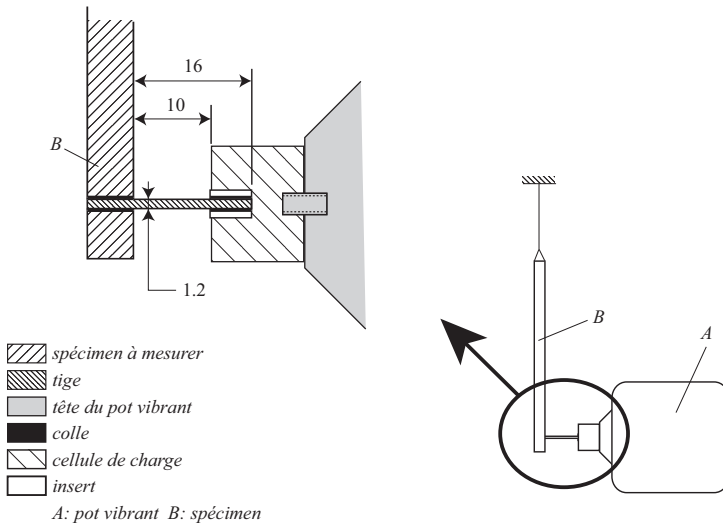


Figure 3.12 Schéma en coupe selon l'axe de la tige de la liaison entre le pot vibrant et le spécimen (les dimensions sont en mm).

Le matériau de la tige a été choisi pour sa rigidité axiale importante, ce qui est nécessaire afin de transmettre correctement les efforts d'excitation. L'insert est réalisé en acier afin également de bien transmettre les efforts et de limiter au maximum l'éventuel ajout d'amortissement, tout comme la colle à base de cyanoacrylate qui permet un collage rapide et un amortissement ajouté plus faible qu'avec une résine époxy.

3.6.4 Erreur de mesure par pot vibrant

Afin de mesurer l'influence de la liaison sur les propriétés modales du spécimen, nous avons comparé aux figures 3.13 et 3.14 les résultats de mesure (fréquences propres et facteurs d'amortissement modal) d'une même plaque en aluminium selon les méthodes d'excitation par pot vibrant et par haut-parleur.

Nous remarquons que certains modes sont très peu influencés par la liaison au pot vibrant: il s'agit des modes pour lesquels une ligne nodale passe par le point d'excitation et où la tige reste fixe par rapport au spécimen. D'autres modes, comme par exemple le huitième ou le neuvième, ont un facteur d'amortissement modal mesuré avec une excitation par pot vibrant qui peut être plus de deux fois supérieur par rapport à ceux obtenus par une excitation de type haut-parleur. Cependant, la plupart des modes excités par pot vibrant ont une forme modale légèrement différente en comparaison avec celle obtenue pour une excitation par haut-parleur, ce qui peut également avoir une influence sur les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modal.

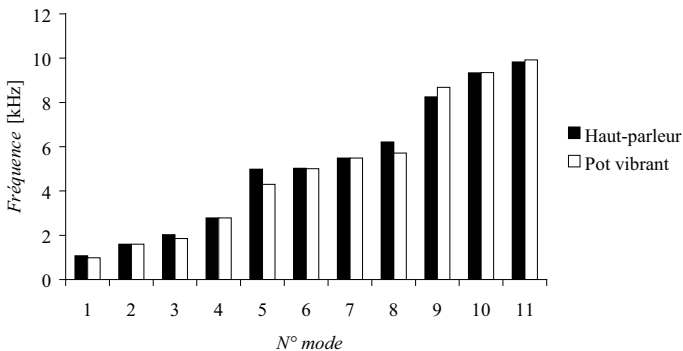


Figure 3.13 Comparaison des fréquences propres obtenues avec un haut-parleur et un pot vibrant.

En comparant ces mesures, il faut garder en tête que les facteurs d'amortissement modal mesurés proviennent majoritairement de la liaison, le spécimen étant en aluminium qui est un matériau très peu amortissant. L'erreur sur les facteurs d'amortissement modal induite par la liaison peut par conséquent être estimée comme inférieure à 0.10% en comparaison avec l'excitation par haut-parleur (figure 3.14) et l'erreur totale sur les facteurs d'amortissement modal considérée comme inférieure à 0.16%. L'excitation par pot vibrant étant avant tout destinée aux spécimens plus fortement amortis, nous pouvons dire qu'elle reste une alternative intéressante au haut-parleur.

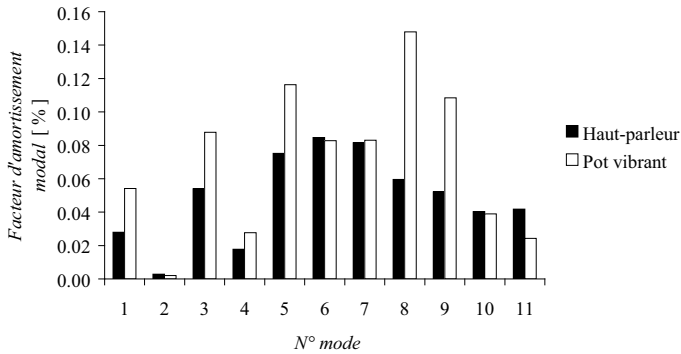


Figure 3.14 Comparaison des facteurs d'amortissement modal obtenus avec un haut-parleur et un pot vibrant.

3.7 Extraction par curve fitting

Nous avons choisi de nous servir d'un logiciel commercial (Me'scope VES) pour mener à bien la phase d'extraction des propriétés modales à partir des mesures. Ce logiciel utilise la méthode de fraction rationnelle de polynômes décrite au paragraphe 3.2.3. Notre processus d'analyse modale se déroule ainsi comme suit:

- importation des fonctions de transfert mesurées,
- importation du maillage expérimental,
- analyse modale,
- exportation des paramètres modaux et des formes modales.

Notre procédure pour estimer les paramètres modaux à l'aide de ce logiciel est la suivante. Ayant l'ensemble des fonctions de transfert du modèle expérimental à disposition, nous choisissons comme référence la fonction correspondant au point du spécimen où la plupart des modes ont une amplitude non nulle. A partir de cette fonction de réponse en fréquence, nous repérons un à un les modes de la structure, généralement visibles par un pic sur le graphe d'amplitude et une chute de phase de 180° . Pour chacun des modes, nous sélectionnons une zone qui servira de zone d'ajustement, qui s'étend du début à la fin de la chute de phase environ. Lorsque plusieurs modes sont très proches, nous les intégrons tous dans cette zone. Il est clair que nous tentons de sélectionner les zones où le bruit de mesure est le plus faible. Ensuite, il est nécessaire de fournir au logiciel le nombre de modes présents dans la zone afin qu'il puisse d'abord estimer les fréquences et facteurs d'amortissement modal, puis dans un second temps les résidus qui permettent de reconstruire la forme modale. Notons ici que le logiciel utilise une méthode globale en tirant parti de l'ensemble des fonctions de transfert afin d'estimer les propriétés modales. Une fois ces propriétés définies, deux méthodes s'offrent à nous pour juger de la qualité de l'estimation:

- la comparaison de la courbe ajustée avec les résultats expérimentaux,
- le diagramme d'Argand.

La première méthode est plutôt usuelle et permet la confrontation de la fonction de transfert mesurée avec celle issue du modèle théorique utilisé pour l'analyse modale. La deuxième est basée sur une représentation complexe des vecteurs propres: les résidus identifiés en chaque point du maillage expérimental pour un mode donné sont représentés sous forme de vecteurs dans un plan complexe. Cette représentation, appelée diagramme d'Argand (figure 3.15), permet de se rendre compte de la complexité modale. Lorsque cette complexité modale est faible, la différence de phase entre chaque vecteur est soit proche de 0° , soit proche de 180° , l'ensemble des vecteurs étant ainsi aligné. Plus la complexité modale augmente, moins l'alignement de ces vecteurs est parfait. Une complexité modale importante est signe d'une mauvaise identification des paramètres modaux, les modes les mieux déterminés étant par conséquent ceux montrant une très faible complexité modale. Une faible complexité modale signifie que l'ensemble des points du modèle expérimental se déplacent quasiment en phase.

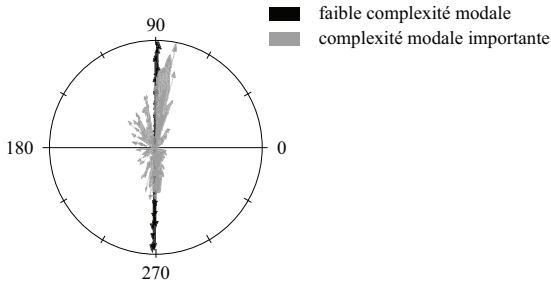


Figure 3.15 Diagramme d'Argand typique pour deux modes avec une faible et une importante complexité modale.

Il peut paraître étonnant qu'un mode d'une structure amortie présente une complexité modale négligeable. En fait, pour que la complexité modale puisse être attribuée au comportement réel de la structure et non à une erreur de mesure ou d'identification des propriétés modales, il faut que la structure présente un amortissement important et réparti d'une manière non homogène dans la structure, ce qui n'est pas le cas des structures généralement étudiées en mécanique.

3.7.1 Qualité des paramètres extraits

Il est délicat de se faire une idée de la qualité des paramètres modaux obtenus par analyse modale. Même si les courbes ajustées correspondent bien aux fonctions de transfert et que la complexité modale est faible, nous pouvons difficilement quantifier la précision des résultats obtenus. Une manière de procéder est de juger la répétabilité de la méthode. Nous avons pour plusieurs spécimens effectué une série de 5 analyses modales successives, la dispersion des résultats ainsi obtenus fournissant une indication quant à l'erreur commise lors de l'estimation de ces paramètres. Ces résultats sont donnés pour les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modal de chacun des 5 spécimens dans le tableau 3.16 sous la forme d'écart-types relatifs moyennés sur l'ensemble des modes mesurés. Par écart-type relatif, nous entendons l'écart-type d'un ensemble de valeurs divisé par la moyenne de ces valeurs. Les échantillons étudiés sont présentés au chapitre 6 et ne sont par conséquent pas décrits ici. Il s'agit cependant à chaque fois de spécimens en forme de plaque rectangulaire. Les estimations des fonctions de réponse en fréquence sont réalisées en prenant la moyenne de 3 mesures.

Tableau 3.16 Quantification de la qualité des paramètres extraits. Valeurs moyennes sur l'ensemble des modes mesurés pour chaque spécimen (HP = haut-parleur, PV = pot vibrant).

Spécimen	Excitation	Plage de fréquence [Hz]	Fréquences propres	Facteurs d'amortissement modal	
			Ecart-type relatif moyen [%]	Moyenne [%]	Ecart-type relatif moyen [%]
PMMA A	HP	0 - 300	0.09	2.75	2.0
Dyneema	HP	0 - 1800	0.12	0.335	10.1
Dyneema	PV	0 - 1800	0.01	0.398	1.0
Carbone A	HP	0 - 9000	0.06	0.695	10.0
Carbone B	HP	0 - 9000	0.03	0.727	6.5

Nous pouvons remarquer que l'écart-type relatif moyen sur les facteurs d'amortissement modal se situe entre 2 et 10% pour une excitation par haut-parleur (PV) et descend à 1% dans le cas excité par pot vibrant. Cette valeur est dans tous les cas nettement supérieure à celle obtenue sur les fréquences propres, qui ne dépasse quant à elle jamais 0.2%. La figure 3.17 permet de visualiser l'écart-type sur les facteurs d'amortissement modal pour chacun des modes et chacun des spécimens.

Ces résultats nous montrent que les facteurs d'amortissement modal ne peuvent pas être déterminés avec le même degré de précision que les fréquences propres. Alors que les fréquences propres sont facilement estimées avec moins de 1% d'erreur, les facteurs d'amortissement modal souffrent d'une erreur plus importante et – surtout – varient en fonction du mode concerné. Nous pouvons cependant voir que certains

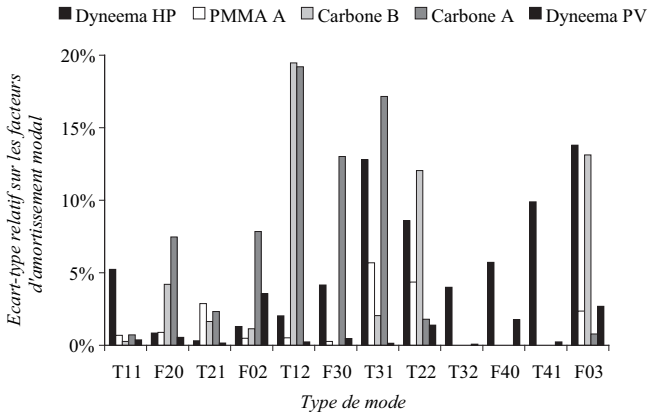


Figure 3.17 Ecart-type relatif à la moyenne des facteurs d’amortissement modal identifiés en fonction du type de mode (F désigne les modes de flexion, T ceux de torsion et les deux chiffres suivants donnent le nombre de lignes nodales dans les deux directions de la plaque).

modes ont un facteur d’amortissement modal présentant un écart-type faible, de l’ordre de quelques centièmes. Les facteurs d’amortissement modal du spécimen en Dyneema excité par un pot vibrant se montrent par exemple très stables, avec des écarts-types relatifs en-dessous de 5% pour l’ensemble des modes et inférieurs à 1% pour la majorité de ceux-ci.

La raison principale expliquant une erreur plus importante lors de la détermination des facteurs d’amortissement modal que lors de celle des fréquences propres est le niveau de bruit des fonctions de transfert. A titre d’exemple, les fonctions de transfert en un point de la plaque en Dyneema sont représentées à la figure 3.18 pour les deux types d’excitation. Nous pouvons y apercevoir la différence de qualité des fonctions de réponse en fréquence obtenues par les deux méthodes d’excitation, la courbe correspondant au haut-parleur étant entâchée de bruit aux faibles amplitudes.

De manière générale, les parties proches d’un pic de résonance sont toujours celles comportant le moins de bruit dans une courbe de réponse en fréquence expérimentale. C’est en effet à ces endroits que l’amplitude de vibration du spécimen étudié est maximale, ce qui entraîne une mesure de sa réponse de bonne qualité. Par contre, en s’éloignant d’une fréquence de résonance, l’amplitude de vibration du spécimen décroît rapidement et par conséquent le rapport signal/bruit de la mesure de sa réponse diminue également rapidement. Ainsi, les fréquences propres sont généralement bien identifiées à partir de la fonction de réponse en fréquence puisqu’elles nécessitent l’utilisation des zones les mieux déterminées de celle-ci. Par contre, pour extraire

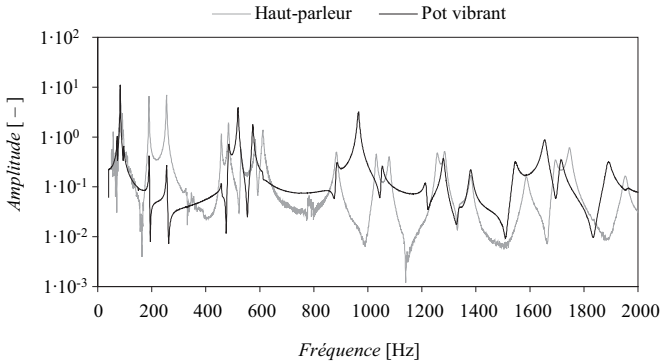


Figure 3.18 Comparaison des fonctions de transfert en un point pour une excitation par haut-parleur et par pot vibrant, plaque en Dyneema.

l'amortissement modal, il est nécessaire de considérer une zone plus étendue autour du pic de résonance où la qualité de la mesure est moins bonne.

D'après cette analyse et en se référant à la figure 3.17, nous pouvons affirmer qu'avec notre configuration de mesure, l'erreur commise sur la mesure des facteurs d'amortissement modal peut atteindre 20% avec une excitation par haut-parleur et 5% avec une excitation par pot vibrant. Ces erreurs sont importantes et il s'agit certainement d'un point qui nécessite d'être amélioré par la suite. Cependant, rappelons que les amortissements mesurés sont plutôt faibles, ce qui explique en partie l'erreur relative élevée.

Bien que l'excitation par pot vibrant autorise une estimation des facteurs d'amortissement modal bien plus précise que son homologue utilisant un haut-parleur, il ne faut toutefois pas oublier que la liaison mécanique nécessaire à la transmission de l'excitation ajoute de l'amortissement parasite, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.6.4, qui dégrade la qualité des résultats.

3.8 Résumé et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre dispositif de mesure expérimental. Nous avons choisi un système de mesure limitant au maximum les contacts entre le spécimen étudié et son environnement. La mesure des vibrations est réalisée avec un vibromètre laser à balayage, qui permet d'effectuer des mesures séquentiellement en plusieurs points de la pièce analysée. Deux types de méthode d'excitation sont développés, en utilisant soit un haut-parleur, soit un pot vibrant.

Nous avons tenté d'estimer l'erreur de mesure en réalisant divers essais avec des échantillons en aluminium, connu pour avoir un très faible amortissement interne. De cette manière, nous avons évalué l'erreur absolue induite par les suspensions du spécimen, l'air ambiant et le couplage mécano-acoustique sur les facteurs d'amortissement modal inférieure à 0.12%. Dans le cas d'une excitation par pot vibrant, l'erreur due à l'amortissement ajouté par la liaison développée dans ce travail mène à une erreur absolue totale sur les facteurs d'amortissement modal de moins de 0.16%.

Nous avons également remarqué qu'une source d'erreur importante provenait de l'extraction des données modales à partir des fonctions de réponse en fréquence mesurées. En effectuant plusieurs extractions à partir d'un jeu de fonctions de transfert identiques, nous avons pu observer pour certains modes un écart-type pouvant aller jusqu'à 20% du facteur d'amortissement modal moyen mesuré. Le bruit de mesure présent dans les fonctions de réponse en fréquence mesurées explique en majeure partie cette erreur. Cette dernière est néanmoins plus faible dans le cas de l'excitation par pot vibrant puisqu'elle permet d'aboutir à une qualité des fonctions de transfert bien meilleure que pour l'excitation par haut-parleur.

Nous recommandons par conséquent de privilégier l'excitation par haut-parleur pour les structures faiblement amorties (moins de 1% d'amortissement modal environ) afin d'éviter l'amortissement ajouté par la liaison du spécimen au pot vibrant. Pour les autres structures, le pot vibrant permet de limiter considérablement le bruit présent dans les fonctions de réponse en fréquence mesurées et offre une alternative intéressante au haut-parleur.

Chapitre 4

Modélisation numérique des spécimens

Dans ce chapitre sont présentés les différents modèles numériques utilisés afin de simuler le comportement mécanique des spécimens à identifier.

4.1 Objectifs

La modélisation numérique des spécimens nécessaire dans une routine d'identification doit satisfaire des critères spécifiques à ce type de démarche. Dans un premier temps, il est évident que le modèle numérique doit être capable de simuler le comportement mécanique d'un spécimen avec une précision et un degré de réalisme suffisants pour que son utilisation dans la routine d'identification soit sensée. La qualité des résultats de l'identification sera directement influencée par la qualité du modèle numérique. Ensuite, la résolution du problème numérique devra s'effectuer suffisamment rapidement afin que le processus d'identification puisse se dérouler dans des temps raisonnables. La résolution du modèle numérique est réalisée un grand nombre de fois lors d'une identification, le temps de calcul pour exécuter cette résolution a par conséquent un impact important sur le temps d'identification total.

Afin de chiffrer les performances requises pour ce modèle, il tient de prendre en compte l'erreur commise sur les mesures expérimentales. Nous nous fixons ici pour objectif d'obtenir un modèle numérique qui permette d'estimer les fréquences propres avec moins de 2% d'erreur. Les facteurs d'amortissement modal nécessitent moins de précision puisqu'il est délicat de les mesurer avec peu d'erreur, comme nous l'avons vu au chapitre 3. Ainsi, 5% d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal sont encore tolérables. Le temps de calcul est également un critère important, sachant que lors d'une identification, une centaine de solutions du modèle numérique sont calculées.

lées. Pour garantir un temps d'identification convenable, il est nécessaire d'avoir un modèle numérique qui puisse être résolu en moins d'une minute. Finalement, les modèles numériques développés ici doivent pouvoir être paramétrés afin d'être intégrés dans la routine d'identification. Nous désirons modéliser des spécimens de forme rectangulaire et munis d'une épaisseur constante avec des propriétés constitutives orthotropes homogènes.

4.2 Modèle de plaque pour haut-parleur

Dans le cas d'un spécimen rectangulaire d'épaisseur constante excité par un système acoustique et suspendu par des fils fins, le modèle numérique équivalent se réduit à une plaque rectangulaire, puisque l'influence des fils est jugée comme négligeable et l'excitation se transmet sans contact mécanique. Deux maillages sont utilisés, suivant qu'il est choisi de modéliser la plaque avec des éléments de type coque ou de type solide.

Pour les coques, nous utilisons des éléments finis quadratiques à 9 nœuds avec une approximation du champ de déplacement d'ordre p dans l'épaisseur. Dans ce cas, si nous considérons n et m éléments finis dans la longueur et la largeur de la plaque respectivement, le maillage sera constitué de $(2n+1)(2m+1)$ nœuds, tous situés dans le plan moyen du spécimen. A chacun de ces nœuds seront associés les $3(p+1)$ degrés de liberté de la formulation PSDT, qui seront tous utilisés pour le calcul, mais dont seul le degré de liberté représentant le déplacement de la coque dans la direction de l'épaisseur sera extrait par la procédure d'identification, étant donné que nous nous intéressons seulement aux modes hors plan.

Pour la modélisation en éléments solides, la différence majeure avec les coques est que nous avons cette fois plusieurs nœuds selon l'épaisseur de la plaque. Le nombre de degrés de liberté par nœud pour ce type d'éléments finis est de 3 – les nœuds n'ayant pas de degré de liberté de rotation –, mais nous avons en contrepartie au minimum trois fois plus de nœuds par élément que dans le modèle de type coque.

Quel que soit le type d'élément utilisé, les conditions aux limites libres engendrent la présence de 6 modes de corps rigide (3 modes de translation et 3 modes de rotation) à fréquence nulle parmi les modes calculés.

Pour comparer les différents types de maillage, nous nous sommes basés sur des propriétés proches d'une plaque en époxy renforcée unidirectionnellement par des fibres de carbone. Cette plaque est carrée, avec 135 mm de côté et 8.3 mm d'épaisseur. Elle se prête bien à cette étude de par son orthotropie et aussi par son épaisseur qui, liée aux modules de cisaillement transverse assez faibles, entraîne une bonne influence des effets du cisaillement transverse sur son comportement modal. Les propriétés complexes retenues (modèle d'amortissement structurel) sont données au tableau 4.1.

Tableau 4.1 Propriétés de matériau utilisées pour la modélisation de la plaque.

	E_1	E_2, E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}, G_{31}	G_{23}
Stockage [GPa] ou [—]	90	7.4	0.36	0.76	0.03	3.6	2.1
Tan δ [—]	0.005	0.015	-0.1	0	0	0.017	0.017

4.2.1 Modèle en éléments de coque

Nous allons ici chercher le maillage optimal pour une identification utilisant un modèle numérique réalisé en éléments de coque. Les éléments finis utilisés sont développés dans le logiciel MAFE et ont été validés au chapitre 2. Nous pouvons donc nous contenter de prendre comme référence un modèle réalisé avec MAFE, le code utilisé dans la routine d'identification, avec un maillage suffisamment fin. Il a déjà été montré [42] que pour des plaques modérément épaisses, un ordre p fixé à 3 donnait une précision optimale en regard du temps de calcul. Nous n'allons donc pas nous intéresser à l'effet de ce paramètre, mais varier uniquement la taille du maillage en gardant cet ordre p fixé à 3.

Le modèle de référence est un modèle réalisé avec 25 éléments par côté, ce qui représente un total de 625 éléments et 31'212 degrés de liberté. La comparaison des résultats obtenus par des modèles de maillages plus grossiers avec ce dernier est visible dans la figure 4.2. Celle-ci montre l'évolution du temps de calcul et des erreurs maximales commises sur les fréquences propres et sur les facteurs d'amortissement modal (FAM). Le temps de calcul est donné relativement au temps le plus court obtenu dans cette section 4.2, en l'occurrence pour un modèle avec 5 éléments finis solides par côté et un seul élément dans l'épaisseur. Les erreurs sont calculées relativement aux résultats du modèle de référence, en prenant pour chaque modèle l'erreur maximale sur les 15 premiers modes hors plan.

L'évolution des erreurs montre qu'au-dessous de 10 éléments finis par côté de la plaque, la précision des résultats se dégrade rapidement et qu'au-dessus de 15 éléments finis par côté, c'est le temps de calcul qui devient critique. Avec un maillage utilisant 10 éléments finis par côté de la plaque, l'erreur maximale commise sur les fréquences propres est de 1.5%, ce qui est tolérable, alors que celle commise sur les facteurs d'amortissement modal est moins critique avec 0.7%. Il est donc préférable d'utiliser un modèle avec un nombre d'éléments finis au moins égal à 10 par côté, en veillant tout de même à garder un temps de calcul raisonnable puisque celui-ci se répercutera directement sur le temps d'identification.

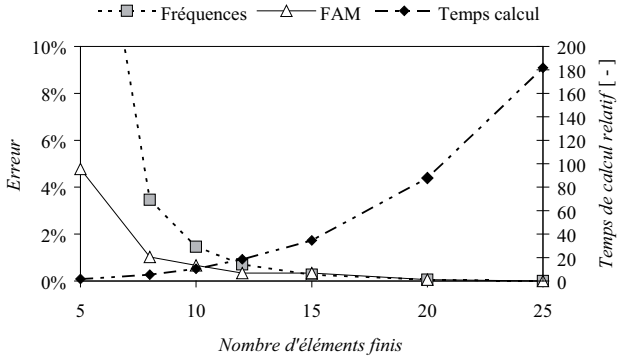


Figure 4.2 Comparaison du temps de calcul et de l'erreur maximale commise sur l'estimation des fréquences propres (fréquences) et facteurs d'amortissement modal (FAM) pour les 15 premiers modes avec des éléments PSDT.

4.2.2 Modèle solide

Pour le modèle où la plaque est discrétisée en éléments solides, nous avons choisi comme modèle de référence un modèle avec 25, 25 et 3 éléments finis selon la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque, respectivement. Pour ce modèle de référence, nous avons pris un maillage le plus fin possible tout en gardant le problème soluble sur un ordinateur de bureau conventionnel en utilisant des éléments finis solides quadratiques sérendipiens à 20 nœuds. La taille de ce modèle, qui contient 29'796 degrés de liberté, est limitée par la quantité maximale de mémoire vive allouable sur notre ordinateur, puisque MAFE stocke l'ensemble du problème en mémoire vive. La résolution d'un modèle aussi fin est cependant déjà suffisamment lente pour qu'il ne soit pas concevable d'utiliser un tel maillage dans une procédure d'identification.

Nous avons confronté à ce modèle de référence plusieurs modèles de résolutions plus faibles, tous réalisés avec des éléments finis lagrangiens à 27 nœuds. Dans un premier temps, nous avons comparé plusieurs finesses de maillage avec uniquement un élément dans l'épaisseur (figure 4.3). Ces maillages, qui ont toujours le même nombre d'éléments selon les deux directions de la structure, ont de 5 à 25 éléments par côté de la plaque. Nous pouvons observer que ces modèles ne convergent jamais vers la solution du modèle de référence. L'erreur maximale commise sur les fréquences propres des 15 premiers modes reste toujours supérieure à 2.4%, alors que les facteurs d'amortissement modal (FAM) sont au mieux entachés d'une erreur de 5.2%. Ces erreurs résiduelles sont gênantes, puisqu'elles sont trop importantes pour pouvoir se servir de ce modèle dans une identification précise. Elles proviennent du nombre trop faible d'éléments utilisés dans l'épaisseur de la plaque, limité à un dans ce cas.

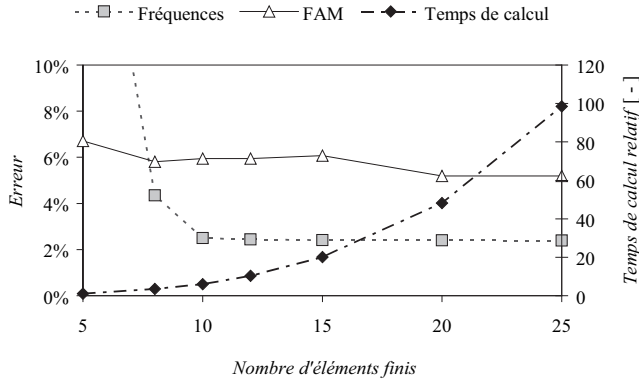


Figure 4.3 Comparaison du temps de calcul et de l'erreur maximale commise sur l'estimation des fréquences propres (fréquences) et facteurs d'amortissement modal (FAM) pour les 15 premiers modes avec une modélisation en éléments solides contenant un élément dans l'épaisseur.

Afin d'améliorer la précision du modèle, il est intéressant d'augmenter le nombre d'éléments finis dans l'épaisseur. Passer d'un seul élément quadratique dans l'épaisseur à deux éléments permet ainsi d'avoir une augmentation claire de la précision du modèle. La figure 4.4 montre en effet que les modèles utilisant deux éléments dans l'épaisseur offrent des résultats qui convergent bien vers ceux du modèle de référence. L'erreur maximale pour le modèle à 25 éléments par côté est de 0.14% pour les fréquences et de 0.36% pour les facteurs d'amortissement modal (avec 15 modes pris en compte). Cela signifie que deux éléments dans l'épaisseur suffisent pour notre application puisque dans ces conditions l'erreur est inférieure aux erreurs de mesure commises sur l'estimation des paramètres expérimentaux correspondants.

D'après ces résultats, les modèles solides les plus adéquats pour une utilisation dans le cadre d'une identification mixte numérique-expérimentale sont ceux avec une résolution comportant entre 10 et 15 éléments par côté de la plaque et deux éléments dans l'épaisseur.

En comparant les modélisations en éléments finis de coque et en éléments solides, nous pouvons remarquer d'après les temps de calculs relatifs que le modèle solide avec deux éléments finis dans l'épaisseur reste moins performant que le modèle de coque équivalent.

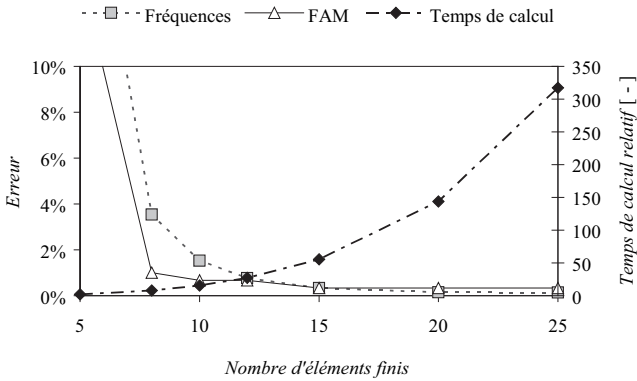


Figure 4.4 Comparaison du temps de calcul et de l'erreur maximale commise sur l'estimation des fréquences propres (fréquences) et facteurs d'amortissement modal (FAM) pour les 15 premiers modes avec des éléments solides et 2 éléments dans l'épaisseur.

4.3 Modèle de plaque pour excitation par pot vibrant

4.3.1 Création d'un modèle

Nous avons déjà remarqué au chapitre 3 que pour le cas où l'excitation du spécimen est réalisée par pot vibrant, il est nécessaire d'utiliser un modèle qui tienne compte de la liaison au pot vibrant. Comme décrit au chapitre 3, les fonctions de transfert mesurent le comportement de la structure comprise entre les points de mesure de l'excitation et de la réponse. Nous avons de ce fait intégré dans le modèle numérique développé ici la tige et une masse ajoutée représentant les effets de l'insert entre la tige et le capteur ainsi que la masse dynamique de ce dernier (soit la masse du capteur située entre l'élément de mesure piézoélectrique et le point de fixation de la cellule de charge côté mesure).

Pour limiter au maximum le temps de résolution du modèle numérique, nous avons cherché à éviter de modéliser la tige avec des éléments finis de type solide. Cette solution aurait en effet requis un nombre important d'éléments pour pouvoir obtenir une modélisation correcte d'une géométrie cylindrique de diamètre très fin par rapport aux dimensions du modèle et aurait nécessité une transition délicate à réaliser entre la tige et la plaque. Une solution élégante pour limiter au mieux la taille du modèle sans faire de concession sur la précision est l'utilisation d'éléments de poutre.

Les éléments de poutre sont obtenus en utilisant la théorie des poutres basée sur la formulation de Bernoulli-Euler. Ils diminuent le nombre de degrés de liberté, puisqu'ils

permettent par exemple de passer des huit nœuds à trois degrés de liberté d'un élément fini solide linéaire à deux nœuds avec six degrés de liberté, et d'éviter un mauvais conditionnement numérique pouvant survenir avec des éléments finis solides fortement élancés.

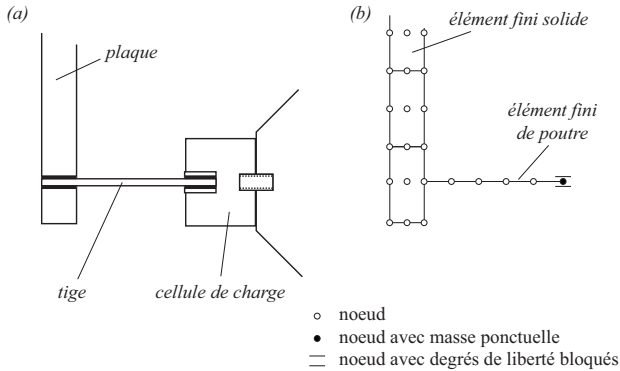


Figure 4.5 Schémas de la liaison de la plaque au pot vibrant (a) et du maillage d'éléments finis correspondant (b).

