

DECEMBRE 1978

LRP 147/78

Instabilités paramétriques au voisinage de la
fréquence de résonance hybride inférieure du plasma.

Effets du cisaillement des lignes du champ
magnétique et de l'inhomogénéité de densité

Jean-Marie Paul Wersinger

T h è s e

présentée à

l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

CENTRE DE RECHERCHES EN PHYSIQUE DES PLASMAS

Instabilités paramétriques au voisinage de la
fréquence de résonance hybride inférieure du plasma.

Effets du cisaillement des lignes du champ
magnétique et de l'inhomogénéité de densité

Jean-Marie Paul Wersinger

Ecole Polytechnique Federale de Lausanne
Centre de Recherches en Physique des Plasmas

TABLE DES MATIERES

	page
I. INTRODUCTION	1
II. ONDES ELECTROSTATIQUES DANS LE DOMAINE DE LA MOYENNE GEOMETRIQUE DES FREQUENCES CYCLOTRONIQUES	10
1. Le plasma homogène	10
1.1 Modèle du plasma chaud	12
1.2 Modèle fluide pour plasma chaud	16
2. Le plasma inhomogène	19
3. Le plasma plongé dans un champ magnétique cisailé	21
III. INSTABILITES PARAMETRIQUES DANS UN PLASMA CHAUD HOMOGENE	27
1. Dérivation de la relation de dispersion	30
2. Résultats numériques	37
3. Etude analytique de l'instabilité non-oscillante	42
IV. EFFETS DU CISAILLEMENT DES LIGNES DU CHAMP MAGNETIQUE SUR L'INSTABILITE NON-OSCILLANTE	48
1. Dérivation des équations du couplage	50
2. Résolution des équations du couplage par la méthode WKB	57
3. Résolution des équations du couplage par trans- formée de Fourier	63
4. Discussion des résultats	65

V.	INSTABILITE DE DESINTEGRATION DANS UN PLASMA INHOMOGENE	68
1.	Dérivation des équations du couplage	72
2.	Résolution des équations du couplage	78
3.	Solutions propres de l'instabilité absolue	83
	REMERCIEMENTS	92
	REFERENCES	93
	APPENDICE A :	97
	Susceptibilités pour ondes électrostatiques dans un plasma chaud et magnétisé. Application aux fréquences $\omega \sim \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$	
	APPENDICE B :	103
	Dérivation de deux équations différentielles couplées décrivant l'instabilité non-oscillante dans un plasma avec shear	
	APPENDICE C :	107
	Solutions asymptotiques pour l'instabilité de désinté- gration dans un plasma inhomogène	
	GLOSSAIRE	116

I INTRODUCTION

On sait que le chauffage ohmique seul ne suffit pas à porter les plasmas confinés magnétiquement, tels les Tokomaks, à la température d'ignition {1}. Il faut donc recourir à des techniques de chauffage supplémentaire telles l'injection de faisceaux de particules ou d'ondes électromagnétiques {2}.

Un effort remarquable est actuellement fourni dans l'étude de l'absorption d'ondes au voisinage de la fréquence de résonance hybride inférieure ω_{LH} {3-21}. Ce domaine de fréquences, de l'ordre de quelques GHz pour un réacteur, présente en effet un intérêt tout particulier à la fois du point de vue de la physique et de la technologie. Les ions participent à la construction des ondes hybrides inférieures et peuvent donc être chauffés directement au même titre que les électrons. L'intérêt technique provient de l'existence de sources radio-fréquences (RF) délivrant les puissances élevées requises avec un bon rendement dans cette gamme de fréquences, contrairement aux fréquences plus élevées. De plus la possibilité d'utiliser des guides d'ondes permet d'éviter l'introduction de structures émissives, inévitables aux fréquences plus basses, à l'intérieur des enceintes {4}. Jusqu'à présent aucune expérience d'envergure n'a encore été réalisée à l'aide de cette méthode. Par contre, de nombreuses petites expériences de principe ont permis de vérifier les concepts de base et d'identifier les divers mécanismes d'absorption.

Dans ce domaine de fréquences il existe deux mécanismes d'absorption différents : la conversion de mode linéaire et la conversion paramétrique non-linéaire. Pour utiliser le premier mécanisme il faut choisir la fréquence de l'onde injectée telle qu'il existe une couche résonante à l'intérieur du plasma {22}. L'onde "lente" émise au bord du plasma se propage vers le centre, se ralentissant progressivement jusqu'à ce que sa vitesse de groupe devienne de l'ordre de la vitesse thermique ionique près de la

couche résonnante {5}. Si elle n'est pas encore absorbée par effet Landau sur les électrons, l'onde se convertit en une onde ionique de courte longueur d'onde qui est rapidement absorbée par effet Landau ionique. A faible niveau de puissance et pour des plasmas de petite taille cette méthode s'applique. Cependant, lorsqu'on augmente la puissance les mécanismes non-linéaires, favorisés par l'augmentation du champ électrique due au ralentissement de l'onde, commencent à jouer un rôle. L'absorption de l'onde pourrait alors bien devenir complète avant qu'elle n'atteigne la couche résonnante {6}. A fort niveau de puissance, en ajustant la fréquence au-dessus de la valeur maximum de la fréquence de résonance ω_{LH} dans le plasma, on profitera du second mécanisme en diminuant le ralentissement de l'onde et ainsi l'absorption dans les couches périphériques du plasma. On peut utiliser soit l'onde lente soit l'onde rapide, à grande amplitude, afin que l'absorption non-linéaire soit complète. Ainsi les inconvénients du premier mécanisme deviennent l'essence du second. Les expériences de principe ont montré que les instabilités paramétriques sont en effet facilement excitées et qu'il y a corrélation entre l'apparition des instabilités paramétriques et un fort chauffage du plasma {7-10}. Cette seconde méthode est en général préférée à la première {1,2}.

Il est cependant problématique d'extrapoler les résultats actuels à des plasmas de fusion. Le but étant de chauffer la partie centrale du plasma, il faut satisfaire les exigences partiellement contradictoires d'absorption non-linéaire faible au bord et forte au centre du plasma. Les résultats des expériences de principe ne donnent pas de réponse à ce problème, les distances caractéristiques d'absorption étant en majeure partie supérieures aux dimensions radiales de ces machines. Par contre, il est raisonnable de déduire de ces résultats que si l'amplitude de la pompe est largement supérieure au seuil d'instabilité les processus d'absorption non-linéaires seront assez forts pour amortir l'onde sur une distance faible par rapport au rayon d'un réacteur {6}. Il est donc important

de calculer les seuils et les taux de croissance des instabilités paramétriques en incluant les caractéristiques propres aux plasmas toroïdaux qui pourront les affecter.

Lorsque les ondes de désintégration sont sensibles aux inhomogénéités du plasma ou du champ magnétique le couplage se produit dans une zone spatialement limitée et la convection des ondes hors de cette zone peut éliminer l'instabilité prise au sens d'une croissance temporelle exponentielle {23,24}. Les ondes sont alors amplifiées spatialement d'une quantité finie, puis convectent hors de la zone de couplage : l'instabilité est dite convective. S'il existe un mécanisme de réflexion des ondes de part et d'autre de la zone de couplage, l'instabilité est équivalente à une instabilité absolue et admet un taux de croissance temporel, mais réduit par rapport à celui du cas d'un couplage spatialement uniforme. Ces considérations nous ont inspirés des problèmes de physique bien définis concernant la nature, les seuils et les taux de croissance (ou d'amplification si l'instabilité s'avérait convective) des instabilités paramétriques près de la fréquence ω_{LH} , d'une part dans un plasma plongé dans un champ magnétique cisailé (shear), d'autre part dans un plasma de densité variable.

