Holzplattenkonstruktionen

# Iterative Flächengestaltung

**Ivo Stotz**
**Gilles Gouaty**
**Yves Weinand**
EPF Lausanne, IBOIS

Projektpartner
**Eric Tosan**
Université de Lyon, LIRIS

ivo.stotz@epfl.ch

Am Institut für Holzkonstruktionen an der ETH Lausanne (IBOIS-EPFL) sucht ein interdisziplinäres Team nach Möglichkeiten, komplexe architektonische Formen aus Holzplatten effizient zu bauen. Ziel ist es, computergestützte Lösungen zu entwickeln, die sowohl den Entwurf als auch die Produktion von Freiformflächen optimieren. Um beliebige Flächen aus Holzplatten herstellen zu können, entwickelte das Team eine neue geometrische Methode zur Flächengestaltung. Diese bietet ungeahnte gestalterische und strukturelle Möglichkeiten und entspricht gleichzeitig den Bedingungen von Material und Konstruktion.

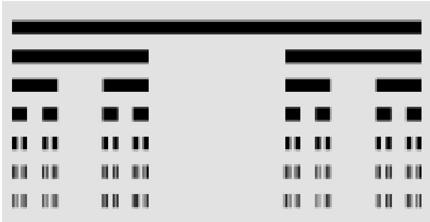
Das Projekt wird vom Schweizerischen Nationalfonds SNF unterstützt.

Um die neue geometrische Methode vorzustellen, sind gewisse mathematische Kenntnisse notwendig. Bewusst wird versucht, die Grundlagen und Hintergründe ohne Formeln zu erklären und die Methode anhand von Grafiken in ihren grundsätzlichen Zügen zu erläutern. Der Bezug zwischen dem mathematischen Formalismus der geometrischen Flächen und dem eigentlichen gebauten Werk ist im zweiten Teil dieses Beitrags anhand von Beispielen aufgezeigt.

**Von Monsterkurven und iterativen geometrischen Objekten**

Die *Cantor-Menge,* auch *Cantor-Staub* genannt, ist nach seinem Entdecker, dem deutschen Mathematiker Georg Cantor, benannt. Sie beschreibt eine auf einer Strecke liegende Punktmenge. Ende des 19. Jahrhunderts erregte die *Cantor-Menge* grosses Aufsehen in mathematischen Kreisen, weil sie unbekannte und scheinbar widersprüchliche Eigenschaften aufweist. Cantor selbst beschreibt in [1] eine perfekte Menge, die nirgends dicht ist. Weitere Eigenschaften wie Sprungstetigkeit, Kompaktheit oder Selbstähnlichkeit wurden erst viel später studiert.

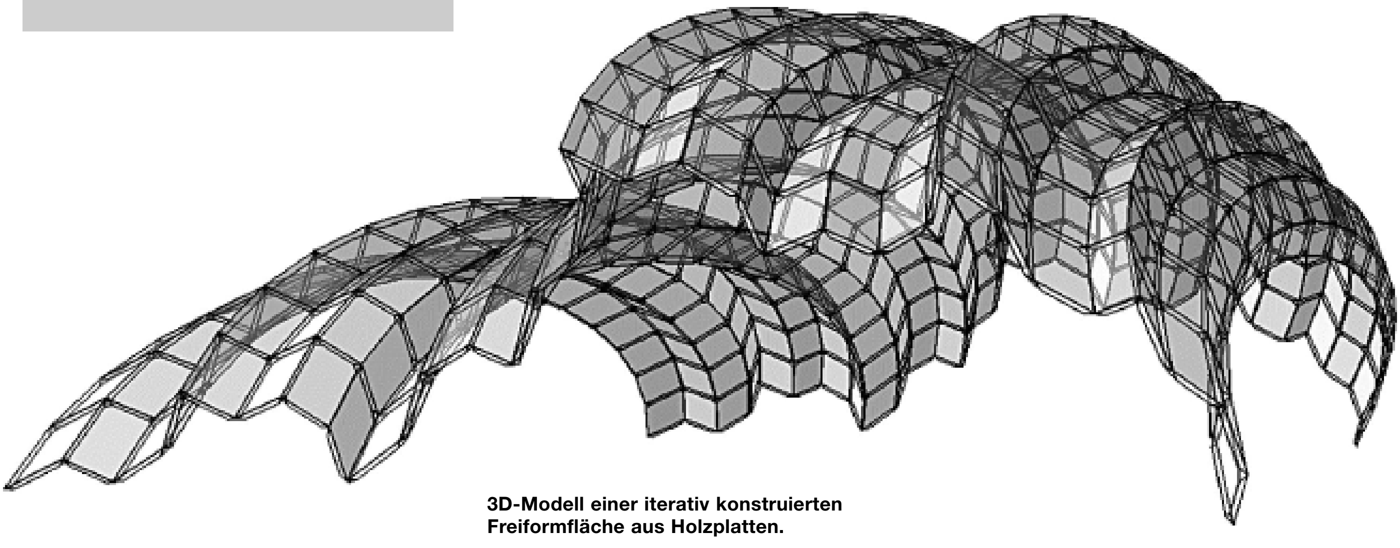
Die geometrische Konstruktion der *Cantor-Menge* lässt sich wie folgt beschreiben: Man nehme den Abschnitt einer Geraden, unterteile diesen in drei gleiche Teile und entferne den mittleren Teil. Unterteile wiederum jeden der resultierenden Abschnitte, und entferne jeweils deren mittlere Drittel. Wird dies für jeden neuen Abschnitt wiederholt, ergibt sich die *Cantor-Menge*.