La modélisation est vue en coupe à la figure 4.5, avec la plaque discrétisée en éléments solides quadratiques à 27 nœuds. Le maillage obtenu en combinant des éléments de type solide ou coque avec des éléments de type poutre a l'avantage d'être d'une grande simplicité, ce qui en fait un candidat idéal pour réaliser des modèles de dimensions paramétrées.

Nous avons sélectionné pour ce modèle une méthode originale pour effectuer la liaison entre les éléments finis de type poutre de la tige et ceux de type solide ou coque de la plaque. Alors qu'usuellement cette liaison serait réalisée en recourant aux éléments de transition, qui permettent de connecter des éléments finis de types différents entre eux, nous avons choisi de connecter directement les éléments finis de poutre aux éléments solides ou de coque. Cette manière peu conventionnelle de procéder se justifie par la volonté d'obtenir un modèle aussi performant que possible du point de vue du temps de calcul et de la précision des résultats. De plus, nous n'avons pas d'élément fini à disposition pour lier de manière directe un élément fini de poutre à un élément fini de coque, normalement à la surface de l'élément de coque. L'utilisation d'éléments de transition aurait augmenté la complexité du modèle puisqu'il aurait fallu effectuer une transition coque-solide puis solide-poutre. Nous avons préféré modifier le code d'éléments finis afin de pouvoir connecter directement un élément fini de poutre à un nœud d'un élément solide ou de coque, en attribuant au nœud commun le nombre de degrés de liberté de l'élément en contenant le plus.

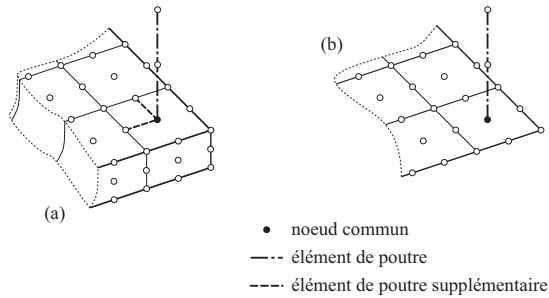


Figure 4.6 Maillages d'éléments finis pour une modélisation de la plaque en éléments solides (a) ou de coque (b).

Le noeud commun entre l'élément fini de poutre et l'élément fini solide ou de coque (figure 4.6) permet de lier les trois degrés de liberté de déplacement des deux types de formulation. Pour les trois degrés de liberté de rotation, un problème se pose pour les éléments finis solides qui, contrairement aux éléments de poutre ou de coque PSDT, ne sont pas pourvus de degrés de liberté de rotation aux noeuds. Pour contourner ce problème, nous utilisons dans le cas solide deux éléments de poutre supplémentaires qui permettent de transmettre les rotations entre la plaque en éléments solides et la poutre.

4.3.2 Validation numérique

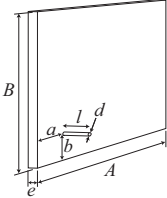
Afin de valider notre modèle, nous l'avons comparé à un modèle réalisé à l'aide du logiciel Abaqus®. Nous avons pris le cas d'une plaque en époxy renforcée de manière unidirectionnelle par des fibres de carbone. Les propriétés utilisées pour la tige et pour la plaque sont données dans le tableau 4.7. Pour la plaque, elles sont en fait identiques à celles retenues à la section 4.2.

Tableau 4.7 Propriétés de matériaux utilisées (la tige est considérée comme isotrope).

	E_1 [GPa]	E_2, E_3 [GPa]	ν_{12} [-]	ν_{23} [-]	ν_{31} [-]	G_{12}, G_{31} [GPa]	G_{23} [GPa]
Plaque	90	7.4	0.36	0.76	0.03	3.6	2.1
Tige	125	-	0.38	-	-	-	-

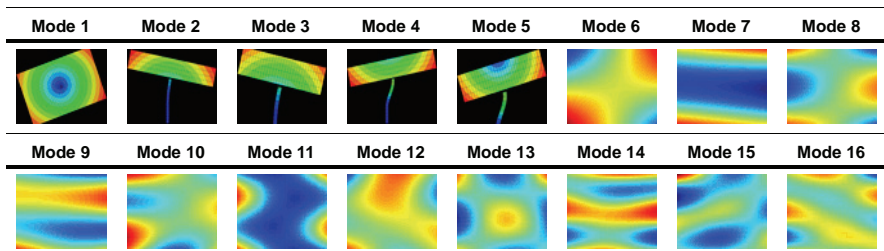
Les dimensions du modèle sont indiquées dans le tableau 4.8. Pour la tige, la longueur donnée correspond à la longueur hors plaque. La masse ajoutée en bout de tige est de 9.5 g et des conditions aux limites sont appliquées en cette extrémité de manière à laisser libre uniquement le déplacement axial de la tige, afin de simuler les conditions aux limites réelles dues à la liaison avec la cellule de charge.

Tableau 4.8 Dimensions de la plaque modélisée.

Schéma	Dimension	Valeur [mm]
	Longueur plaque (A)	135
	Largeur plaque (B)	135
	Epaisseur plaque (e)	8.3
	Longueur tige (l)	15
	Diamètre tige (d)	1.2
	Position tige (a)	6.6
	Position tige (b)	6.8

Nous avons confronté les deux types de modélisation – avec la plaque en éléments de type solide ou coque – à un modèle équivalent réalisé avec Abaqus®. Dans les modèles Abaqus®, nous avons utilisé le même type d'éléments finis (éléments C3D20 et S8R selon la nomenclature Abaqus®) et de discrétisation pour la plaque que pour les modèles MAFE, alors que la tige est réalisée en éléments solides avec un maillage fin, comportant 2170 éléments solides quadratiques sérendipiens à 20 nœuds. A titre de comparaison, nos modèles développés sous MAFE représentent la même tige avec uniquement 7 éléments de poutre hermitiens à deux nœuds. Dans le modèle Abaqus®, la tige est liée à la plaque en son extrémité en utilisant des contraintes de type «tie» qui permettent de lier les degrés de liberté de deux zones de la structure. Notons toutefois que le logiciel Abaqus® ne permet pas de prendre en compte l'amortissement structural du matériau, de sorte que la comparaison des résultats avec MAFE ne pourra être établie que pour les fréquences et modes propres.

Tableau 4.9 Forme des modes numériques obtenus (les cinq premiers modes sont les modes de la tige, les autres des modes hors plan de la plaque).



Alors que les résultats numériques pour la plaque en configuration libre-libre montraient la présence de six modes de corps rigide, les conditions aux limites appliquées à

l'extrémité de la tige entraînent que seul un mode de corps rigide subsiste: la translation selon la direction axiale de la tige. Les autres modes de corps rigide deviennent des modes où seule la tige se déforme. Les formes modales pour les 16 premiers modes sont données au tableau 4.9. Dans ce tableau sont représentés les 5 premiers modes où seule la tige se déforme ainsi que les 11 suivants où nous observons les vibrations propres selon la direction hors plan de la plaque. Par rapport aux vibrations en conditions libre-libre, les modes de la plaque excitée par un pot vibrant ont dans la plupart des cas perdu leur symétrie à cause de la prise en compte de la tige dans le modèle.

Plaque en éléments solides

La comparaison des fréquences propres obtenues par le modèle MAFE avec la plaque modélisée en éléments solides et par le modèle équivalent sous Abaqus® est montrée dans le tableau 4.10. Nous pouvons remarquer une bonne corrélation des modes 1 à 5, où seule la tige se déforme. L'erreur commise sur ces 5 premières fréquences propres est inférieure à 0.4%, alors que la modélisation dans MAFE utilise environ 100 fois moins de degrés de liberté pour modéliser la tige. Les 11 modes suivants, où la plaque se déforme, présentent une erreur moyenne de 0.15% avec un écart-type de 0.14%.

Tableau 4.10 Comparaison des résultats pour les modèles solides.

Mode	Abaqus solides [Hz]	MAFE solides [Hz]	Différence relative [%]
1	2.61	2.61	0.02
2	7.09	7.06	-0.37
3	7.99	7.96	-0.34
4	74.5	74.3	-0.38
5	135.3	135.1	-0.30
6	669.7	670.2	0.06
7	1015.9	1016.6	0.07
8	1667.5	1670.2	0.16
9	2734.3	2741.0	0.25
10	3106.2	3112.9	0.21
11	3522.9	3523.2	0.01
12	3676.3	3676.0	-0.01
13	4392.1	4398.4	0.14
14	5244.4	5264.5	0.38
15	5670.8	5690.0	0.34
16	5996.2	5996.3	0.00
Moyenne (6 à 16)	-	-	0.15
Ecart-type (6 à 16)	-	-	0.14
Temps de calcul relatif	5.1	1	-80

La résolution du problème modélisé sous MAFE est 5 fois plus rapide que sous Abaqus®, ce qui rend notre modèle mieux adapté à l'usage dans une routine d'identification des propriétés de matériaux mixte numérique-expérimentale.

Plaque en éléments de coque

Dans le cas où la plaque n'est pas modélisée en éléments solides mais de coque, le lien entre les éléments finis de type poutre et les éléments de coque pose quelques problèmes. Les éléments de coque de type PSDT tels qu'implantés dans le code MAFE sont en effet pourvus d'une gestion des degrés de liberté propre qui les rend incompatibles avec les autres éléments. Nous n'avons pas entrepris de modifier le code source de MAFE afin de résoudre ce problème, mais l'avons contourné en utilisant des éléments de coque de type FSDT à cinq degrés de liberté par nœud. Ceux-ci sont moins performants que les éléments avec une formulation d'ordre p du champ de déplacement dans l'épaisseur, mais permettent cependant d'obtenir de bons résultats en utilisant un facteur de correction du cisaillement. Ce facteur, que nous avons fixé à une valeur usuelle de 0.833, permet d'améliorer les caractéristiques de déformation en cisaillement transverse des éléments de coque FSDT, en particulier lorsque leur épaisseur augmente.

Tableau 4.11 Comparaison des résultats pour les modèles coque FSDT.

Mode	Abaqus coques [Hz]	MAFE coques [Hz]	Différence relative [%]
1	2.61	-	-
2	7.09	7.06	-0.41
3	7.99	7.93	-0.76
4	74.6	74.1	-0.60
5	135.2	134.5	-0.52
6	665.9	667.4	0.22
7	1014.0	1014.9	0.09
8	1656.1	1659.8	0.22
9	2720.0	2722.3	0.08
10	3089.5	3078.4	-0.36
11	3489.7	3493.9	0.12
12	3640.5	3641.4	0.03
13	4345.4	4342.7	-0.06
14	5193.2	5198.5	0.10
15	5608.7	5602.0	-0.12
16	5901.0	5918.9	0.30
Moyenne (6 à 16)	-	-	0.06
Ecart-type (6 à 16)	-	-	0.19
Temps de calcul relatif	2.8	1	-64

Les éléments de coque FSDT codés dans MAFE utilisent cinq degrés de liberté par nœud, car ils ne disposent pas de degré de liberté de rotation autour de l'axe hors plan de l'élément. Cela se traduit par un mode de corps rigide supplémentaire correspondant au mode de torsion de la tige. Pour éviter cela, il est possible d'ajouter des éléments de poutre comme pour le cas solide (voir figure 4.6). Cependant, la bonne corrélation entre les modes issus de MAFE et d'Abaqus®, visible dans le tableau 4.11, laisse à penser que la torsion de la tige n'a pas une influence prépondérante dans le comportement dynamique de ce système.

Comparaison des résultats

En comparant les résultats pour les modèles de la plaque discrétisée en éléments solides et en éléments de type coque, nous pouvons remarquer que la modélisation solide est légèrement meilleure, puisqu'elle nécessite un temps de calcul légèrement inférieur et que les résultats sont plus proches du modèle de référence Abaqus®. Il serait toujours possible d'améliorer ces modèles afin d'augmenter leur précision – qui est pourtant déjà satisfaisante – mais nous avons pu observer que l'erreur sur les fréquences est dans tous les cas inférieure à 0.8%, ce qui est du même ordre de grandeur que l'erreur commise sur la mesure des fréquences propres. Nous pouvons également noter que les modes de tige sont entachés d'une erreur plus importante que les modes de plaque. Cela signifie que les modes de la plaque sont moins sensibles à une modélisation précise de la tige que les 5 premiers modes où seule la tige se déforme.

4.3.3 Validation expérimentale

Modes de tige

Au paragraphe précédent, nous avons validé numériquement notre modèle développé sous MAFE en le comparant à une modélisation similaire issue d'un programme commercial. Jusque-là, rien ne prouve que notre modèle soit réaliste. Pour cela, nous avons comparé notre modélisation avec une expérience effectuée avec une configuration simplifiée. Nous nous intéressons en fait aux cinq modes où la tige est seule à se déformer, qui ne font pas intervenir les déformations de la plaque puisque cette dernière se comporte pour ces modes comme un corps indéformable. La configuration utilisée, représentée à la figure 4.12, est similaire à la configuration expérimentale développée pour l'identification avec une source d'excitation par pot vibrant (figure 4.5(a)), mais la plaque est ici de petite dimension (tableau 4.13). Le montage est identique à celui utilisé pour l'identification, mais la plaque, au vu de ses faibles dimensions, ne nécessite pas d'être soutenue par des fils en nylon. Bien que le montage soit réalisé sur la tête du pot vibrant, l'excitation n'est pas fournie par celui-ci, mais par un marteau instrumenté, visible sur l'image (b) de la figure 4.12. La réponse est obtenue avec un système laser à interférométrie Doppler à point de mesure fixe.

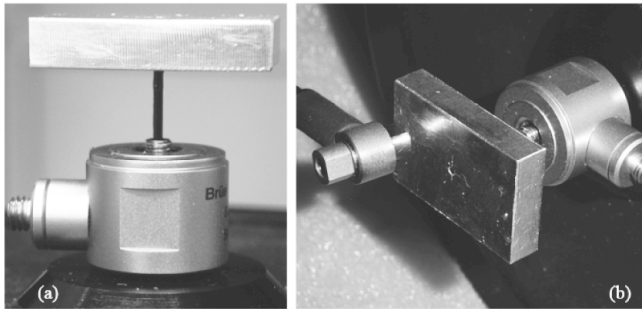
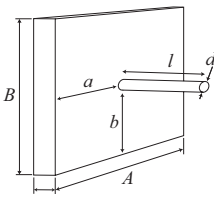


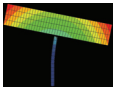
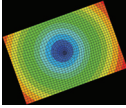
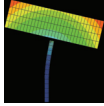
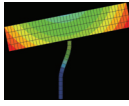
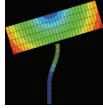
Figure 4.12 Validation expérimentale de la modélisation de la liaison: vue de profil (a) et vue de la méthode d'excitation par marteau instrumenté (b).

Tableau 4.13 Dimensions de la plaque et de la tige.

Schéma	Dimension	Valeur [mm]
	Longueur plaque (A)	30.07
	Largeur plaque (B)	20.01
	Épaisseur plaque (e)	6.0
	Longueur tige (l)	13.0
	Diamètre tige (d)	1.20
	Position tige (a)	14.90
	Position tige (b)	9.90

Nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux du modèle numérique où la plaque est discrétisée en un seul élément fini de type solide ou coque et la tige en sept éléments finis hermitiens à deux nœuds. Comme nous ne nous intéressons pas aux modes de la plaque, un seul élément fini est suffisant pour la représenter. La comparaison est donnée dans le tableau 4.14. L'écart entre les modes expérimentaux et les modes calculés est inférieur à 2.6%, excepté pour le mode de torsion dans la modélisation solide qui a une erreur de 5.4%. Ceci s'explique par le fait que nous modélisons la tige avec une loi de comportement isotrope et, de ce fait, la rigidité en torsion de la tige du modèle numérique est supérieure à celle de la tige réelle.

Tableau 4.14 Validation expérimentale de la liaison: modes de tige mesurés et calculés avec une plaque modélisée en un seul élément de type solide ou coque.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
Forme modale (Abaqus®)					
Description	Flexion 1	Torsion	Flexion 2	2e flexion 1	2e flexion 2
Fréquence mesurée [Hz]	119.5	125.1	140.0	645.2	807.7
Fréquence solide [Hz]	119.6	131.8	138.3	629.1	824.8
Ecart [%]	0.0	5.4	-1.2	-2.5	2.1
Fréquence coque [Hz]	119.8	-	137.2	634.0	828.6
Ecart [%]	0.3	-	-2.0	-1.7	2.6

Cette étude nous montre donc que notre modélisation, bien que simplifiée, est capable de simuler correctement la réalité. Il serait bien sûr possible d’améliorer ultérieurement les résultats en modifiant les propriétés de matériau de la tige. Cependant, sachant que les modes de tige ne sont pas utilisés de manière directe pour identifier la plaque et que les propriétés du matériau formant la tige ont certainement une variabilité supérieure à l’erreur de 3% commise ici, il nous semble justifié de considérer ce modèle comme valide.

Modes de plaque

Les modes de tige ne sont pas mesurables avec notre configuration de mesure lorsqu’une plaque de format standard est montée, car ces modes sont à trop basses fréquences pour être excités et mesurés correctement. Par contre, nous pouvons comparer les modes de plaque mesurés avec les modes simulés à l’aide de notre modèle numérique. Nous avons utilisé ici un modèle avec la plaque discrétisée en éléments solides. Afin de se rapprocher de la modélisation expérimentale, les dimensions entrées dans le modèle numérique ont été ajustées afin de correspondre aux mesures de la plaque réelle. Les valeurs utilisées sont indiquées dans le tableau 4.15. De même, les propriétés de matériau de la plaque sont tirées des identifications réalisées sur la plaque excitée par haut-parleur et sont données dans le tableau 4.16, alors que la tige est toujours modélisée avec un module de Young de 125 GPa (tableau 4.7).

Tableau 4.15 Dimensions de la plaque modélisée pour comparaison expérimentale.

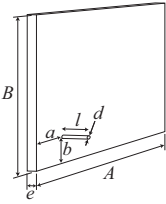




















Schéma	Dimension	Valeur [mm]
	Longueur plaque (A)	134
	Largeur plaque (B)	135
	Epaisseur plaque (e)	8.3
	Longueur tige (l)	13
	Diamètre tige (d)	1.2
	Position tige (a)	127.3
	Position tige (b)	6.75

Tableau 4.16 Propriétés de matériau utilisées pour la modélisation de la plaque.

E_1 [GPa]	E_2, E_3 [GPa]	ν_{12} [-]	ν_{23} [-]	ν_{31} [-]	G_{12}, G_{31} [GPa]	G_{23} [GPa]	G_{31} [GPa]
90.0	7.15	0.34	0.76	0.03	3.60	2.46	3.54

Les résultats expérimentaux et numériques peuvent être comparés dans le tableau 4.17. Les écarts entre les valeurs des fréquences propres mesurées et simulées sur les 10 premiers modes de la plaque sont inférieurs à 1.5%, ce qui est satisfaisant sachant que les propriétés utilisées pour la plaque ne sont pas connues avec une telle précision.

Tableau 4.17 Comparaison entre le modèle solide et les mesures.

Expérimental		Numérique		
Forme propre	Fréquence [Hz]	Forme propre	Fréquence [Hz]	Ecart relatif [%]
	675.5		671.5	-0.6
	1010.4		1014.2	0.4
	1679.8		1670.2	-0.6
	2739.4		2737.2	-0.1
	3083.0		3105.3	0.7
	3672.3		3653.5	-0.5
	4384.6		4372.9	-0.3
	5242.2		5277.1	0.7
	5604.4		5687.6	1.5
	6020.5		5990.6	-0.5

4.4 Résumé et commentaires

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la précision des modèles numériques candidats pour une utilisation dans une routine d'identification. Deux classes de modèles ont été étudiées, selon que nous choisissons de nous servir d'une excitation modale expérimentale par haut-parleur ou par pot vibrant.

En ce qui concerne l'excitation par haut-parleur, il ressort de cette étude que la modélisation de la plaque avec des éléments finis de type PSDT donne les meilleurs résultats. En comparant un modèle numérique de référence à un modèle utilisant 12 éléments par côté de la plaque, soit 144 éléments finis de coque en tout, nous obtenons une erreur maximale sur les 15 premières fréquences propres inférieure à 0.7% pour un temps de calcul acceptable (figure 4.2).

Pour l'excitation par pot vibrant, nous nous sommes orientés vers une modélisation utilisant des éléments de type solide, puisque les éléments de coque PSDT développés dans MAFE ne sont pas compatibles avec les éléments de poutre utilisés pour la tige et que les éléments de type FSDT, outre le fait d'offrir généralement une précision limitée pour les coques épaisses, n'intègrent pas d'amortissement. Une modélisation de la plaque avec 12 éléments par côté et 2 éléments dans l'épaisseur, soit 288 éléments, et de la tige en 7 éléments de poutre hermitiens donne une erreur maximale inférieure à 0.4% sur les 16 premières fréquences propres en comparaison avec un modèle numérique de référence (tableau 4.10). Lorsque le modèle numérique est comparé à des mesures expérimentales, nous observons une erreur inférieure à 3% pour les fréquences propres de flexion de la tige et inférieure à 1.5% pour les modes où la plaque vibre.

Nous avons pu en outre remarquer que pour les modèles en éléments de coque et solides retenus, l'erreur commise sur les facteurs d'amortissement modal est toujours inférieure à l'erreur commise sur les fréquences propres, comme indiqué aux figures 4.2 et 4.4.

Chapitre 5

Procédure d'identification

Dans ce chapitre est discutée la procédure d'identification proprement dite. Cette routine, construite initialement afin d'identifier les propriétés élastiques de matériaux en recourant à un modèle d'éléments finis de type conservatif, est étendue afin d'améliorer sa convergence et d'intégrer les effets dissipatifs dus à l'amortissement interne des matériaux.

5.1 Objectifs

La procédure d'identification peut être considérée comme le point central de la démarche d'identification mixte numérique-expérimentale. A partir d'un modèle modal expérimental de référence, cette méthode fait évoluer un modèle numérique paramétrable (figure 5.1) en modifiant son jeu de paramètres d'entrée à identifier \mathbf{x}_k à chaque itération k jusqu'à obtenir une solution $\hat{\mathbf{s}}_k$ aussi proche que voulue du modèle modal expérimental \mathbf{s} . La convergence du modèle numérique vers le modèle expérimental est obtenue en minimisant une fonction d'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui est représentative de l'écart entre les deux modèles, cet écart étant quantifié à partir des diverses données modales. Ainsi, nous considérons la routine d'identification terminée lorsque la norme de cette fonction d'erreur – appelée également fonction objectif – passe en dessous d'un seuil fixé δ . Lors de cette dernière itération, les paramètres \mathbf{x}_k sont les paramètres identifiés $\mathbf{x}_{\text{ident}}$.

Cette procédure d'identification, établie initialement pour l'identification de propriétés élastiques [42], est ici développée afin d'être généralisée aux cas dissipatifs et pour tirer parti des données modales expérimentales complexes et du modèle numérique intégrant l'amortissement structurel décrit au chapitre 2. Nous nous intéressons égale-

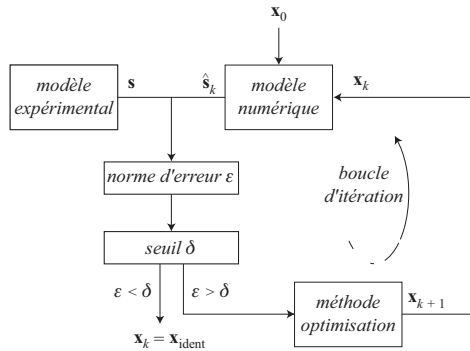


Figure 5.1 Schéma du processus d'identification.

ment à l'amélioration de sa précision et de sa robustesse afin d'accroître sa fiabilité. Enfin, pour que cette méthode puisse être utilisée aisément, nous avons créé un logiciel permettant d'appliquer la méthode de manière générique.

5.2 Fonctions objectif

5.2.1 Description

Sensibles à l'ensemble des propriétés de matériau à identifier, des normes d'erreur adéquates ont été définies pour quantifier les résidus sur les paramètres constitutifs pendant les itérations d'identification. Ces normes d'erreur sont fondamentales et d'elles dépend la sensibilité de la routine d'identification. Pour obtenir une bonne identification, il est essentiel de définir une norme d'erreur qui tire parti du maximum d'informations que nous avons à disposition par le biais des modèles expérimental et numérique. Les informations utilisables, pour chaque mode i , sont

- les fréquences propres expérimentales f_i et numériques \hat{f}_i ,
- les facteurs d'amortissement modal expérimentaux ζ_i et numériques $\hat{\zeta}_i$,
- les formes propres complexes $\tilde{\mathbf{p}}_i$ expérimentales et numériques.

Les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modal numériques sont tous deux issus des valeurs propres λ_i de l'équation aux valeurs propres (2.72). Ces valeurs fournissent des informations sur les modes de la structure sous forme de scalaires et peuvent donc être comparées sans difficulté particulière entre les modèles expérimental et numérique pour chaque mode i .

Les modes propres sont des sources d'informations tout aussi importantes permettant de caractériser le comportement vibratoire d'une structure. Ils donnent une information localisée: chaque vecteur modal est calculé ou mesuré en un lieu spécifique de la géométrie, défini par le maillage numérique ou expérimental, respectivement. Il s'ensuit que pour pouvoir être comparés, les vecteurs modaux doivent non seulement provenir du même mode i , mais également représenter le déplacement modal aux mêmes points de la géométrie et dans la même direction. Les maillages numérique et expérimental étant généralement différents, il est obligatoire de projeter les vecteurs propres issus des deux maillages sur un maillage de référence commun. Pour réaliser cela, nous effectuons une interpolation cubique des formes propres expérimentales aux points du maillage défini par la grille de nœuds utilisés dans le modèle numérique. Le nombre de points de mesure et le nombre d'éléments finis utilisés peuvent ainsi être choisis de manière totalement indépendante. En ce qui concerne la direction de mesure, il est nécessaire d'extraire les vecteurs propres numériques selon la direction correspondant à la direction de mesure du cas expérimental, ce qui ne pose pas de problème majeur.

L'utilisation de l'amplitude \mathbf{p}_i des formes propres complexes $\tilde{\mathbf{p}}_i$ a permis de définir des normes d'erreur efficaces pour l'identification des propriétés de stockage des matériaux [42], ce qui peut laisser penser que la prise en considération de ces formes propres en tant que nombres complexes peut nous permettre de définir un jeu de normes d'erreur tout aussi performantes pour l'identification des propriétés de perte. Malheureusement, il faut bien se rendre à l'évidence que pour les faibles taux d'amortissement présents dans les structures qui nous intéressent, la partie imaginaire des vecteurs modaux est faible, à tel point qu'il ne nous est pas possible d'obtenir des mesures fiables des parties imaginaires des formes propres.

Pour des structures peu amorties, la partie imaginaire des formes propres est en fait généralement de deux ordres de grandeur inférieure à leur partie réelle, si bien que sa mesure est impossible, comme nous pouvons le voir à la figure 5.2 pour une plaque en PMMA. Dans cet exemple, la partie réelle des formes propres est similaire selon que nous considérons les résultats expérimentaux ou numériques. Par contre, les parties imaginaires des modes ne sont pas corrélées, les modes mesurés étant bien trop bruités.

Ces considérations nous mènent à conclure que les propriétés modales candidates à l'élaboration de fonctions d'erreur efficaces sont, pour chaque mode i , les fréquences propres f_i , les facteurs d'amortissement modal ζ_i et les amplitudes \mathbf{p}_i des formes propres complexes $\tilde{\mathbf{p}}_i$.

Tableau 5.2 Comparaison des parties imaginaires expérimentales et numériques des 4 premiers modes d'une plaque en PMMA.

N° mode fréquence ζ	Partie réelle	Partie imaginaire mesurée	Partie imaginaire numérique
Mode 1 52.8 Hz 3.3%			
Mode 2 68.0 Hz 3.2%			
Mode 3 112.2 Hz 2.8%			
Mode 4 129.6 Hz 2.6%			

5.2.2 Normes d'erreur

Normes d'erreur basées sur les valeurs propres

La première norme, utilisée classiquement en analyse modale, reflète la différence relative ε_i^f ($i = 1, 2, \dots, q$) entre la i -ème fréquence propre ω_i et la prédiction numérique correspondante $\hat{\omega}_i^k$ extraite à la k -ème itération de la procédure d'identification

$$\varepsilon_i^f(\mathbf{x}_k) = (\omega_i - \hat{\omega}_i^k) / \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.1)$$

où \mathbf{x}_k est le vecteur de paramètres stockant les estimations des propriétés constitutives à identifier à l'itération k et q dénote le nombre total de fréquences propres considérées. Il est important de noter ici que les prédictions numériques $\hat{\omega}_i^k$ ($i = 1, 2, \dots, q$) sont fonctions du vecteur de paramètres \mathbf{x}_k et qu'elles sont mises à jour à chaque itération du processus d'optimisation.

De la même façon, une nouvelle fonction objectif permet de quantifier la différence entre le comportement dissipatif des modèles expérimental et numérique d'après les facteurs d'amortissement modal. Les facteurs d'amortissement modal mesurés ζ_i sont obtenus d'après les fonctions de transfert mesurées (voir chapitre 3) et peuvent être comparés aux facteurs d'amortissement modal numériques ζ_i^m de la même manière que les fréquences propres expérimentales et numériques. Cette norme d'erreur ε_i^m s'écrit

$$\varepsilon_i^m(\mathbf{x}_k) = (\zeta_i - \hat{\zeta}_i^k) / \zeta_i \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.2)$$

où \mathbf{x}_k est à nouveau le vecteur de paramètres stockant les estimations des propriétés constitutives à identifier à l'itération k et q dénote le nombre total de modes propres considérés.

Normes d'erreur basées sur les vecteurs propres

Pour améliorer l'estimation des modules de stockage des cisaillements transverses G_{23} et G_{31} et du coefficient de Poisson de stockage ν_{12} , il est essentiel d'inclure également les formes modales dans le processus d'identification. Une méthode simple consiste en la quantification des écarts entre les vecteurs modaux numériques et expérimentaux. En calculant la somme des différences normalisées, en valeurs absolues, entre les r composantes de deux formes propres correspondantes, nous pouvons définir la norme d'erreur ε_i^s suivante

$$\varepsilon_i^s(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^r \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}}_i^k)_j}{\max_l (\hat{\mathbf{p}}_i^k)_l} - \frac{(\mathbf{p}_i)_j}{\max_l (\mathbf{p}_i)_l} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.3)$$

où \mathbf{p}_i représente le module de la i -ème forme propre mesurée et $\hat{\mathbf{p}}_i^k$ le module de la i -ème prédiction numérique calculée à la k -ème itération de la procédure d'identification, alors que l'ordre j dénote la j -ème composante et l est un indice flottant. Nous pouvons observer que ces erreurs sont fonctions du vecteur de paramètres \mathbf{x}_k vu que les modes propres simulés dépendent des propriétés constitutives estimées à l'itération k . Il est également utile de rappeler que, étant donné que les modes propres expérimentaux et numériques n'ont généralement pas le même nombre de degrés de liberté, il est nécessaire d'interpoler les quantités mesurées et simulées sur une grille commune, qui peut être avantageusement prise comme le maillage d'éléments finis.

Une stratégie plus sophistiquée pour inclure les informations des modes propres dans la phase d'optimisation est de définir des normes d'erreur basées sur le critère d'assurance modale (modal assurance criteria, MAC) ou les coefficients de corrélation des formes propres. Les normes d'erreur MAC diagonale ε_i^d et hors diagonale ε_i^o s'écrivent

$$\varepsilon_i^d(\mathbf{x}_k) = 1 - \frac{[(\hat{\mathbf{p}}_i^k)^T \mathbf{p}_i]^2}{[(\hat{\mathbf{p}}_i^k)^T \hat{\mathbf{p}}_i^k][(\mathbf{p}_i)^T \mathbf{p}_i]} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_i^o(\mathbf{x}_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \frac{[(\hat{\mathbf{p}}_i^k)^T \mathbf{p}_j]^2}{[(\hat{\mathbf{p}}_i^k)^T \hat{\mathbf{p}}_i^k][(\mathbf{p}_j)^T \mathbf{p}_j]} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.5)$$

et devraient être proches de zéro pour des modes expérimentaux et numériques bien corrélés (figure 5.3).

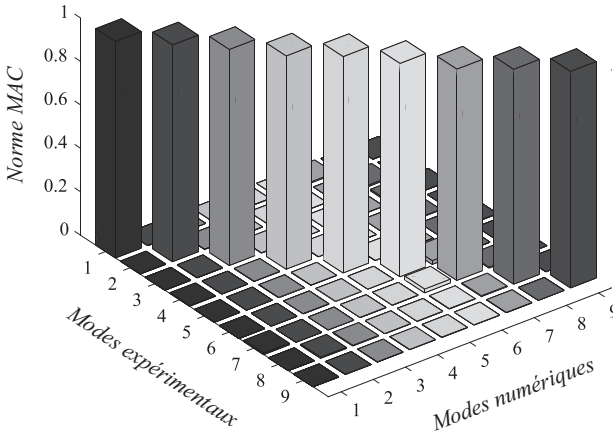


Figure 5.3 Exemple d'une matrice MAC qui indique une bonne corrélation entre 9 modes expérimentaux et leurs équivalents issus d'un modèle numérique identifié.