Les Tokomaks ont typiquement une région centrale chaude dans laquelle $T_e \sim 1-2\text{keV}$, $T_i < T_e$, et où la densité est essentiellement constante {1}. Dans un tel plasma homogène la théorie prévoit, dans l'approximation dipolaire, deux types de processus paramétriques : une instabilité à zéro-fréquence, aussi appelée OTSI, et la désintégration en divers modes ou quasi-modes {18,19}. L'OTSI a été découverte par Kindel, Okuda et Dawson {13} et observée expérimentalement par Chang et Porkolab {8}. Deux régimes de désintégration ont été prédits par Porkolab {14} dépendant du rapport ω_0/ω_{LH} , où ω_0 est la fréquence de l'onde injectée ou pompe. Pour $\omega_0 > 3\omega_{LH}$ la pompe peut se désintégrer en un mode à basse fréquence (une onde acoustique ou une onde cyclotronique ionique si $T_e \approx T_i$) et un mode à

haute fréquence (soit une onde hybride inférieure, soit une onde plasma oblique). C'est une interaction résonnante. Lorsque la fréquence ω_0 est inférieure à $3\omega_{LH}$ l'oscillation à basse fréquence pour laquelle les taux de croissance sont maximum est un quasi-mode ayant une vitesse de phase parallèle au champ magnétique de l'ordre de la vitesse thermique des électrons. Cette interaction est non-résonnante. Ces deux régimes ont été observés dans des expériences de petite taille par Hooke et Bernabei {7} et par Chang et Porkolab {9}. Au centre du plasma on s'attend à être dans le second régime ($\omega_0 < 3\omega_{LH}$) où l'OTSI et la désintégration non-résonnante sont les processus de conversion dominants. Le premier problème que nous examinons est l'importance relative de l'OTSI et de la désintégration en termes d'occupation du spectre en k et de taux de croissance. Prévoyant une stabilisation des modes à grandes longueurs d'ondes par amortissement convectif, nous nous restreignons aux modes à $kr_{Li} > 1$ et traitons les ions démagnétisés. Les électrons par contre sont fortement magnétisés. Dans l'approximation électrostatique le problème se réduit à un système d'équations qui sont résolues par la technique générale du déterminant de Hill {25,26}. La relation de dispersion se présente sous la forme d'un déterminant infini qui peut être développé en une série de puissances de l'amplitude de la pompe. Rejetant les termes d'ordres supérieurs à deux, nous obtenons une relation de dispersion simplifiée qui peut être comparée aux diverses relations apparues dans la littérature {13,14}. Toutes ces relations sont du second ordre dans l'amplitude de la pompe et cependant différentes. Elles peuvent être obtenues à partir de la nôtre en faisant des hypothèses supplémentaires. Nous vérifions cependant numériquement qu'en pratique, dans le cas qui nous concerne, ces hypothèses se justifient et nous ferons usage de la relation la plus simple dans la partie analytique de ce travail.

Nous utilisons notre relation de dispersion pour calculer numériquement les zones d'instabilité dans l'espace- k et les taux de croissance pour quelques exemples spécifiques. La force de la pompe est caractérisée par

le rapport v_D/c_s , où $v_D=E/B$ est l'amplitude maximum de la vitesse de dérive des électrons due au champ électrique E de la pompe et c_s est la vitesse acoustique. Les résultats, rendus indépendants de la masse des ions et de la température électronique par une normalisation adéquate, montrent que pour des ondes incidentes modérément fortes, $v_D/c_s \sim .25-1$, l'OTSI a des taux de croissances supérieurs à ceux de l'instabilité de désintégration. Cette différence de l'ordre de 50 % pour $v_D=c_s$ s'accroît lorsque ω_o se rapproche de ω_{LH} . Ces résultats sont en contradiction avec ceux de Porkolab {14}. Typiquement, les instabilités sont limitées à de très faibles angles par rapport au champ magnétique, $k/k_{\perp 0} \sim (m_e/m_i)^{1/2}$, mais s'étendent perpendiculairement: $0 < k\lambda_D \sim .5$. Les taux de croissance maximum se produisent dans le domaine $k\lambda_D \sim .1-.25$, où $kr_{Li} > 1$ typiquement, et peuvent atteindre la fréquence cyclotronique ionique à forte pompe, justifiant en partie le modèle démagnétisé employé pour les ions. Ainsi seul l'amortissement Landau est inclu. L'inclusion d'un amortissement collisionnel ne stabiliserait que les grandes longueurs d'ondes, n'affectant que faiblement la taille des zones instables dans l'espace- k . L'amortissement convectif est un autre mécanisme de stabilisation des grandes longueurs d'ondes {23}. Dans la partie centrale du plasma le gradient de densité est trop faible pour jouer un rôle remarquable, par contre un autre facteur d'importance dans les machines toroïdales est le shear.

Dans les machines de type Tokamak, la variation du champ poloïdal et la dépendance en $1/R$ du champ toroïdal produisent une rotation de la direction du champ total le long du rayon du plasma. Cette rotation du champ magnétique produit une composante variable du nombre d'onde parallèle au champ pour toute onde se propageant dans ce plasma. Nous définissons l'échelle du shear H_s comme étant $\frac{d}{dr}(\ln k_{\parallel})^{-1}$, où k_{\parallel} est la composante parallèle au champ magnétique du vecteur d'onde \underline{k} . On vérifie aisément, en géométrie cylindrique, que cette définition est très proche de la définition du shear utilisé en Magnétohydrodynamique des plasmas : $H_s^{-1} = \frac{d}{dr} \ln q$, où q est le facteur de sécurité {1}. L'emploi du modèle cylindrique pour le plasma étant une complication inutile concernant le traitement des problèmes qui nous intéressent, nous aurons recours à un modèle plan.

En géométrie plane la définition ci-dessus du shear est remplacée par $H_s = (d\theta/dr)^{-1}$ où θ est l'angle de rotation du champ magnétique autour de la direction radiale. C'est cette dernière définition qui sera employée dans ce travail. Elle s'applique partout dans le plasma sauf au voisinage de l'axe magnétique du Tokamak. Le shear n'a pas d'effet notable sur la propagation de la pompe dont le vecteur d'onde \underline{k} est essentiellement perpendiculaire au plan de rotation du champ magnétique. Par contre, les produits de désintégration paramétrique de la pompe sont préférentiellement excités dans la direction azimutale. Les ondes instables ont un vecteur \underline{k} essentiellement dans le plan de rotation du champ, ce qui conduit à un effet amplifié du shear.

Le modèle plan utilisé est caractérisé par une densité et des températures constantes, le module du champ magnétique total étant constant. La direction du champ magnétique tourne dans un plan perpendiculaire à l'axe x lorsqu'on se déplace selon x . La pompe est traitée dans l'approximation dipolaire {26}. Nous limitons notre étude à l'instabilité OTSI qui est absolue, l'instabilité de désintégration étant convective dans le régime non-résonnant {17,18}. Les équations décrivant l'OTSI sont d'abord réduites à deux équations différentielles ordinaires ayant la même structure que les équations utilisées par Perkins et Flick dans leur traitement de l'OTSI près de ω_p {23}. Une analyse WKB met en évidence le piégeage des ondes dans une région d'extension finie selon x . Les équations différentielles sont ensuite résolues à l'aide de deux méthodes : la méthode de la transformée de Fourier appliquée au cas d'une faible extension selon x de la région de piégeage et une méthode de résolution directe des équations aux limites lorsque l'extension de la région de piégeage est grande {27,23}. L'amortissement convectif, réduisant les taux de croissance par rapport à ceux du cas homogène, agit à l'échelle $L_s \sim \sqrt{me/m_i} H_s$, ce qui conduit à un effet considérablement amplifié, dominant ceux de toute autre inhomogénéité qui agirait à l'échelle H_s . De plus, la nature même des ondes hybrides inférieures produit un effet surprenant. Alors que la réduction habituelle des taux de croissances en $1/kL_s$ a bien lieu pour des extensions de la zone de piégeage faible devant L_s , cette réduction devient une fonction exponentielle $\exp(-1/kL_s)$, pour des extensions supérieures à L_s .