***Cantor Menge*.**

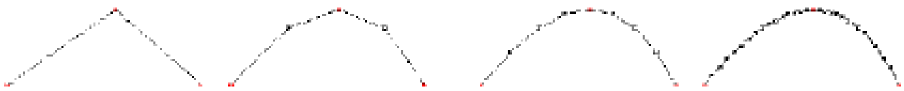
**Bildnachweis**

Wo nichts anderes vermerkt ist, stammen die Abbildungen von Ivo Stotz.



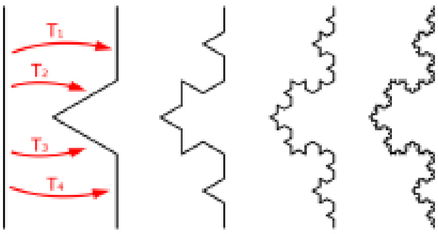
**3D-Modell einer iterativ konstruierten Freiformfläche aus Holzplatten.**

# Konstruieren



Iterativ konstruierte ***Bézierkurve*** **nach De Casteljau.**

Die *Koch-Kurve* zählt zu den ersten entdeckten und wohl bekanntesten fraktalen Objekten. 1904 wurde sie erstmals vom schwedischen Mathematiker Helge von Koch in [2] beschrieben. Die Kurve wird Schritt für Schritt konstruiert. Ausgehend von einer Linie, resultiert am Ende eine mäandrierende Kurve mit folgenden Eigenschaften: Sie besitzt keine Steigung, ist daher nicht differenzierbar. Die Länge eines beliebigen Abschnitts ist jeweils unendlich.




**Iterative Konstruktion einer *Koch-Kurve*: Transformation ($T_1 - T_4$) sind rot gekennzeichnet.**

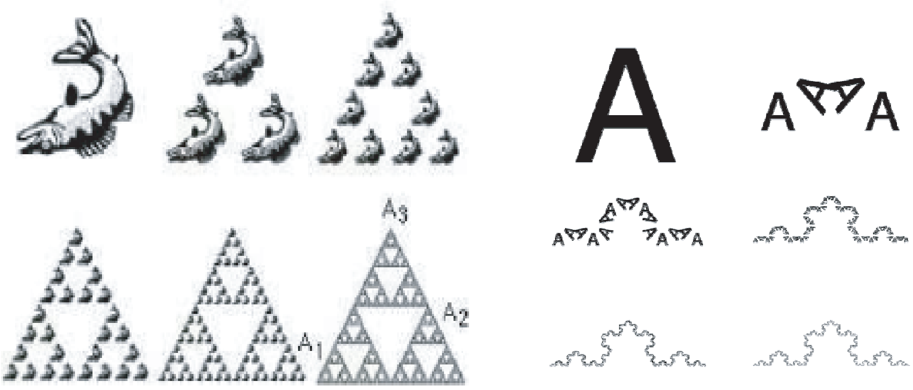
Die geometrische Konstruktion der Kurve ist iterativ, wobei jeder Konstruktionsschritt durch die Menge vier affiner geometrischen Transformationen beschrieben ist. Das Grundobjekt ist eine Linie, die durch jede Transformation ($T_1 - T_4$) skaliert, rotiert und verschoben wird. Je Konstruktionsschritt resultieren vier Duplikate, die im nachfolgenden Schritt jeweils wiederum vier Duplikate ergeben.