La précision d'identification du coefficient de Poisson dans le plan v_{12} est améliorée en introduisant également des informations sur les lignes nodales des formes propres, puisque leur forme est influencée par ce paramètre [42]. Basée sur le principe de la corrélation d'image entre les configurations des lignes nodales expérimentales et numériques, une norme d'erreur appropriée ε_i^n peut être définie en comparant des interpolations filtrées des formes propres expérimentales et numériques comme

$$\varepsilon_i^n(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n [f(I_{rs,i}^k) - f(I_{rs,i})]^2 \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5.6)$$

avec

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{abs}(A) \geq \delta \\ 1 - \frac{\text{abs}(A)}{\delta} & \text{si } \text{abs}(A) < \delta \end{cases} \quad (5.7)$$

où $I_{rs,i}$ et $\hat{I}_{rs,i}^k$ ($r, s = 1, 2, \dots, n$) sont les images 2D discrètes en niveaux de gris des composantes hors plan des modes expérimentaux et numériques interpolés sur une grille de $n \times n$ éléments, alors que $f(A)$ symbolise le filtrage de ces images au travers d'un filtre passe-bas de seuil δ , A représentant soit $I_{rs,i}$ soit $\hat{I}_{rs,i}^k$. L'effet du filtre résulte en une image en niveaux de gris des amplitudes modales en dessous du seuil δ , le reste de l'image étant saturé (couleur noire), comme le montre la figure 5.4.

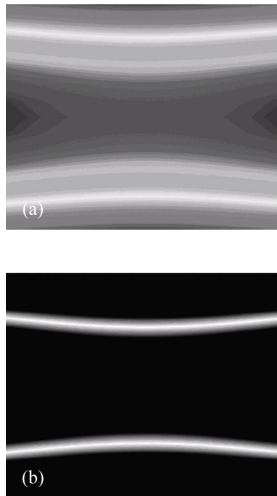


Figure 5.4 Images originale (a) et filtrée (b) d'un mode propre de flexion d'une plaque.

L'utilisation de la complexité des vecteurs propres afin d'augmenter la sensibilité de la méthode est plutôt alléchante au premier abord, mais comme discuté au paragraphe 5.2.1, il n'est pas envisageable de définir des normes d'erreur basées sur la partie imaginaire des formes propres de manière similaire à ce qui est fait pour les normes ε_i^s , ε_i^d , ε_i^o et ε_i^n . Nous devons par conséquent nous contenter de la norme ε_i^m pour caractériser les effets dissipatifs de la structure, ce qui aura pour conséquence que la méthode d'identification sera sensible à un nombre limité de paramètres dissipatifs.

Norme globale

Les q composantes de chaque norme d'erreur $\varepsilon_i^f, \varepsilon_i^s, \varepsilon_i^d, \varepsilon_i^o, \varepsilon_i^n$ et ε_i^m sont ensuite placées dans les vecteurs correspondants $\boldsymbol{\varepsilon}^f, \boldsymbol{\varepsilon}^s, \boldsymbol{\varepsilon}^d, \boldsymbol{\varepsilon}^o, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, qui sont combinés et pondérés afin de produire la fonctionnelle $\boldsymbol{\varepsilon}$ écrite comme

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_k) = \{ \alpha^f \boldsymbol{\varepsilon}^f, \alpha^s \boldsymbol{\varepsilon}^s, \alpha^d \boldsymbol{\varepsilon}^d, \alpha^o \boldsymbol{\varepsilon}^o, \alpha^n \boldsymbol{\varepsilon}^n, \alpha^m \boldsymbol{\varepsilon}^m \}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{5.8}$$

où $\alpha^f, \alpha^s, \alpha^d, \alpha^o, \alpha^n$ et α^m sont les facteurs de pondération pour les vecteurs de norme d'erreur associés. Les valeurs recommandées pour ces coefficients (tableau 5.5) ont été déduites expérimentalement sur plusieurs cas test. Elles n'ont pas seulement été choisies de manière à ce que l'erreur résiduelle selon chaque norme soit du même ordre de grandeur à la fin du processus d'identification (hypothèse du résidu d'identification homogène), mais également de manière à maximiser la vitesse et la robustesse de convergence de la méthode d'identification [42, 49].

Tableau 5.5 Coefficients de pondération recommandés pour les différentes normes d'erreur.

Coefficient de pondération	α^f	α^s	α^d	α^o	α^n	α^m
Valeur	1	0.01	0.05	0.025	0.13	0.11

5.2.3 Validation des normes d'erreur

Bien que la majorité des normes d'erreur aient déjà été validées dans une étude antérieure [42], l'ajout d'une nouvelle norme $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ et l'introduction d'un nouveau modèle numérique impliquent qu'une validation de l'ensemble des normes d'erreur semble judicieuse. Il est intéressant de mesurer la sensibilité des six normes d'erreur développées à chacun des 18 paramètres de matériau utilisés dans notre modèle numérique.

Le calcul de la sensibilité d'une norme d'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}^a$ à un paramètre constitutif j et pour un mode i s'effectue à partir d'un cas de référence et d'un cas perturbé, en utilisant la relation

$$\mathbf{S}_{\varepsilon_i^a}(x_j, x_j) = \frac{\varepsilon^a(x_j) - \varepsilon^a(x_j)}{(x_j - x_j)/x_j} \tag{5.9}$$

où $\mathbf{S}_{\varepsilon_i^a}(x_j, x_j)$ dénote la sensibilité à la norme d'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}^a$ au paramètre j pour le mode i lorsque sa valeur passe de la valeur de référence x_j à la valeur perturbée x_j .

Nous avons pour cela mené une étude sur deux modèles numériques distincts. Le premier représente un cas quasiment isotrope, puisque les propriétés de matériau sont similaires dans les trois directions d'orthotropie, mais néanmoins simulé avec un

modèle orthotrope. Dans le deuxième cas, le modèle est représentatif d'une plaque en époxy avec des renforts en fibres de carbone placées de manière unidirectionnelle. Ce cas transverse-isotrope présente des propriétés de matériau variant fortement selon la direction d'orthotropie considérée.

Cas quasiment isotrope

Pour ce premier cas, nous avons choisi de considérer un matériau avec des propriétés équivalentes selon les différentes directions d'orthotropie, proche d'un matériau isotrope. Le modèle numérique utilisé est néanmoins pleinement orthotrope et permet évidemment d'étudier l'impact sur les normes d'erreur de chaque paramètre séparément. Les valeurs initiales sont celles indiquées dans le tableau 5.6; elles ne correspondent pas à un matériau particulier mais sont tout à fait plausibles pour un matériau de construction de type métallique ou composite. La plaque étudiée a pour dimensions $150 \times 100 \times 10 \text{ mm}^3$, avec une masse volumique de 2000 kg/m^3 .

Tableau 5.6 Cas quasiment isotrope: propriétés de la plaque étudiée.

	Valeur de stockage [GPa] ou [-]	Tangente de perte [-]
E_1, E_2, E_3	40	0.0100
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$	0.3	0.0030
G_{12}, G_{23}, G_{13}	16	0.0095

A partir des valeurs du tableau 5.6 représentant le cas nominal, nous avons conduit une étude paramétrique en perturbant chacune des 18 propriétés de matériau d'une valeur allant jusqu'à $\pm 30\%$. Chaque paramètre est perturbé séparément et nous avons utilisé 30 valeurs de perturbation, ce qui représente pour cette plaque 541 cas calculés et analysés. Nous avons pris un modèle de 15×10 éléments finis de coque PSDT ($p = 3$) avec des éléments carrés à 9 nœuds de 1 cm de côté.

La sensibilité moyenne sur les 16 premiers modes des 6 normes d'erreur est représentée dans la figure 5.7. Nous remarquons clairement que, conformément à nos attentes, la sensibilité des normes d'erreur est nulle pour tous les paramètres hors plan. Il ne sera donc pas possible d'identifier E_3 , ν_{23} et ν_{31} ainsi que les tangentes de perte associées. Nous pouvons également vérifier que ϵ^m est bien la seule norme qui soit sensible aux tangentes de perte. Avec cette géométrie et ce type de matériau, les normes d'erreur sont avant tout sensibles aux modules de Young dans le plan E_1 et E_2 ainsi qu'à leurs tangentes de perte $\tan\delta(E_1)$ et $\tan\delta(E_2)$. Elles sont ensuite sensibles au module de cisaillement dans le plan G_{12} , en particulier de sa tangente de perte $\tan\delta(G_{12})$. Finalement, nous avons une sensibilité moindre au coefficient de Poisson et aux modules de cisaillement transverse.

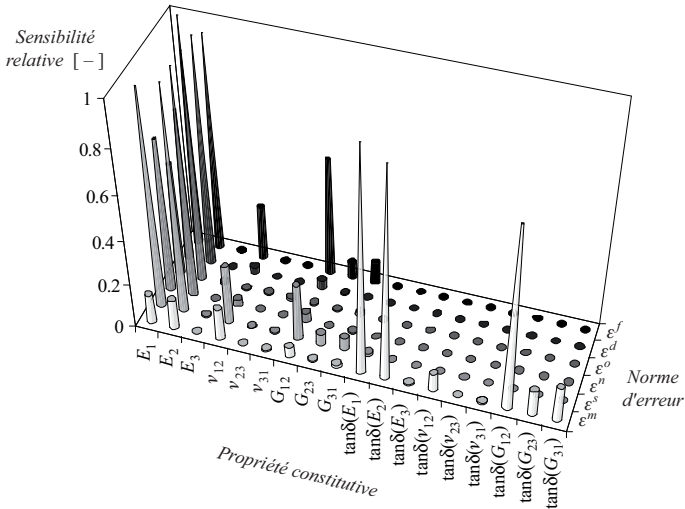


Figure 5.7 Cas quasiment isotrope: sensibilité moyenne des différentes normes d'erreur aux propriétés de matériau pour les 16 premiers modes.

Cas orthotrope

Le modèle numérique de référence simule dans ce cas une plaque rectangulaire en époxy renforcée de fibres en carbone disposées de manière unidirectionnelle selon la longueur de la plaque. Cette plaque, de dimensions 150x100x10 mm³, a une masse volumique de 2000 kg/m³.

Tableau 5.8 Cas orthotrope: propriétés de la plaque étudiée.

	Valeur de stockage [GPa] ou [-]	Tangente de perte [-]
E_1	110	0.00100
E_2, E_3	8	0.01375
ν_{12}	0.28	0.003
ν_{23}	0.43	0.003
ν_{31}	0.002	0.003
G_{12}, G_{13}	3	0.015
G_{23}	2.5	0.018

Pour cette étude, nous avons à nouveau calculé 541 cas en faisant varier séparément chacun des 18 paramètres constitutifs du matériau autour d'un cas nominal, obtenu

cette fois-ci avec les propriétés de référence du tableau 5.8. Le modèle numérique est le même que pour l'exemple précédent, avec à nouveau 15x10 éléments lagrangiens.

La figure 5.9 montre la sensibilité moyenne de chaque norme d'erreur ε_i^f , ε_i^s , ε_i^d , ε_i^o , ε_i^n et ε_i^m aux paramètres de matériau de stockage et de perte pour les 16 premiers modes propres. Cette figure montre bien que les normes d'erreur se divisent en deux groupes selon leur sensibilité aux tangentes de perte des propriétés de matériau. Seule la norme d'erreur ε_i^m basée sur les écarts relatifs des facteurs d'amortissement modal est sensible aux diverses tangentes de perte. Cette norme est également légèrement sensible aux propriétés de stockage, ce qui s'explique par le fait que les facteurs d'amortissement modal sont non seulement influencés par les tangentes de perte, mais également par les propriétés de stockage. Selon les sensibilités présentées dans cette figure, seules les tangentes de perte $\tan\delta(E_1)$, $\tan\delta(E_2)$, $\tan\delta(G_{12})$, $\tan\delta(G_{23})$ et $\tan\delta(G_{31})$ semblent pouvoir être identifiées avec cette méthode pour cette plaque, puisque la sensibilité de la norme d'erreur ε_i^m est quasi nulle pour les autres paramètres. D'une manière similaire, la sensibilité des normes d'erreur ε_i^f , ε_i^s , ε_i^d , ε_i^o et ε_i^n aux tangentes de perte des propriétés de matériau est faible, tout comme dans le cas précédent, ce qui correspond à nos attentes puisque ces normes d'erreur ne sont basées sur aucune donnée modale reflétant le comportement dissipatif de la structure.

L'étude du comportement de la norme d'erreur ε_i^m lorsque les propriétés de matériau sont perturbées montre qu'elle varie linéairement avec l'amplitude de la perturbation pour chacune des tangentes de perte. A titre d'exemple, la figure 5.10 représente l'évolution de cette norme d'erreur lorsque la tangente de perte du module de Young transverse $\tan\delta(E_2)$ est perturbée autour de sa valeur de référence de 0.01375. Ce comportement linéaire n'a rien d'exceptionnel en vertu de la définition de cette norme d'erreur (5.2), qui est proportionnelle à l'écart relatif des facteurs d'amortissement modal numériques et expérimentaux, qui sont eux-mêmes des fonctions linéaires des tangentes de perte.

Vu qu'elles ne sont pas sensibles aux propriétés dissipatives, les normes d'erreur ε_i^f , ε_i^s , ε_i^d , ε_i^o et ε_i^n montrent un comportement tout à fait similaire à celui obtenu dans le cas purement conservatif et ne sont de facto pas discutées dans le présent travail.

Cette étude a été menée sur un cas particulier puisque nous nous sommes intéressés à un matériau composite à renfort de type unidirectionnel où les diverses propriétés varient fortement suivant la direction considérée. Par exemple, le module de Young selon la direction des fibres possède une valeur de stockage très élevée et une tangente de perte faible. Cela a pour conséquence qu'une variation relative du module de stockage aura plus d'influence que la même variation relative du module de perte sur le comportement global du spécimen étudié, ce qui est visible dans l'analyse de sensibilité de la figure 5.9.

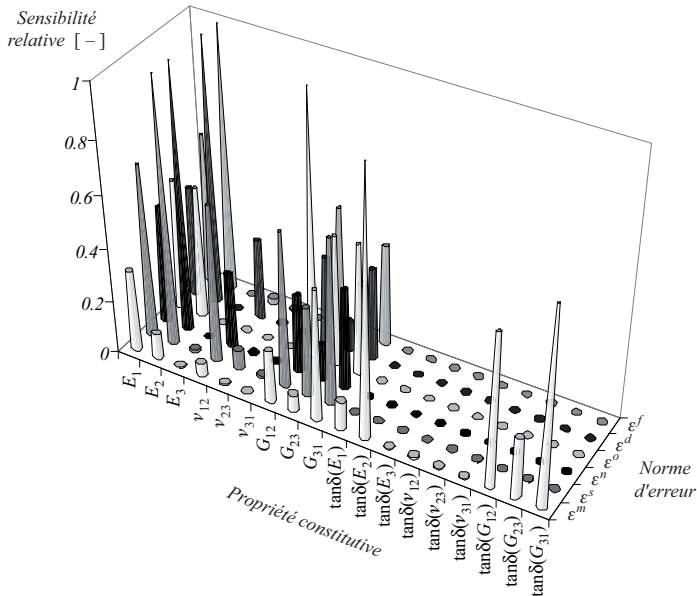


Figure 5.9 Cas orthotrope: sensibilité moyenne des différentes normes d'erreur aux propriétés de matériau pour les 16 premiers modes.

En conclusion, cette validation des fonctions d'erreur nous montre que nous disposons d'un jeu de normes d'erreur fiables et robustes. Nous avons pu établir que pour obtenir une bonne identification de l'une des propriétés constitutives d'un matériau, il est nécessaire que celle-ci ait une influence mesurable dans les caractéristiques des modes pris en compte pour l'identification. Cela signifie que la géométrie de l'échantillon utilisé est de prime importance, puisqu'à propriétés de matériau figées, elle sera seule à pouvoir influencer les sensibilités des différentes normes d'erreur.

5.3 Procédure d'optimisation

5.3.1 Description de la procédure

Dans les méthodes mixtes d'identification numérique-expérimentale, l'algorithme d'optimisation joue un rôle essentiel étant donné que le taux de convergence du processus d'identification et les erreurs résiduelles résultantes dépendent directement de l'efficacité de la démarche d'optimisation. De manière à assurer la fiabilité de la méthode d'identification, les développements ont été basés sur l'ensemble des routines

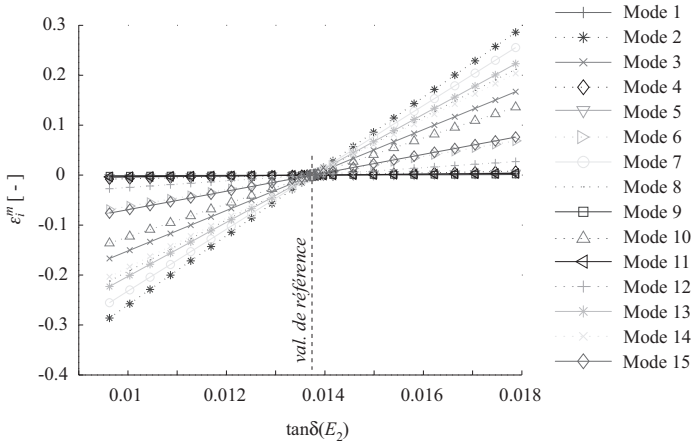


Figure 5.10 Sensibilité de la norme d'erreur basée sur les écarts relatifs des facteurs d'amortissement modal ϵ^m à la tangente de perte du module de Young transverse $\tan\delta(E_2)$ pour les 15 premiers modes.

de la «optimization toolbox» du logiciel de calcul Matlab®. Plusieurs algorithmes d'optimisation ont été intégrés et liés avec la méthode de post-traitement des mesures et le logiciel d'éléments finis. Les techniques suivantes ont été analysées, avec ou sans contraintes sur les paramètres constitutifs à identifier [42]: algorithmes des moindres carrés non linéaires (méthodes de Levenberg-Marquardt, Newton réflexive et quasi-Newton) et méthode de programmation quadratique séquentielle (sequential quadratic programming, SQP). Les recherches ont montré que, grâce à sa robustesse, son efficacité et sa précision, l'algorithme de Levenberg-Marquardt est ici la méthode d'identification la plus adaptée pour estimer les propriétés de matériau requises.

A chaque itération k du processus, le problème d'optimisation non contrainte consiste à minimiser localement la norme euclidienne de la fonctionnelle d'erreur (5.8), comme

$$\text{trouver } \mathbf{x}_k \text{ pour } \min_{\mathbf{x}_k} \epsilon(\mathbf{x}_k) \text{ avec } \epsilon(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}_k)\|_2^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.10)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}_k)$ représente la fonction d'erreur globale et \mathbf{x}_k est, comme défini précédemment, le vecteur stockant les estimations à l'itération k des propriétés constitutives à identifier, $\|\cdot\|_2$ symbolisant la norme vectorielle euclidienne. Dans le processus des moindres carrés de Levenberg-Marquardt, la méthode de minimisation à la k -ème

itération se réduit à trouver pour un paramètre donné λ_k le vecteur de direction de recherche \mathbf{d}_k en cherchant la solution du système d'équations suivant

$$[\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \mathbf{I}] \mathbf{d}_k = -\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.11)$$

où \mathbf{I} est la matrice-identité et \mathbf{J} est la matrice jacobienne de la fonction objectif

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.12)$$

La procédure d'optimisation se termine lorsque la variation de l'erreur résiduelle $\varepsilon(\mathbf{x}_k)$ est inférieure à un seuil prédéfini δ .

Afin d'être efficaces, les méthodes d'identification requièrent généralement que la norme d'erreur et ses dérivées par rapport aux paramètres (gradients ou Jacobiens) soient calculées précisément. Il a pu en effet être montré que la précision de l'évaluation du gradient est capitale pour la convergence de l'algorithme d'identification, puisque le nombre d'itérations augmente considérablement quand le gradient n'est pas calculé précisément. Or, pour évaluer les gradients des fonctionnelles d'erreur, les gradients de la solution du modèle d'éléments finis (données modales) doivent être calculés, ce qui est gênant. Pour contourner cette difficulté, plusieurs méthodes pour calculer les dérivées des solutions propres ont été testées et comparées (technique de Nelson exacte, méthode de projection des sous-espaces approchée et méthode directe des différences finies). Afin d'assurer des résultats fiables, la méthode de projection des sous-espaces approchée nécessite un grand nombre de vecteurs propres (au minimum le double du nombre de dérivées des modes propres désirés). A cause de ces exigences, les méthodes approchées sont de plus en plus gourmandes en capacité de calcul lorsque le nombre de modes identifiés augmente et peuvent même devenir moins efficaces que la méthode des différences finies. La méthode de Nelson demande l'inversion d'une matrice de rigidité modifiée dans le but de pouvoir calculer chaque dérivée, ce qui est extrêmement coûteux numériquement dans le cas de modèles numériques de taille importante. Nous pouvons conclure que la méthode directe des différences finies est finalement bien plus précise et efficace que les autres méthodes pour calculer les dérivées modales et c'est elle qui a été retenue.

5.3.2 Identification séquentielle

L'efficacité de la méthode mixte numérique-expérimentale d'identification peut être améliorée en remplaçant la procédure de minimisation en un temps (5.10) par une stratégie de type séquentiel. Cette option est applicable lorsque le jeu de paramètres à identifier \mathbf{x} peut être divisé en plusieurs sous-ensembles indépendants, sensibles à des normes d'erreur différentes.

Prenons par exemple le cas où le problème d'identification peut être divisé en deux étapes successives. Le jeu de paramètres à identifier \mathbf{x} est alors séparé en deux sous-ensembles \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' et le problème (5.10) est divisé en deux étapes distinctes. Dans la première étape, les paramètres \mathbf{x}'' sont figés à leurs valeurs initiales \mathbf{x}''_0 et le problème à résoudre s'écrit

$$\text{trouver } \mathbf{x}'_k \text{ pour } \min_{\mathbf{x}'_k} \varepsilon'(\mathbf{x}'_k) \text{ avec } \varepsilon'(\mathbf{x}'_k) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}'(\mathbf{x}'_k)\|_2^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.13)$$

avec $\mathbf{e}'(\mathbf{x}'_k)$ la norme d'erreur globale choisie de manière à offrir une sensibilité optimale aux variations des paramètres à identifier \mathbf{x}'_k . Une fois que cette première étape atteint la convergence, les paramètres \mathbf{x}' sont figés à leurs valeurs identifiées $\mathbf{x}'_{\text{ident}}$ et la seconde étape peut démarrer. Cette seconde étape correspond à la résolution du problème

$$\text{trouver } \mathbf{x}''_k \text{ pour } \min_{\mathbf{x}''_k} \varepsilon''(\mathbf{x}''_k) \text{ avec } \varepsilon''(\mathbf{x}''_k) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}''(\mathbf{x}''_k)\|_2^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.14)$$

avec $\mathbf{e}''(\mathbf{x}''_k)$ la norme d'erreur globale choisie de manière à offrir une sensibilité optimale aux variations des paramètres \mathbf{x}''_k à identifier. A la fin des deux étapes, l'ensemble des paramètres sont déterminés.

5.3.3 Exemples d'identification séquentielle

L'identification en plusieurs temps, qui permet de réduire le nombre total de solutions d'éléments finis jusqu'à la convergence sans pour autant diminuer la précision des résultats d'optimisation, peut être appliquée dans plusieurs situations. Nous nous sommes intéressés à 3 cas

- l'amélioration de la convergence du coefficient de Poisson dans le plan v_{12} ,
- l'amélioration de la robustesse de convergence de la méthode,
- l'identification des propriétés de perte,

qui sont tous développés dans ce paragraphe.

Le premier cas d'application de cette méthode est l'amélioration de la convergence de la méthode lors de l'identification du coefficient de Poisson. En effet, il a été vu dans une étude précédente [42] que, dans certains cas, le coefficient de Poisson dans le plan avait tendance à diverger lors du processus d'identification. Or, nous savons à partir des études de sensibilité que le coefficient de Poisson, pour un matériau orthotrope, a

une influence négligeable sur la norme d'erreur basée sur les écarts relatifs des fréquences propres. Par conséquent, il est possible d'identifier dans un premier temps les cinq autres propriétés élastiques et de les figer dans un deuxième temps pour identifier le coefficient de Poisson seul.

Un autre inconvénient de la méthode est le fait de devoir fixer des valeurs initiales des paramètres à estimer qui soient suffisamment réalistes pour que la méthode converge correctement. Nous avons donc également développé une stratégie d'identification en deux temps qui améliore la convergence lorsque l'estimation initiale de ces propriétés est mauvaise, en effectuant dans un premier temps une identification grossière permettant de commencer le processus d'identification avec des valeurs initiales éloignées des propriétés réelles du matériau. Le deuxième temps permet alors d'affiner les résultats obtenus au cours du premier temps pour converger sur des valeurs précises des propriétés constitutives.

Finalement, nous avons appliqué cette stratégie d'identification en deux temps dans le cas amorti, en réalisant l'identification des propriétés élastiques (ou de stockage) dans un premier temps et des propriétés dissipatives (ou de perte) dans un second temps. Les stratégies en un temps et séquentielle s'avèrent quasiment équivalentes avec tout de même un gain de robustesse pour celle en deux temps.

Amélioration de la convergence du coefficient de Poisson

La stratégie d'identification en deux temps est utile lorsqu'un ou plusieurs paramètres convergent lentement alors que les autres ont déjà atteint leur valeur finale. Cette situation apparaît fréquemment lors de l'identification du coefficient de Poisson ν_{12} , qui peut se montrer délicate, notamment pour certains matériaux composites orthotropes. Dans ce cas où seules les propriétés de stockage nous intéressent, le jeu de paramètres \mathbf{x}_k est divisé en deux sous-ensembles

$$\mathbf{x}'_k = \{E_1^k, E_2^k, G_{12}^k, G_{23}^k, G_{31}^k\}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}''_k = \{\nu_{12}^k\}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.16)$$

La norme d'erreur résiduelle $\varepsilon'(\mathbf{x}'_k)$ correspondant au premier sous-ensemble est minimisée dans une étape initiale avec les facteurs de pondération recommandés (tableau 5.5). Dans un second temps, la fonction objectif $\varepsilon''(\mathbf{x}''_k)$ est minimisée alors que les paramètres issus de la première étape restent fixes. Le seuil δ est diminué et le coefficient de pondération α^f est supprimé étant donné que le coefficient de Poisson n'influence pas la valeur des fréquences propres.

Il a été montré [50] qu'avec cette procédure d'optimisation en deux temps, le taux de convergence est amélioré jusqu'à 50% en comparaison avec l'approche en un temps

alors que les modules de Young et de cisaillement sont estimés avec la même précision. Bien qu'il soit évalué précisément à la fin de la seconde étape, le coefficient de Poisson peut tout de même être légèrement affecté par la valeur initiale donnée à ce paramètre au début de la première étape, car il ne faut pas oublier que si la valeur du coefficient de Poisson influence majoritairement uniquement la forme des lignes nodales, son impact sur les autres propriétés modales ne peut pas être considéré comme strictement nul.

Pour illustrer cette méthode, prenons pour exemple le cas d'une plaque en carbone époxy de $135 \times 135 \times 8.3 \text{ mm}^3$ et d'une masse volumique de 1440 kg/m^3 . Les 15 premiers modes propres sont mesurés avec une résolution expérimentale de 13×13 points. Le modèle numérique utilisé pour l'identification est composé de 10×10 éléments de coque de type PSDT à 9 nœuds, avec $p = 3$. Les valeurs initiales pour l'itération $k = 0$ sont données dans le tableau 5.11.

Tableau 5.11 Amélioration de la convergence du coefficient de Poisson: propriétés élastiques estimées.

Paramètre élastique	Valeur initiale	Méthode d'identification			Tests statiques
		1 temps		2 temps	
E_1 [GPa]	100	91.9	91.5	-	89.7 ± 1.0
E_2 [GPa]	10	7.23	7.25	-	7.4 ± 0.4
G_{12} [GPa]	5	3.74	3.74	-	3.6 ± 0.2
G_{23} [GPa]	3	2.08	1.98	-	2.1 ± 0.2
G_{31} [GPa]	5	3.41	3.37	-	3.3 ± 0.2
ν_{12} [-]	0.5	0.39	-	0.35	0.36 ± 0.03

Les propriétés élastiques sont d'abord évaluées selon la méthode d'identification en un temps avec comme coefficients de pondération α^f , α^s , α^d , α^o et α^n les valeurs usuelles du tableau 5.5, le coefficient de pondération α^m étant fixé à une valeur nulle étant donné que nous ne nous intéressons pas aux effets dissipatifs dans cet exemple. L'évolution des propriétés élastiques au cours du processus d'identification, normalisées selon les valeurs obtenues lors de la dernière itération, est montrée dans la figure 5.12. Nous pouvons y voir la bonne convergence des propriétés, avec cependant le coefficient de Poisson qui converge plus tardivement que le reste des propriétés élastiques.

La stratégie d'identification en deux temps est ensuite appliquée pour identifier dans une première étape les cinq modules de Young et de cisaillement et dans la seconde étape le coefficient de Poisson dans le plan uniquement. Les mêmes formes modales mesurées que pour l'approche en un temps sont utilisées et les facteurs de pondération cités plus haut sont conservés. Le graphe de convergence pour chacun des deux temps est illustré à la figure 5.13, où nous remarquons que seules trois itérations sont néces-

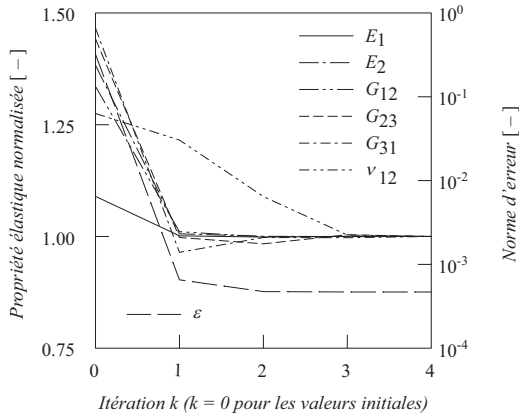


Figure 5.12 Amélioration de la convergence du coefficient de Poisson: convergence de l'algorithme en un temps.

saires au total, ce qui se traduit par un gain en temps de calcul d'un facteur 1.5. Ce gain s'explique non seulement par le nombre d'itérations plus faible mais aussi par le fait que le temps de calcul par itération est moindre.

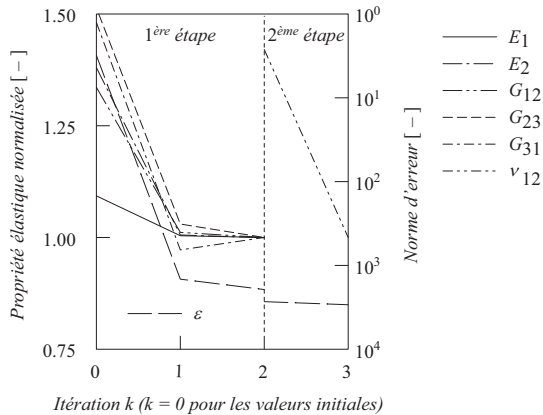


Figure 5.13 Amélioration de la convergence du coefficient de Poisson: convergence de l'algorithme en deux temps.

Les propriétés élastiques extraites selon les deux algorithmes sont résumées dans le tableau 5.11, où elles sont comparées avec les propriétés obtenues par des tests de type

statique. Nous observons une très bonne cohérence entre les valeurs identifiées et mesurées, puisque les premières sont contenues dans l'erreur de mesure des secondes.

Amélioration de la robustesse de convergence

Dans le deuxième cas, l'approche en deux temps est efficace lorsque les propriétés du matériau ne sont pas connues précisément, le rôle de la première étape consistant à trouver pour le jeu complet de paramètres de stockage \mathbf{x}_k des valeurs initiales admissibles pour la seconde étape. Un modèle grossier d'éléments finis de coque PSDT d'ordre bas ($p = 1$) ou FSDT est alors adopté pour la première étape avec un seuil δ relaxé. Cette première estimation grossière des paramètres élastiques est ensuite suivie d'une identification usuelle avec un modèle numérique PSDT d'ordre supérieur ($p = 3$) et un seuil standard. Il a été montré [50] que cette première étape est rapide (approximativement 10% du temps de calcul complet), même pour de larges perturbations des valeurs initiales, et que les paramètres élastiques sont estimés précisément.

Pour illustrer cette méthode, prenons un cas où nous cherchons à identifier les six propriétés de stockage du matériau orthotrope présenté dans l'exemple précédent en partant de valeurs estimées grossièrement. Pour la première étape, un maillage grossier avec 7×7 éléments de coque PSDT ($p = 1$) à 9 nœuds est utilisé et les propriétés de stockage fournies à la routine d'identification sont perturbées d'un ordre de grandeur par rapport à la solution. Six modes seulement sont utilisés pour effectuer cette première étape d'identification.

Tableau 5.14 Amélioration de la robustesse de convergence: coefficients de pondération utilisés pour les différentes normes d'erreur.

Coefficient de pondération	α^f	α^s	α^d	α^o	α^n	α^m
Première étape	1	0	0.05	0.025	0	0
Deuxième étape	1	0.01	0.05	0.025	0.13	0

Les valeurs assignées aux coefficients de pondération α^f , α^s , α^d , α^o et α^n sont indiquées dans le tableau 5.14, le coefficient de pondération α^m étant à nouveau fixé à une valeur nulle. Pour la première étape, α^s et α^n sont choisis comme nuls et un seuil relaxé δ de 10^{-5} est sélectionné pour contrôler le processus d'estimation itératif. Les propriétés constitutives identifiées à la fin de la première étape après deux itérations tout comme la norme d'erreur résiduelle associée sont données dans le tableau 5.15. Nous pouvons observer que, malgré des valeurs initiales largement perturbées, des estimations plutôt proches des propriétés réelles du matériau sont obtenues avec la première étape d'optimisation. Notons ici que le coefficient de Poisson reste figé pour cette première étape, vu qu'il est connu que des valeurs hautement perturbées pour les modules de Young et de cisaillement induisent généralement une divergence de l'identification du coefficient de Poisson.