Ce phénomène conduit à une accumulation des valeurs propres sur l'amortissement naturel des ondes hybrides inférieures. Cette accumulation n'est cependant qu'une tendance, le point d'accumulation étant en dehors des conditions de validité des calculs. Le passage de la réduction linéaire en $1/kL_s$ à la réduction exponentielle est interprétée en terme de la vitesse de groupe des ondes hybrides inférieures de désintégration selon x . En effet, pour $x < L_s$ la vitesse de groupe est une fonction linéaire de la composante k_x , passe par un maximum pour $x \approx L_s$, puis décroît hyperboliquement en k_x pour $x > L_s$. En d'autres termes les ondes fuient de moins en moins vite la zone de fort couplage lorsque la distance à la région de fort couplage augmente au-dessus de L_s .

Dans la région périphérique du plasma où le profil de densité a une pente maximum, les valeurs locales de la fréquence ω_{LH} sont faibles devant la fréquence ω_0 de la pompe. Le régime de désintégration résonnante caractérisée par un faible seuil et de forts taux de croissance y domine certainement. Si la température électronique $T_e \gg T_i$ les ondes acoustique se propagent et peuvent se coupler aux ondes hybrides inférieures [13]. Ce couplage à trois modes dans un gradient de densité a été analysé par Perkins et Flick pour des fréquences de pompes proches de ω_{pe} [23]. Ils ont conclu à une instabilité convective produisant une amplification maximum lorsque les ondes interagissent près de leur coupure. Seul le couplage entre l'onde acoustique de fréquence ω et le satellite inférieur de la pompe, de fréquence $\omega - \omega_0$, a été pris en considération. Cette simplification se justifie pour les ondes plasma électroniques, l'interaction entre l'onde acoustique et le satellite supérieur de la pompe, de fréquence $\omega + \omega_0$, se produisant dans la région d'évanescence de la pompe. Dans le cas du chauffage hybride inférieur, les coupures de la pompe et de ses deux satellites sont bien séparées. L'onde acoustique, insensible aux variations de densité, interagit alors séparément avec les deux satellites en des régions de densités différentes. La zone délimitée par ces deux régions d'interaction est analogue à une cavité laser émettant des ondes acoustiques et des ondes hybrides inférieures. La région d'interaction avec le satellite supérieur se comporte comme un miroir dont le coefficient de réflexion

croît avec la force de pompe. Cette propriété est liée à la fonction stabilisatrice de la raie anti-stokes. La région d'interaction avec le satellite inférieur joue le rôle d'un amplificateur à la fois pour les ondes transmises et pour les ondes qu'elle réfléchit. Lorsque le produit du coefficient d'amplification et du coefficient de réflexion sur la raie anti-stokes compense l'amortissement naturel des ondes acoustiques intégré sur un aller-retour dans la cavité le seuil d'instabilité est atteint.

Le modèle utilisé dans cette étude est le suivant. Le plasma est plongé dans un champ magnétique uniforme et sa température est constante, mais $T_e \gg T_i$. Nous considérons un modèle-plan dans lequel la densité est une fonction linéaire de la position x , correspondant à la direction radiale du plasma. La pompe est traitée dans l'approximation dipolaire. Les équations du couplage pour les ondes électrostatiques sont dérivées à partir d'un modèle fluide pour le plasma. Séparant les interactions de la basse fréquence ω avec les deux satellites, nous obtenons un système de deux équations différentielles ordinaires pour chaque région d'interaction. Une analyse WKB de ces équations éclaire la physique du problème : l'extension des régions d'interaction, les dimensions de la cavité et le sens de propagation des ondes sont définis. Les équations sont ensuite résolues à l'aide d'une transformation de type Fourier délivrant le rapport des amplitudes des ondes autour de chaque région d'interaction. Joignant les solutions au centre de la cavité, nous obtenons une équation aux valeurs propres. Nettement au-dessus du seuil le taux de croissance maximum n'est pas obtenu pour le mode fondamental, mais pour une harmonique élevée. Pour des harmoniques plus élevées, le taux de croissance chute brutalement. Pour les harmoniques inférieures, les taux de croissances diminuent faiblement. Il existe des harmoniques négatives instables, correspondant à des ondes acoustiques normalement non-propageantes. Dans la limite où $n \rightarrow -\infty$, n étant le numéro de l'harmonique, on devrait retrouver l'OTSI. Celle-ci n'est cependant pas atteignable avec notre modèle, puisqu'elle est une

interaction à quatre ondes. Il y a pourtant une analogie entre les taux de croissance que nous avons calculés et ceux de l'OTSI. En effet nos taux de croissance sont des fonctions quadratiques de l'amplitude de la pompe comme ceux de l'OTSI, alors que ceux de la désintégration paramétrique à trois ondes dans un plasma homogène sont des fonctions linéaires de l'amplitude de la pompe {13,28,29}. Notons encore que l'extension de la cavité Δx est une faible fraction de l'échelle de variation de la densité H_n , ce qui pourrait bien rendre cet effet dominant par rapport à d'autres effets, tels l'extension finie de la pompe {21}. La distance Δx est de l'ordre de $H_n \omega / \omega_0$. Nos approximations nous limitent à des taux de croissance faibles. Ne sachant pas résoudre la désintégration à quatre modes dans un plasma inhomogène, nous n'avons pu traiter que les faibles pompes. Il est raisonnable de penser que l'interaction à quatre modes produit des taux de croissance plus élevés et peut donc devenir un mécanisme de forte absorption de la pompe dans les couches périphériques du plasma.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous présentons au chapitre II les modèles utilisés dans la partie centrale de ce travail.

II ONDES ELECTROSTATIQUES DANS LE DOMAINE DE LA MOYENNE GEOMETRIQUE DES FREQUENCES CYCLOTRONIQUES

L'objet de ce chapitre est double. Nous nous attacherons d'une part à justifier l'emploi d'un modèle fluide corrigé pour décrire les ondes électrostatiques se propageant dans le domaine de fréquence

$$\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce} \quad (1)$$

où ω_{ce} et ω_{ci} sont les fréquences cyclotroniques électronique et ionique respectivement. D'autre part, nous analyserons les effets des inhomogénéités de densité du plasma et du cisaillement des lignes de champ magnétique sur la propagation de ces ondes.

1. Le plasma homogène

Considérons un plasma homogène hydrogénéoïde ($Z = 1$) plongé dans un champ magnétique uniforme \underline{B}_0 . Soit n_0 la densité de ce plasma, supposé macroscopiquement électriquement neutre. Le système MKSA sera utilisé tout au long de ce travail.