Die eigentümlichen Eigenschaften der erwähnten Beispiele führten dazu, dass Mathematiker diese als «Monster» bezeichneten. Erst 1981 gelang es Barnsley [3], aufgrund des Fixpunkttheorems von Hutchinson [4] einen Formalismus zu definieren, der die Monsterkurven deterministisch beschreibt. Seine als IFS (Iterated Function System) benannte Methode besteht aus einer Menge an Funktionen, die iterativ angewandt werden. In unserem Fall entspricht eine Funktion einer affinen geometrischen Transformation. Die Menge der Transformationen ergibt ein so genanntes System. Iterativ bedeutet hier, dass es sich um eine schrittweise Konstruktion handelt. Jeder Konstruktionsschritt verwendet als Eingabe das Ergebnis des vorherigen Schrittes.

Neu an Barnsleys Darstellung ist seine Feststellung, dass das resultierende Objekt nicht durch die Grundelemente (Stammfunktion) bestimmt ist, sondern lediglich durch die Transformationen. Als Beweis führt er die Konstruktion eines *Sierpinski-Dreiecks* an, die einen Fisch als Stammfunktion besitzt. Analog dazu lässt sich eine vom Buchstaben «A» ausgehende *Koch-Kurve* konstruieren. Das Resultat ist dasselbe wie im Fall, die von einer Linie als Stammfunktion ausgeht.

Die Feststellung, dass sich die geometrischen Objekte aus jedem erdenklichem Grundelement konstruieren lassen, machen wir uns zu Nutzen, indem wir annehmen, dass grundsätzlich auch Bauteile als Grundelemente genommen werden können. Anstatt wie Barnsley mit Fischen zu bauen, werden Bauteile wie Balken oder Platten verwendet.

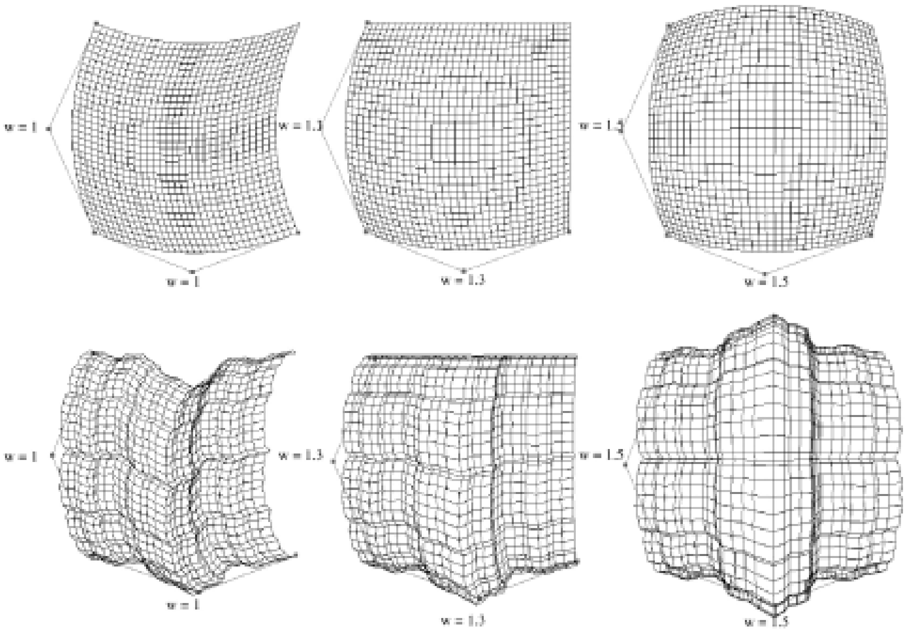
Um den mathematischen Teil des Beitrags abzuschliessen, wird hier noch kurz auf die *Bézierkurve* eingegangen. 1959 fand De Casteljau eine Methode, um das heute als *Bézierkurve* bekannte Objekt zu konstruieren. De Casteljaus Methode gründet auf einem iterativen Konstruktionsprinzip, das stark der Konstruktion einer *Koch-Kurve* gleicht. Lediglich die geometrischen Transformationsfunktionen unterscheiden die beiden Objekte. Die eigentliche *Bézierkurve* wurde 1961 von Bézier analytisch als polynomische Funktion beschrieben, was den Grundstein heutiger CAD-Software bildete.