Dans la seconde étape où l'identification est réalisée sur l'ensemble des paramètres de stockage, le modèle d'éléments finis précédent est remplacé par un modèle raffiné composé de 10×10 éléments PSDT du troisième ordre ($p = 3$) et 15 modes propres sont pris en compte dans le processus d'identification. Comme indiqué dans le tableau 5.14, les cinq coefficients de pondération caractérisant le comportement élastique de la structure sont utilisés et la valeur du seuil de tolérance sur la fonction d'erreur δ est diminuée à sa valeur usuelle de 10^{-7} . Pour cette seconde étape, la convergence est atteinte après quatre itérations. Les prédictions pour les propriétés constitutives et la norme d'erreur résiduelle globale à la fin du processus d'identification ($k = 6$) sont résumées dans le tableau 5.15, où les valeurs des paramètres issues des tests statiques sont à nouveau reportées afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble des résultats. Il peut être remarqué que les estimations finales sont en accord total avec les résultats obtenus lors de l'exemple précédent pour la stratégie en deux temps visant à éviter les problèmes de convergence du coefficient de Poisson.

Tableau 5.15 Amélioration de la robustesse de convergence: exemple d'identification en deux temps avec valeurs initiales fortement perturbées.

Paramètre	Méthode d'identification en deux temps			Tests statiques
	Valeurs initiales	Fin de la première étape	Fin de la seconde étape	
E_1 [GPa]	10	82.1	91.9	89.7 ± 1.0
E_2 [GPa]	1	7.61	7.23	7.4 ± 0.4
G_{12} [GPa]	0.5	3.70	3.74	3.6 ± 0.2
G_{23} [GPa]	0.5	1.78	2.11	2.1 ± 0.2
G_{31} [GPa]	0.5	2.42	3.33	3.3 ± 0.2
ν_{12} [-]	0.3	0.3	0.38	0.36 ± 0.03
$\varepsilon [^0/_{00}]$	2014	5.7	0.45	-

La figure 5.16 montre l'évolution des paramètres de stockage pendant les deux étapes d'optimisation (les résultats sont normalisés en fonction des valeurs extraites à l'itération finale) avec une discontinuité entre les deux étapes due à la modification des coefficients de pondération utilisés. La progression de la norme d'erreur résiduelle est aussi reportée dans cette figure. Il est clairement visible que la première étape permet d'estimer approximativement les paramètres constitutifs mal connus qui sont ensuite estimés précisément dans la seconde étape. Il peut être montré que la première étape est vraiment rapide et représente, dans cet exemple d'application, seulement 6% du temps d'identification total. Le temps de calcul est ainsi relativement proche de celui de l'exemple précédent, mais nous avons dans ce cas des paramètres initiaux perturbés d'un facteur 10, alors que la méthode initiale ne permet pas d'utiliser des paramètres initiaux perturbés d'un facteur supérieur à 1.5.

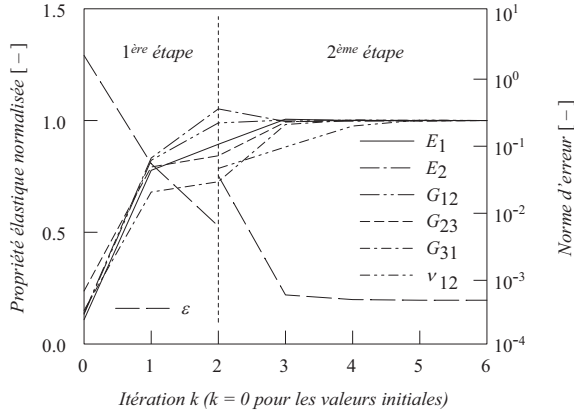


Figure 5.16 Amélioration de la robustesse de convergence: convergence des paramètres et évolution de la norme d'erreur.

Identification des propriétés dissipatives en deux temps

Dans le modèle numérique utilisé, les facteurs d'amortissement modal sont très peu liés aux fréquences propres. L'augmentation des tangentes de perte du matériau modélisé ne va pas se répercuter d'une quelconque manière sur les fréquences propres, tout au moins pour des valeurs raisonnables des tangentes de perte. Au contraire, nous avons pu remarquer au paragraphe 5.2.3 que la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal était légèrement sensible aux propriétés de stockage du matériau. Par conséquent, il peut être intéressant de séparer les propriétés constitutives du matériau à identifier en deux groupes, à savoir un premier groupe de paramètres \mathbf{x}' avec les propriétés de stockage et un deuxième groupe \mathbf{x}'' avec les propriétés de perte

$$\mathbf{x}'_k = \{E_1^k, E_2^k, \nu_{12}^k, G_{12}^k, G_{23}^k, G_{31}^k\}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{x}''_k = \{ \tan \delta(E_1^k), \tan \delta(E_2^k), \tan \delta(\nu_{12}^k), \tan \delta(G_{12}^k), \tan \delta(G_{23}^k), \tan \delta(G_{31}^k) \}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.18)$$

avec comme normes d'erreur

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}'_k) = \{ \alpha^f \boldsymbol{\varepsilon}^f, \alpha^s \boldsymbol{\varepsilon}^s, \alpha^d \boldsymbol{\varepsilon}^d, \alpha^o \boldsymbol{\varepsilon}^o, \alpha^n \boldsymbol{\varepsilon}^n \}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}''(\mathbf{x}''_k) = \{ \boldsymbol{\varepsilon}^m \}^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.20)$$

dont les coefficients de pondération α^f , α^s , α^d , α^p et α^n sont ceux recommandés dans le tableau 5.5, le coefficient α^m n'ayant ici plus d'influence puisque la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal \mathbf{e}^m est la seule utilisée dans la seconde étape. Cette stratégie d'identification en deux temps permet de découpler l'identification des propriétés de stockage – ou élastiques – de celle des propriétés de perte – ou dissipatives. Sa validation est présentée au paragraphe 5.5.1.

5.4 Logiciel d'identification

5.4.1 Description du fonctionnement

Le logiciel d'identification, conçu sous Matlab®, est schématisé à la figure 5.17. Ce logiciel a été développé de manière à pouvoir être utilisé comme outil de travail en tant que tel, tout en pouvant être amélioré continuellement.

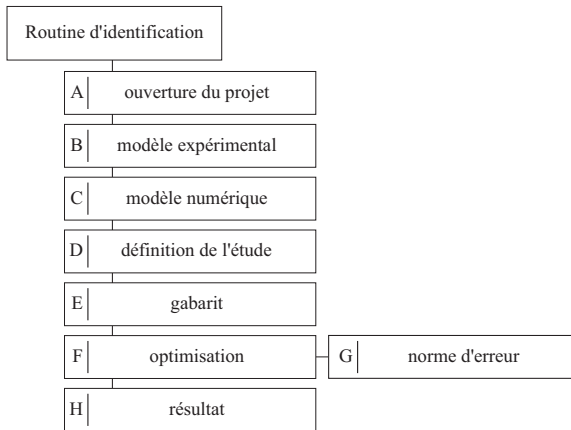


Figure 5.17 Schéma de la routine d'identification telle que développée dans Matlab®.

Définition du modèle de référence (A et B)

Dans cette première étape de définition du problème (figure 5.18), il convient de choisir un modèle de référence. Bien que généralement la référence soit le modèle expérimental issu des mesures modales, il est également possible de prendre un modèle numérique afin, par exemple, de tester la routine d'identification. Dans le cas où un modèle de référence expérimental est choisi, il sera demandé de fournir au programme

- le fichier contenant la base modale expérimentale,

- le fichier image comportant les informations sur le maillage expérimental et les dimensions de la plaque.

De plus, l'espace des paramètres utilisé lors d'une identification étant sauvegardé, il est possible d'ouvrir un projet existant et de récupérer la configuration de l'identification correspondante.

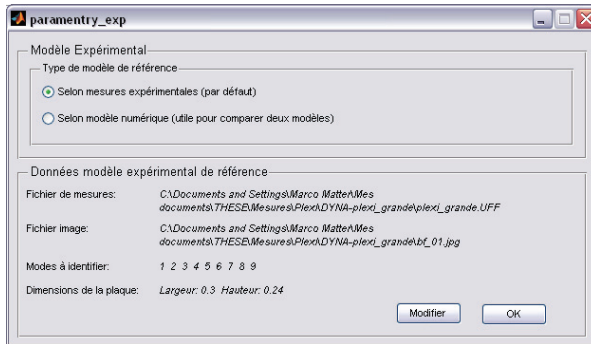


Figure 5.18 Menu permettant de définir le modèle de référence.

A partir de ces données, le modèle modal expérimental de référence est défini. Nous disposons en effet de la position des points du maillage expérimental sur le spécimen grâce au fichier image et aux dimensions de la plaque et de l'ensemble des formes modales, fréquences propres et facteurs d'amortissement modal, qui ont été extraits au préalable. Ces données sont stockées dans une structure de données Matlab®.

Définition du modèle à identifier (C)

Il est ensuite nécessaire de choisir le modèle numérique qui sera utilisé pour réaliser l'identification. Il s'agit ici de définir la géométrie du spécimen, les propriétés initiales du matériau et les spécifications des éléments finis utilisés. Pour cela, une fenêtre (figure 5.19) permet de visualiser et modifier l'ensemble des paramètres du modèle numérique. Un certain nombre de ces paramètres peut être identifié: c'est les propriétés du matériau, qui peuvent être définies soit comme figées, soit comme valeurs à identifier. Le reste des paramètres définis est fixe pour l'ensemble du processus d'identification.

Les propriétés de matériau peuvent soit être isotropes, auquel cas il convient de donner des valeurs initiales pour le module de Young et le coefficient de Poisson uniquement, soit orthotropes avec 9 propriétés à entrer pour les propriétés de stockage et autant pour les propriétés de perte. Il est possible également de générer une modélisation de

type sandwich; il est alors nécessaire de définir un deuxième matériau pour l'âme du sandwich, les peaux étant définies par le premier matériau.

Figure 5.19 Fenêtre permettant la définition du modèle numérique.

En ce qui concerne la paramétrisation des éléments finis, nous pouvons choisir le type d'éléments finis – solide, coque PSDT ou coque FSDT –, le nombre d'éléments finis dans les plans de la plaque modélisée, le type d'intégration numérique utilisé pour la construction des matrices structurelles et le nombre de fréquences propres à extraire.

Pour terminer, il est encore possible de sélectionner une excitation par haut-parleur ou par pot vibrant, cette dernière exigeant de fournir la position de l'excitation et les propriétés de la tige.

Définition de l'espace de paramètres et du gabarit (*D* et *E*)

A partir des étapes précédemment définies, le logiciel établit un espace de paramètres. Il s'agit de l'ensemble des paramètres à identifier \mathbf{x}_k qui, partant des valeurs initiales fournies lors de la définition du modèle numérique, seront mis à jour à chaque itération k . Le gabarit, caractérisé en fonction du modèle d'éléments choisi, est un fichier paramétrable contenant la définition du problème d'éléments finis. Le logiciel pourra ainsi, à partir de ce gabarit, injecter les paramètres \mathbf{x}_k à chaque itération k et créer le fichier d'entrée pour le logiciel d'éléments finis.

Processus d'optimisation (*E*, *F*, *G*)

Le processus d'optimisation, schématisé à la figure 5.20, est le cœur de la routine. Son rôle est, à partir d'un jeu de paramètres \mathbf{x}_k , de résoudre le problème d'éléments finis en injectant les paramètres \mathbf{x}_k dans le fichier d'entrée au travers du gabarit, de lire la solution du problème d'éléments finis afin de trouver un nouveau jeu \mathbf{x}_{k+1} qui minimise la fonction d'erreur $\mathfrak{E}(\mathbf{x}_{k+1})$.

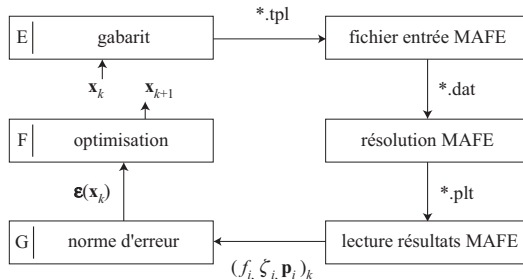


Figure 5.20 Détail du processus d'optimisation.

Avant de pouvoir commencer l'identification, il est donc nécessaire de définir la norme d'erreur $\mathfrak{E}(\mathbf{x}_k)$ à utiliser, ce qui se fait interactivement dans le menu présenté à la figure 5.21.

Post-traitement (*H*)

Pour qualifier les résultats obtenus, plusieurs outils sont disponibles. Il est possible d'afficher les modes propres expérimentaux et numériques, afin de se rendre compte de leur similarité, ou d'afficher la matrice MAC.



Figure 5.21 Définition interactive des normes d'erreur.

5.4.2 Gestion de l'amortissement

L'intégration de l'amortissement dans une telle routine d'identification exige quelques modifications, afin de gérer correctement les effets dissipatifs. La différence par rapport à une routine focalisée uniquement sur les propriétés conservatives se situe dans le fait qu'il est désormais nécessaire de prendre en compte les propriétés modales dissipatives (facteurs d'amortissement modal ζ_i et modes propres complexes $\tilde{\mathbf{p}}_i$) et de gérer des modèles numériques dissipatifs en utilisant des propriétés de matériaux complexes.

Concrètement, cela porte conséquence sur plusieurs routines qui doivent être modifiées. Parmi celles-ci, citons

- la lecture du fichier d'entrée contenant les résultats modaux expérimentaux,
- la définition et le stockage des propriétés de matériau,
- les gabarits permettant de générer les fichiers d'entrée MAFE,

- la lecture du fichier de sortie MAFE contenant les résultats numériques,
- le calcul des normes d'erreur.

Bien que ces modifications sur le code soient importantes, elles n'engendrent pas de difficulté particulière et ne seront donc pas discutées en détail ici.

5.4.3 Gestion de l'excitation par pot vibrant

La possibilité d'utilisation d'un pot vibrant comme source d'excitation engendre pour la routine d'identification de devoir intégrer les modèles spécifiques développés au chapitre 4. Pour cela, il est nécessaire de créer de nouveaux fichiers gabarits, permettant de générer des fichiers d'entrée pour MAFE paramétrés, et de donner à l'utilisateur la possibilité de gérer ces paramètres au travers de l'interface graphique (figure 5.19).

5.5 Validation de la procédure d'identification

5.5.1 Identification numérique-numérique

Afin d'étudier la convergence de la méthode, nous avons traité le cas numérique d'une plaque en carbone rectangulaire, dont les propriétés de matériau sont basées sur celles d'un cas de référence en carbone-époxy tiré de la publication [32], déjà utilisé à titre de validation numérique au chapitre 2. Nous en avons cependant modifié l'épaisseur afin d'analyser la convergence des paramètres pour trois épaisseurs distinctes: 1.78, 10.0 et 17.8 mm. L'épaisseur originale de 1.78 mm est faible par rapport aux dimensions dans le plan de la plaque de $296.55 \times 267.15 \text{ mm}^2$, ce qui laisse présager une identification de l'ensemble des paramètres délicate. A l'opposé, l'épaisseur maximale prise en compte de 17.8 mm présente un rapport d'aspect de 16.7, ce qui est proche du rapport d'aspect idéal [42] situé entre 10 et 15. Pour chacune des trois épaisseurs, deux identifications ont été réalisées avec soit une stratégie en un seul temps, soit en identifiant les propriétés de perte dans une seconde étape. Les coefficients de pondération utilisés sont ceux donnés dans le tableau 5.5.

La figure 5.22 permet de remarquer à quel point la qualité de l'identification des modules de cisaillement transverse varie avec l'épaisseur du spécimen. Alors qu'avec une épaisseur de 10 mm, ce qui représente un facteur d'aspect de 30, l'erreur de la routine d'identification est encore inférieure à 1% sur l'ensemble des paramètres (voir figure 5.23), l'épaisseur de 1.78 mm rend impossible l'identification des modules de cisaillement transverse, l'erreur sur ceux-ci s'envolant à plus de 70%. Cette erreur augmentant avec la diminution de l'épaisseur a une origine physique puisque plus le

spécimen est fin, moins les propriétés de cisaillement transverse ont un rôle dans le comportement modal de celui-ci. Il n'est en toute logique pas possible d'identifier un paramètre constitutif lorsque celui n'a pas d'influence dans le comportement modal du spécimen utilisé pour l'identification.

La précision des paramètres identifiés est ainsi excellente pour la plaque la plus épaisse et très bonne pour la plaque d'épaisseur moyenne, ceci pour toutes les propriétés du matériau (figure 5.23). Il est intéressant de relever qu'à l'exception de la plaque la plus fine, la tangente de perte du coefficient de Poisson dans le plan $\tan\delta(v_{12})$ est identifiée avec une erreur de moins de 1%, ce qui est surprenant connaissant les sensibilités faibles de la norme d'erreur α^m à ce paramètre.

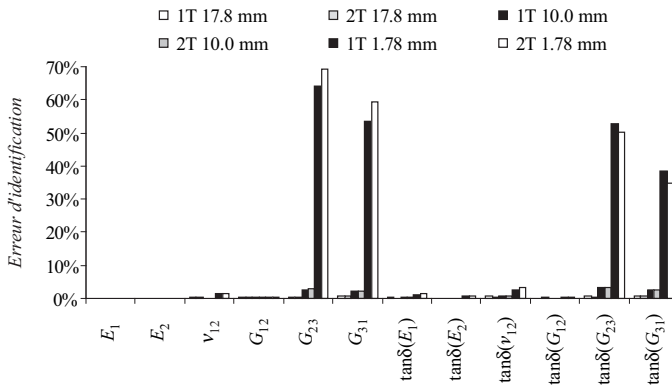


Figure 5.22 Erreurs d'identification pour une stratégie en un temps (1T) et deux temps (2T) pour trois épaisseurs de 17.8, 10.0 et 1.78 mm.

Nous pouvons remarquer que les deux stratégies d'identification, en un temps et deux temps, sont équivalentes du point de vue de la qualité des résultats. Nous avons cependant constaté que la stratégie en deux temps était généralement plus robuste et qu'elle convergait plus rapidement que celle en un temps, comme le montrent les figures 5.24 et 5.25. Ces figures donnent les graphes de convergence pour les méthodes en un et deux temps en fonction du nombre de solutions du modèle numérique calculées, pour la plaque d'épaisseur 17.8 mm. Nous voyons bien que malgré un nombre total d'itérations similaire, l'identification en deux temps se contente de 2/3 des calculs effectués lors de l'identification en un temps, ce qui correspond à un gain de temps de 30%. Une autre qualité de la stratégie en deux temps est son aspect pratique en phase de développement, lorsque nous désirons identifier les propriétés de perte avec différents paramètres d'optimisation, puisqu'il est possible de réaliser la première étape une unique fois pour trouver les propriétés de stockage du matériau puis d'effectuer la deuxième étape plusieurs fois avec des configurations d'identification variables, ce qui

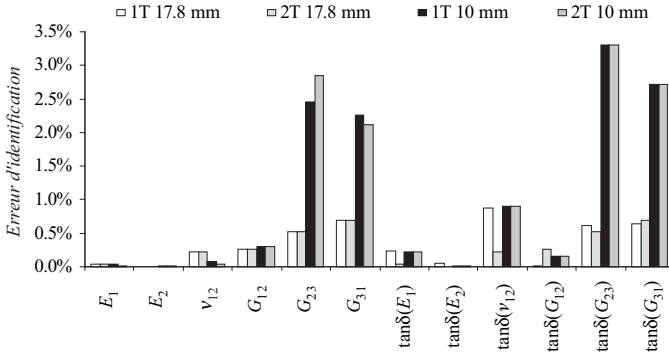


Figure 5.23 Zoom sur les erreurs d'identification pour une stratégie en un temps (1T) et deux temps (2T) pour les deux épaisseurs de 17.8 et 10.0 mm.

économise du temps de calcul. La stratégie en deux temps sera donc préférée pour sa robustesse supérieure et la possibilité de paramétrer séparément les deux étapes d'identification.

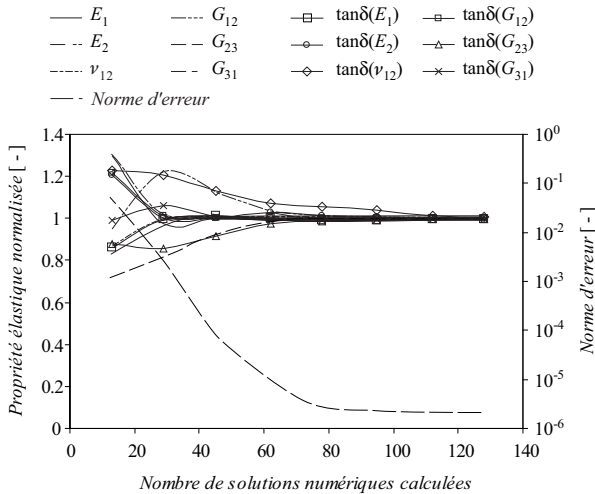


Figure 5.24 Identification des propriétés en un temps et 8 itérations.

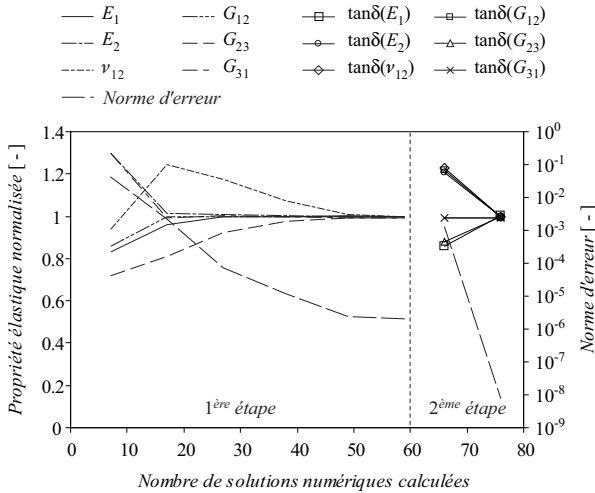


Figure 5.25 Identification des propriétés en deux temps et 7 itérations.

5.5.2 Identification numérique-numérique sur un modèle perturbé

L'identification avec comme modèle de référence un modèle numérique permet de valider la méthode d'identification et les normes d'erreur utilisées. Ces cas de test ne sont cependant pas très représentatifs des conditions d'identification réelles. Dans la réalité, même en utilisant un modèle parfait, il ne sera jamais possible de le faire corrélérer parfaitement avec le modèle expérimental de référence puisque celui-ci sera entaché d'une erreur de mesure aléatoire. Il est donc intéressant de voir comment la méthode d'identification réagit lorsqu'une erreur de mesure est ajoutée au modèle de référence.

Pour simuler cette erreur de mesure, nous proposons ici de perturber les valeurs des fréquences propres et facteurs d'amortissement modal de référence d'une valeur aléatoire pouvant aller de 0 à l'ordre de grandeur de l'erreur de mesure de chacun de ces paramètres. Pour les fréquences, la perturbation est située entre 0 et 1%, pour les facteurs d'amortissement modal entre 0 et 20%. Nous ne perturbons pas la forme des modes, puisque nous avons remarqué que la forme des modes numériques identifiés est généralement très proche de la forme des modes expérimentaux.

Nous avons pris comme référence un modèle numérique de plaque correspondant au spécimen testé au paragraphe 5.5.1, avec une épaisseur de 10 mm. Les valeurs perturbées peuvent être comparées aux valeurs initiales non perturbées dans la figure 5.26. La conséquence de l'utilisation d'un modèle initial perturbé est que la routine d'identi-

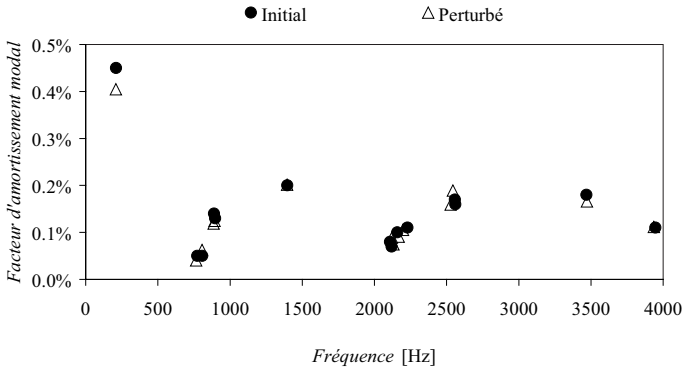


Figure 5.26 Modèle numérique de référence avant et après l'application d'une perturbation aléatoire allant jusqu'à 1% pour les fréquences et 20% pour les facteurs d'amortissement modal.

fication ne sera plus capable de faire correspondre parfaitement les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modal du modèle identifié avec ceux du modèle de référence. Le modèle identifié sera ainsi le modèle le plus proche possible du modèle initial selon la norme d'erreur utilisée. Il s'ensuit que l'écart entre le modèle numérique identifié et le modèle de référence se fera ressentir dans l'erreur des paramètres identifiés. Cet écart peut être observé dans la figure 5.27.

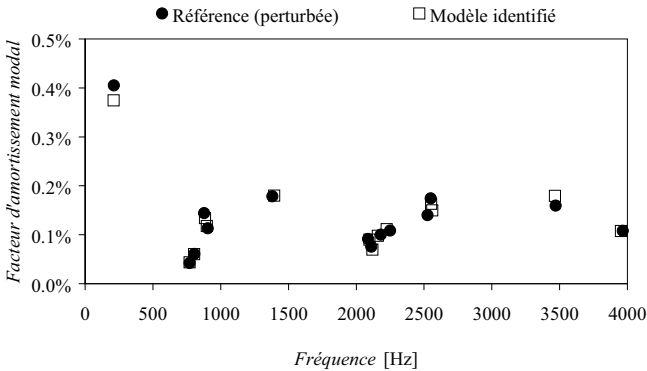


Figure 5.27 Comparaison entre le modèle identifié et les valeurs de référence perturbées.

L'erreur des paramètres identifiés due à la perturbation du modèle de référence est visible à la figure 5.28. Dans cette figure, nous avons représenté l'erreur des paramè-

tres identifiés avec comme référence le modèle perturbé ainsi que l'erreur obtenue avec comme référence le modèle non perturbé.

L'analyse de cette figure montre que les propriétés de matériau les plus sensibles à une perturbation des données modales de référence sont le coefficient de Poisson ν_{12} et le module de cisaillement G_{23} , ainsi que les tangentes de perte associées $\tan\delta(\nu_{12})$ et $\tan\delta(G_{23})$. L'erreur commise sur l'identification des autres paramètres est inférieure à l'erreur ajoutée artificiellement au modèle de référence. Nous pouvons donc conclure que pour la majorité des paramètres, l'erreur de mesure des propriétés modales de référence est répercutée sur l'erreur d'identification des paramètres de matériau, ce qui confirme une nouvelle fois l'importance de la précision des mesures.

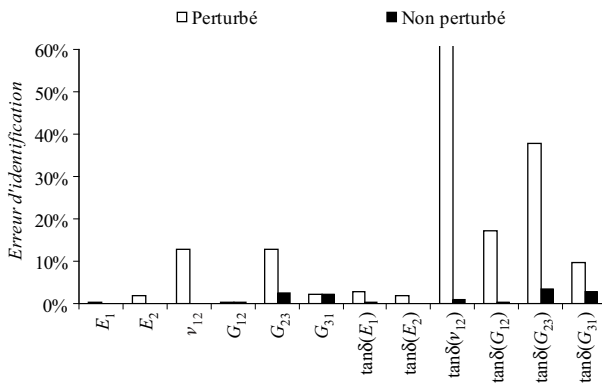


Figure 5.28 Erreur d'identification sur les propriétés de matériau pour un modèle initial perturbé et non perturbé.

5.6 Résumé et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale apte à identifier les propriétés dissipatives orthotropes de matériaux composites. Nous avons choisi un jeu de fonctions objectif sensibles aux propriétés constitutives élastiques et dissipatives de matériau et validé celui-ci dans deux études de cas. La procédure d'identification a été améliorée de manière à augmenter sa robustesse, par exemple en introduisant une stratégie d'identification en deux temps, et adaptée pour intégrer les aspects dissipatifs. Nous avons également présenté le logiciel d'identification conçu dans le cadre de ce travail, réalisé afin de rendre accessible la méthode d'identification à un large public.

La procédure développée a été validée en effectuant des identifications avec comme référence des modèles numériques aux résultats perturbés, afin de simuler les erreurs expérimentales. Cette validation a permis de voir quelles propriétés constitutives de matériau sont identifiables avec la méthode proposée. De manière générale, il a pu être observé que l'identification de la tangente de perte d'une propriété constitutive montre toujours une erreur supérieure à celle de sa valeur de stockage. Avec une unique norme d'erreur sensible aux effets dissipatifs, il paraît délicat d'identifier précisément les tangentes de perte des modules de cisaillement transverses et quasiment impossible d'obtenir des tangentes de perte du coefficient de Poisson dans le plan réalistes. Ces derniers points sont clairement les domaines où la méthode actuelle doit encore être améliorée. Il serait intéressant d'évaluer la possibilité d'utiliser plusieurs spécimens de géométries différentes simultanément dans le processus d'identification afin d'améliorer la précision de la méthode.

Chapitre 6

Validation et exemples

6.1 Objectifs

Dans ce chapitre, nous passons en revue plusieurs exemples afin de mettre en exergue les qualités de la méthode développée dans le cadre de cette thèse. Ces exemples servent de validation et permettent de se rendre compte des performances et limitations de la technique proposée.

6.2 Méthode de mesure

6.2.1 Stratégie d'identification

Plusieurs cas d'application de la méthode d'identification développée sont présentés dans ce chapitre. Pour chacun d'entre eux, qui utilisent soit une excitation par pot vibrant, soit une excitation par haut-parleur, nous avons choisi une stratégie similaire, que nous décrivons dans ce paragraphe.

La stratégie d'identification employée consiste à identifier les paramètres en deux temps. Dans le premier temps, seules les propriétés élastiques sont identifiées alors que dans le deuxième temps les propriétés dissipatives sont caractérisées. Au cours du premier temps, où les propriétés de stockage sont identifiées, les tangentes de perte restent fixées à leurs valeurs initiales. Nous utilisons pour cette étape une norme d'erreur globale semblable à celle recommandée au chapitre 5 pour un cas conservatif, en fixant un poids nul pour la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal. La fonction d'erreur globale \mathcal{E} utilisée pour la première étape s'écrit par conséquent

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}'_k) = \{\alpha^f \boldsymbol{\varepsilon}^f, \alpha^s \boldsymbol{\varepsilon}^s, \alpha^d \boldsymbol{\varepsilon}^d, \alpha^o \boldsymbol{\varepsilon}^o, \alpha^n \boldsymbol{\varepsilon}^n\}^T \quad (6.1)$$

avec \mathbf{x}'_k désignant le vecteur des paramètres de stockage.

Pour la seconde étape, seule la fonction d'erreur sensible aux phénomènes dissipatifs est utilisée, à savoir la fonction d'erreur basée sur les écarts relatifs des facteurs d'amortissement modal $\boldsymbol{\varepsilon}^m$. La fonction d'erreur globale devient dès lors

$$\boldsymbol{\varepsilon}''(\mathbf{x}''_k) = \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (6.2)$$

avec \mathbf{x}''_k désignant le vecteur des tangentes de perte.

Nous avons choisi de nous servir de l'identification en deux étapes pour sa flexibilité supérieure. Bien entendu, il est possible d'obtenir des résultats similaires en identifiant les paramètres en un seul temps, en utilisant l'ensemble des 6 fonctions d'erreur et en sélectionnant un poids α^m adéquat pour la fonction d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal.

6.2.2 Méthode DMA

Description de la méthode

La méthode DMA (Dynamic Mechanical Analysis) est un type de mesure dynamique proche d'un test de type statique à la différence que l'on ajoute une dimension fréquentielle en appliquant au spécimen étudié une contrainte ou un déplacement de type harmonique. Ceci permet d'observer un angle de déphasage δ entre la contrainte appliquée et la déformation résultante, dont la tangente est appelée tangente de perte (ou communément «tangente delta»), notée $\tan\delta$, et fournit une information sur l'amortissement du matériau. Suivant la configuration du test et le type de matériau, la valeur de la tangente de perte mesurée peut être considérée comme étant la tangente de perte de l'une des propriétés constitutives du matériau.

Un exemple représentatif d'une utilisation courante de la méthode DMA est présenté à la figure 6.1. Cette figure montre la tangente de perte du déplacement imposé au centre d'une éprouvette de PMMA dans une configuration de flexion bi-encastree en fonction de la température. Nous pouvons remarquer le comportement constant de la tangente de perte jusqu'à 110°C, puis une augmentation importante de la tangente de perte qui reflète le point de transition vitreuse. Cette évolution traduit un taux d'amortissement élevé aux températures proches de 140°C, mais avec en contrepartie une rigidité de l'éprouvette devenue très faible à cause de cette température importante.

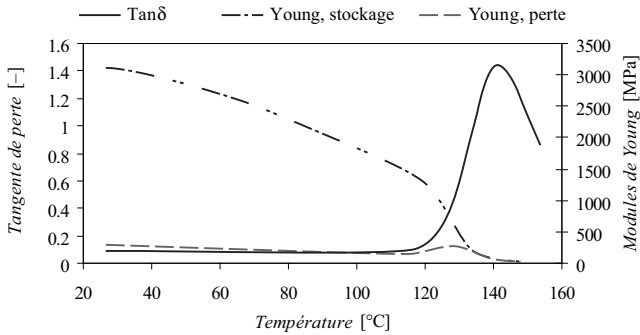


Figure 6.1 Tangente de perte du déplacement appliqué au centre d'une éprouvette bi-encastree en PMMA en fonction de la température et modules de Young de stockage et de perte correspondants (TA Q800, F. Bonjour, LTC).