Toute grandeur perturbée \underline{P} est supposée de la forme

$$\underline{P} = \underline{P}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2)$$

Les équations de Maxwell pour les champs perturbés se réduisent à une équation unique pour le champ électrique \underline{E} {30}

$$k^2 \underline{E} - (\mathbf{k} \cdot \underline{E}) \mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E} + i\mu_0 \omega \underline{J} \quad (3)$$

où \underline{J} , le courant perturbé, s'exprime en fonction de \underline{E} à travers le tenseur de conductivité $\underline{\sigma}$

$$\underline{J} = \underline{\sigma} \underline{E} \quad (4)$$

Choisissons un système de coordonnées tel que \underline{B}_0 soit dirigé selon la direction z et le vecteur d'onde \underline{k} se trouve dans le plan x,z. Dans ce cas, le modèle du plasma froid conduit à la forme suivante pour le tenseur $\underline{\sigma}$, dans le domaine de fréquence (1) {30 }:

$$\underline{\sigma} = i \epsilon_0 \omega \begin{pmatrix} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} & \frac{i \omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} & 0 \\ -\frac{i \omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} & \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1+M) \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

où ω_{pi} et ω_{pe} sont les fréquences plasma ionique et électronique respectivement et M est le rapport des masses

$$M \equiv m_i / m_e \quad (6)$$

Remplaçant $\underline{\sigma}$ par son expression dans l'Eq. (3), on obtient la relation de dispersion

$$AN^4 - BN^2 + C = 0 \quad (7)$$

où

$$A = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} (1 + M \cos^2 \theta),$$

$$B = \left[\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \omega_{ce}^2} \right] \sin^2 \theta +$$

$$+ \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) (1 + \cos^2 \theta),$$

$$C = \left[1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} (1+M) \right] \left[\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \omega_{ce}^2} \right].$$

N est l'indice total et θ l'angle entre \underline{k} et \underline{B}_0 . Les solutions pour N sont

$$N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (9)$$

Lorsque $A = 0$, l'indice N^2 devient infini, ce qui définit une résonance, et les deux membres de l'Eq. (3) s'annulent, indiquant que \underline{k} , \underline{E} et \underline{J} sont colinéaires : les ondes sont électrostatiques. Définissant la fréquence de résonance hybride inférieure ω_{LH}

$$\omega_{LH}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2} \quad , \quad (10)$$

on voit que la résonance se produit pour des angles $\theta = \theta_r$ définis par

$$\tan^2 \theta_r \equiv \left(\frac{1}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2} \right) \left[\frac{(1+M)\omega_{pi}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_{LH}^2} \right] \quad , \quad (11)$$

et que θ_r existe seulement si $\omega_{pe} > \omega > \omega_{LH}$. L'analyse de (9) montre que dans ce domaine de fréquences il y a une et une seule solution progressive pour $\theta > \theta_r$ et aucune pour $\theta < \theta_r$. Pour $\theta > \theta_r$ les ondes deviennent progressivement électromagnétiques. L'équation (11) peut se récrire sous la forme plus familière

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2 \sin^2 \theta / \omega_{ce}^2} \left(1 + M \cos^2 \theta \right) \quad (12)$$

où l'on reconnaît la relation de dispersion d'une onde plasma oblique, qui devient une onde hybride inférieure lorsque $\sin^2 \theta \sim 1$:

$$\omega^2 = \omega_{LH}^2 \left(1 + M \cos^2 \theta \right) \quad (13)$$

A l'onde hybride inférieure se rajoute une autre onde électrostatique, dans le domaine de fréquence (1), l'onde acoustique, qui ne peut être obtenue qu'en incluant des effets de température.

1.1. Modèle du plasma chaud

Lorsque les ondes sont électrostatiques, le champ électrique dérive du potentiel électrostatique ϕ

$$\underline{E} = -i \underline{k} \phi \quad (14)$$

Nous allons utiliser l'équation de Vlasov pour déterminer la réponse du plasma au champ électrique \underline{E} de l'onde. Pour chaque espèce, ions et électrons, la perturbation de densité $n_\alpha(\omega, \underline{k})$ est reliée au potentiel ϕ à travers les susceptibilités $\chi_\alpha(\omega, \underline{k})$

$$n_\alpha(\omega, \underline{k}) = - \frac{\epsilon_0 k^2}{q_\alpha} \chi_\alpha(\omega, \underline{k}) \phi(\omega, \underline{k}) , \quad (15)$$

où q_α représente la charge $\pm e$. Substituant (15) dans l'équation de Poisson

$$k^2 \phi(\omega, \underline{k}) = \frac{e}{\epsilon_0} \left[n_i(\omega, \underline{k}) - n_e(\omega, \underline{k}) \right] , \quad (16)$$

on obtient la relation de dispersion pour les ondes électrostatiques

$$\epsilon(\omega, \underline{k}) \equiv 1 + \chi_i(\omega, \underline{k}) + \chi_e(\omega, \underline{k}) = 0 , \quad (17)$$

et nous appellerons $\epsilon(\omega, \underline{k})$ la fonction diélectrique. La susceptibilité électronique $\chi_e(\omega, \underline{k})$ est calculée dans l'Appendice A en terme de la fonction de distribution d'équilibre $n_0 F_{0e}(\underline{u})$. Elle s'écrit

$$\chi_e = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\parallel} \int_0^{+\infty} u_{\perp} du_{\perp} \left[\frac{k_{\parallel} \frac{\partial F_{0e}}{\partial u_{\parallel}} + \frac{n \omega_{ce}}{u_{\perp}} \frac{\partial F_{0e}}{\partial u_{\perp}}}{\omega - n \omega_{ce} - k_{\parallel} u_{\parallel} + i \epsilon} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}} \right) \right] \quad (18)$$

où les symboles \parallel et \perp réfèrent aux composantes parallèles et perpendiculaires au champ \underline{B}_0 respectivement; J_n est la fonction de Bessel ordinaire d'ordre n , \underline{u} la vitesse des particules et ϵ est une faible partie imaginaire donnant la prescription de Landau. La fonction de distribution d'équilibre est supposée maxwellienne, caractérisée par la température T_e . La vitesse thermique des électrons est alors $v_e = (KT_e/m_e)^{1/2}$, où K est la constante de Boltzmann, la longueur de Debye est $\lambda_D = v_e/\omega_{pe}$ et le rayon de Larmor électronique $r_e = v_e/\omega_{ce}$. Dans notre domaine de fréquence $\omega \ll \omega_{ce}$ et de longueurs d'ondes telles que $kr_e \ll 1$, la susceptibilité électronique, calculée dans l'Appendice A, s'exprime en terme de la fonction de Fried et Conte $Z(x)$ {31 }.

$$\chi_e(\omega, \underline{k}) = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \left[1 + \chi_e Z(\chi_e) \right], \quad (19)$$

$$\chi_e \equiv \omega / \sqrt{2} k_{\parallel} V_e,$$

Nous traitons les ions démagnétisés, et ne verrons donc pas la structure fine des ondes de Bernstein ionique, mais un effet global qui se réduit à l'onde acoustique pour $\omega \gg \omega_{ci}$. Sous la condition $k^2 r_i^2 \gg 1$, où $r_i = V_i / \omega_{ci}$ est le rayon de Larmor des ions, cette approximation semble justifiable. La susceptibilité ionique prend alors la forme simple {32} :

$$\chi_i(\omega, \underline{k}) = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\parallel} \int_0^{+\infty} u_{\perp} du_{\perp} \frac{k_{\parallel} \frac{\partial F_{i0}}{\partial u_{\parallel}} + k_{\perp} \frac{\partial F_{i0}}{\partial u_{\perp}}}{\omega - k_{\parallel} u_{\parallel} - k_{\perp} u_{\perp} + i\epsilon}. \quad (20)$$

Pour une distribution maxwellienne, caractérisée par la température T_i et la vitesse thermique $V_i = (KT_i/m_i)^{1/2}$, elle se réduit à

$$\chi_i(\omega, \underline{k}) = \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \frac{T_e}{T_i} \left[1 + \chi_i Z(\chi_i) \right], \quad (21)$$

$$\chi_i \equiv \omega / \sqrt{2} k_{\parallel} V_i.$$

La fonction $Z(x)$ prend une forme algébrique dans deux limites : $|x| \gg 1$ et $|x| \ll 1$, correspondant à des vitesses de phase beaucoup plus grandes et beaucoup plus petites que la vitesse thermique respectivement. Dans le cas intermédiaire, seul un calcul numérique permet de trouver sa valeur. Lorsque $|x| \gg 1$, la fonction $Z(x)$ admet le développement

$$Z(x) \approx i\sqrt{\pi} \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \dots \right) \quad (22)$$

Les ondes amorties, suivant la définition (2), ont une partie imaginaire négative pour la fréquence.