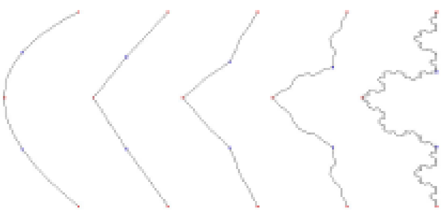

**Nach Barnsleys IFS-Methode konstruiertes *Sierpinski-Dreieck* und *Koch-Kurve*.**
**Bild: M. Barnsley aus [3]**

## Entwicklung einer iterativen CAD-Software

Ziel ist die Entwicklung einer Software, die das Entwerfen baubarer Freiformflächen erleichtern soll. Dazu soll die Software gewisse topologische und geometrische Bedingungen erfüllen. Ein wichtiger Punkt ist, dass die Freiformobjekte aus ebenen Plattenelementen hergestellt werden. Die geometrische Bedingung dazu ergibt, dass das virtuelle 3D-Modell gänzlich aus ebenen Teilen bestehen muss. Um die Probleme von zu komplexen Knotenpunkten zu vermeiden, arbeiten wir mit Flächen, die komplett aus Vierecken aufgebaut sind, was eine topologische Bedingung darstellt. Diese Bedingungen erleichtern eine spätere Realisierung von Freiformobjekten. In dessen schränken diese die freien Gestaltungsmöglichkeiten und somit den Formfindungsprozess ein. Dies wollten wir möglichst vermeiden.



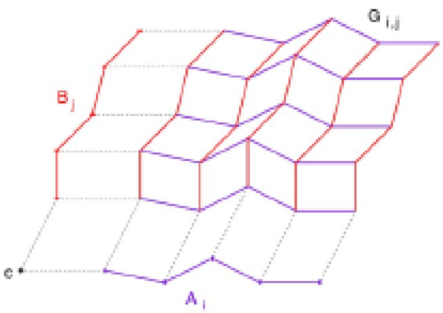
**Durch unterschiedliche Gewichtung der Kontrollpunkte lassen sich die Flächen frei verformen.**



**IFS-Kurve: Durch Verschieben der Subdivisionspunkte entsteht entweder eine glatte *Bézierkurve* oder eine fraktale *Koch-Kurve*.**

Im Unterschied zu aktueller CAD-Software arbeitet unser Programm nicht mit den klassischen analytischen Modellen, die Freiformflächen typischerweise als polynomische Funktionen darstellen. Der verwendete IFS-Formalismus gleicht in gewisser Hinsicht den Subdivisionsflächen. In Kreisen, welche sich mit angewandter diskreter Geometrie in der Architektur beschäftigen, erweckten diese in den letzten Jahren starkes Interesse [5]. Während Subdivisionsflächen glatte Flächen darstellen wie z.B. bikubische B-Spline-Flächen, ist unser Modell genereller. Es ist in der Lage, neben den klassischen Gebilden auch raue und gefaltete Objekte zu erstellen.

Ob ein Objekt glatt oder rau ist, hängt nur von den geometrischen Transformationsfunktionen ab. So kann ein und dieselbe Kurve glatt (z.B. Bézier) oder rau (z.B. Koch) sein (Bild IFS-Kurve). Durch das Ändern der Subdivisionssparameter lässt sich die Art der Rauheit bzw. Glattheit beliebig einstellen. Die Eingabe der Subdivisionssparameter erfolgt über so genannte Subdivisionspunkte. Sie bieten neben den Kontrollpunkten, die durch klassische CAD-Software bekannt sind, erweiterte Gestaltungsmöglichkeiten. Sie ermöglichen eine interaktive grafische Art der Eingabe der Transformationsfunktionen, die in der benutzerunfreundlichen Form von n-dimensionalen Matrizen unter der Haube der grafischen Oberfläche wirken.