La méthode DMA est utilisée couramment avant tout pour caractériser des matériaux fortement dissipatifs et permet par exemple de localiser précisément la température de transition vitreuse des matériaux polymères. Cependant, lorsqu'il s'agit de mesurer des matériaux faiblement dissipatifs, la méthode montre ses limites. Il est en effet délicat de mesurer une tangente de perte avec une erreur absolue inférieure à 0.005. La méthode DMA ne peut par conséquent pas être considérée comme une mesure de référence pour les matériaux peu amortis comme des métaux ou certains composites, mais elle doit plutôt être vue comme une technique alternative aux procédures de type modal, avec ses avantages et ses inconvénients suivant les cas étudiés.

Configurations de test

Nous avons réalisé des essais DMA afin de pouvoir comparer les résultats d'identification avec une méthode indépendante. Dans ce but, nous avons utilisé deux types de configuration de test, l'un avec l'éprouvette sollicitée en flexion bi-encastree (figure 6.2) et l'autre en traction (figure 6.3). La configuration en flexion bi-encastree est préférée à la configuration en traction pour les échantillons rigides, puisqu'elle permet d'obtenir des déformations plus importantes à force appliquée égale. L'avantage de la configuration en traction est que celle-ci permet de mesurer également les effets de Poisson. Pour chacun des cas, la force appliquée sur l'éprouvette est mesurée à l'aide d'un capteur de force employant des jauges extensométriques et la déformation de l'éprouvette est mesurée à l'aide de jauges de déformation collées directement à sa surface.

Les éprouvettes que nous avons étudiées mesurent toutes entre 24 et 25 mm de large pour une longueur de 20 cm. La partie libre située entre les deux encastrements en configuration bi-encastree mesure 10 cm de long, avec le point d'application de la

force situé à mi-longueur de l'éprouvette. Dans cette configuration, une seule jauge de déformation collée à l'opposé de l'endroit de l'application de la force a été utilisée afin de mesurer le module de Young et sa tangente de perte. Lors des mesures effectuées sur les spécimens en carbone-époxy, présentées au paragraphe 6.3.3, nous avons également eu recours à une jauge de contrainte collée sur le flanc de l'éprouvette afin de mesurer les déformations en cisaillement transverse. En traction, la distance entre les mors est également de 10 cm. Sur l'éprouvette sollicitée en traction, des jauges mesurant les déformations dans les directions longitudinale et latérale placées au centre de l'éprouvette permettent d'obtenir les valeurs complexes du module de Young et du coefficient de Poisson.

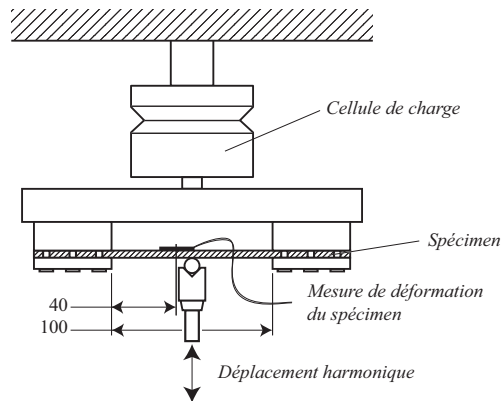


Figure 6.2 Schéma de principe d'une mesure DMA en flexion bi-encastree (dimensions en mm).

L'emploi de jauges de déformation pour mesurer la réponse de l'éprouvette permet de tirer parti de deux avantages majeurs. Premièrement, la jauge de déformation ne mesure pas la déformation globale du spécimen mais une déformation locale dans une direction particulière choisie. Les méthodes de test DMA traditionnelles se contentent de mesurer le déplacement au point d'application de la force et dans la direction de celle-ci. Cela permet bien sûr d'avoir une indication sur le déphasage entre la force appliquée et la déformation du matériau, mais c'est le comportement global du spécimen qui est mesuré. Par conséquent, lorsque le spécimen est fait d'un matériau non isotrope ou isotrope mais avec une tangente de perte du coefficient de Poisson non nulle, les résultats obtenus par ce type de test seront d'une part dépendants de la géométrie de l'échantillon et d'autre part ne seront pas forcément assimilables à l'effet d'une propriété caractéristique particulière du matériau.

Le deuxième avantage est que le recours à des jauges de déformation permet d'avoir des canaux de mesure parfaitement symétriques, puisqu'elles fonctionnent selon le

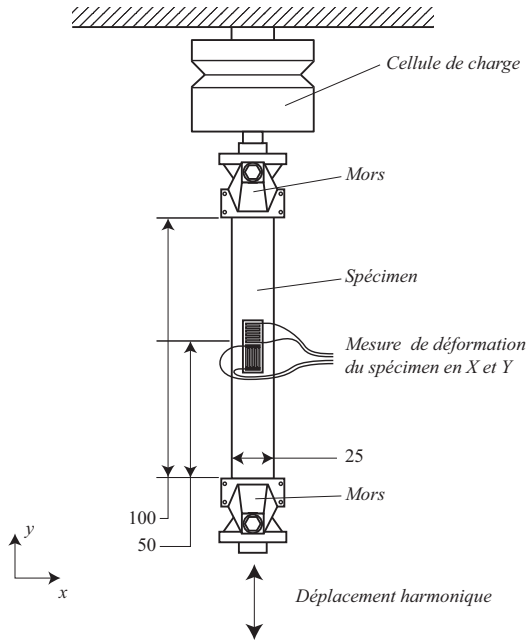


Figure 6.3 Essais DMA en traction (dimensions en mm).

même principe que la cellule de charge, ce qui autorise l'utilisation d'appareils identiques pour le traitement du signal des différents canaux. Cet aspect revêt une grande importance lorsque nous désirons mesurer un déphasage dû à l'amortissement interne, puisque le déphasage mesuré contient également le déphasage parasite induit par l'erreur de phase entre deux canaux de mesure.

Qualité des mesures

La qualité des mesures obtenues dépend de la chaîne d'acquisition ainsi que de la construction de la machine de traction et du dispositif expérimental. Le pont de jauge, le filtrage et l'amplification du signal sont réalisés sur un amplificateur MGC de la marque HBM. Cet amplificateur dispose de six canaux de mesure identiques. Le retard induit par le filtre étant identique sur chaque canal, il n'a pas d'influence sur le déphasage entre deux canaux. Nous utilisons ensuite une carte d'acquisition permettant d'atteindre une vitesse d'acquisition simultanée de 100 kéch/sec sur quatre canaux avec une résolution de 24 bits, dont l'erreur de phase entre deux canaux est spécifiée par le constructeur comme étant inférieure à 0.0015 rad. De plus, afin de réduire au

maximum cette erreur de phase, nous avons à chaque fois pris la moyenne de deux mesures avec les canaux intervertis.

La machine de traction et le dispositif de mesure doivent présenter une grande rigidité afin d'éviter d'avoir des modes propres de vibration proches de la plage de mesure. Dans notre cas, une étude du comportement modal de notre montage de mesure (voir figure 6.4) a pu mettre en évidence la présence de modes à partir de 100 Hz environ; par conséquent nous avons effectué nos mesures sur une plage de fréquence ne dépassant pas 50 Hz afin de s'assurer une bonne linéarité de phase. Cette plage de mesure pourrait être augmentée en optimisant la masse de notre système de fixation, ce qui permettrait de décaler la première fréquence propre du système vers le haut.

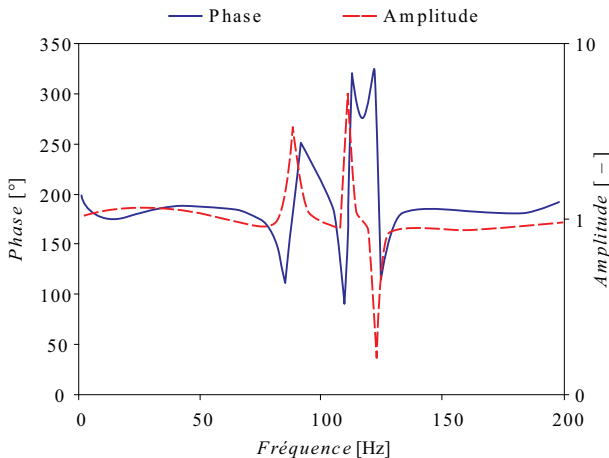


Figure 6.4 Analyse modale du montage de test DMA.

Traitement des résultats

Le déphasage entre les signaux de force et de déformation peut être calculé avec plusieurs méthodes. Une manière de procéder est d'approcher chacun des signaux par des sinus en utilisant une méthode de régression linéaire, ce qui permet de mesurer leur amplitude ainsi que leur différence de phase. Une autre solution est d'avoir recours à la transformation de Fourier discrète [51]. Nous avons vu au chapitre 3 que la transformation d'un signal échantillonné périodique s en un signal discret S dans le domaine fréquentiel s'écrit

$$\mathbf{S}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{s}(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (6.3)$$

avec N le nombre d'échantillons compris dans le signal \mathbf{s} et $\mathbf{s}(n)$ le n -ème échantillon de ce signal.

Comme les signaux de force et de déformation sont sinusoidaux, réels et dotés de la même pulsation, la seule fréquence significative est la fondamentale ($k = 1$). La transformation permet d'obtenir un terme en phase et en quadrature de phase pour les fonctions de contrainte $\tilde{\sigma}$ et de déformation $\tilde{\varepsilon}$ comme

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{\sigma}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma(n) \cos\left(-\frac{2\pi n}{N}\right) \\ \Im(\tilde{\sigma}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma(n) \sin\left(-\frac{2\pi n}{N}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{\varepsilon}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon(n) \cos\left(-\frac{2\pi n}{N}\right) \\ \Im(\tilde{\varepsilon}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon(n) \sin\left(-\frac{2\pi n}{N}\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où $\sigma(n)$ et $\varepsilon(n)$ sont les n -èmes échantillons des mesures de la contrainte et de la déformation.

Une fois que nous connaissons les valeurs complexes de la contrainte et de la déformation, nous obtenons les module de Young \tilde{E} et coefficient de Poisson $\tilde{\nu}$ complexes en utilisant les relations suivantes, sous forme complexe et pour la configuration en traction

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}} \quad (6.6)$$

$$\tilde{\nu} = -\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{lat}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{long}}} \quad (6.7)$$

où $\tilde{\sigma}$ est la contrainte normale, tandis que $\tilde{\varepsilon}_{\text{long}}$ et $\tilde{\varepsilon}_{\text{lat}}$ sont les déformations longitudinale et latérale. Pour le cas de charge en configuration bi-encastée, nous recourons à

la résistance des matériaux pour mettre en relation la déformation mesurée sur le spécimen et son module de Young (hypothèse de flexion pure)

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon}} \cdot \frac{3l}{4b} \quad (6.8)$$

avec b l'épaisseur de l'éprouvette et l sa longueur entre les deux encastresments. Dans les relations (6.6) et (6.8), la contrainte $\tilde{\sigma}$ est définie tant pour la traction que pour la flexion comme F/ab avec F la force mesurée et a la largeur du spécimen.

Amortissement des mors en flexion bi-encastree

Afin de vérifier si l'amortissement mesuré n'était pas influencé par les grips en configuration de flexion bi-encastree, nous avons effectué une mesure indépendante afin d'estimer l'amortissement de l'éprouvette en PMMA montée dans les mors (figure 6.5). Nous avons mesuré le facteur d'amortissement modal du premier mode à partir de la fonction de réponse en fréquence de l'éprouvette encastree. Pour exciter l'éprouvette, nous avons utilisé un marteau instrumenté alors que la réponse a été mesurée à l'aide d'un vibromètre laser monopoint.

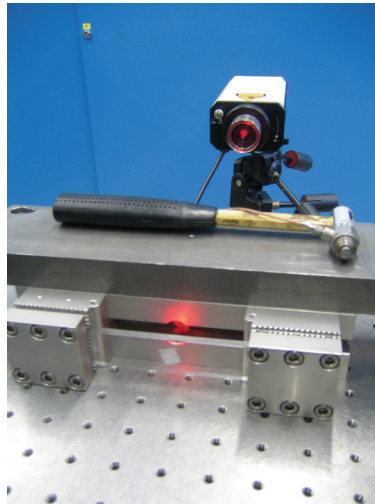


Figure 6.5 Plaques en PMMA: mesure du facteur d'amortissement du premier mode avec les mors de flexion bi-encastree.

Afin d'avoir une évaluation de l'amortissement ajouté par les mors, nous avons également effectué une mesure d'un spécimen en acier (type acier ressort). Les facteurs d'amortissement modal du premier mode de flexion sont:

- PMMA 2.34 %
- Acier < 0.01 %

L'amortissement du spécimen en acier est trop faible pour être mesuré. Nous déduisons par conséquent que l'amortissement ajouté par les mors est négligeable. Par contre, en configuration de test sur la machine de traction, il est probable qu'apparaissent des pertes par frottement à l'endroit où le couteau appuie sur le spécimen.

La valeur du facteur d'amortissement modal mesurée pour l'éprouvette en PMMA correspond au premier mode de flexion de l'éprouvette fixée dans les mors, dont la fréquence est de 1050 Hz. Cette fréquence élevée explique pourquoi nous obtenons un amortissement plus faible que lors des mesures DMA effectuées à basse fréquence présentées au paragraphe 6.3.1. Il est cependant intéressant de relever que la valeur du facteur d'amortissement modal concorde bien avec ceux mesurés sur la plaque B, illustrés à la figure 6.8.

6.3 Résultats par type de spécimen

6.3.1 Spécimens en PMMA

Nous décrivons ici les résultats obtenus pour des spécimens en Plexiglas GS (polyméthacrylate de méthyle, PMMA). Ce matériau présente des propriétés macroscopiquement isotropes et nous le considérons comme tel dans cette analyse. Il possède non seulement des facteurs d'amortissement modal élevés en comparaison des stratifiés en carbone/époxy, mais également des effets viscoélastiques sensibles dont les conséquences (ou les causes) sont des propriétés mécaniques qui varient avec la fréquence.

Tableau 6.6 Plaques en PMMA: caractéristiques des spécimens.

	Longueur [mm]	Largeur [mm]	Épaisseur [mm]	Masse volumique [kg/m ³]
Plaque A	300	240	2.9	1211.2
Plaque B	182	146.6	4.6	1254.8

Description des échantillons

Deux spécimens ont été utilisés pour l'analyse modale, afin d'élargir la plage des modes propres: leurs dimensions sont données dans le tableau 6.6. Les masses volumi-

ques présentées dans ce tableau prennent en compte la masse de l'adhésif réfléchissant collé sur le spécimen afin d'obtenir une réflectivité optimale, nécessaire à une mesure par interférométrie laser de qualité (paragraphe 3.3.4). Sur la plaque A, l'utilisation de l'adhésif s'est limitée aux lieux des points de mesure, alors que sur la plaque B, une face complète de la plaque en a été recouverte, ce qui explique les valeurs différentes des masses volumiques. Nous avons tenté de limiter l'utilisation de la bande réfléchissante adhésive sur la plaque A pour réduire au maximum l'effet parasite sur la rigidité, l'amortissement et la masse du spécimen. Celui-ci présentant une forme élançée avec des grandes faces relativement à l'épaisseur, l'effet d'un recouvrement total de bande réfléchissante aurait été par conséquent bien plus sensible que sur la plaque B.

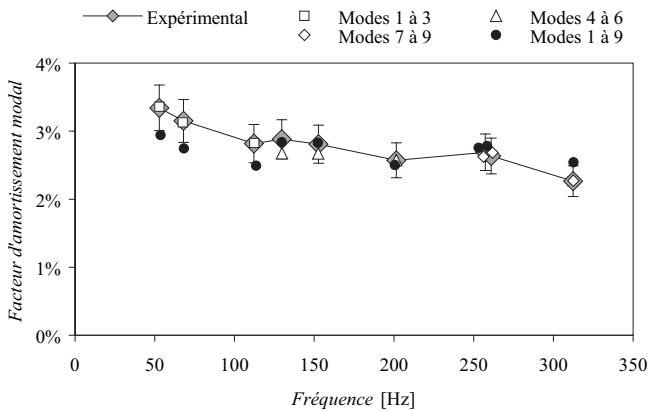


Figure 6.7 Plaque A en PMMA: représentation des facteurs d'amortissement modal mesurés en fonction des fréquences propres mesurées. Les résultats obtenus par identification modale sont également représentés.

Les plaques sont excitées chacune avec un haut-parleur spécifique, afin d'obtenir une excitation optimale des deux gammes de fréquence. La qualité des résultats trouvés pour la plaque A est supérieure à celle obtenue sur la plaque B, ce qui se remarquerait par ailleurs au rapport signal/bruit des fonctions de transfert mesurées. Les résultats sont présentés dans les figures 6.7 et 6.8, avec une barre d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal permettant de se rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur de mesure de ceux-ci, estimée à 10% pour ces plaques.

Identification des propriétés

Les facteurs d'amortissement modal extraits montrent une tendance à décroître avec la fréquence. Pour cette raison, nous avons non seulement choisi pour chacune des plaques une stratégie d'identification sur l'ensemble des modes mesurés (neuf modes dans chaque cas), mais nous avons également effectué des identifications sur des pla-

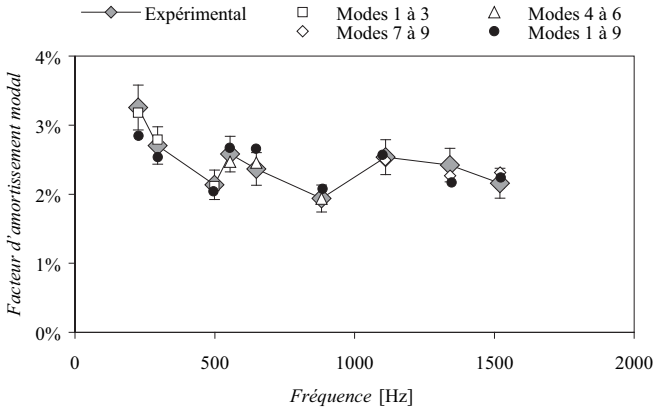


Figure 6.8 Plaque B en PMMA: représentation des facteurs d'amortissement modal mesurés en fonction des fréquences propres mesurées. Les résultats obtenus par identification modale sont également représentés.

ges de fréquence plus limitées en utilisant uniquement trois modes. Comme nous considérons ici une loi de comportement isotrope, le matériau est défini par deux paramètres (complexes) seulement. Par conséquent, l'emploi de trois modes permet déjà d'avoir une bonne définition du problème. Nous avons utilisé pour la modélisation numérique des éléments de coque PSDT avec un ordre p fixé à 3 et une discrétisation en 14x11 éléments pour la plaque A et 12x10 éléments pour la plaque B.

Tableau 6.9 Plaques en PMMA: résultats d'identification sur les deux tailles de spécimens.

Spécimen	Modes Identifiés	E [GPa]	$\tan\delta(E)$ [-]	ν [-]	$\tan\delta(\nu)$ [-]	G [GPa]	$\tan\delta(G)$ [-]
Plaque A	1 à 9	5.19	0.054	0.32	-0.019	1.97	0.059
	1 à 3	5.08	0.062	0.32	-0.024	1.92	0.068
	4 à 6	5.21	0.053	0.32	-0.001	1.97	0.053
	7 à 9	5.30	0.050	0.29	-0.001	2.05	0.050
Plaque B	1 à 9	5.54	0.049	0.37	-0.029	2.02	0.058
	1 à 3	5.51	0.054	0.38	-0.037	2.00	0.065
	4 à 6	5.54	0.046	0.36	-0.028	2.04	0.054
	7 à 9	5.63	0.048	0.34	-0.006	2.10	0.049

Le tableau 6.9 donne un aperçu des résultats d'identification. Pour chaque plaque, nous avons effectué une identification avec l'ensemble des neuf modes mesurés, ainsi que trois identifications supplémentaires en utilisant seulement trois modes consécutifs. Cette stratégie a été entreprise dans le but de pouvoir relever des tendances de variation des paramètres identifiés avec la fréquence. Nous pouvons ainsi observer

l'évolution avec la fréquence du module de Young identifié, qui montre un comportement de type asymptotique, avec des valeurs allant jusqu'à plus de 5.6 GPa. Le module de glissement suit la même tendance que le module de Young en augmentant avec la fréquence. Du côté des tangentes de perte, la tendance est inverse avec une diminution selon la fréquence allant vers une stabilisation. Le coefficient de Poisson montre quant à lui une variation plus aléatoire avec la fréquence, qui est due à l'erreur d'identification plus importante pour ce paramètre. En effet, pour un matériau isotrope, le coefficient de Poisson est lié au rapport entre le module de Young et celui de glissement; il est par conséquent plus sensible aux erreurs de mesure et d'identification, ce qui permet d'expliquer sa stabilité moindre.

L'évolution des propriétés identifiées avec la fréquence se laisse facilement comprendre en considérant la nature viscoélastique du matériau. Nous avons en effet des modules de stockage qui augmentent avec la fréquence: le matériau est plus rigide à hautes fréquences. Par conséquent, en admettant que le module de perte reste constant, la tangente de perte va avoir tendance à diminuer avec la fréquence, la partie élastique prenant le dessus sur la partie dissipative. Cette évolution des propriétés avec la fréquence est illustrée à la figure 6.10, où sont reportées les valeurs moyennes obtenues pour chaque groupe de modes avec les plaques A et B.

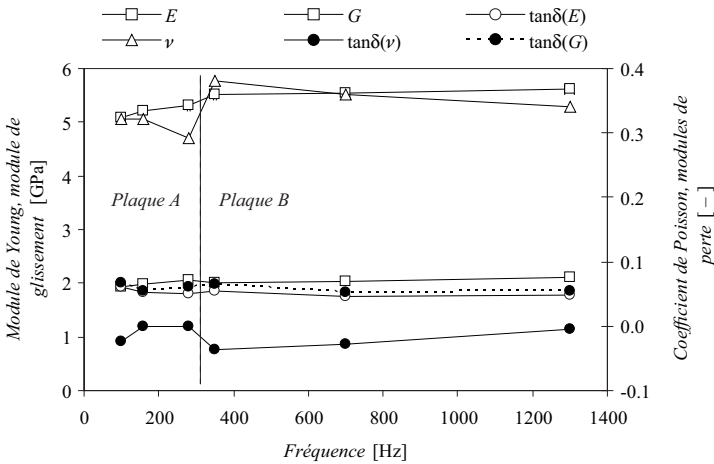


Figure 6.10 Plaques en PMMA: évolution avec la fréquence des propriétés obtenues en identifiant par groupes de trois modes.

Validation par mesure de type DMA

A côté des mesures modales obtenues sur notre stand de mesure avec une excitation par haut-parleur, nous avons également effectué des mesures de validation sur une installation de type DMA. Ces essais, bien que réalisés sur une plage de mesure plus limitée, permettent tout de même d'avoir un moyen de comparaison intéressant. Alors que les mesures modales nous ont permis d'extraire les caractéristiques des modes sur une plage de fréquence allant de 50 à 1600 Hz, nos mesures DMA sont réalisées sur une plage de 0 à 50 Hz (paragraphe 6.2.2). Nous avons pris les mesures à partir d'échantillons découpés dans la plaque B de $20 \times 2.5 \times 0.5 \text{ cm}^3$ et utilisé les configurations en flexion bi-encastree et en traction pour ces essais.

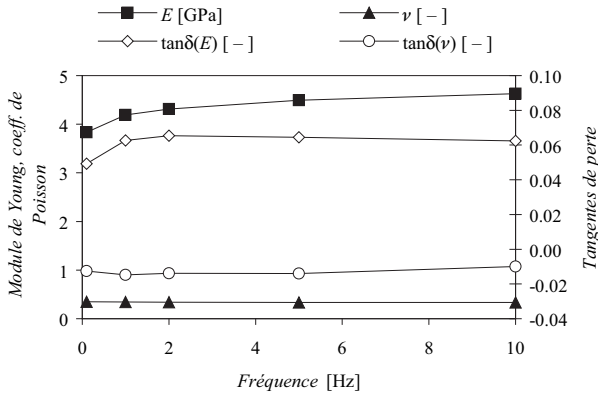


Figure 6.11 Spécimens en PMMA: résultats des essais DMA en traction.

Les mesures ont été accomplies pour des fréquences allant de 0 à 10 Hz pour la traction et de 0 à 50 Hz pour la configuration bi-encastree. Il aurait été préférable d'obtenir des résultats à des fréquences plus élevées afin de pouvoir plus aisément les comparer avec les résultats trouvés par analyse modale, mais le dispositif expérimental ne permet pas d'obtenir des valeurs précises au-dessus de ces fréquences, ceci pour les raisons invoquées au paragraphe 6.2.2. Les résultats déterminés pour le cas de la traction sont illustrés à la figure 6.11, où nous vérifions une nouvelle fois que les propriétés du matériau dépendent bien de la fréquence avec une hausse du module de stockage de Young et une baisse de sa tangente de perte. Les valeurs trouvées à 0, 1, 2, 5 et 10 Hz sont résumées au tableau 6.12.

Tableau 6.12 Spécimens en PMMA: propriétés mesurées en traction par essai DMA.

Fréquence [Hz]	E [GPa]	$\tan\delta(E)$ [-]	ν [-]	$\tan\delta(\nu)$ [-]	G [GPa]	$\tan\delta(G)$ [-]
0.1	3.83	0.049	0.35	-0.013	1.42	0.053
1	4.19	0.063	0.34	-0.015	1.56	0.066
2	4.31	0.065	0.34	-0.014	1.61	0.069
5	4.49	0.065	0.34	-0.014	1.68	0.068
10	4.63	0.062	0.33	-0.010	1.74	0.065

Les mesures en configuration bi-encastree permettent uniquement d'extraire des informations concernant le module de Young et la tangente de perte de ce module de l'échantillon. Les mesures sont moins précises qu'en configuration de traction, dès lors que la distance d'encastrement intervient dans le calcul du module de Young, ajoutant ainsi une incertitude, et étant donné que cette configuration engendre plus de pertes par frottement qu'en traction. Cela se remarque en comparant les résultats du tableau 6.12 avec ceux du tableau 6.13 fournissant les valeurs mesurées pour les spécimens bi-encastres: les tangentes de perte sont plus élevées de 10 % environ pour la configuration en flexion bi-encastree.

Les tendances de l'évolution des propriétés du matériau avec la fréquence peuvent être mises en évidence en observant la figure 6.14. Nous remarquons à nouveau que le module de Young tend vers une asymptote et que la tangente de perte de ce module semble diminuer avec la fréquence à partir de 5 Hz.

Tableau 6.13 Spécimens en PMMA: résultats obtenus en configuration de flexion bi-encastree.

Fréquence [Hz]	E [GPa]	$\tan\delta(E)$ [-]
1	4.06	0.070
2	4.20	0.070
5	4.38	0.071
10	4.52	0.069
20	4.67	0.068
50	5.01	0.064

Comparaison entre les résultats de DMA et d'analyse modale

La comparaison entre les résultats obtenus par DMA et les identifications modales sont encourageantes. Bien que les deux méthodes ne s'appliquent pas aux mêmes gammes de fréquence, nous avons pu montrer, en choisissant une géométrie de spécimen pour la plaque A telle que les modes soient suffisamment bas, que les résultats

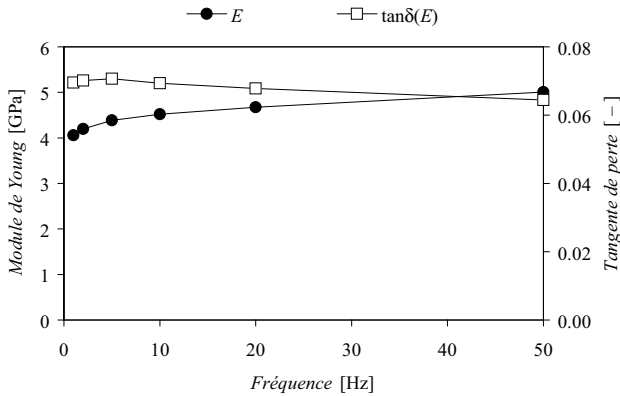


Figure 6.14 Spécimens en PMMA: mesures en configuration de flexion bi-encastée.

des deux méthodes correspondaient à la frontière délimitant les deux plages de fréquence. En comparant les tableaux de résultats 6.9, 6.12 et 6.13, nous pouvons en effet remarquer la bonne concordance des résultats. Ces derniers sont aussi résumés dans le tableau 6.15, où nous observons que les mesures DMA se comparent bien avec les résultats de l'identification de la plaque A si l'on utilise les trois premiers modes. Les valeurs pour la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu)$ sont toutefois moins bonnes. Ces écarts s'expliquent par le fait que nous utilisons dans notre modèle la relation d'isotropie suivante entre les trois paramètres constitutifs complexes \tilde{E} , $\tilde{\nu}$ et \tilde{G}

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1 + \tilde{\nu})} \quad (6.9)$$

Le modèle numérique auquel nous avons recours nécessite par conséquent que seules les valeurs pour le module de Young et le coefficient de Poisson complexes lui soient fournies, vu qu'il peut ensuite calculer la valeur complexe du module de glissement G avec la relation (6.9). Il s'ensuit que même si l'identification de la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu)$ est entachée d'une erreur plus importante que la tangente de perte du module de Young $\tan\delta(E)$, ceci a peu d'influence sur l'erreur de la tangente de perte du module de glissement $\tan\delta(G)$, vu que dans la formule (6.9), en gardant \tilde{E} constant, il faut perturber $\tilde{\nu}$ de manière importante pour avoir une faible variation de \tilde{G} .

Tableau 6.15 Plaques en PMMA: comparaison des résultats.

	E [GPa]	$\tan\delta(E)$ [-]	ν [-]	$\tan\delta(\nu)$ [-]	G [GPa]	$\tan\delta(G)$ [-]
DMA en traction 10 Hz	4.63	0.062	0.33	-0.010	1.74	0.065
DMA en flexion 50 Hz	5.01	0.064	-	-	-	-
Modal 50 - 120 Hz	5.08	0.062	0.32	-0.024	1.92	0.068

6.3.2 Stratifié en Dyneema

Le matériau étudié ici est un stratifié constitué de fibres en polyéthylène de hautes performances, vendues sous le nom «Dyneema». Ces fibres ont des caractéristiques comparables à celles des fibres en Kevlar mais sont dotées d'une masse volumique réduite, inférieure à 1000 kg/m³.

Description du spécimen

L'échantillon considéré prend la forme d'une plaque dont les dimensions sont données dans le tableau 6.16. Les fibres sont disposées en tissu sergé à [0, 90°] et imprégnées de résine époxy. L'épaisseur est obtenue en additionnant 9 couches de tissu à 180 g/m² en Dyneema SK65.

Tableau 6.16 Stratifié en Dyneema: caractéristiques.

Longueur [m]	0.3
Largeur [m]	0.19
Epaisseur [mm]	3.665
Masse volumique [kg/m ³]	1051.67

Afin d'obtenir une estimation des propriétés élastiques de notre plaque, nous avons réalisé un modèle homogénéisé à partir des valeurs des fabricants des fibres et de la résine époxy, répertoriées dans le tableau 6.17. Nous avons fait l'hypothèse pour cette homogénéisation que les matériaux étaient isotropes, avec comme seule dérogation à la règle le module de Young transverse des fibres pris comme 10 fois inférieur au module donné dans le tableau 6.17. Nous avons procédé à l'homogénéisation en recourant d'abord aux modèles de Vanyin et de Abolinh [53] pour trouver les propriétés homogènes équivalentes pour un matériau à renfort unidirectionnel à partir des propriétés des fibres et de la matrice puis en les projetant afin de prendre en compte la disposition à 0° et 90° des fibres en Dyneema.

Tableau 6.17 Stratifié en Dyneema: propriétés selon fabricants.

	Dyneema SK 65	Epoxy
Module de Young [GPa]	95	3
Coefficient de Poisson [-]	0.3	0.35
Volume relatif de fibres [%]	46.6	

Les propriétés obtenues par cette homogénéisation sont indiquées dans le tableau 6.18. Ces propriétés sont idéales puisque le composite est considéré sans défaut, avec une adhésion parfaite entre les fibres et la matrice et en considérant les fibres rectilignes alors qu'elles sont tissées en réalité. Pour ces raisons, elles sont à considérer comme une surestimation des propriétés réelles.

Tableau 6.18 Stratifié en Dyneema: propriétés obtenues par homogénéisation.

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12} [-]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	G_{31} [GPa]
25	25	0.064	2.7	2.6	2.6

Etude de sensibilité

Une analyse de sensibilité permet d'observer quelles propriétés de matériau ont une influence sur la norme d'erreur choisie et peuvent de ce fait être identifiées avec notre méthode. La sensibilité d'une norme d'erreur donnée aux propriétés du matériau dépend non seulement des propriétés en question mais aussi de la géométrie du spécimen utilisé pour l'identification. Ainsi, il est par exemple difficile d'identifier des propriétés transverses sur un spécimen de forme élancée.

L'étude réalisée ici porte sur un modèle numérique de la plaque en Dyneema en configuration libre-libre. Nous avons utilisé un modèle avec 12x7 éléments de coque PSDT avec un ordre $p = 3$. Les dimensions de la plaque utilisées sont celles du tableau 6.16. Les valeurs de référence pour les propriétés caractéristiques du matériau sont, pour les valeurs de stockage, celles estimées par homogénéisation du tableau 6.18. Les tangentes de perte sont fixées à 0.005 dans la direction des fibres, à 0.015 dans la direction hors plan ainsi que pour les tangentes de perte des modules de cisaillement et à -0.005 pour les tangentes de perte des coefficients de Poisson.