Lorsque $|x| \ll 1$, la fonction $Z(x)$ admet un autre développement { 15 }

$$Z(x) \simeq i\sqrt{\pi} e^{-x^2} + 2x \left(1 - \frac{2x^2}{3} + \dots \right) \quad (23)$$

Dans ces deux limites, $\text{Im}(\omega) \ll R_e(\omega)$ en g n ralet l'effet Landau se trouve en posant $\text{Im}(\omega) = 0$ dans l'exponentielle. Les ondes hybrides se trouvent dans les limites $|x_i| \gg 1$ et $|x_e| \gg 1$. Remplaçant la fonction Z par son développement (22) dans les expressions des susceptibilités (19) et (21) on obtient :

$$\chi_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left(1 + \frac{3k_{\parallel}^2 V_e^2}{\omega^2} \right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \exp\left[-\frac{\omega^2}{2k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pe}^2}\right]}{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}\right) k^3 \lambda_D^3 \omega_{pe} k_{\parallel} / k} \quad (24)$$

et

$$\chi_i = - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_{\parallel}^2 V_i^2}{\omega^2} \right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k^3 \lambda_D^3 \omega_{pi}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\omega^2}{2k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pi}^2} \frac{T_e}{T_i}\right] \quad (25)$$

Introduisant ces expressions dans la relation de dispersion (17) et séparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons la relation de dispersion des ondes hybrides inférieures lorsque $k_{\perp}^2 \sim k^2$:

$$\omega_{Lk}^2 \equiv \omega_{LH}^2 \left[1 + M \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left(1 + \frac{3k_{\parallel}^2 V_e^2}{\omega_{Lk}^2} \right) + \frac{3k_{\parallel}^2 V_i^2}{\omega_{Lk}^2} \right] \quad (26)$$

et l'amortissement Landau à la fois sur les électrons et les ions:

$$\gamma_{Lk} \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Lk}^2}{2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}\right) k^3 \lambda_D^3 \omega_{pe} \frac{k_{\parallel}}{k}} \left[\exp\left(-\frac{\omega_{Lk}^2}{2k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pe}^2}\right) + \sqrt{M} \frac{k_{\parallel}}{k} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega_{Lk}^2 T_e}{2k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pi}^2 T_i}\right) \right] \quad (27)$$

Sachant que $\cos\theta = k_{\parallel} / k$, on retrouve la relation de dispersion (13) des ondes hybrides inférieures dans la limite du plasma froid ($T_{\alpha} \rightarrow 0$).

Les ondes acoustiques s'obtiennent dans la limite $|x_i| \gg 1$ et $|x_e| \ll 1$, ce qui n'est possible que lorsque $M \cos^2\theta \cdot \frac{T_e}{T_i} > 1$. Utilisant donc la suscep-

tibilité ionique (25), et le développement (23) pour la susceptibilité électronique, qui s'écrit alors simplement

$$\chi_e \simeq \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 V_e^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k_{\parallel} V_e} \exp \left[-\frac{\omega^2}{2 k_{\parallel}^2 V_e^2} \right], \quad (28)$$

pour $k^2 \lambda_D^2 \ll 1 \sim \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2$, on obtient la relation de dispersion des ondes acoustiques :

$$\omega_{ac}^2 = k^2 c_s^2 \left(\frac{1 + 3T_i/T_e}{1 + k^2 / M k_{\parallel}^2} \right), \quad (29)$$

où la vitesse acoustique $c_s = \omega_{pi} \lambda_D = (KT_e/m_i)^{1/2}$. On vérifie bien que la condition $|x_e| \ll 1$ implique $M k_{\parallel}^2 \gg k^2$.

1.2 Modèle fluide pour plasma chaud

La dérivation des susceptibilités à partir de l'équation de Vlasov est le traitement correct du problème. Cependant, ce modèle est difficilement généralisable aux cas du plasma inhomogène et d'une configuration avec cisaillement des lignes du champ B_0 (shear). La forme des relations de dispersion (26) et (29) suggère qu'un modèle fluide devrait être adéquat pour décrire ces ondes. L'amortissement Landau devra ensuite être ajouté de façon ad-hoc sous la forme de fréquences de collision effectives pour les électrons et les ions.

Dans notre modèle, les ions sont démagnétisés et leur réponse à une faible perturbation de champ électrique \underline{E} est décrite par les équations fluides

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_0 \underline{\nu} \cdot \underline{\nu}_i = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \underline{\nu}_i}{\partial t} = \frac{e}{m_i} \underline{E} - \frac{\gamma_i V_i^2}{n_0} \underline{\nu} n_i - \nu_i \underline{\nu}_i$$

où ν_i est la fréquence de collisions effective et γ_i le rapport des chaleurs spécifiques du fluide ionique qui sera choisi ad-hoc. Les grandeurs perturbées n_i et \underline{v}_i sont la densité et la vitesse respectivement.

Les électrons, fortement magnétisés, ne sont libres que selon la direction z du champ \underline{B}_0 . Ils sont décrits à l'aide d'un modèle fluide selon z et par l'approximation de dérive dans la direction perpendiculaire (x, y) :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \left(\frac{\partial v_{ez}}{\partial z} + \underline{\nabla}_\perp \cdot \underline{v}_{e\perp} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v_{ez}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \underline{E} - \frac{\gamma_e \nu_e^2}{n_0} \frac{\partial n_e}{\partial z} - \nu_e v_{ez} \quad (31)$$

$$\underline{v}_{e\perp} = \frac{\underline{E} \times \underline{B}_0}{B_0^2} = \frac{1}{\omega_{ce} B_0} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

où n_e et \underline{v}_e sont la densité et la vitesse électroniques perturbées respectivement, ν_e est la fréquence de collision effective des électrons et γ_e le rapport des chaleurs spécifiques du fluide électronique. Ce système d'équations est fermé par l'équation de Poisson

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (32)$$

Les dépendances spatio-temporelles de toutes les grandeurs perturbées sont celles données par l'Eq. (2). La susceptibilité ionique est alors obtenue à partir des Eqs. (3) où l'on élimine la vitesse \underline{v}_i et de la définition (15):

$$\chi_i(\omega, \underline{k}) = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + i\nu_i) - \gamma_i k^2 \nu_i^2} \quad (33)$$

La susceptibilité électronique est obtenue en éliminant v_{ez} et $\underline{v}_{e\perp}$ dans les Eqs. (31) et en utilisant l'Eq. (32) afin de relier les diverses composantes de \underline{E} au potentiel ϕ . Il en résulte que

$$\chi_e(\omega, \underline{k}) = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \frac{k_\perp^2}{k^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \frac{k_\parallel^2}{k^2} (1 + \gamma_e k_\perp^2 \nu_e^2)}{\omega(\omega + i\nu_e) - \gamma_e k_\parallel^2 \nu_e^2} \quad (34)$$

Dans le second terme de l'Eq. (28), la correction dans le numérateur $\gamma_{e,i} k_{\perp}^2 r_e^2$ peut être éliminée, puisque les électrons ne seront fortement magnétisés que si $k^2 r_e^2 \ll 1$, ce que nous admettrons. Ces susceptibilités se réduisent à celles calculées par le modèle de Vlasov sachant que $\gamma_{e,i} = 3$ lorsque $\omega \gg k V_e$, $\omega \gg k V_i$ respectivement et $\gamma_{e,i} = 1$ si les inégalités sont inversées. Supposant $v_{i,e} \ll \omega$, et développant les dénominateurs des Eqs. (33) et (34), nous obtenons, dans la limite du plasma froid, l'expression de la relation de dispersion des ondes hybrides inférieures suivante

$$\omega^2 = \omega_{LH}^2 \left[1 + M \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - i \left(\frac{\nu_i}{\omega_{LH}} + \frac{\nu_e}{\omega_{LH}} M \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \right) \right]. \quad (35)$$