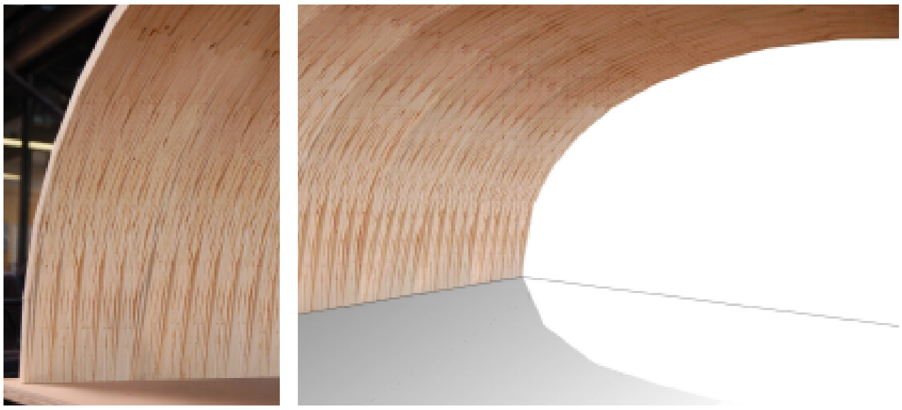



**Funktionsprinzip von Vektorsummen.**

Um iterative Flächen zu gestalten, die der geometrischen Bedingung entsprechen, aus ebenen Teilen aufgebaut zu sein, arbeiten wir mit so genannten Vektorsummen. Klassische CAD-Software berechnet *NURBS*-Flächen mit *Tensorprodukten*, die die für den Bau unerwünschte Eigenschaft besitzen, aus doppelt gekrümmten Teilflächen aufgebaut zu sein, und diese lassen sich nur mit viel Aufwand herstellen. Das Prinzip, Flächen aus Vektorsummen zu erstellen, wurde bereits von Schlaich [6] verwendet. Eine durch Vektorsummen konstruierte Fläche ist eine Kombination von zwei Kurven. Das Beispiel zeigt die Kurven A und B (Bild mitte). Die Vektorsumme zweier beliebiger Segmente der Kurven spannt ein ebenes Parallelogramm auf, das ein Teil der gesamten Fläche bildet. Die Fläche ist komplett aus Parallelogrammen aufgebaut, wodurch sie der geometrischen Bedingung entspricht, aus ebenen Teilen aufgebaut zu sein.

Die Möglichkeiten, Freiformen durch einfache Vektorsummen zu gestalten, sind jedoch einiges geringer als bei herkömmlichen NURBS-Flächen. Um die Möglichkeiten der Formfindung zu vergrössern, verwenden wir das Prinzip der *projektiven Geometrie*. Der IFS-Formalismus wird dabei um die Möglichkeit erweitert, die Kontroll- und Subdivisionspunkte unterschiedlich zu gewichten (w 1). Das IFS wird somit zu einem rationellen Objekt, wobei die Gewichtung der einzelnen Kontrollpunkte nicht unbedingt gleichmässig, aber rationell organisiert ist.

Das iterative geometrische Modell bietet somit grosses gestalterisches Potential, indem es die beiden bis anhin voneinander unabhängigen Paradigmen von glatten und rauen Objekten in ein und demselben Formalismus vereint. Weiter ist es uns gelungen, gewisse geometrische Bedingungen zu erfüllen, die die Fertigung von Freiformarchitektur erheblich erleichtern. Zwei nachfolgend dargestellte Beispiele zeigen dies.



**Modellfotos.**

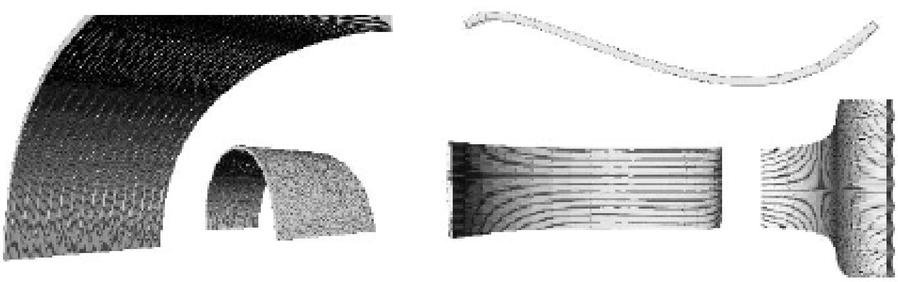
### Anwendungen der diskreten iterativen Geometrie