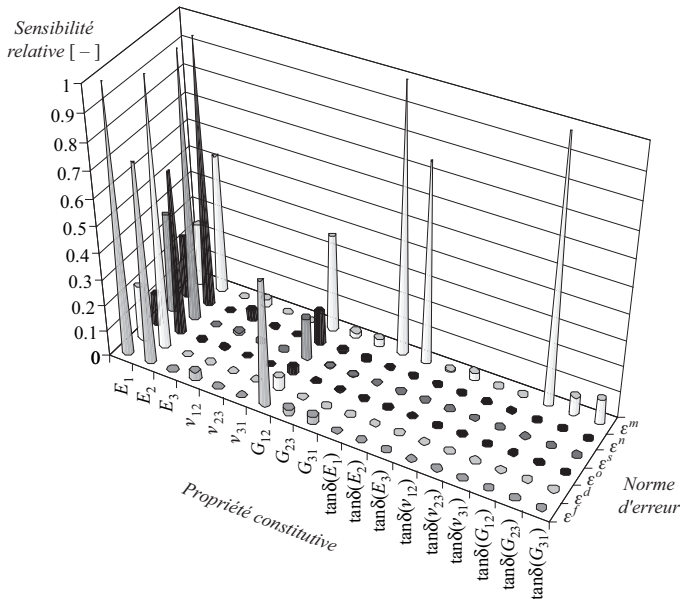


Figure 6.19 Stratifié en Dyneema: sensibilités des différentes normes d'erreur.

L'étude de sensibilité des différentes fonctions objectif aux paramètres constitutifs de cette plaque montre (figure 6.19) une forte sensibilité de la norme d'erreur basée sur les facteurs d'amortissement modal aux tangentes de perte des modules de Young dans le plan $\tan\delta(E_1)$ et $\tan\delta(E_2)$ ainsi qu'à la tangente de perte du module de glissement dans le plan $\tan\delta(G_{12})$. L'identification de la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu_{12})$ semble par contre très délicate vu la sensibilité correspondante très faible. La figure 6.20 montre la sensibilité relative de la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal aux tangentes de perte selon les différentes formes propres. La figure illustre clairement quels modes propres ont une influence prépondérante sur l'estimation des tangentes de perte.

Identification par haut-parleur

L'identification par haut-parleur a exigé une attention particulière pour l'excitation des premiers modes de vibration de la plaque, qui, au vu des dimensions de celle-ci, se situent à des fréquences basses. En particulier, le premier mode, dont la fréquence propre vaut 83.4 Hz en configuration libre-libre, a requis l'emploi d'un haut-parleur basses fréquences afin d'être mesuré correctement. Nous avons mesuré 16 modes expérimentaux de 0 à 1800 Hz. L'identification est réalisée en se basant sur un modèle avec 12x8 éléments finis de coque PSDT avec $p = 3$.

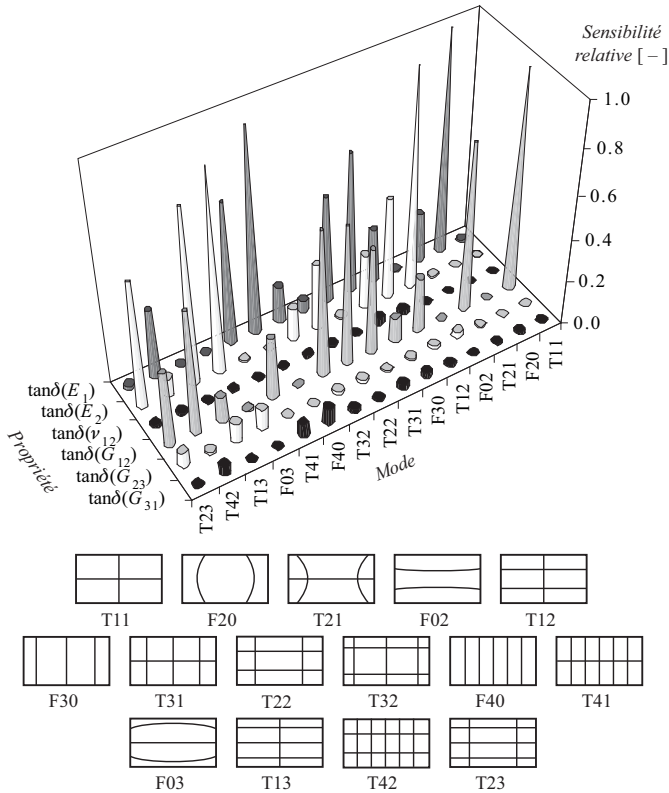


Figure 6.20 Stratifié en Dyneema: sensibilité de la norme sur les facteurs d'amortissement modal aux tangentes de perte en fonction des modes (F = flexion, T = torsion, les chiffres indiquent le nombre de lignes nodales selon les deux directions de la plaque).

Nous avons dans un premier temps utilisé l'ensemble des modes mesurés pour réaliser l'identification puis nous avons rejeté les modes dont l'amortissement modal identifié s'écartait trop de celui mesuré, indiquant certainement une erreur de mesure plus importante. Les modes rejetés sont les modes 3, 7, 9 et 15. Mis à part le mode 15, qui est trop proche du mode suivant, ils n'ont a priori pas de raison particulière d'être écartés puisque leur mesure semble bonne. Ces modes rejetés ont un point commun: il s'agit à chaque fois de modes de torsion.

La figure 6.21 permet de visualiser l'écart entre les valeurs propres mesurées et celles issues du modèle numérique identifié. Compte tenu des erreurs inhérentes à la mesure, indiquées sur la figure comme des barres d'erreur verticales de 15% de la valeur du facteur d'amortissement modal mesuré, nous pouvons constater que le modèle utilisé est proche de l'expérience et que les propriétés semblent peu influencées par la ré-

quence sur cette gamme de mesure. Les fréquences propres du modèle identifié sont quant à elles à moins de 1% des fréquences mesurées.

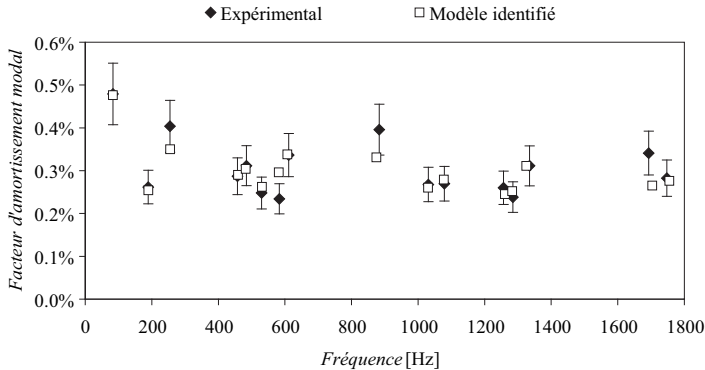


Figure 6.21 Stratifié en Dyneema: comparaison entre les valeurs propres mesurées avec une excitation par haut-parleur et celles issues du modèle identifié.

Mesure de validation

Afin de valider les mesures de l'amortissement obtenues expérimentalement avec une excitation par haut-parleur, nous avons effectué une mesure alternative basée sur le décrétement logarithmique du signal temporel. Les résultats pour les trois premiers modes propres, présentés dans le tableau 6.22, montrent que les écarts entre les deux types de mesure sont inférieurs à 5% environ. Étonnamment, les mesures établies sur base fréquentielle donnent pour chacun de ces trois premiers modes propres un facteur d'amortissement modal plus bas que celui obtenu par la méthode temporelle.

Tableau 6.22 Stratifié en Dyneema: comparaison des facteurs d'amortissement modal mesurés selon deux méthodes (FAM = facteur d'amortissement modal).

Mode	Fréquence	FAM mesure temporelle	FAM mesure selon FRF	Ecart relatif
	[Hz]	[-]	[-]	
T11	83.392	0.00489	0.00479	2.0
F02	189.542	0.00276	0.00262	5.3
F20	457.674	0.00295	0.00287	2.8

Nous avons également réalisé une seconde mesure afin d'étudier l'impact du niveau d'excitation sur l'amortissement de la plaque. Pour cela, nous avons comparé les facteurs d'amortissement modal pour trois niveaux d'excitation pour le mode F20. Les résultats sont représentés dans la figure 6.23 en fonction de la tension de sortie du

vibromètre laser, qui est proportionnelle à l'amplitude maximale de vibration du spécimen. Cette figure indique que compte tenu de l'incertitude de mesure, il n'est pas possible d'établir une dépendance entre le niveau d'excitation et l'amortissement modal dans cette plage de niveau.

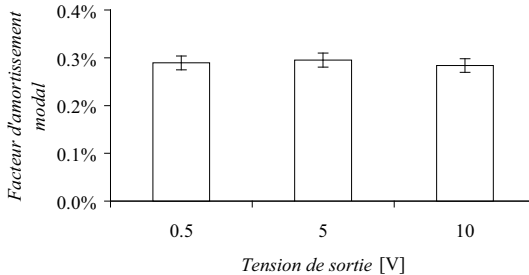


Figure 6.23 Stratifié en Dyneema: facteur d'amortissement modal du mode F20 pour trois niveaux d'excitation différents.

Identification par pot vibrant

Nous avons également accompli une identification des propriétés de cette plaque en partant de mesures effectuées en recourant à une excitation par pot vibrant. Le but est ici de pouvoir comparer les résultats obtenus au travers des deux sources d'excitation. Le montage du pot vibrant a été effectué comme décrit au chapitre 3, en utilisant une tige en carbone pour connecter le pot vibrant et la plaque en Dyneema. Le montage a été réalisé de manière un peu particulière dans ce cas, puisque nous avons choisi d'exciter la plaque en un point qui se trouve sur des lignes nodales de plusieurs modes en configuration libre-libre. Cette position, à 23.5 et 14.9 cm à partir de la gauche et du bas de la plaque, se justifie par le fait que l'excitation par pot vibrant permet d'exciter des modes même lorsque le point d'excitation se situe sur une ligne nodale de ceux-ci. Lorsque le point d'excitation se trouve sur une ligne nodale, nous avons affaire à un cas particulier où la liaison ne bouge plus par rapport à la plaque et, par conséquent, l'énergie dissipée par l'amortissement de la liaison est minimisée. Le modèle numérique utilisé pour l'identification contient 12x9 éléments finis solides dans le plan et deux éléments finis dans l'épaisseur, conformément à l'étude menée au chapitre 4. Les résultats pour la plaque excitée par pot vibrant sont présentés à la figure 6.24.

Résultats

Dans le tableau 6.25 sont répertoriés les résultats d'identification des paramètres constitutifs de la plaque: les valeurs de stockage et les tangentes de perte identifiées sont indiquées pour les 6 propriétés constitutives et pour les deux méthodes d'excitation.

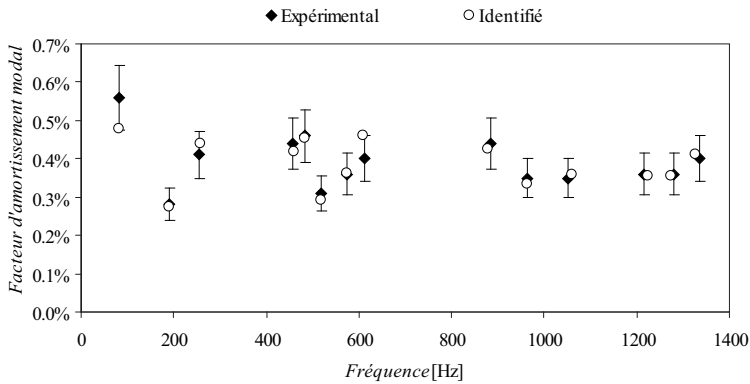


Figure 6.24 Stratifié en Dyneema: comparaison entre les valeurs propres mesurées avec une excitation par pot vibrant et celles issues du modèle identifié.

Nous y observons une bonne concordance des propriétés de stockage identifiées, avec seulement un bêmol pour les modules de cisaillement transverse dont les valeurs sont un peu moins proches entre les deux méthodes. Nous pouvions nous y attendre au vu des analyses de sensibilité présentées antérieurement. Du côté de l'identification des propriétés dissipatives, seules les tangentes de perte pour les modules de Young et de cisaillement dans le plan convergent vers des valeurs stables. Cela correspond bien à l'étude de sensibilité qui a permis de voir que la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal n'avait quasiment aucune sensibilité aux tangentes de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu_{12})$ et des modules de cisaillement transverse $\tan\delta(G_{23})$ et $\tan\delta(G_{31})$. La conséquence de cette sensibilité nulle aux tangentes de perte des modules de cisaillement transverse est que les valeurs identifiées de ces tangentes de perte sont aberrantes.

Tableau 6.25 Stratifié en Dyneema: propriétés identifiées.

Propriété	Identification par haut-parleur		Identification par pot vibrant		Ecart relatif entre pot vibrant et haut-parleur	
	Module de stockage [GPa]	Tan δ [-]	Module de stockage [GPa]	Tan δ [-]	Module de stockage [%]	Tan δ [%]
E_1	21.7	0.0051	21.4	0.0053	-1.38	3.9
E_2	20.3	0.0062	20.2	0.0092	-0.49	48.4
ν_{12}	0.12	-0.0039	0.11	-0.0171	-8.33	338.5
G_{12}	1.55	0.0098	1.58	0.0136	1.94	38.8
G_{23}	1.09	-0.0227	1.40	-0.0502	28.4	121
G_{31}	1.51	0.0117	1.73	0.0502	14.6	329

Ces résultats peuvent être confrontés aux valeurs estimées par la méthode d'homogénéisation. Cette comparaison est présentée sous forme visuelle dans la figure 6.26. Cette dernière montre premièrement que les deux méthodes d'excitation donnent des résultats proches pour les propriétés de stockage, en particulier pour les deux modules de Young et le module de cisaillement dans le plan, qui diffèrent de moins de 2%. Ces trois propriétés constitutives identifiées sont cependant approximativement 20% inférieures aux propriétés estimées par la méthode d'homogénéisation, qui est connue pour surestimer les propriétés réelles d'un matériau composite. Les trois autres propriétés constitutives identifiées dépendent plus de la méthode d'excitation utilisée, ce qui laisse deviner une identification plus floue de ces paramètres. Pour les tangentes de perte, la comparaison entre les deux méthodes d'excitation est moins probante. La tangente de perte du module de Young $\tan\delta(E_1)$ est la seule propriété dont la valeur varie peu selon les deux types d'identification, avec moins de 4% d'écart. Les tangentes de perte $\tan\delta(E_2)$ et $\tan\delta(G_{12})$, à qui la méthode d'identification est pourtant bien sensible, montrent un écart allant jusqu'à 50%. Ces écarts sont inhérents à la méthode de mesure par pot vibrant, qui ajoute un amortissement au niveau de la liaison qui n'est pas pris en compte dans le modèle numérique. Nous avons vu au chapitre 3 que le facteur d'amortissement modal ajouté pouvait aller jusqu'à 0.16%, ce qui explique pourquoi l'excitation par pot vibrant n'est pas très bien adaptée pour cette plaque ayant des facteurs d'amortissement modal dans les alentours de 0.5%.

Conclusion

Pour conclure cette étude de cas, nous pouvons affirmer que la fine épaisseur de ce spécimen comparée aux dimensions dans le plan entraîne que seules les quatre propriétés de stockage dans le plan E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} ainsi que les trois tangentes de perte $\tan\delta(E_1)$, $\tan\delta(E_2)$ et $\tan\delta(G_{12})$ sont identifiables. Au vu des faibles facteurs d'amortissement modal de ce spécimen, nous recommandons d'utiliser une excitation sans contact qui permet de limiter au maximum l'erreur de mesure. Pour augmenter le nombre de propriétés identifiables, il faudrait choisir un spécimen dont l'épaisseur est plus importante relativement à ses dimensions dans le plan.

6.3.3 Stratifié en carbone

L'étude porte ici sur une plaque de matériau composite construite en fibres de carbone imprégnées par voie humide de résine époxy. Cette plaque est composée de 32 couches de fibres unidirectionnelles. Nous avons réalisé une identification à partir de deux spécimens de formes différentes découpés dans la même plaque de base, décrits dans le tableau 6.27, avec à chaque fois les fibres dirigées selon la longueur.

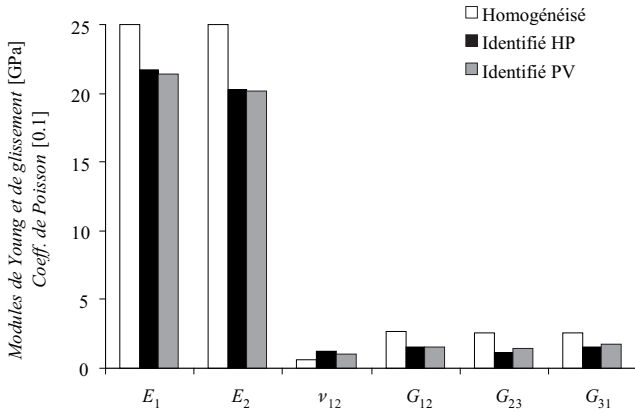


Figure 6.26 Stratifié en Dyneema: comparaison entre valeurs de stockage estimées par homogénéisation et résultats d'identification (HP = haut-parleur, PV = pot vibrant).

Tableau 6.27 Stratifié en carbone: caractéristiques des spécimens.

	Plaque A	Plaque B
Longueur [m]	0.134	0.135
Largeur [m]	0.135	0.079
Epaisseur [m]	0.0083	0.0083
Masse volumique [kg/m ³]	1438.5	1397.5

Etude de sensibilité

Similairement au cas d'étude s'intéressant à une plaque en Dyneema, nous commençons par présenter une analyse de sensibilité des normes d'erreur. Cette étude est réalisée avec une modélisation numérique recourant à 9x9 et 12x7 éléments de coque de type PSDT d'ordre p égal à trois pour la plaque A et la plaque B respectivement.

L'analyse de sensibilité sur la base de la plaque A nous permet de remarquer que les normes d'erreur utilisées pour identifier les propriétés élastiques du matériau ne sont guère sensibles aux propriétés dissipatives du matériau (figure 6.28). De son côté, la norme d'erreur basée sur l'écart relatif des facteurs d'amortissement modal montre une légère sensibilité aux propriétés purement élastiques comme E_1 , E_2 ou ν_{12} . Cela est dû au fait qu'en accroissant le module de stockage de l'un des paramètres du matériau sans modifier sa tangente de perte, le module de perte correspondant augmente.

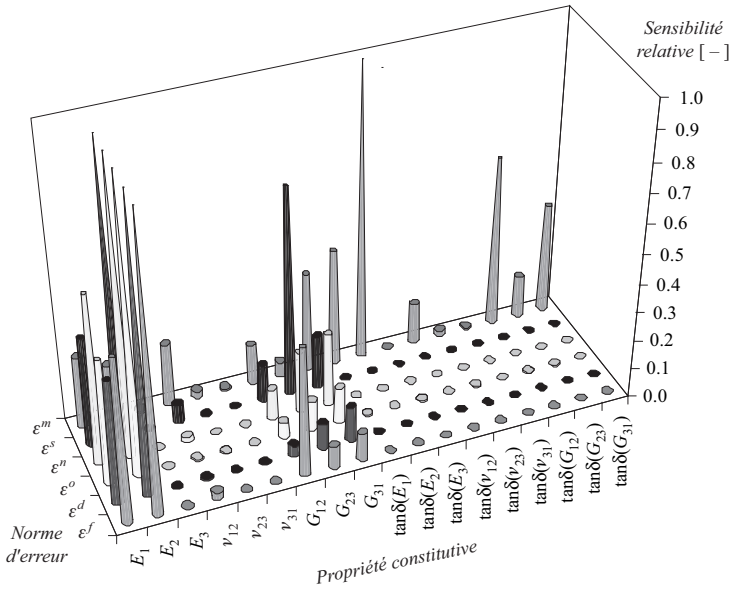


Figure 6.28 Stratifié en carbone: analyse de sensibilité sur la plaque A.

Si nous comparons la norme d'erreur sur les fréquences avec celle sur les facteurs d'amortissement modal, nous observons une certaine similitude: nous avons une forte sensibilité aux modules de Young et modules de glissement dans le plan et une sensibilité réduite pour les deux autres modules de glissement, voire faible pour le coefficient de Poisson dans le plan.

Nous avons également étudié l'impact de la géométrie de la plaque sur la sensibilité de la norme d'erreur sur l'amortissement, en considérant les 18 premiers modes. Nous avons considéré quatre cas, partant d'une plaque carrée pour aboutir à une plaque élançée dont la longueur est approximativement sept fois supérieure à la largeur. Les résultats, représentés à la figure 6.29, permettent de formuler plusieurs commentaires.

D'abord, la sensibilité de la norme d'erreur à la tangente de perte du module de Young dans la direction des fibres $\tan\delta(E_1)$ est peu élevée et du même ordre pour chaque géométrie; par conséquent, nous pouvons conclure que cette sensibilité est plus influencée par les propriétés du matériau que par la forme de la plaque. Le matériau est ici fortement orthotrope puisque nous avons dans la direction des fibres un module de Young E_1 dont la partie réelle est plus de 10 fois plus élevée que dans la direction transverse, alors que la tangente de perte du module de Young est bien plus faible en direction des fibres qu'en direction transverse.

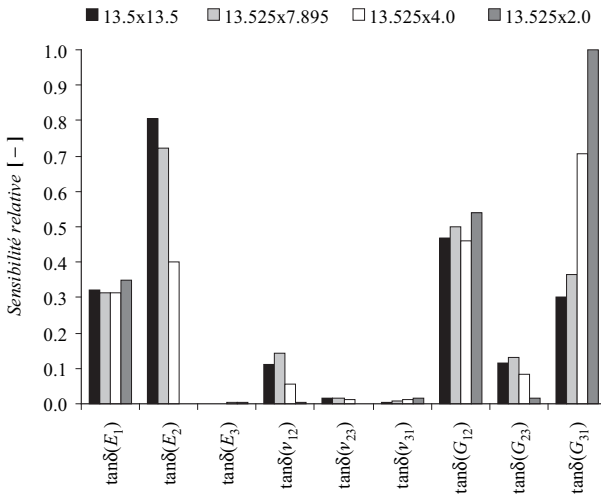


Figure 6.29 Stratifié en carbone: sensibilité relative de la norme d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal aux tangentes de perte en fonction des dimensions du spécimen (en cm) pour les 18 premiers modes.

Ensuite, la sensibilité à la tangente de perte du module de Young dans la direction transverse $\tan\delta(E_2)$ diminue clairement avec la largeur du spécimen, ce à quoi nous pouvions nous attendre: moins le spécimen est large, moins les modes sont influencés par les propriétés du matériau dans la direction transverse, puisque le spécimen se déformera plus aisément dans la direction longitudinale. De plus, la sensibilité à la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu_{12})$ est faible pour ce matériau, si bien qu'il semble hasardeux de vouloir l'identifier à l'aide de cette méthode. Cependant, nous constatons que la sensibilité à la tangente de perte du coefficient de Poisson est plus élevée lorsque les sensibilités aux tangentes de perte des deux modules de Young dans le plan sont élevées.

Enfin, la sensibilité à la tangente de perte du cisaillement dans le plan $\tan\delta(G_{12})$ est satisfaisante dans tous les cas, ce qui laisse présumer une bonne identification de ce paramètre. En ce qui concerne la sensibilité à la tangente de perte du module de cisaillement transverse $\tan\delta(G_{31})$, elle augmente clairement lorsque la forme de l'échantillon devient élançée. Cette tendance traduit le fait que cette sensibilité croît avec l'ordre des modes considérés. En effet, pour chaque géométrie, nous avons effectué la moyenne des sensibilités sur les 18 premiers modes et, par conséquent, nous observons des modes d'ordre plus élevé pour le spécimen élançé puisque la plupart des modes transverses sont décalés vers les hautes fréquences et n'apparaissent plus dans les 18 premiers modes.

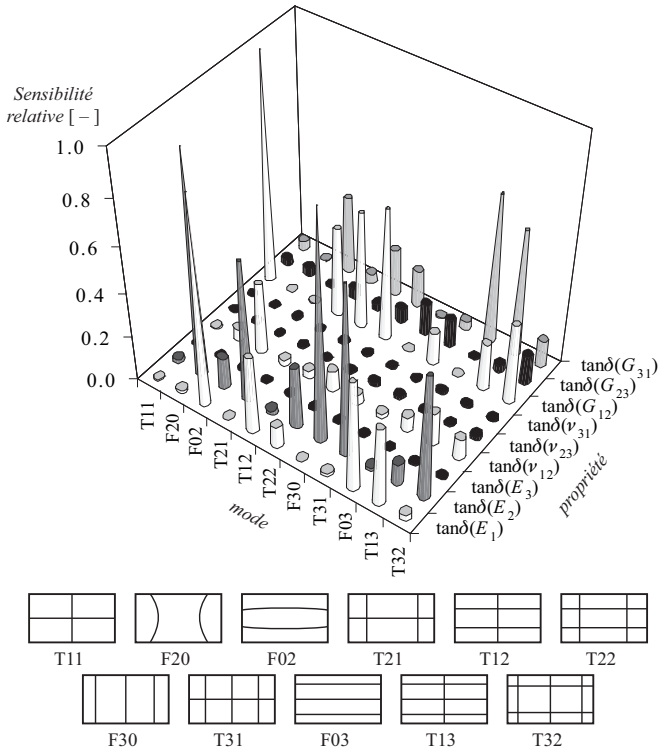


Figure 6.30 Stratifié en carbone: sensibilité de la norme d'erreur sur les écarts relatifs des facteurs d'amortissement modal aux différentes tangentes de perte selon les modes pour la plaque B. La direction 1 du matériau (direction des fibres) correspond à la verticale sur les schémas des lignes nodales.

Il est aussi intéressant de relever la sensibilité de la fonction d'erreur sur les facteurs d'amortissement modal aux propriétés dissipatives du matériau (plaque B) en fonction du mode propre concerné (figure 6.30). Nous pouvons remarquer par exemple que la tangente de perte $\tan\delta(G_{12})$ a surtout un impact sur le premier mode de torsion. De même, les tangentes de perte sur le module de Young influencent particulièrement les premiers modes de flexion dans la direction 1 et 2 du matériau, respectivement. Les tangentes de perte des cisaillements transverses prennent de l'importance sur les modes d'ordre élevé où la courbure devient importante.

Identification

Les mesures dynamiques entreprises sur cet échantillon de plaque en carbone montrent que les propriétés mécaniques semblent être plus stables avec la fréquence que dans le cas du PMMA (§ 6.3.1). La plupart des modes mesurés sont d'excellente qua-

lité et présentent une complexité modale faible. Malgré cela, la présence de modes très proches entraîne que le premier mode de flexion dans la direction des fibres est mal mesuré. En gardant les modes qui semblent fiables – car dotés d’une complexité modale faible – nous avons des données modales pour 13 modes pour la plaque A et 9 pour la plaque B (0 à 10 kHz) comme montré aux figures 6.31 et 6.32, où nous observons la bonne concordance des résultats à l’exception de quelques rares modes pour lesquels l’écart atteint 20% tout en restant pratiquement dans les incertitudes de mesure. Les résultats d’identification sont présentés dans le tableau 6.33. Dans ce tableau, les écarts-types obtenus en effectuant plusieurs identifications des tangentes de perte, en modifiant les valeurs initiales ainsi que le nombre de modes expérimentaux utilisés, sont inclus. Ces informations permettent de se rendre compte des propriétés identifiées de manière stable, qui ont un écart-type réduit, et donnent ainsi une indication sur leur précision. On voit dès lors que l’identification des tangentes de perte $\tan\delta(\nu_{12})$ et $\tan\delta(G_{31})$ de la plaque B converge mieux que pour celles de la plaque A, alors que c’est l’inverse pour la tangente de perte $\tan\delta(G_{23})$. Cependant, les propriétés identifiées avec la meilleure précision sont sans doute celles dont l’écart-type est faible tout en ayant une valeur estimée proche pour les deux plaques, comme par exemple la tangente de perte $\tan\delta(G_{12})$.

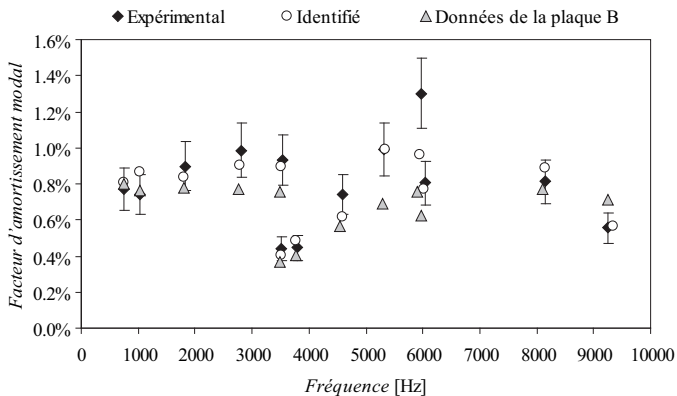


Figure 6.31 Stratifié en carbone (plaque A): valeurs propres expérimentales et issues du modèle identifié. Sont présentés également les résultats numériques du modèle de la plaque A avec les propriétés identifiées sur la plaque B.

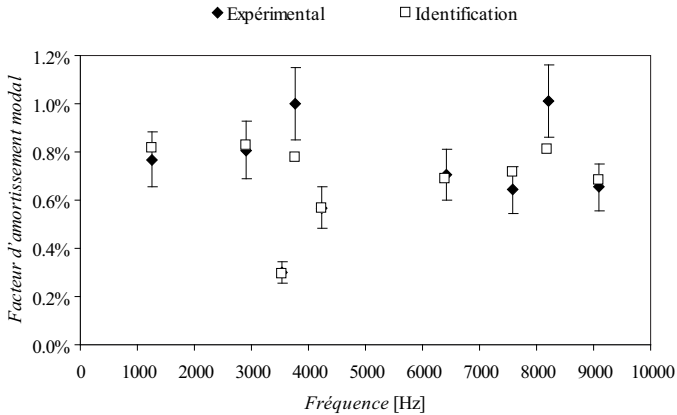


Figure 6.32 Stratifié en carbone (plaque B): valeurs propres expérimentales et issues du modèle identifié.

Tableau 6.33 Stratifié en carbone: résultats d'identification.

	Plaque A		Plaque B		Ecart A/B
	[GPa] ou [-]	Ecart-type [%]	[GPa] ou [-]	Ecart-type [%]	[%]
E_1	90.3		90.0		-0.3
E_2	7.01		6.81		-2.9
ν_{12}	0.36		0.34		-5.6
G_{12}	3.63		3.60		-0.8
G_{23}	2.33		2.46		5.6
G_{31}	3.76		3.54		-5.8
$\tan\delta(E_1)$	0.0071	11.2	0.0051	10.3	-28.2
$\tan\delta(E_2)$	0.0169	8.0	0.0153	7.2	-9.5
$\tan\delta(\nu_{12})$	0.0023	60	-0.12	12	-
$\tan\delta(G_{12})$	0.0155	4.0	0.0158	3.4	1.9
$\tan\delta(G_{23})$	0.0406	21	0.0164	73	-59.6
$\tan\delta(G_{31})$	0.0140	46	0.0375	3.3	168

Modélisation numérique des essais DMA

Avant d'effectuer des tests DMA sur des éprouvettes en carbone, nous avons entrepris une modélisation numérique de ce type d'essai. Le matériau que nous désirons tester étant orthotrope, l'interprétation des résultats est plus délicate que pour les essais sur des échantillons isotropes comme le PMMA. Un modèle numérique de l'essai peut

nous aider à choisir les emplacements idéaux pour les jauges de déformation et permet de faire le lien entre les déformations mesurées et les propriétés caractéristiques du matériau. Pour cela, nous avons opté pour une simulation de type harmonique, en modélisant l'échantillon encastré dans les mors de flexion bi-encastrée.

Il n'existe à ce jour aucun logiciel commercial permettant de réaliser une telle analyse en affectant un amortissement de type hystérétique au matériau. Nous avons utilisé le logiciel libre Code_Aster [52], qui est capable de résoudre le problème suivant, déjà rencontré à l'équation (2.84),

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + \tilde{\mathbf{K}}]\mathbf{x}e^{j\omega t} = \mathbf{f}e^{j\omega t} \quad (6.10)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, $\tilde{\mathbf{K}}$ la matrice de rigidité complexe, \mathbf{x} le vecteur-déplacement, ω la pulsation de l'excitation et \mathbf{f} le vecteur des forces externes. Bien que Code_Aster soit apte à résoudre cette équation, il ne permet malheureusement pas de spécifier directement un amortissement hystérétique. Il faut contourner le problème en construisant manuellement la matrice de rigidité complexe $\tilde{\mathbf{K}}$. Il est en effet possible de construire séparément les parties réelle et imaginaire de la matrice de rigidité complexe en utilisant deux jeux de propriétés de matériau, le premier avec les propriétés caractéristiques de stockage et le deuxième avec celles de perte. Une fois ces deux composantes de la matrice de rigidité complexe acquises, il ne reste plus qu'à les combiner pour former la matrice de rigidité complexe et de les transférer au solveur pour la résolution du problème complexe.