Séparant ω en sa partie réelle ω_{Lk} et sa partie imaginaire $\gamma_{Lk} \ll \omega_{Lk}$, nous obtenons l'amortissement naturel de ces ondes

$$\gamma_{Lk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu_i + \nu_e M k_{\parallel}^2 / k^2}{1 + M k_{\parallel}^2 / k^2} \right]. \quad (36)$$

On tiendra donc compte, phénoménologiquement, de l'amortissement Landau en identifiant les Eqs. (36) et (27), ce qui conduit aux expressions suivantes pour ν_i et ν_e

$$\begin{aligned} \nu_i &= \nu_{ic} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{LH}^4}{\omega_{pi}^3 k_{\parallel}^3 \lambda_D^3} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{\omega_{LH}^2 T_e}{2 k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pi}^2 T_i} \right] \\ \nu_e &= \nu_{ec} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{LH}^4}{\omega_{pe}^3 k_{\parallel}^3 \lambda_D^3} \exp \left[- \frac{\omega_{LH}^3}{2 k_{\parallel}^2 \lambda_D^2 \omega_{pe}^2} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

où ν_{ic} , ν_{ec} sont les véritables fréquences de collision ioniques et électroniques respectivement.

Nous utiliserons couramment ce modèle à la fois pour l'onde hybride inférieure, dans la limite du plasma froid, mais avec l'effet Landau inclu selon (37), et pour l'onde acoustique.

2. Le plasma inhomogène

Considérons un plasma dont la densité d'équilibre varie selon la direction x , soit $n_0(x)$. Le champ magnétique est toujours dirigé selon z . Les équations fluides (30) et (31) contenant des coefficients fonctions de x , la forme (2) pour les perturbations n'est plus valable et en toute généralité, doit être remplacée par

$$\underline{P} = \underline{P}_0(x) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \quad (38)$$

où \mathbf{k} se trouve dans le plan (y,z) . La méthode WKB sera suffisante pour l'obtention des informations concernant la délimitation des zones de propagation des ondes électrostatiques. Elle consiste, à l'ordre le plus bas, à chercher des solutions pour $\underline{P}_0(x)$ de la forme

$$\underline{P}_0(x) = \hat{\underline{P}}_0 \exp\left[i \int^x k_x(\xi) d\xi\right], \quad (39)$$

ce qui revient à remplacer la composante fixe k_x dans les relations de dispersion (26) et (29) par une composante $k_x(x)$ dont il faut chercher les solutions. Les ondes acoustiques sont insensibles à la densité, comme le montre leur relation de dispersion, Eq. (29), et conservent donc une composante k_x fixe. Les ondes hybrides inférieures, par contre, sont sensibles à la densité tant que $\omega_{pe}(x) \lesssim \omega_{ce}$, ce qui sera supposé.

Lorsque $\omega_{pe}(x) \gg \omega_{ce}$, la fréquence de résonance hybride inférieure ω_{LH} est constante et se réduit à $\omega_{LH} = \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$.

La relation de dispersion (13), obtenue dans la limite du plasma froid, fournit une première information concernant $k_x(x)$:

$$k_x^2(x) = \frac{\omega_{LH}^2(x) M k_{||}^2}{\omega^2 - \omega_{LH}^2(x)} - k^2. \quad (40)$$

Deux points remarquables délimitent une région d'extension finie en x où $k_x(x) > 0$: la région de propagation des ondes hybrides inférieures.

La coupure, où $k_x^2(x) = 0$, ayant lieu au point x_0 tel que :

$$\omega^2 = \omega_{LH}^2(x_0) \left(1 + M k_{||}^2 / k^2 \right), \quad (41)$$

encore appelée point miroir, car les ondes incidentes y sont réfléchies, est un de ces points. La résonance, définie par $k_x^2 \rightarrow \infty$, qui se produit en un point x_r tel que

$$\omega_{LH}^2(x_r) = \omega^2, \quad (42)$$

est l'autre point limite. Il sera commode par la suite d'utiliser une forme linéarisée autour de l'origine $x_0 = 0$ pour $\omega_{LH}(x)$, soit

$$\omega_{LH}^2(x) = \omega_{LH}^2 \left(1 - x / L_n \right) \quad (43)$$

où L_n définit l'échelle de variation de la densité. La solution pour $k_x^2(x)$ est alors

$$\frac{k_x^2(x)}{k^2} = - \frac{1 + M k_{||}^2 / k^2}{\frac{x}{L_n} + M k_{||}^2 / k^2} \cdot \frac{x}{L_n} \quad (44)$$

et la résonance est située en $x = -L_n M k_{||}^2 / k^2$.

Lorsque $k_x(x)$ augmente avec la densité, l'amortissement Landau ionique augmente, alors que l'amortissement Landau électronique reste constant, $k_{||}$ étant fixe. Remarquons que :

$$\frac{\omega^2}{(k^2 + k_x^2(x)) v_i^2} = \frac{\omega^2}{k_{||}^2 v_e^2} \frac{T_e}{T_i} \left[\frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2(x)}{\omega_{LH}^2(x)} \right] \quad (45)$$

ce qui indique que l'effet Landau ionique est négligeable devant l'effet Landau électronique tant que $[\omega^2 - \omega_{LH}^2(x)] / \omega_{LH}^2(x) > T_i / T_e$, par contre domine près de la résonance où $[\omega^2 - \omega_{LH}^2(x)] / \omega_{LH}^2(x) < T_i / T_e$. Supposons les effets thermiques électroniques négligeables. Alors, près de la résonance, le terme de température ionique dans l'Eq. (26) deviendra de l'ordre de

$$\frac{3 [k^2 + k_x^2(x)] V_i^2}{\omega^2} \approx \frac{M k_{||}^2}{k^2 + k_x^2(x)} \quad (46)$$

et il se produira une conversion de mode en une onde ionique qui verra la composante $k_x(x)$ s'accroître en s'éloignant de la résonance avec la dépendance

$$k_x^2(x) = \frac{\omega^2 - \omega_{Lr}(x)^2}{3 V_i^2} - k^2 \quad (47)$$

Cette onde sera rapidement absorbée par amortissement Landau ionique. La conversion ne se produira que si l'onde n'est pas totalement absorbée auparavant, soit si l'Eq. (46) est satisfaite pour des valeurs bien inférieures à l'unité.

3. Le plasma plongé dans un champ magnétique cisailé

Considérons un plasma homogène plongé dans un champ magnétique cisailé de la forme

$$\underline{B}_0(x) = B_0 \left(0, \sin \varphi(x), \cos \varphi(x) \right) \quad , \quad (48)$$

où l'amplitude B_0 est constante, de telle sorte que seule la direction de \underline{B}_0 soit une fonction de la position x . Les orientations des axes y et z seront définies "physiquement" par la suite. Ce modèle reproduit relativement bien la configuration magnétique d'un plasma de type Tokamak où le champ magnétique est la somme vectorielle des champs toroïdal et poloïdal qui dépendent de la position le long du rayon r du plasma, représenté ici par la direction x . L'effet de la rotation du champ $\underline{B}_0(x)$ dans le plan (y,z) est de rendre la composante $k_{||}$ des ondes variable en fonction de x . Son expression est :

$$k_{||}(x) = k_y \sin \varphi(x) + k_z \cos \varphi(x) \quad , \quad (49)$$

où k_y et k_z sont fixes. Nous nous intéressons à l'effet de cette rotation du champ sur les caractéristiques de propagation de l'onde hybride inférieure. La méthode WKB, définie par les Eqs. (38) et (39), appliquée au modèle du plasma froid, détermine la composante $k_x(x)$ qui s'adapte de manière à maintenir la fréquence ω constante. La solution $k_x(x)$ peut s'obtenir directement à partir de l'équation (13), en y remplaçant $k_{//}$ par $k_{//}(x)$ et k^2 par $k^2 + k_x^2(x)$, où maintenant $k^2 = k_y^2 + k_z^2$, d'où

$$k_x^2(x) = \frac{\omega_{LH}^2}{\omega^2 - \omega_{LH}^2} M k_{//}^2(x) - k^2. \quad (50)$$