Um die diskreten virtuellen Geometrien als physische Bauwerke zu realisieren, werden die geometrischen Elemente, aus denen die 3D-Modelle aufgebaut sind, durch Bauteile ersetzt. Bei einer iterativ konstruierten Kurve werden so z.B. die Geradenabschnitte durch lineare Bauelemente wie Bretter oder Balken ersetzt. Bei einer Fläche ersetzen wir die Teilstücke durch ebene Bauteile (Platten). Die Substitution von geometrischen Elementen durch Bauteile wirft in einigen Fällen noch gewisse Fragen auf, da die geometrischen Gebilde keine Dicke bzw. keine physischen Abmessungen besitzen. Der etwas anschaulichere Fall eines zweidimensionalen Objektes ist die *Bézierkurve*.

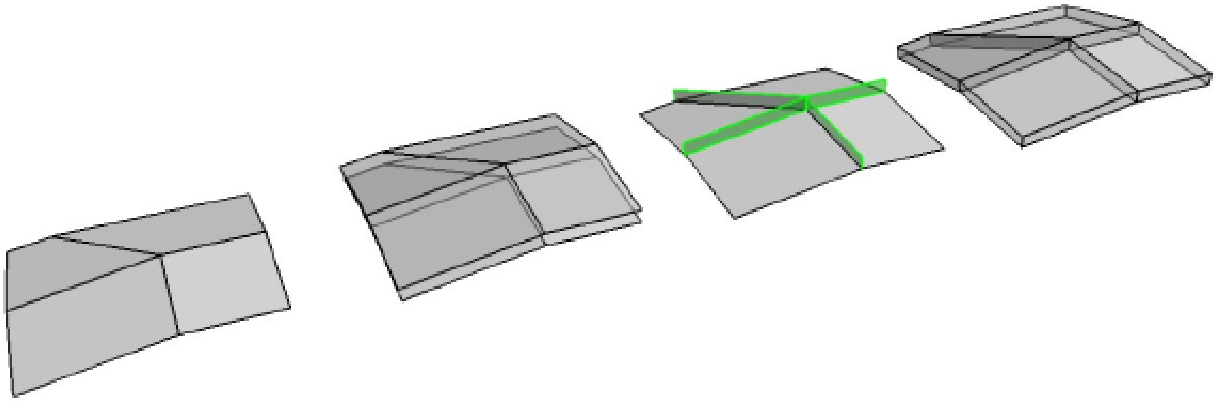
**Iterativ konstruierte *Bézierkurve* (mit ihren Kontrollpunkten).**

Das Beispiel zeigt die Anwendung einer iterativ konstruierten *Bézierkurve* für den Bau eines Tonnengewölbes in Brettschichtbauweise. Die Geradenabschnitte, die die Kurve aufbauen, sind durch sägerohe Bretter ersetzt. Beim Entwurf entscheiden wir zuerst über die globale Form anhand der Kontrollpunkte. Danach wird die Kurve in kleinere Teile unterteilt und solange verfeinert, bis wir eine angemessene Länge der Bauteile erhalten. Entscheidend ist hier, dass die Teile einerseits nicht länger als die auf dem Markt erhältlichen Bretter sein sollten, und dass andererseits die Unterteilung fein genug sein sollte, um die Kurve angemessen rund bzw. glatt darzustellen.

Die zur Fertigung nötigen Masse sind direkt vom geometrischen Objekt gegeben: Die Längen der einzelnen Bretter entsprechen den Längen der Geradenabschnitte der Kurve. Der Gehrungswinkel zwischen zwei Brettern kann analog dazu ebenfalls vom geometrischen Modell abgeleitet werden. Der Entwurf beschränkt sich somit auf zwei Schritte: Die Kontrolle der Form anhand der Kontrollpunkte sowie Wahl der Iterationstiefe des geometrischen Modells. Die Frage nach der nötigen Aufteilung des Freiformobjektes in Bauelemente erübrigt sich, da diese direkt durch die iterative geometrische Konstruktionsmethode gegeben ist. Die digitale Kette – vom Entwurf zu den Fertigungsplänen der eigentlichen Bauteile – wird damit erheblich verkürzt. Dies ist ein entscheidender Kosten- und Zeitfaktor bei der Herstellung von Freiformarchitektur.