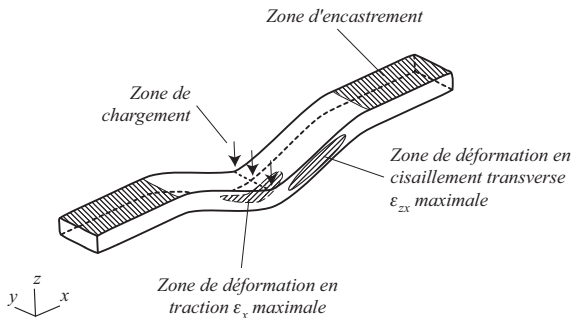


Figure 6.34 Stratifié en carbone: zones de mesure idéales pour les effets en traction et en cisaillement selon le modèle numérique.

De cette analyse, nous obtenons les champs de déformation complexes, qui nous permettent de faire un lien entre les valeurs mesurées lors des essais DMA et les propriétés mécaniques du matériau. Nous avons injecté dans le modèle les propriétés de matériau issues de l'identification de la plaque B (tableau 6.33) afin de comparer les

résultats numériques avec ceux des tests DMA. Ces résultats permettent également de vérifier que les emplacements choisis pour les jauges de déformation lors des essais DMA sont bien judicieux pour l'obtention de valeurs correctes de tangente de perte. Nous avons représenté à la figure 6.34 les zones où les valeurs des déformations étaient maximales pour la composante en traction dans la direction 1 et pour celle en cisaillement transverse dans le plan 13.

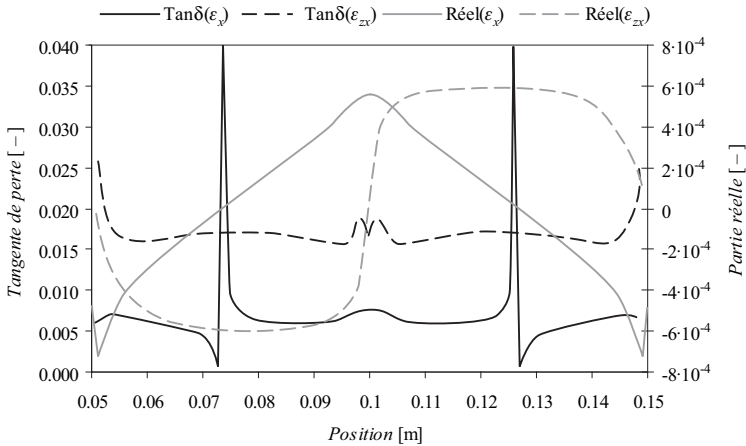


Figure 6.35 Stratifié en carbone: déformation de l'échantillon avec les fibres orientées dans la longueur en fonction de la position. La déformation en traction ε_x est mesurée au centre de la face inférieure alors que la déformation en cisaillement ε_{2x} est mesurée au centre de la face formant le côté de l'éprouvette. L'éprouvette est chargée avec une force harmonique d'une amplitude de 1000N.

Ces résultats sont représentés de manière plus quantitative dans la figure 6.35 qui montre l'évolution de ces déformations selon la longueur de l'éprouvette le long du centre des faces inférieure et latérale de l'éprouvette. L'évolution de la déformation en traction ε_x indique que l'essai en flexion bi-encastée n'est pas une bonne technique pour déterminer le module de stockage de Young en utilisant des jauges de déformation puisqu'il n'existe pas de zone où la déformation est homogène, contrairement à ε_{2x} . Nous voyons en effet sur la figure 6.35 que ε_x n'est jamais constante le long de l'éprouvette, contrairement à ε_{2x} . La position de la jauge est donc critique et intervient dans l'erreur de mesure. Cela n'est pourtant pas un problème pour la mesure des tangentes de perte, qui ont un comportement plus constant le long de l'éprouvette. La figure 6.35 (fibres orientées selon l'axe x) et, dans une moindre mesure, la figure 6.36 (fibres orientées perpendiculairement à l'axe x) montrent des discontinuités pour la tangente de perte $\text{tan}\delta(\varepsilon_x)$ lorsque la déformation longitudinale ε_x change de signe. Cela est dû au fait que nous passons par zéro et la tangente de perte, qui devient un

rapport de deux quantités proches de zéro, est ainsi affectée par les erreurs d'arrondis numériques. Nous remarquons également que la tangente de perte $\tan\delta(\varepsilon_x)$ varie lorsque nous sommes proches de la zone de charge ou des zones d'encastrement. Par conséquent, afin d'obtenir une déformation importante tout en restant homogène, il faut se placer raisonnablement proche du centre de l'éprouvette. Nous avons déterminé l'endroit idéal pour fixer une jauge de déformation permettant de mesurer la valeur complexe de ε_x comme se trouvant à une distance de 9 cm de l'extrémité de l'éprouvette approximativement. Pour la mesure de la tangente de perte de la déformation en cisaillement $\tan\delta(\varepsilon_{zx})$, les régions les plus favorables se situent à mi-distance entre les zones de chargement et d'encastrement. D'une manière plus générale, nous pouvons conclure que les zones favorables à la mesure des tangentes de perte sont les mêmes que celles favorables à la mesure d'une déformation dans le cas où nous ne nous intéressons pas à la dissipation: il s'agit des endroits où la déformation à mesurer est importante et dominante, si possible homogène, et qui sont suffisamment éloignés des discontinuités apportées par les conditions aux limites.

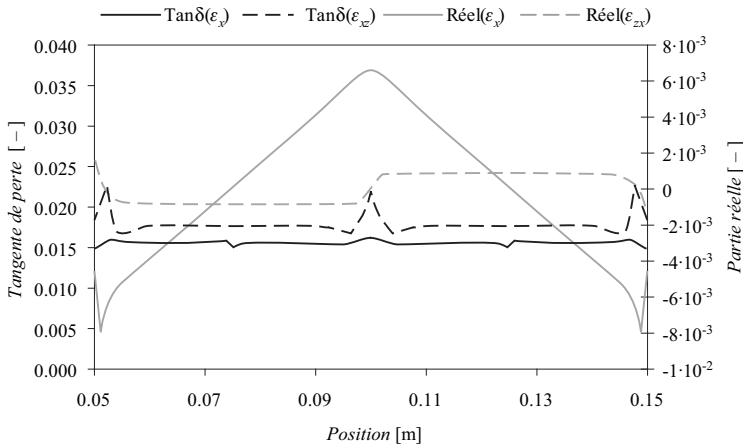


Figure 6.36 Stratifié en carbone: déformation de l'échantillon avec fibres orientées dans la largeur en fonction de la position.

La figure 6.37 permet de visualiser les tangentes de perte du déplacement vertical (selon z) de l'éprouvette. Les valeurs correspondant à la position centrale de l'éprouvette – la zone d'application de la force – reflètent celles que nous aurions mesurées avec une machine de test DMA standard. Nous pouvons aisément nous rendre compte que, dans le cas de l'éprouvette avec les fibres orientées selon x , la tangente de perte du déplacement ne correspond pas à la tangente de perte du module de Young $\tan\delta(E_1)$

du matériau, puisque l'épaisseur de notre éprouvette ne permet pas d'ignorer les déformations en cisaillement transverse.

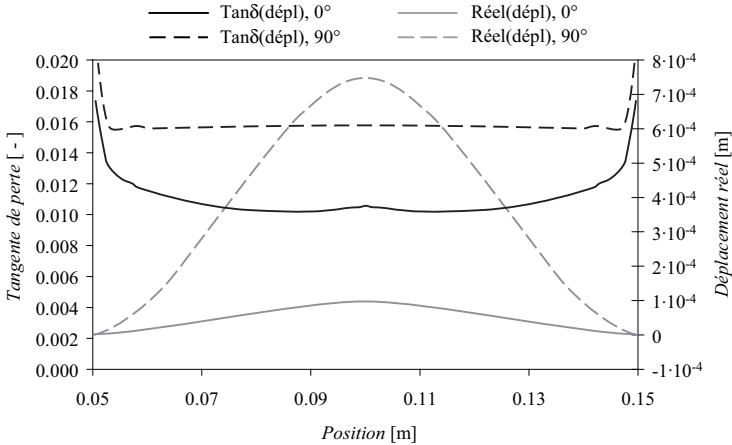


Figure 6.37 Stratifié en carbone: déplacement selon z de l'échantillon pour les deux orientations des fibres, à 0° et 90°.

Les tangentes de perte obtenues par le biais du modèle numérique sont présentées dans le tableau 6.38. Ces valeurs permettent de se convaincre que, suivant l'orientation des fibres dans l'éprouvette, $\text{tan}\delta(\varepsilon_x)$ est égal à $\text{tan}\delta(E_1)$ ou $\text{tan}\delta(E_2)$ et que $\text{tan}\delta(\varepsilon_{zx})$ est égal à $\text{tan}\delta(G_{31})$ ou $\text{tan}\delta(G_{23})$, ce qui prouve que notre configuration de mesure DMA est valide. Nous noterons cependant que la valeur de la tangente de perte du module de Young selon la direction des fibres $\text{tan}\delta(E_1)$ est celle qui est le moins bien identifiée avec cette méthode puisque nous avons un écart de 10% entre $\text{tan}\delta(\varepsilon_x)$ et $\text{tan}\delta(E_1)$.

Tableau 6.38 Stratifié en carbone: déformations obtenues avec le modèle numérique pour une charge de 1000 N. L'éprouvette A possède les fibres orientées dans la longueur, alors que dans le spécimen B les fibres sont transverses.

		Résultats modèle numérique			Propriétés du matériau		
		réel	imaginaire	$\text{tan}\delta$		$\text{tan}\delta$	écart rel.
Eprouvette A	ε_x	$3.23 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-6}$	0.0059	E_1	0.0054	10.0%
	ε_{zx}	$5.91 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	0.0171	G_{31}	0.0169	1.2%
Eprouvette B	ε_x	$4.23 \cdot 10^{-3}$	$6.55 \cdot 10^{-5}$	0.0155	E_2	0.0155	0.0%
	ε_{zx}	$8.51 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$	0.0176	G_{23}	0.0173	1.7%

Mesures DMA

Les mesures ont été menées sur quatre échantillons, dont deux avec les fibres disposées à 0° et deux avec les fibres à 90° par rapport à la direction longitudinale de l'éprouvette. Les essais ont été réalisés en configuration bi-encastree uniquement. Des jauges de déformation sont placées longitudinalement sur les éprouvettes de manière à obtenir la déformation ε_x qui permet de déterminer, suivant le type d'éprouvette mesurée, la tangente de perte du module de Young E_1 ou E_2 du matériau. Comme l'éprouvette est relativement épaisse par rapport à la longueur libre entre les deux encastrements, nous ne pouvons pas négliger les effets dus au cisaillement transverse sur la déformée globale de l'éprouvette. Par conséquent, d'autres jauges de mesure sont collées sur le flanc de l'éprouvette et permettent de mesurer la déformation ε_{zx} , ce qui donne une information sur la tangente de perte du module de cisaillement G_{13} ou G_{23} du matériau.

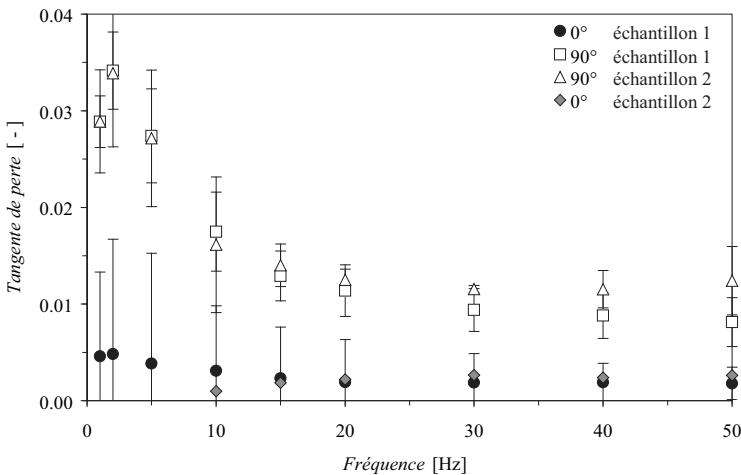


Figure 6.39 Stratifié en carbone: évolution des tangentes de perte de ε_x avec la fréquence suivant la disposition des fibres dans l'éprouvette, avec deux échantillons par configuration.

Les résultats sont fournis en fonction de la fréquence dans la figure 6.39. Dans cette figure, les barres d'erreur représentent l'erreur induite sur les tangentes de perte due au déphasage entre les canaux de mesure de force et de déformation. Nous remarquons qu'il est difficile de mesurer des déphasages si faibles, en particulier pour les éprouvettes avec des fibres à 0° où l'erreur de mesure de ε_x est du même ordre de grandeur que la valeur mesurée. Les tangentes de perte des déformations ε_x et ε_{zx} pour les deux

types d'éprouvette ont une évolution similaire avec la fréquence et tendent vers une valeur asymptotique.

Dans le tableau 6.40 sont indiquées les valeurs moyennes des tangentes de perte mesurées sur les différents échantillons de 20 à 50 Hz, confrontées à celles identifiées à plus haute fréquence sur la plaque B. Dans ce tableau, nous avons comparé la valeur de $\tan\delta(G_{31})$ mesurée selon les essais DMA avec celle de $\tan\delta(G_{12})$ identifiée, puisque cette dernière semble beaucoup plus fiable que la valeur identifiée pour $\tan\delta(G_{31})$. Rappelons que comme la plaque est transverse isotrope, les propriétés devraient être semblables dans la direction 2 et 3.

Tableau 6.40 Stratifié en carbone: moyenne des mesures entre 20 et 50 Hz.

Orientation des fibres	Déformation mesurée	Propriété de matériau correspondante	Tan δ DMA	Erreur estimée	Tan δ identifiée, plaque B	Ecart relatif identification - DMA
			[-]	[%]	[-]	[%]
0°	ε_{xx}	$\tan\delta(E_1)$	0.0022	100	0.0051	-56.9
	ε_{zx}	$\tan\delta(G_{31})$	0.0106	10	0.0158	-32.9
90°	ε_{xx}	$\tan\delta(E_2)$	0.0107	20	0.0153	-30.1
	ε_{zx}	$\tan\delta(G_{23})$	0.0169	20	0.0164	3.0

Malgré les erreurs de mesure importantes, estimées d'après le déphasage parasite entre les canaux de mesure, il se dégage une tendance selon laquelle les valeurs identifiées par méthode modale sont à chaque fois environ 50% supérieures aux valeurs DMA, à l'exception de la tangente de perte du cisaillement transverse $\tan\delta(G_{23})$. Il faut noter que le matériau étudié ici présente des rigidités de stockage importantes et des facteurs d'amortissement modal peu élevés. La mesure du déphasage entre la force et le déplacement d'un échantillon fait d'un tel matériau est délicate. En effet, ce déphasage devient tellement faible qu'il est de l'ordre de grandeur de l'erreur de mesure et, par conséquent, la précision des essais DMA sera plus critique que pour des matériaux avec un amortissement plus élevé comme le PMMA. Cependant, le fait que les facteurs d'amortissement modal mesurés mènent à des valeurs de tangentes de perte identifiées exagérées pourrait découler du fait que notre méthode de mesure modale surestime les facteurs d'amortissement modal. Pourtant nous avons remarqué au paragraphe 6.3.2 que la méthode de mesure des facteurs d'amortissement modal d'après les fonctions de transfert du spécimen donnait des valeurs inférieures à une mesure de type temporel.

Etude modale en flexion encastrée

A titre comparatif, nous avons effectué des mesures modales afin d’extraire l’amortissement modal des spécimens en carbone lorsqu’ils sont placés dans une configuration similaire à celle utilisée pour les essais DMA. Nous avons ensuite comparé ces essais avec un modèle numérique correspondant aux conditions de test. Les propriétés de matériau injectées dans ce modèle sont celles identifiées pour la plaque B, visibles dans le tableau 6.33, et les facteurs d’amortissement modal extraits de ce modèle numérique sont indiqués dans la colonne «MAFE solide» du tableau 6.41. Deux éprouvettes ont été testées, l’une avec fibres disposées de manière transverse (90°) et l’autre avec les fibres disposées axialement (0°). Pour l’éprouvette avec fibres transverses, nous avons choisi des conditions aux limites identiques à celles utilisées pour les tests DMA, soit de la flexion bi-encastrée avec une distance entre les mors de 10 cm. Pour la seconde éprouvette, nous avons utilisé un seul des deux encastresments afin que le déplacement soit suffisant pour obtenir une qualité de la fonction de transfert satisfaisante. La longueur libre de l’éprouvette était alors de 12.9 cm.

Tableau 6.41 Comparaison des facteurs d’amortissement modal mesurés et simulés pour des conditions aux limites de type encastré (FAM = facteur d’amortissement modal).

Configuration	Expérimental		MAFE solide			MAFE solide corrigé		
	Fréquence [Hz]	FAM [%]	Fréquence [Hz]	FAM [%]	Ecart relatif FAM [%]	Fréquence [Hz]	FAM [%]	Ecart relatif FAM [%]
Bi-encastré, 90°	1638	0.91	1638	0.76	16.5	1638	0.82	9.9
Encastré, 0°	539	0.27	549	0.63	44	549	0.30	11.1

Pour les modèles numériques, nous avons recouru à une modélisation dans MAFE avec 15x4x3 éléments de type quadratique solide selon la longueur, la largeur et la hauteur respectivement. Pour le cas bi-encastré, nous avons figé la position des nœuds des 4 arêtes formant les deux extrémités selon la longueur du spécimen, alors que dans le cas avec un seul encastrement, seuls les nœuds de deux arêtes sont fixés.

Comme nous avons pu le remarquer lors des simulations harmoniques avec amortissement hystérétique, les tangentes de perte des cisaillements transverses ont beaucoup d’influence sur le comportement dissipatif global du spécimen. Les résultats issus de la modélisation numérique avec les propriétés obtenues par identification modale de la plaque B surestiment l’amortissement dans le cas avec fibres transverses et sous-estiment celui-ci lorsque les fibres sont à 0°: la tangente de perte de G_{31} identifiée sur la plaque B est bien plus élevée que celle de G_{12} . Rappelons que d’après l’étude de sensibilité réalisée sur cette plaque, nous avons pu voir que la méthode d’identification proposée était bien plus sensible à la tangente de perte du cisaillement dans le plan $\tan\delta(G_{12})$ qu’aux tangentes de perte des cisaillements transverses (figure 6.28). Par

conséquent, si nous considérons le matériau comme transverse isotrope, nous pouvons admettre que la tangente de perte $\tan\delta(G_{31})$ doit être très proche de la tangente de perte de G_{12} . De plus, nous avons mesuré – lors des essais DMA – une tangente de perte $\tan\delta(G_{23})$ dont la valeur est 1.6 fois supérieure à la valeur de $\tan\delta(G_{31})$ (supposée égale à $\tan\delta(G_{12})$). Nous avons donc modifié les valeurs des cisaillements transverses du modèle numérique en insérant les valeurs suivantes :

- $\tan\delta(G_{23}) = 1.6 \tan\delta(G_{12}) = 0.025$
- $\tan\delta(G_{31}) = \tan\delta(G_{12}) = 0.0158$

Les résultats, indiqués dans la colonne «MAFE corrigé» du tableau 6.41, sont proches des facteurs d'amortissement modal mesurés puisque l'écart se situe à 10% environ. On relèvera par ailleurs que la nouvelle valeur de $\tan\delta(G_{31})$ est, suite à ce raisonnement, voisine de la valeur identifiée pour ce paramètre sur la plaque A (tableau 6.33).

Comparaison et analyse des résultats

D'après les résultats de l'analyse de sensibilité, nous pouvons observer qu'un matériau composé de fibres rigides disposées de manière unidirectionnelle au sein d'une matrice plus compliant est un bon sujet de validation puisque l'identification – voire la mesure – de ses propriétés constitutives est rendue délicate par leur inhomogénéité selon les directions du matériau.

L'étude de sensibilité et la qualité de convergence de la méthode d'identification montre que l'utilisation d'une seule norme d'erreur basée sur l'écart des facteurs d'amortissement modal comme fonction objectif pour caractériser les effets dissipatifs permet d'identifier correctement $\tan\delta(E_2)$ et $\tan\delta(G_{12})$. La valeur de ces propriétés identifiées est cependant environ 50% plus élevée que lorsqu'elle est mesurée par une méthode DMA qui, toutefois, teste le spécimen à des fréquences bien plus basses que les fréquences propres de la plaque.

Suivant la forme de l'échantillon, la sensibilité à $\tan\delta(E_1)$ peut être correcte et celle à $\tan\delta(\nu_{12})$ peut être maximisée, sans toutefois que celle-ci ne devienne suffisamment importante relativement aux sensibilités dominantes. Nous avons pu mettre en évidence que les dimensions du spécimen jouent un rôle important dans la routine d'identification.

6.4 Constructions de type sandwich

6.4.1 Introduction

Beaucoup de matériaux composites possèdent une configuration de type sandwich. Cette disposition permet d'augmenter le moment d'inertie et par conséquent la rigidité

en flexion d'une construction élancée en insérant un cœur en matériau léger entre des peaux formées d'un matériau rigide (figure 6.42). Généralement, le cœur est constitué d'une structure de type nid d'abeille ou alvéolaire, les peaux sont quant à elles souvent réalisées en matériaux composites ou en aluminium.

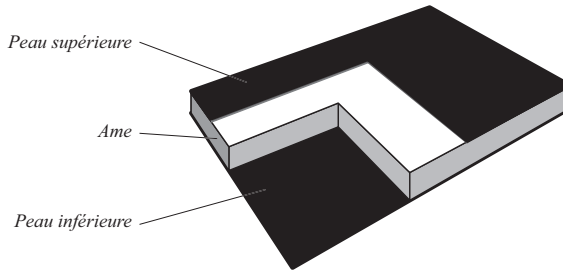


Figure 6.42 Schéma d'une plaque en construction de type sandwich.

L'identification des propriétés des matériaux qui constituent le sandwich à l'aide de notre méthode pose un problème. Nous avons en effet deux matériaux en présence et il est de ce fait nécessaire d'identifier deux jeux de propriétés, ce qui est impossible en une seule identification basée sur un spécimen unique. Pour contourner le problème, deux solutions s'offrent à nous. Soit nous menons deux identifications en parallèle en utilisant deux spécimens de géométries différentes, soit nous tirons profit des propriétés spécifiques à ce genre de structure. En effet, dans la majorité des sandwiches légers, les rôles mécaniques de l'âme et des peaux sont bien dissociés: les peaux travaillent uniquement en traction-compression et le cœur en cisaillement transverse. Dans cette catégorie de sandwiches, les peaux ont un nombre de propriétés de stockage influentes qui passe de 6 à 4 – E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} – alors que le cœur influence le comportement global du sandwich uniquement à travers les modules de cisaillement transverse G_{23} et G_{31} .

La figure 6.43 donne une comparaison entre un sandwich dans lequel l'âme – en mousse – a de l'influence uniquement de par ses modules de cisaillement transverse et un autre sandwich avec une âme bien plus rigide, en peuplier. Dans le cas de l'âme en peuplier présenté à droite de la figure 6.43, les modules de Young de l'âme ont un impact sur le comportement global modal de la structure. Il n'est donc dans ce cas pas possible d'identifier l'ensemble des propriétés influentes à partir d'une unique mesure puisque les effets des propriétés constitutives des peaux et de l'âme sur la rigidité globale du sandwich se confondent. Il sera par exemple impossible de différencier les effets des modules de Young de l'âme et des peaux.

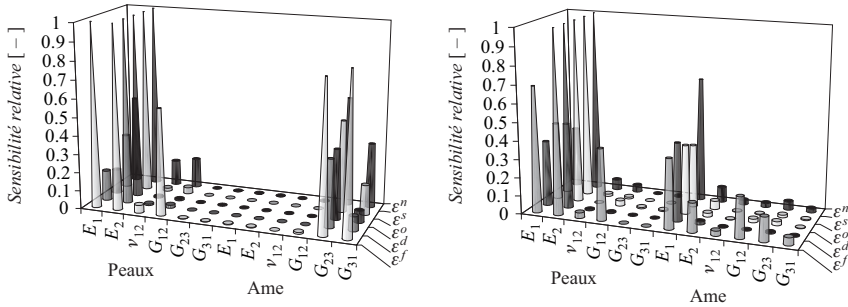


Figure 6.43 Sensibilités des normes d’erreurs aux propriétés constitutives de stockage pour un sandwich avec peau et âme aux effets bien dissociés (à gauche) et pour un sandwich avec une âme rigide en bois.

Cas étudiés

Le composite étudié est un sandwich formé de peaux en carbone avec une âme en un matériau synthétique formant une mousse polymère réticulée à cellules fermées (Airex C70.75). Nous disposons de deux spécimens avec des peaux en fibres de carbone disposées à $[0, 90^\circ]$ imprégnées de résine époxy et une âme mesurant 5 ou 12 mm d’épaisseur (dénommés ici S5 et S12). Les dimensions de ces plaques sont présentées dans le tableau 6.44. Les peaux sont réalisées d’une seule couche de tissu sergé à $[0, 90^\circ]$. Leur épaisseur mesurée se situe entre 0.26 et 0.32 mm, mais nous avons choisi de prendre la valeur de 0.4 mm dans notre modélisation, afin de tenir compte de la résine époxy en excès dans les zones de collage entre les peaux et l’âme du sandwich, ce qui correspond à un taux de fibres volumique de 28.1%.

Tableau 6.44 Caractéristiques des plaques de type sandwich.

	S5	S12
Longueur [m]	0.30675	0.2755
Largeur [m]	0.2885	0.3105
Epaisseur [mm]	5.8	12.8
Epaisseur âme [mm]	5	12
Masse [kg]	0.1494	0.2055

Etude de sensibilité

Nous avons débuté cette démarche en conduisant une étude de sensibilité des six normes d’erreur de notre algorithme d’identification aux propriétés constitutives de l’âme et des peaux pour chacun des deux sandwichs.

Pour cette étude de sensibilité, nous avons utilisé un modèle numérique recourant à trois couches d’éléments finis solides orthotropes, avec une couche pour chaque peau et une couche pour le cœur. Les propriétés utilisées pour l’âme sont celles données par le fabricant du matériau, représentées dans le tableau 6.45.

Tableau 6.45 Propriétés de l’âme.

Airex C 70.75	
Module de Young [MPa]	66
Coefficient de Poisson [-]	0.1
Module de cisaillement [MPa]	30
Masse volumique [kg/m ³]	80

Pour les peaux en carbone, nous avons fait appel à une procédure d’homogénéisation afin d’obtenir les valeurs présentées dans le tableau 6.46 à partir des propriétés des fibres et de la résine époxy. Les tangentes de perte ont été estimées selon les résultats d’identification sur les échantillons en carbone. Les résultats de cette étude de sensibilité sont présentés aux figures 6.47 et 6.48 pour les deux épaisseurs de sandwich.

Tableau 6.46 Propriétés estimées pour les peaux en carbone.

Carbone [0, 90°]	
E_1, E_2 [GPa]	37
ν_{12} [-]	0.06
G_{12}, G_{23}, G_{31} [GPa]	2.1
$\tan\delta(E_1), \tan\delta(E_2)$ [-]	0.005
$\tan\delta(\nu_{12})$ [-]	-0.005
$\tan\delta(G_{12}), \tan\delta(G_{23}), \tan\delta(G_{31})$ [-]	0.01
Masse volumique [kg/m ³]	1500

L’étude de sensibilité de la plaque S5 est de bon augure. Nous pouvons en effet remarquer que lorsque la sensibilité des normes d’erreur est élevée pour une des propriétés constitutives des peaux, elle est très faible voire nulle pour la propriété constitutive équivalente de l’âme et vice-versa. La tangente de perte du module de cisaillement

dans le plan $\tan\delta(G_{12})$ est la propriété constitutive qui vérifie le moins bien cette assertion. Nous pouvons toutefois relever que la norme d'erreur basée sur l'écart des facteurs d'amortissement modal ε^m est plus sensible à la tangente de perte du module de cisaillement $\tan\delta(G_{12})$ des peaux qu'à celle de l'âme du sandwich.

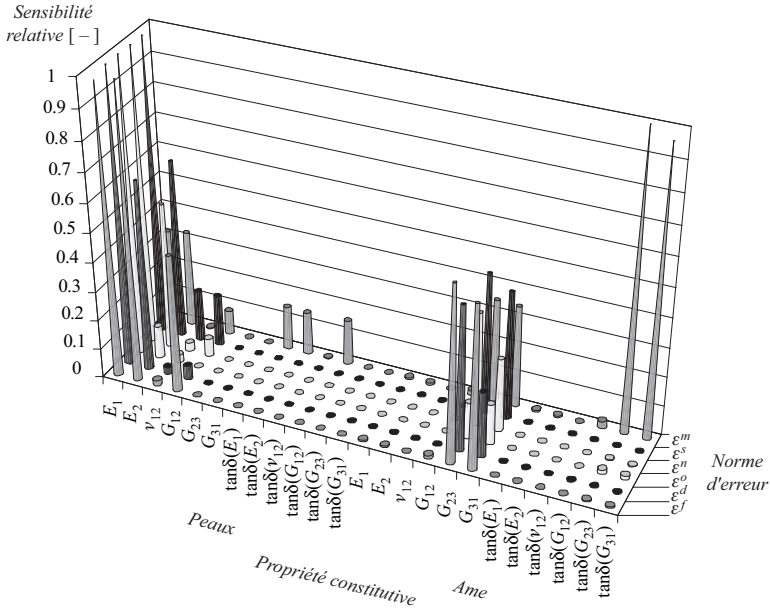


Figure 6.47 Sensibilités relatives des normes d'erreurs aux propriétés constitutives des peaux et de l'âme. Plaque S5 de type sandwich avec peaux en carbone et âme en Airex de 5 mm.

La figure 6.47 permet de bien se rendre compte que les propriétés constitutives de stockage qui ont de l'influence sont, dans l'ordre d'importance,

- les modules de Young des peaux,
- les modules de cisaillement dans le plan des peaux et de cisaillement transverse de l'âme,
- le coefficient de Poisson dans le plan des peaux.

Du côté des propriétés dissipatives, ce sont les tangentes de perte des modules de cisaillement transverse de l'âme qui ont clairement le plus d'effet sur les facteurs d'amortissement modal. Viennent ensuite les tangentes de perte des modules de Young et de cisaillement dans le plan des peaux.

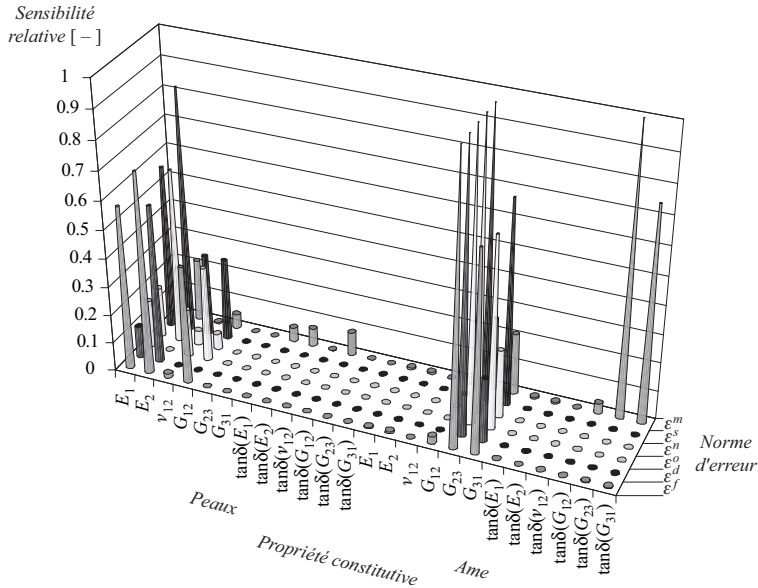


Figure 6.48 Sensibilités relatives des normes d'erreurs aux propriétés constitutives des peaux et de l'âme. Plaque S12 de type sandwich avec peaux en carbone et âme en Airex de 12 mm.

Si nous nous intéressons maintenant au cas de la plaque S12 présenté à la figure 6.48, nous observons que pour les propriétés constitutives de stockage, ce ne sont plus les modules de Young des peaux qui ont le plus d'importance mais les modules de cisaillement transverse de l'âme. Dans ce cas, l'âme est suffisamment épaisse pour que le comportement global de la structure soit plus influencé par les propriétés de l'âme que par les propriétés des peaux. Cela se traduit également par une baisse de l'impact des propriétés des peaux sur les facteurs d'amortissement modal. Il sera par conséquent plus difficile de définir les propriétés constitutives des peaux dans le sandwich S12 et plus délicat de caractériser l'âme dans le sandwich S5.

Modélisation numérique et méthode d'identification

Le modèle numérique utilisé pour l'identification se sert d'une couche d'éléments finis solides par type de matériau. Nous avons ainsi trois couches d'éléments finis selon l'épaisseur, une pour l'âme et une pour chacune des peaux en carbone, de manière identique à ce qui a été fait pour l'étude de sensibilité. Les éléments finis décrivant les peaux suivent une loi orthotrope alors que ceux de l'âme sont dotés d'une loi isotrope, puisque nous adoptons l'hypothèse que la mousse en Airex est isotrope. La modélisation numérique repose sur 12x12x3 éléments quadratiques à 27 nœuds.

En ce qui concerne la stratégie d'identification, nous avons choisi, comme pour les exemples précédents, d'identifier les tangentes de perte dans un deuxième temps. Les propriétés identifiées sont les suivantes

- les modules de Young E_1 et E_2 des peaux,
- le module de cisaillement G_{12} des peaux,
- le coefficient de Poisson de stockage des peaux ν_{12} ,
- le module de Young E_a de l'âme.

Notons que pour les propriétés de l'âme, nous gardons le coefficient de Poisson fixe, avec une valeur de stockage de 0.1 et une tangente de perte de 0. Etant donné que l'âme n'est influente que par son comportement en cisaillement transverse, modifier le module de Young avec un coefficient de Poisson fixe est équivalent à modifier le module de cisaillement.