L'équation (50) indique l'existence de coupures des ondes hybrides inférieures se produisant aux points x_0 définis par

$$k_{//}^2(x_0) = \frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{M \omega_{LH}^2} k^2, \quad (51)$$

mais aucun effet de résonance, à l'opposé du cas du plasma inhomogène. Les ondes sont propageantes lorsque $k_x^2(x) > 0$, soit lorsque $k_{//}^2(x) > k_{//}^2(x_0)$, et k_x^2 augmente avec $k_{//}^2(x)$, s'accompagnant d'une augmentation des amortissements Landau ionique et électronique. Le modèle du plasma froid s'effondre lorsque l'une des inégalités : $\omega^2 \gg k_{//}^2 V_e^2$ ou $\omega^2 \gg (k^2 + k_x^2) V_i^2$ n'est plus satisfaite. Utilisant l'expression (50) pour $k_x(x)$, nous trouvons que

$$\frac{k_{//}^2(x) V_e^2}{\omega^2} = \frac{[k^2 + k_x^2(x)] V_i^2}{\omega^2} \cdot \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2}, \quad (52)$$

de sorte que nous pouvons écrire les conditions de faible absorption Landau sous la forme d'une condition unique sur $k_{//}(x)$:

$$\frac{k_{//}^2(x) V_e^2}{\omega^2} \ll \text{Min} \left[1, \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2} \right]. \quad (53)$$

Lorsque $\omega^2 > (1 + T_i/T_e)\omega_{LH}^2$, l'amortissement Landau électronique est dominant et la limite dans l'Eq. (53) est donnée par 1; lorsque $\omega^2 < (1 + T_i/T_e)\omega_{LH}^2$ c'est l'amortissement Landau ionique qui domine. Ces résultats sont résumés dans la Fig. 1, qui montre les régions d'évanescence, de propagation et de forte absorption des ondes hybrides inférieures dans le plan $(k_{//}, k_{\perp})$, où k_{\perp} est la composante de \underline{k} perpendiculaire à \underline{B}_0 se trouvant dans le plan (y, z) . Dans le plan $(k_{//}, k_{\perp})$ le champ \underline{B}_0 est fixe, dirigé selon $k_{//}$, de telle sorte que le vecteur \underline{k} tourne, conservant un module constant, puisque $k_x(x)$ est perpendiculaire à ce plan. La relation entre le mouvement de l'extrémité de \underline{k} sur un cercle de rayon k et la propagation dans la direction x , soit $k_x(x)$, est donnée par la dépendance de $k_{//}(x)$ en x . Définissant à présent l'axe y selon la direction du vecteur \underline{k} , tel que $k_{//}(x) = k \sin\varphi(x)$, l'angle $\varphi(x)$ sera nul lorsque \underline{B}_0 sera perpendiculaire à \underline{k} . L'angle de coupure $\varphi_c = \varphi(x_0)$, pour lequel $k_x = 0$, est donné par

$$\varphi_c = \sin^{-1} \left[\left(\frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{M \omega_{LH}^2} \right)^{1/3} \right] \approx \left(\frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{M \omega_{LH}^2} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

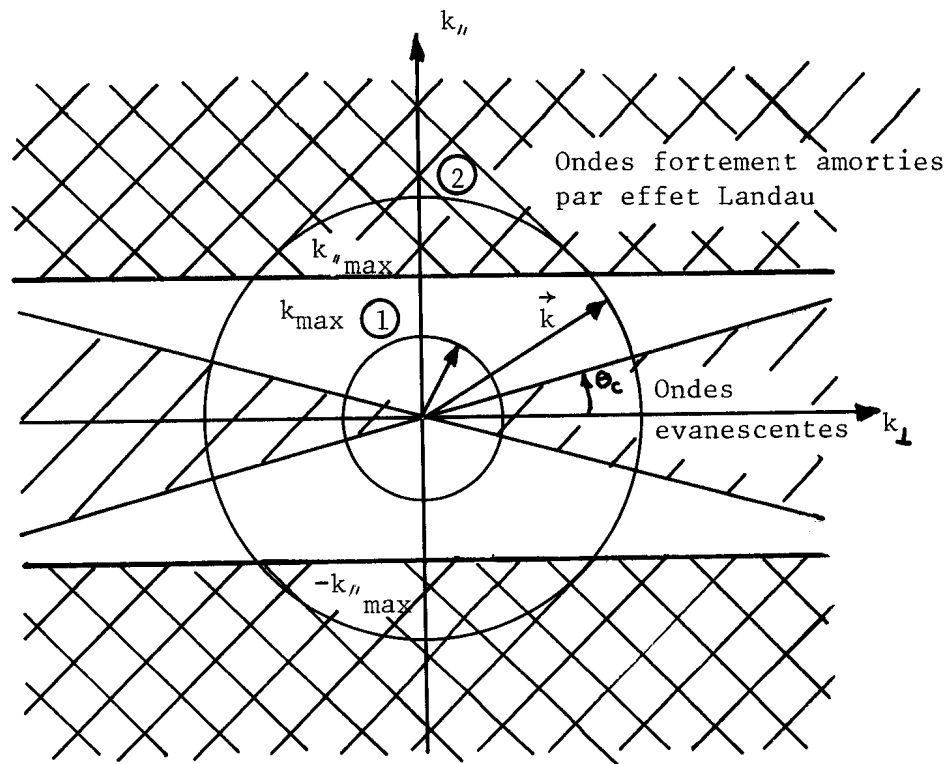
Les ondes caractérisées par $k^2 v_e^2 \ll \omega^2$ ne seront jamais fortement amorties par effet Landau, quel que soit l'angle φ . Un tel cas est représenté par le cercle 1 dans la Fig. 1. Pour de plus grandes valeurs de $k^2 v_e^2 / \omega^2$, comme celle représentée par le cercle 2, une onde se propageant à partir de la coupure pourra être fortement absorbée. En effet, si k est suffisamment grand pour satisfaire l'inégalité suivante :

$$\frac{\omega}{k v_e} \text{Min} \left[1, \sqrt{\frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2}} \right] \ll 1, \quad (55)$$

alors, pour un angle φ_L donné par

$$\varphi_L = \sin^{-1} \left\{ \frac{\omega}{k v_e} \text{Min} \left[1, \sqrt{\frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2}} \right] \right\} \quad (56)$$

l'absorption deviendra complète. Bien qu'il n'y ait pas de résonance l'onde hybride se convertit en une onde ionique si $\omega^2 - \omega_{LH}^2 \ll \omega_{LH}^2$ et $k^2 v_e^2 > (T_e/T_i) \cdot (\omega^2 - \omega_{LH}^2)^2 / (12\omega_{LH}^2)$ à un angle $\psi \gg \psi_c$.



Plan de rotation de \underline{B}_0 : zones d'évanescence, de propagation et de fort amortissement Landau pour les ondes hybrides inférieures.