**Verschiedene Studien zur Anwendung der IFS-Kurve.**

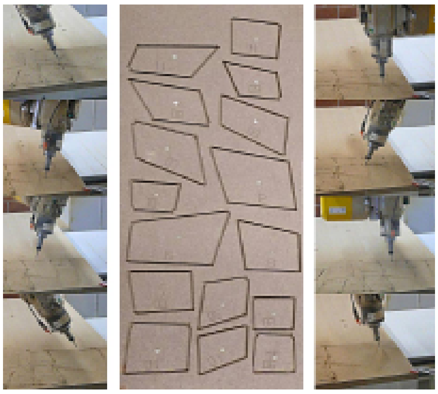


**Ableitung der auf Gehrung geschnittenen Plattenbauteile.**

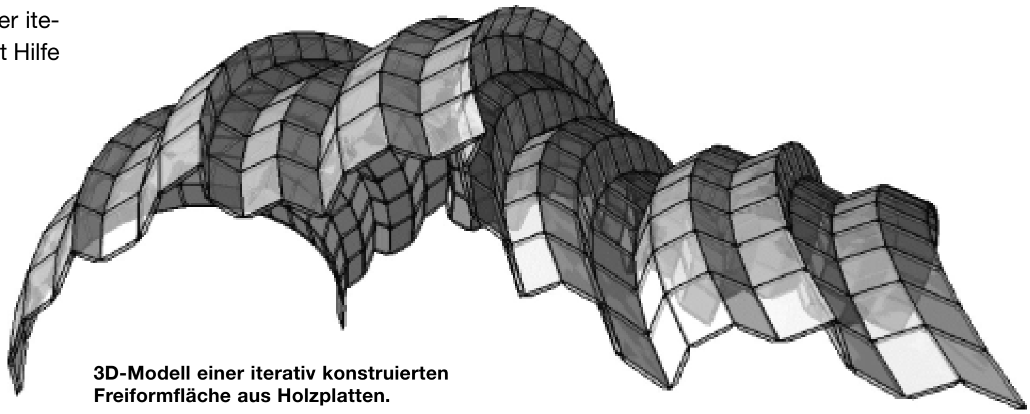
Folgendes Beispiel zeigt die Anwendung einer iterativ konstruierten Freiformfläche als Plattenkonstruktion. Die Teilflächen werden durch flächige Holzplatten ersetzt. Die Stärke der verwendeten Platte ist als Erstes zu berücksichtigen, da die virtuelle 3D-Fläche keine eigentlich Dicke besitzt. Dazu muss vom ursprünglichen Flächenmodell ein Volumenmodell abgeleitet werden.

Wir erzeugen zuerst eine parallel verschobene Fläche, die einen konstanten Abstand zur modellierten Fläche hält, der der Dicke der zu verarbeitenden Holzplatte entspricht. Anschliessend werden die winkelhalbierenden Ebenen berechnet, die wir später für den Gehrungsschnitt der Platten verwenden.

Somit entsteht ein Freiformobjekt, das aus ebenen Plattenelementen aufgebaut ist. Um die Verarbeitungskette der digitalen Fertigung solcher Bauten zu testen, haben wir einen Ausschnitt einer iterativ konstruierten Freiformfläche mit Hilfe eine 5-Achs-CNC-Fräse gefertigt. Die nötigen Arbeitsschritte, um von der Geometrie der Bauteile zum Maschinencode zu gelangen, wurden weitgehend automatisiert.



**Computergesteuerte Fertigung der Plattenbauteile.**



**3D-Modell einer iterativ konstruierten Freiformfläche aus Holzplatten.**

# Konstruieren

Folgende Schritte sind nötig um solch komplexe Bauvorhaben zu realisieren:

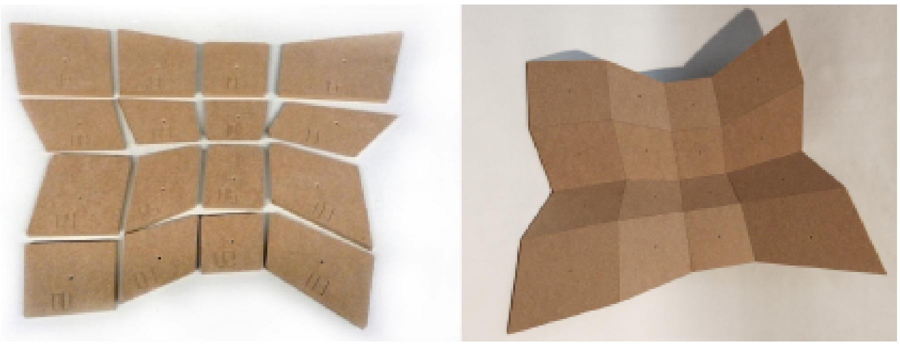
1. Das Adressieren der einzelnen Bauteile ist aus logistischen Gründen notwendig, damit sich die verschiedenen Teile bei der Montage am richtigen Ort fugenlos zusammenfügen lassen.

2. Jedes Teil wird automatisch auf das Koordinatensystem der Abbundmaschine ausgerichtet.

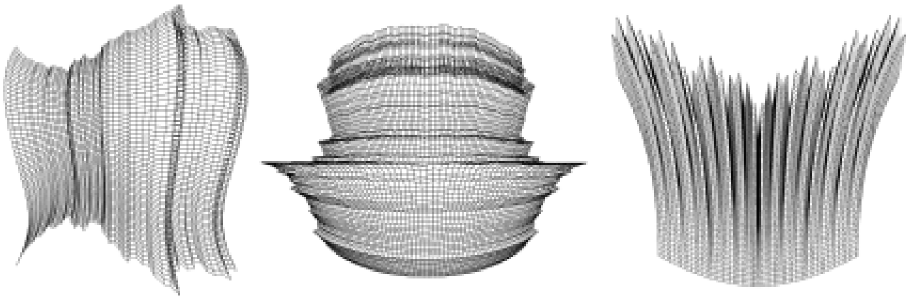
3. Das automatische Generieren des Maschinencodes für jedes der Bauteile: Die Beschaffenheiten des Materials sowie der Fräsmaschine und der verwendeten Werkzeuge ist entscheidend zum Erstellen der Werkzeugwege.

Die gefertigten Teile fügen sich nahtlos zu der am Computer entworfenen Fläche zusammen. Dies zeigt, dass es praktisch möglich ist, iterativ konstruierte Flächen mit relativ geringem Planungsaufwand zu realisieren. Bei der Fertigung zeigten sich noch gewisse Probleme, da die passgenauen Teile lediglich sehr kleine Toleranzen zulassen. Grössere Freiformobjekte erhöhen möglicherweise die zulässigen Toleranzen, erschweren aber wahrscheinlich die Logistik bei der Montage. Die Effizienz der vorgestellten Methode zur Herstellung von Freiformflächen ist insofern dargelegt, da die Verarbeitung der Daten – vom Entwurf bis zum Maschinencode – nur wenige Augenblicke dauert.

Künftig wollen wir komplexere und grössere Objekte entwickeln. Das Potenzial der neuen Entwurfsmethode für Freiformflächen ist bei weitem nicht ausgeschöpft. Anwendungen wie zum Beispiel abgehängte Decken, Kletterwände, Freiform-Fassaden oder -Hallen warten darauf, umgesetzt zu werden.



**Fertige und adressierte Bauteile – vor und nach der Montage.**



**Beispiele komplexer iterativ konstruierter Flächen.**

## Referenzen


[1] G. Cantor (1884):
De la puissance des ensembles parfait de points, Acta Mathematica 4, S. 381–392

[2] H. von Koch (1904):
Une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géometrique élémentaire. Arkiv för Matematik 1, S. 681–704

[3] M. F. Barnsley (1988):
Fractals Everywhere, Academic Press

[4] John E. Hutchinson (1981):
Fractals and self-similarity. Indiana University Mathematics Journal 30, S. 713–747

[5] H. Pottmann, S. Brell-Cokcan, J. Wallner (2006):
Discrete surfaces for architectural design. Curves and Surface Design, S. 213–234

[6] J. Schlaich, H. Schober (2002):
Filigrane Kuppeln. Beispiele, Tendenzen und Entwicklungen. Tec21; v.128, no. 12, S. 21–27


## Glossar

| | |
|---|---|
| **3D** | Dreidimensional |
| **CAD** | Computer Aided Design |
| **CNC** | Computer Numerically Controlled |
| **IFS** | Iterated Function System |
| **NURBS** | Non Uniform Rational B-Spline |
| **MDF** | Medium Density Fiber |