Résultats de l'identification

Les résultats de la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale sont présentés dans le tableau 6.49. Dans ce tableau sont également notées les valeurs obtenues par homogénéisation ou données par le constructeur à titre comparatif. Les résultats diffèrent quelque peu pour les deux spécimens S5 et S12. Ces résultats permettent de remarquer que les valeurs issues des deux types d'excitation (haut-parleur et pot vibrant) sont proches.

Afin de fournir une vision plus synthétique de ces résultats, nous avons indiqué au tableau 6.50 les moyennes et écarts-types de chaque propriété constitutive sur l'ensemble des quatre identifications répertoriées au tableau 6.49. Cela permet de voir que la tangente de perte sur le module de Young E_2 est mal identifiée, avec un écart-type supérieur à la moyenne pour ce paramètre. Les écarts-types sont inférieurs à 15% de la moyenne pour l'ensemble des propriétés de stockage identifiées, ce qui est intéressant. Il ne faut pas oublier que la modélisation du sandwich n'est pas très précise puisqu'elle admet plusieurs hypothèses, notamment que la colle infiltrée dans l'âme ainsi qu'à l'interface entre l'âme et les peaux est négligée. En ce qui concerne les propriétés dissipatives, nous apercevons que les tangentes de perte montrent un écart-type bien plus important, allant jusqu'à 35%, sans prendre en compte la tangente de perte de E_2 .

Les valeurs des tangentes de perte des peaux ne sont pas identifiées précisément, ce qui est certainement dû à la faible sensibilité de la norme d'erreur ϵ^m sur les facteurs d'amortissement modal à ces paramètres. Cela peut se remarquer au fait que les valeurs identifiées pour ces paramètres varient fortement suivant la méthode d'excitation. Les valeurs des tangentes de perte identifiées pour l'âme sont quant à elles peu influencées par la méthode d'identification. Par contre, elles varient considérablement

d'une éprouvette à l'autre ce qui peut laisser penser qu'elles sont très sensibles à la procédure de fabrication.

Tableau 6.49 Sandwiches: résultats des identifications. La colonne «Référence» contient les valeurs obtenues par homogénéisation pour les peaux (p) et les données du fabricant pour l'âme (a). Les données entre parenthèses sont figées. Les modules de cisaillement de l'âme sont calculés à partir de E_a et ν_a .

	Référence	Haut-parleur, S5		Pot vibrant, S5		Haut-parleur, S12		Pot vibrant, S12	
	Partie réelle	Partie réelle	Tan δ	Partie réelle	Tan δ	Partie réelle	Tan δ	Partie réelle	Tan δ
E_{1p} [GPa]	37	33.4	0.0020	32.7	0.0029	30.0	0.0025	29.0	0.0021
E_{2p} [GPa]	37	33.2	0.0023	32.7	0.0039	29.3	0.0003	30.0	-0.0022
ν_{12p} [-]	0.060	0.062	-	0.049	-	0.064	-	0.072	-
G_{12p} [GPa]	2.1	3.03	0.0089	2.98	0.0072	2.43	0.0044	2.45	0.0059
E_a [MPa]	66	82	0.0284	86.4	0.0302	102	0.0528	104	0.0557
ν_a [-]	0.1	(0.1)	(0)	(0.1)	(0)	(0.1)	(0)	(0.1)	(0)
G_a [MPa]	30	37.3	0.0284	39,3	0.0302	46.4	0.0528	47.3	0.0557

Tableau 6.50 Sandwiches: résultats des identifications. Moyenne des identifications réalisées sur S5 et S12 avec une excitation par haut-parleur et pot vibrant (p indique les peaux et a l'âme).

	Propriété de stockage		Tangente de perte	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
E_{1p} [GPa]	31.3	2.1	0.0024	0.0004
E_{2p} [GPa]	31.3	1.9	0.0011	0.0026
ν_{12p} [-]	0.062	0.010	-	-
G_{12p} [GPa]	2.72	0.33	0.0066	0.0019
E_a [MPa]	93.6	11.0	0.042	0.014
G_a [MPa]	42.6	5.0	0.042	0.014

La figure 6.51 compare les valeurs obtenues par les différentes méthodes de manière graphique et le tableau 6.52 montre les modes propres mesurés et identifiés pour la plaque S12 avec une excitation par pot vibrant. On relèvera que pour les 11 modes

propres présentés la moyenne des écarts entre la mesure et la prédiction s'élève à 0.6% pour les fréquences et 8.9% pour les facteurs d'amortissement modal.

Pour terminer, notons encore que le temps de calcul pour une identification aurait pu être diminué en utilisant une modélisation avec des éléments ZPST, mais cette stratégie n'est applicable qu'avec une excitation par haut-parleur. Nous n'y avons donc pas recouru vu que celle-ci – telle que formulée dans MAFE – n'est pas compatible avec l'excitation par pot vibrant.

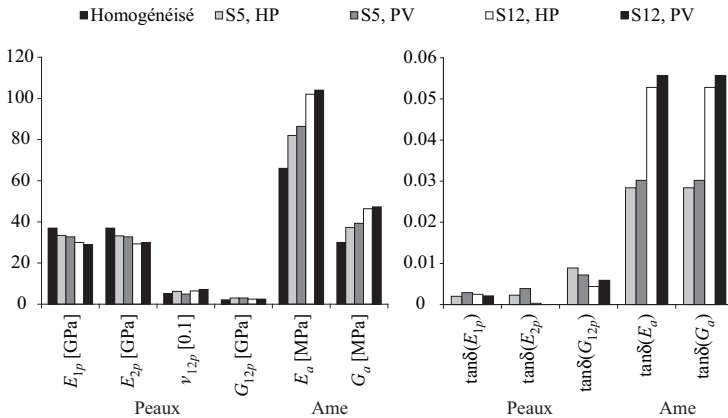
























Figure 6.51 Sandwiches: comparaison des valeurs identifiées pour les deux sandwiches avec les deux méthodes d'excitation et les valeurs homogénéisées ou du fabricant (HP = haut-parleur, PV = pot vibrant).

Tableau 6.52 Sandwiches: comparaison entre les formes propres expérimentales et identifiées pour le sandwich avec âme de 12 mm d'épaisseur, excitation par pot vibrant.

	Modes expérimentaux		Modes numériques	
	Forme modale	Fréquence et facteur d'amortissement modal	Forme modale	Fréquence et facteur d'amortissement modal
Mode 1		212.4 Hz 0.0071		212.7 Hz 0.0069
Mode 2		602.2 Hz 0.0067		612.1 Hz 0.0053
Mode 3		710.4 Hz 0.0044		709.3 Hz 0.0059
Mode 4		817.6 Hz 0.0069		805.4 Hz 0.0066
Mode 5		882.4 Hz 0.0063		877.9 Hz 0.0076
Mode 6		1206.3 Hz 0.0088		1208.5 Hz 0.0099
Mode 7		1453.0 Hz 0.0132		1471.7 Hz 0.0116
Mode 8		1556.2 Hz 0.0141		1562.2 Hz 0.0119
Mode 9		1740.2 Hz 0.0141		1743.7 Hz 0.0137
Mode 10		1843.8 Hz 0.0106		1831.0 Hz 0.0140
Mode 11		1930.8 Hz 0.0141		1925.9 Hz 0.0134

6.5 Résumé et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la stratégie d'identification mixte numérique-expérimentale développée dans ce travail à plusieurs cas d'étude. Deux de ces cas comparent les valeurs identifiées avec des mesures de type DMA à titre de validation de la technique proposée. Le dernier exemple d'application donne un aperçu où la méthode est étendue à l'identification des propriétés de structures de type sandwich.

En confrontant notre procédure avec des essais DMA, nous avons remarqué une bonne correspondance des tangentes de perte obtenues avec les deux méthodes pour des échantillons en PMMA, aux propriétés isotropes. Les résultats obtenus pour un matériau composite carbone-époxy, présentant un amortissement plus faible, sont moins bien corrélés avec les essais DMA. Nous avons pu noter qu'il est délicat d'aboutir à de bonnes mesures des tangentes de perte lorsque celles-ci deviennent inférieures à 0.005, puisque l'erreur de mesure tend à devenir du même ordre de grandeur que la valeur mesurée. La limitation est ici plutôt due aux mesures expérimentales qu'à la procédure d'identification à proprement parler.

Dans tous les cas, nous avons pu constater une bonne concordance entre les propriétés modales du modèle expérimental et celles du modèle numérique identifié.

Au vu de notre expérience, nous pouvons émettre les remarques suivantes:

- pour pouvoir identifier une propriété constitutive, celle-ci doit avoir une influence sensible sur les modes considérés,
- pour pouvoir identifier correctement le coefficient de Poisson ν_{12} , il est nécessaire d'utiliser des modes qui se déforment dans les directions 1 et 2,
- les modules de cisaillement transverse G_{31} et G_{23} s'identifient à l'aide des modes dont la longueur d'onde est courte relativement à l'épaisseur du spécimen,
- le module de cisaillement transverse G_{12} s'identifie grâce aux modes de torsion, en particulier ceux d'ordre faible,
- les modules de Young E_1 et E_2 ainsi que le coefficient de Poisson ν_{12} s'identifient plutôt à l'aide des modes d'ordre faible.

En ce qui concerne les tangentes de perte en particulier, nous avons observé que les tangentes de perte des modules de Young dans le plan $\tan\delta(E_1)$ et $\tan\delta(E_2)$ ainsi que du module de cisaillement $\tan\delta(G_{12})$ s'identifient généralement bien avec la méthode proposée. En revanche, les tangentes de perte des modules de cisaillement transverse $\tan\delta(G_{31})$ et $\tan\delta(G_{23})$ ne sont pas identifiées précisément dans les cas étudiés, d'épaisseurs modestes. Il serait intéressant d'analyser d'autres spécimens, notamment

avec une épaisseur plus importante afin de voir s'il est possible d'améliorer les résultats dans ces conditions.

Finalement, à l'exception des cas où une loi de comportement isotrope est choisie, l'identification de la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu_{12})$ n'est pas réalisable à ce stade, puisque nous n'avons pas trouvé de norme d'erreur qui soit suffisamment sensible à ce paramètre. Il serait éventuellement utile de s'inspirer de la littérature et d'identifier cette propriété constitutive en prenant plusieurs spécimens de formes différentes [32].

Chapitre 7

Conclusions

L'utilisation d'une méthode mixte numérique-expérimentale dans le cadre de l'identification des propriétés constitutives élastiques et dissipatives d'un matériau orthotrope montre de belles perspectives ainsi qu'une alternative sérieuse aux méthodes de type statique et DMA.

7.1 Synthèse

Au cours de ce travail, nous avons développé plusieurs aspects dans le but d'améliorer la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale des propriétés constitutives élastiques de matériaux orthotropes mise au point dans une étude précédente [42].

Cette démarche s'est articulée autour des points principaux suivants

- l'amélioration de la technique existante,
- l'intégration des effets dissipatifs,
- l'élargissement de l'accessibilité de la partie logicielle.

L'amélioration de la technique existante a consisté en la fiabilisation de la méthode mise au point précédemment. Nous avons augmenté son taux de convergence en proposant une méthode d'identification en deux temps, permettant de résoudre le problème survenant occasionnellement quand l'estimation du coefficient de Poisson dans le plan entraîne une divergence de la méthode. Cette identification séquentielle s'est avérée également efficace lorsqu'il s'agit d'identifier des propriétés constitutives de matériaux en partant de valeurs initiales fortement éloignées de leurs propriétés effectives.

Nous nous sommes également intéressés à une classe de matériaux particulière formée des structures de type sandwich. Nous avons montré que pour certains sandwiches, il est possible d'identifier à partir d'une unique mesure l'ensemble de leurs propriétés constitutives influentes. Nous avons aussi ajouté à la routine existante la possibilité d'utiliser un pot vibrant en lieu et place du système d'excitation par haut-parleur afin d'être capable de transmettre au spécimen étudié une force plus élevée.

La prise en compte des effets dissipatifs a constitué la majeure partie des efforts consacrés à ce travail. Nous avons intégré à un code d'éléments finis existant conçu au sein du laboratoire (MAFE) deux modèles d'amortissement, de type visqueux et hystérétique. Cette intégration a non seulement exigé la réalisation de deux nouveaux types de solveurs, mais également la formulation de nouveaux types d'éléments finis orthotropes incorporant les effets dissipatifs. Parmi les éléments finis dissipatifs développés, citons les éléments de coque PSDT avec une approximation du déplacement dans l'épaisseur selon un développement polynomial d'ordre p , qui constituent une approche hiérarchique originale, regroupant en fonction de la valeur de p les formulations des éléments de coque de type FSDT et HSDT.

Selon des mesures effectuées sur divers spécimens et en accord avec la tendance trouvée dans la littérature, nous avons finalement opté pour le modèle hystérétique pour son plus grand réalisme. Nous avons ensuite inclus ces effets dissipatifs dans la routine d'identification, codée dans Matlab®. Pour cela, outre les modifications apportées afin de prendre en compte les différentes valeurs nécessaires à une description correcte des effets dissipatifs (facteurs d'amortissement modal, valeurs propres complexes, tangentes de perte des propriétés constitutives), il a fallu interfacer correctement la routine Matlab® et le logiciel de calcul numérique MAFE.

Finalement, l'élargissement de l'accessibilité de la partie logicielle a été dicté par notre volonté de créer un outil d'utilisation simple. Nous avons ainsi à plusieurs reprises substitué les lignes de code à éditer par des interfaces graphiques, permettant ainsi de définir la totalité d'un problème d'identification d'une manière plus intuitive. Nous avons voulu fournir une méthode qui puisse être exploitée aisément par diverses personnes dans les projets de recherche futurs du laboratoire, un logiciel aussi accessible que possible nous ayant semblé être de prime importance pour qu'il continue à servir une fois ce travail terminé.

7.2 Performances et limitations

L'utilisation d'un modèle d'éléments finis prenant en compte les effets dissipatifs au travers d'une loi d'amortissement de type hystérétique a révélé des résultats convaincants. Nous avons appliqué ce modèle dissipatif à plusieurs types d'éléments finis, principalement de coque PSDT et solides, et validé notre formulation en la comparant

à des valeurs trouvées dans la littérature. La résolution directe du problème aux valeurs propres complexe permet de simplifier considérablement le calcul des facteurs d'amortissement modal puisqu'il n'est désormais plus nécessaire de recourir à une méthode parallèle basée sur les énergies de déformation. De plus, cette manière de procéder permet d'être plus général en travaillant directement avec les formes propres complexes.

Nous avons montré que la variation des facteurs d'amortissement modal pour un matériau donné dépendait plus du mode de déformation de l'éprouvette que de la fréquence d'excitation. L'utilisation d'un modèle orthotrope nous a permis de modéliser correctement le comportement modal des matériaux composites à fibres longues.

Nous avons remarqué que l'indépendance fréquentielle de notre modèle est bien moins limitante qu'il n'y paraît, du moins pour les matériaux étudiés, puisque nous avons réussi à obtenir une bonne concordance entre les propriétés modales mesurées et identifiées tout en utilisant des propriétés constitutives indépendantes de la fréquence. Pour certains matériaux, comme le PMMA, nous avons tout de même observé une tendance claire des propriétés modales à varier avec la fréquence, que nous avons prise en compte en effectuant des identifications sur diverses plages de fréquence.

L'adjonction d'un modèle d'amortissement dissipatif de type hystérétique à un code d'éléments finis destiné à l'analyse modale constitue une avancée majeure, puisqu'elle permet de disposer d'un outil performant pour la modélisation et la compréhension du fonctionnement de systèmes mécaniques, où les modèles usuels – particulièrement le modèle visqueux proportionnel – n'offraient pas un réalisme suffisant.

L'intégration des phénomènes dissipatifs au sein d'une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale donne des résultats encourageants. Nous avons obtenu de bonnes performances dans le cas isotrope, où les propriétés extraites par notre procédure d'identification se sont avérées très proches des propriétés issues des mesures DMA. Pour les cas orthotropes, nous avons eu plus de difficultés lors de la mesure des effets dissipatifs, que ce soit lors de l'analyse modale expérimentale ou lors de tests DMA. Les exemples auxquels nous nous sommes intéressés présentent des effets dissipatifs assez faibles combinés à une rigidité élevée. Nous avons remarqué que pour les deux types de mesure, l'erreur augmente considérablement lorsque la dissipation devient faible. Malgré cela, les tangentes de perte de E_1 , E_2 et G_{12} convergent correctement. Pour les propriétés dissipatives en cisaillement transverse, nous n'obtenons que des valeurs assimilables à des ordres de grandeur. Il serait intéressant d'étudier des spécimens de plus forte épaisseur, voire même d'utiliser des spécimens de plusieurs épaisseurs au cours d'une identification simultanée. Finalement, l'erreur sur la tangente de perte du coefficient de Poisson $\tan\delta(\nu_{12})$ pour les matériaux orthotropes est si importante que cette propriété ne peut pas être considérée comme identifiable avec notre méthode, aucune norme d'erreur étant suffisamment sensible à ce paramètre. Ici

encore, à moins de mettre au point une nouvelle norme d'erreur sensible à $\tan\delta(\nu_{12})$, à l'image de la norme d'erreur basée sur la forme des lignes nodales pour sa contrepartie de stockage, il serait judicieux de considérer plusieurs géométries de spécimen pour augmenter la sensibilité de la méthode à ce paramètre.

Le choix d'une méthode d'excitation par pot vibrant a montré un impact favorable sur la qualité des fonctions de réponse en fréquence mesurées. Malheureusement, l'amortissement ajouté par la liaison compense ce gain en niveau de bruit. Il reste que pour les matériaux plus fortement dissipatifs, l'excitation par pot vibrant devient incontournable lorsque l'épaisseur du spécimen augmente en autorisant des niveaux de vibration plus élevés qu'avec une excitation par haut-parleur. Pour les spécimens à faible amortissement modal, le haut-parleur reste le système qui offre la meilleure mesure des facteurs d'amortissement modal.

Bien que notre méthode souffre d'une précision encore perfectible, il faut tout de même remarquer qu'elle peut être tout à fait suffisante selon l'utilisation que l'on cherche à en faire. N'oublions pas que si la précision des résultats donnée par notre méthode est parfois limitée, elle n'en est pas moins du même ordre de grandeur que celle de la méthode alternative – les essais de type DMA. Il faut éventuellement se rendre à l'évidence: dans les matériaux structurels peu amortis, la précision sur les propriétés dissipatives ne sera jamais du même ordre de grandeur que celle obtenue sur les propriétés élastiques, une précision dix fois moindre étant peut être déjà une bonne performance.

Afin de résumer, listons ici les performances générales de la méthode mixte numérique-expérimentale d'identification des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux orthotropes:

- identification de E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} quelle que soit l'épaisseur du spécimen, avec une erreur entre 1 et 5%,
- identification des modules transverses G_{23} et G_{31} lorsque l'épaisseur du spécimen est suffisante ($a/h < 15$), avec une erreur allant jusqu'à 5%,
- identification des tangentes de perte $\tan\delta(E_1)$, $\tan\delta(E_2)$ et $\tan\delta(G_{12})$, avec une erreur absolue inférieure à 0.005,
- identification de $\tan\delta(G_{23})$ et $\tan\delta(G_{31})$ délicate à cause des erreurs de mesure sur les facteurs d'amortissement modal,
- identification de $\tan\delta(\nu_{12})$ trop imprécise, due à la faible sensibilité des normes d'erreur à ce paramètre,
- mesure précise des facteurs d'amortissement modal si ceux-ci se trouvent entre 0.2% et 5% environ.

Les limitations, à prendre en compte lors d'une étude, sont les suivantes:

- modélisation des effets élastiques et dissipatifs ne dépendant pas de la fréquence des vibrations,
- linéarité des relations contrainte-déformation (les facteurs d'amortissement modal ne dépendent pas de l'amplitude des vibrations),
- absence de prise en compte de l'influence de la température (tous les essais sont réalisés à température ambiante),
- loi de comportement considérée comme orthotrope ou isotrope.

7.3 Perspectives

La méthode d'identification développée ici montre des résultats encourageants; il est cependant encore possible de l'améliorer en considérant les points suivants:

- *Amélioration de la qualité des mesures.* Nous avons remarqué que pour les faibles facteurs d'amortissement modal, l'erreur de mesure sur ceux-ci limitait les performances de la méthode. Il serait intéressant d'améliorer la qualité des fonctions de réponse en fréquence afin d'obtenir des facteurs d'amortissement modal plus fiables.
- *Amélioration de la sensibilité des normes d'erreur aux tangentes de perte* $\tan\delta(G_{23})$, $\tan\delta(G_{31})$ et $\tan\delta(v_{12})$. Cela peut par exemple passer par la création de nouvelles normes d'erreur ou par l'optimisation de la géométrie des spécimens servant à l'identification.
- *Identification simultanée basée sur plusieurs spécimens.* Nous avons observé que la géométrie du spécimen avait une grande influence sur les sensibilités des normes d'erreur. L'utilisation de plusieurs spécimens de formes spécifiques pourrait améliorer la précision de la méthode existante.
- *Prise en compte de la variation des propriétés constitutives avec la fréquence.* Nous avons mis sur pied au chapitre 6 une approche permettant de tenir compte de l'évolution des propriétés du matériau avec la fréquence qu'il serait intéressant de développer ultérieurement.

Il serait profitable d'appliquer la méthode développée dans plusieurs domaines où le comportement dissipatif des matériaux entre en jeu. A titre d'exemples, citons les domaines suivants:

- l'étude du vieillissement de certains matériaux polymères, dont les propriétés ont été dégradées suite à, par exemple, une exposition prolongée aux rayons ultraviolets,
- l'estimation des amplitudes maximales de vibration d'une structure sollicitée dynamiquement d'après ses propriétés constitutives élastiques et dissipatives,

- l'application à une méthode embarquée d'analyse d'une structure, afin de pouvoir déceler en temps réel des défauts survenant au cours de son utilisation.

Il est également possible d'envisager de rendre cette méthode plus accessible en développant une méthode commerciale sur la base du travail réalisé à ce jour.

Bibliographie

8.1 Publications de l'auteur

- [A] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Validation of an orthotropic structurally damped shell finite element model for modal analysis of composite structures, *Compos Part B-Eng*, To appear.
- [B] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Modal material identification method using a dissipative finite element model, *Proceedings of 9th ICCST Conference, Athens, Paper CST-156, September 2008.*
- [C] SULMONI M, GMUER T, CUGNONI J, MATTER M, Modal validation of sandwich shell finite elements based upon a p-order shear deformation theory including zigzag terms, *Int J Numer Meth Eng*, Vol 75, No 11, 1301-1319, 2008.
- [D] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Evaluation of a dissipative finite element model for modal identification application, *Proceedings of 7th ICSAM Conference, Patras, Paper 11B-1, September 2007.*
- [E] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Improved modal characterization of the constitutive parameters in multilayered plates, *Comp Sci Tech*, Vol 67, No 6, 1121-1131, 2007.
- [F] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Modal identification of the elastic properties in composite sandwich structures, *Proceedings of 3rd CompTest Conference, Porto, 162-163, April 2006.*
- [G] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Improved dynamic characterization of the elastic properties in composite plates, *Proceedings of 12th ICCE Conference, Tenerife, August 2005.*

8.2 Ouvrages de référence

- [1] KIMBALL AL, LOVELL DE, Internal friction in solids, *Phys Rev*, Vol 30, 948-959, 1927.
- [2] HASHIN Z, Complex moduli of viscoelastic composites – I. General theory and application to particulate composites, *Int J Solids Struct*, Vol 6, No 5, 539-552, 1970.
- [3] MELO JDD, RADFORD DW, Viscoelastic characterization of transversely isotropic composite laminae, *J Compos Mater*, Vol 37, No 2, 129-145, 2003.
- [4] CHANDRA R, SINGH SP, GUPTA K, Experimental evaluation of damping of fiber-reinforced composites, *J Compos Technol Res*, Vol 25, No 2, 96-107, 2003.
- [5] DALENBRING M, Experimental material damping estimation for planar isotropic laminate structures, *Int J Solids Struct*, Vol 39, No 19, 5053-5079, 2002.
- [6] KOSTOPOULOS V, KORONTZIS D, A new method for the determination of viscoelastic properties of composite laminates: a mixed analytical-experimental approach, *Compos Sci Technol*, Vol 63, No 10, 1441-1452, 2003.
- [7] DEL PEDRO M, PAHUD P, *Mécanique vibratoire – systèmes discrets linéaires*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1992.
- [8] CAUGHEY TK, O'KELLY MEJ, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *J Appl Mech*, Vol 32, 583-588, 1965.
- [9] ADHIKARI S, Damping modelling using generalized proportional damping, *J Sound Vib*, Vol 293, No 1-2, 156-170, 2006.
- [10] YIM JH, A damping analysis of composite laminates using the closed form expression for the basic damping of Poisson's ratio, *Compos Struct*, Vol 46, No 4, 405-411, 1999.
- [11] WEI YT, GUI LJ, YANG TQ, Prediction of the 3-D effective damping matrix and energy dissipation of viscoelastic fiber composites, *Compos Struct*, Vol 54, No 1, 49-55, 2001.
- [12] MEUNIER M, SHENOI RA, Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory, *Compos Struct*, Vol 54, No 2-3, 243-254, 2001.
- [13] HUFENBACH W, HOLSTE C, KROLL L, Vibration and damping behaviour of multi-layered composite cylindrical shells, *Compos Struct*, Vol 58, No 1, 165-174, 2002.
- [14] UNGAR EE, KERWIN EM, Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts, *J Acoust Soc Am*, Vol 34, No 7, 954-957, 1962.
- [15] ADAMS RD, MAHERI MR, Dynamic flexural properties of anisotropic fibrous composite beams, *Comp Sci Technol*, Vol 50, No 4, 457-514, 1994.
- [16] BERTHELOT JM, SEFRANI Y, Damping analysis of unidirectional glass and Kevlar fibre composites, *Comp Sci Technol*, Vol 64, No 9, 1261-1278, 2004.
- [17] HAO M, RAO MD, Vibration and damping analysis of a sandwich beam containing a viscoelastic constraining layer, *J Compos Mater*, Vol 39, No 18, 1621-1643, 2005.
- [18] ALAM N, ASNANI NT, Refined vibration and damping analysis of multilayered rectangular plates, *J Sound Vib*, Vol 119, No 2, 347-362, 1987.
- [19] WREN GG, KINRA VK, Axial damping in metal-matrix composites. II: a theoretical model and its experimental verification, *Exp Mech*, Vol 32, No 2, 172-178, 1992

-
- [20] RIKARDS R, CHATE A, BLEDZKI AK, KUSHNEVSKY V, Numerical modelling of damping properties of laminated composites, *Mech Compos Mater*, Vol 30, No 3, 256-266, 1994.
- [21] CHANDRA R, SINGH SP, GUPTA K, Micromechanical damping models for fiber-reinforced composites: a comparative study, *Compos Part A – Appl S*, Vol 33, No 6, 787-796, 2002.
- [22] LIN DX, NI RG, ADAMS RD, Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates, *J Compos Mater*, Vol 18, No 2, 132-152, 1984.
- [23] KOO KN, LEE I, Vibration and damping analysis of composite laminates using shear deformable finite element, *AIAA J*, Vol 31, No 4, 728-735, 1993.
- [24] RAMESH TC, GANESAN N, Orthotropic cylindrical shells with a viscoelastic core: a vibration and damping analysis, *J Sound Vib*, Vol 175, No 4, 535-555, 1994.
- [25] PLAGIANAKOS TS, SARAVANOS DA, Mechanics and finite elements for the damped dynamic characteristics of curvilinear laminates and composite shell structures, *J Sound Vib*, Vol 263, No 2, 399-414, 2003.
- [26] WANG HJ, CHEN LW, Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer, *Finite Elem Anal Des*, Vol 40, No 7, 737-755, 2004.
- [27] MAKHECHA DP, GANAPATHI M, PATEL BP, Vibration and damping analysis of laminated/sandwich composite plates using higher-order theory, *J Reinf Plast Comp*, Vol 21, No 6, 559-575, 2002.
- [28] KOO KN, Vibration and damping analysis of composite plates using finite elements with layerwise in-plane displacements, *Comput Struct*, Vol 80, No 16-17, 1393-1398, 2002.
- [29] MAHERI MR, ADAMS RD, Modal vibration damping of anisotropic FRP laminates using the Rayleigh-Ritz energy minimization scheme, *J Sound Vib*, Vol 259, No 1, 17-29, 2003.
- [30] JOHNSON CD, KIENHOLZ DA, Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers, *AIAA J*, Vol 20, No 9, 1284-1290, 1982.
- [31] MOREIRA RAS, RODRIGUES JD, Constrained damping layer treatments: finite element modeling, *J Vib Control*, Vol 10, No 4, 575-595, 2004.
- [32] DE VISSCHER J, SOL H, DE WILDE WP, Identification of the damping properties of orthotropic composite materials using a mixed numerical experimental method, *Appl Compos Mater*, Vol 4, 13-33, 1997.
- [33] QIAN GL, HOA SV, XIAO X, Vibration method for measuring mechanical properties of composite, theory and experiment, *Compos Struct*, Vol 39, No 1-2, 31-38, 1997.
- [34] NAKANISHI M, KOBAYASHI Y, YAMADA G, Simultaneous optimal design of stiffness and damping of a flexible structure reinforced by FRP sheets, *JSME Int J C-Mech Sy*, Vol 45, No 1, 99-106, 2002.
- [35] HOSOKAWA K, MATSUMOTO K, Identification of damping parameters for laminated shallow cylindrical shells, *Sci Eng Compos Mater*, Vol 11, No 2-3, 217-223, 2004.
- [36] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Evaluation of a dissipative finite element model for modal identification application, *Proceedings of 7th ICSAM Conference, Patras, Paper 11B-1, September 2007.*
-

- [37] GIRAUDEAU A, GUO B, PIERRON F, Stiffness and damping identification from full field measurements on vibrating plates, *Exp Mech*, Vol 46, No 6, 777-787, 2006.
- [38] PAGNACCO E, MOREAU A, LEMOSSE D, Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements, *Mater Sci Eng A-Struct*, Vol 452-453, 737-745, 2007.
- [39] KYRIAZOGLOU C, GUILD FJ, Finite element prediction of damping of composite GFRP and CFRP laminates – a hybrid formulation – vibration damping experiments and Rayleigh damping, *Comp Sci Tech*, Vol 66, No 3-4, 487-498, 2006.
- [40] GMUER T, *Dynamique des structures – Analyse modale numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.
- [41] EWINS DJ, *Modal testing: theory and practice*, Research Studies Press, Baldock, 1984.
- [42] CUGNONI J, *Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites*, Thèse n° 3106, Lausanne, 2004.
- [43] CUGNONI J, GMUER T, SCHORDERET A, Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements, *Compos Part A – Appl S*, Vol 35, No 7-8, 977-987, 2004.
- [44] SULMONI M, GMUER T, CUGNONI J, MATTER M, Modal validation of sandwich shell finite elements based upon a p-order shear deformation theory including zigzag terms, *Int J Numer Meth Eng*, Vol 75, No 11, 1301-1319, 2008.
- [45] GMUER T, *MAFE: A code for modal analysis by finite elements, Users manual*, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Lausanne, 1998.
- [46] GMUER T, SCHORDERET A, A subspace iteration algorithm for the eigensolution of large structures subject to non-classical viscous damping, *Int J Numer Meth Eng*, Vol 49, No 10, 1267-1280, 2000.
- [47] LEHOUCQ RB, SORENSEN DC, YANG C, *ARPACK users guide: solution of large eigenvalue problems by implicitly restarted Arnoldi methods*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [48] RICHARDSON MH, FORMENTI DL, Global curve fitting of frequency response measurements using the rational fraction polynomial method, *Proceedings of the 3rd IMAC Conference*, Orlando, 390-397, January 1985.
- [49] CUGNONI J, GMUER T, SCHORDERET A, Inverse method based on modal analysis for characterizing the constitutive properties of thick composite plates, *Comput Struct*, Vol 85, No 17-18, 1310-1320, 2007.
- [50] MATTER M, GMUER T, CUGNONI J, SCHORDERET A, Improved dynamic characterization of the elastic properties in composite plates, *Proceedings of 12th ICCE Conference*, Tenerife, August 2005.
- [51] FRANCK A, APN007: Measuring and evaluating oscillation data, <http://www.tains-truments.com>.
- [52] ABBAS M, WAECKEL F, *Introduction à Code_Aster*, EDF-R&D/AMA, 2005.
- [53] BOGDANOVICH AE, PASTORE CM, *Mechanics of textile and laminated composites*, Chapman & Hall, London, 1996.

Curriculum Vitae

Marco Matter
Né le 11.04.1980 à Lausanne (VD)
Originaire de Lausanne

Formation

Gymnase de la Cité, Lausanne <i>Baccalauréat scientifique (C) et Maturité fédérale.</i>	1995 à 1999
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne <i>Diplôme d'ingénieur mécanicien.</i>	1999 à 2004
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne <i>Travail de doctorat à l'Ecole doctorale de mécanique des fluides et des solides.</i>	2005 à 2008

Expérience professionnelle

Saint-Gobain Isover SA, Lucens <i>Stage d'ingénieur mécanicien.</i>	2002 et 2003
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne <i>Assistant pour les cours de Mécanique vibratoire, Méthode des éléments finis et Techniques de mesure.</i>	2004 à 2008
NRCtech, Lausanne <i>Mandaté sur divers projets en tant qu'ingénieur mécanicien.</i>	2005 à 2007
Département de physique nucléaire et corpusculaire (DPNC), Université de Genève <i>Ingénieur de recherche.</i>	2007 à 2008