Figure 1

Dans un plasma de type Tokamak, sur une distance égale au rayon du plasma, l'angle de rotation de B_0 est faible comparé à $\pi/2$, mais grand comparé à ψ_c . Il en découle, comme nous allons le voir, que les ondes se propageant essentiellement perpendiculairement au plan de rotation de \underline{B}_0 ($k_x \gg k_y$) sont très faiblement affectées par le shear, alors que les ondes proches de la

coupure ($k_x \ll k$) sont fortement affectées par le shear. Définissons l'échelle caractéristique H_s du shear par

$$H_s = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{-1}, \quad (57)$$

qui correspond à la longueur sur laquelle $B_0(x)$ tournerait d'un angle $\pi/2$, si φ était une fonction linéaire en x . Linéarisons $\varphi(x)$ autour de $\varphi = \pi/2$, où k_x atteint sa valeur maximum

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{H_s} \right). \quad (58)$$

Dans ce cas la composante $k_x(x)$ a pour expression

$$k_x(x) \simeq \pm \frac{k}{\varphi_c} \left[1 - \left(\frac{\pi x}{2 H_s} \right)^2 \right], \quad (59)$$

ce qui montre sa variation à l'échelle H_s , qui est très faible. Linéarisons à présent $\varphi(x)$ autour de φ_c :

$$\varphi(x) = \varphi_c + \frac{\pi x}{2 H_s}. \quad (60)$$

Nous obtenons alors la forme suivante de $k_x(x)$

$$k_x^2(x) = k^2 \left[\left(1 + \frac{x}{L_s} \right)^2 - 1 \right], \quad (61)$$

où l'échelle L_s , que nous appellerons l'échelle effective du shear, a pour expression

$$L_s = H_s \frac{2\varphi_c}{\pi}, \quad (62)$$

et se trouve être $\frac{2}{\pi} \left(\frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{M \omega_{LH}^2} \right)^{1/2}$ de fois plus petite que H_s . Dans le domaine de fréquences ω_{LH} , L_s est donc environ $M^{-1/2}$ de fois plus petite que H_s . Un graphe de k_x^2/k^2 , dans la Fig. 2, illustre les régions de propagation et d'évanescence des ondes hybrides.

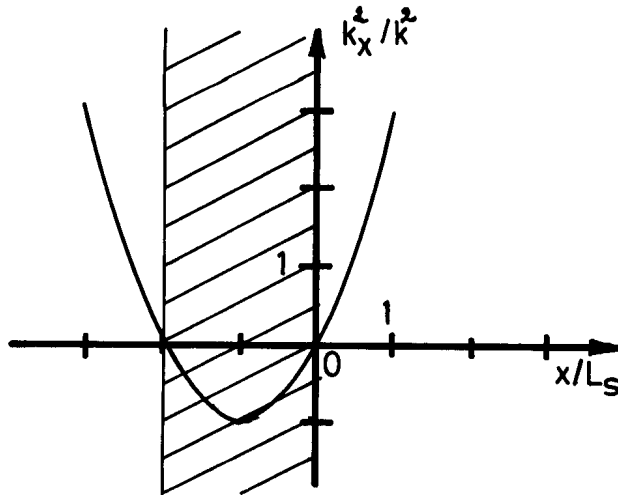


Figure 2.

Regions de propagation et d'évanescence (en hachuré) des ondes hybrides inférieures dans un plasma avec shear

La fréquence ω ne doit cependant pas être trop proche de ω_{LH} , pour que l'effet tunnel entre les deux coupures ne soit pas trop important. L'effet tunnel s'évalue en calculant l'intégrale T suivante :

$$T = i \int_{-2L}^0 k_x(x) dx = -k H_s \varphi_c . \quad (63)$$

L'effet tunnel est donc négligeable lorsque $kL_s > \frac{2}{\pi}$.

La zone d'évanescence, centrée autour de la position en x où $\underline{k} \perp \underline{B}_0$, est localisée n'importe où le long du rayon du plasma, dépendant du choix de la direction de \underline{k} . En conséquence, dans un plasma plongé dans un champ magnétique cisailé, la portion interdite du spectre en \underline{k} , correspondant à des ondes évanescentes, sera déterminée localement, à l'opposé du cas du plasma inhomogène.

III INSTABILITES PARAMETRIQUES DANS UN PLASMA CHAUD HOMOGENE

Le plasma étant décrit par des équations non-linéaires, les ondes ne s'y propagent indépendamment que si leurs amplitudes sont suffisamment faibles. Pour de plus grandes amplitudes, les ondes se couplent et échangent de l'énergie entre elles. Au cours de l'étape linéaire de la conversion paramétrique, une des ondes, appelée la pompe, a une grande amplitude et transmet de l'énergie aux ondes de désintégration. Lors d'une désintégration à trois ondes, les fréquences ω_i et les vecteurs d'ondes \underline{k}_i , ($i = 0,1,2$), satisfont les règles de sélection :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \tag{1}$$

$$\underline{k}_0 = \underline{k}_1 + \underline{k}_2$$

qui représentent la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pendant le processus {28}. Ici l'ensemble $(\omega_0, \underline{k}_0)$ appartient à la pompe et les ensembles $(\omega_1, \underline{k}_1)$ et $(\omega_2, \underline{k}_2)$ aux produits de la désintégration. Pour chauffer le plasma par effet paramétrique, il est intéressant de déstabiliser des ondes dont l'énergie est rapidement thermalisée. Aussi nous limiterons-nous à des produits de désintégration électrostatiques ayant des nombres d'onde k beaucoup plus grands que la pompe. Le problème est alors résolu dans l'approximation dipolaire, où le champ électrique de la pompe, $\underline{E}_0(t)$, est supposé spatialement homogène ($\underline{k}_0 = 0$), de telle sorte que $\underline{k}_2 = -\underline{k}_1$. Nous supposons que le produit de désintégration $(\omega_1, \underline{k}_1)$ est un mode normal du plasma, soit $\epsilon(\omega_1, \underline{k}_1) \approx 0$, et que la haute fréquence ω_1 est très proche de ω_0 , de telle sorte que $(\omega_2, \underline{k}_2)$ est une composante à basse fréquence. Lorsque $\epsilon(\omega_2, -\underline{k}_1) \approx 0$, la composante à basse fréquence est aussi un mode normal, et le mécanisme de l'instabilité (croissance temporelle) est le couplage de modes, le processus étant appelé la désintégration résonnante {28}. L'amplitude de la pompe au seuil d'instabilité est alors très faible. Lorsqu'il n'existe plus de mode normal à basse fréquence qui satisfasse les Eqs. (1),

l'oscillation à basse fréquence est un quasi-mode et le mécanisme de l'instabilité est l'effet Landau non-linéaire {14,33}. La désintégration en un quasi-mode, aussi appelée désintégration non-résonnante, a un seuil plus élevé que la désintégration résonnante. Lorsque $\omega_0 < \omega_1$, il existe un processus paramétrique à quatre ondes, dont une oscillation à zéro-fréquence qui peut aussi être considérée comme un quasi-mode, et appelée communément OTSI (oscillating two-stream instability) ou encore instabilité non-oscillante {29}. Au cours de ce processus, le mode à haute fréquence est translaté d'une quantité $\delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ et l'instabilité s'enclenche à un seuil d'amplitude de pompe comparable à celui de la désintégration non-résonnante {14}. Nettement au-dessus du seuil, les instabilités de désintégration peuvent occuper un spectre relativement étendu de fréquences ω_1 et ω_2 pour différents \underline{k} , alors que pour l'OTSI les hautes fréquences sont exactement $\pm \omega_0$ et la basse fréquence est non-oscillante pour un spectre relativement étendu en \underline{k} . En conséquence, les évolutions non-linéaires de l'instabilité de désintégration et de l'instabilité non-oscillante peuvent être assez différentes, ce qui justifie l'étude comparative de ces deux types d'instabilités dans le cas qui nous occupe.

Dans l'approximation dipolaire, les instabilités paramétriques dont la composante à haute fréquence est une onde hybride inférieure, se produisent à la fois dans le mode de désintégration et dans le mode non-oscillant {13,14}. Il a été montré que l'instabilité de désintégration passe du régime résonnant pour $\omega_0 > 3\omega_{LH}$ au régime non-résonnant pour $\omega_0 < 3\omega_{LH}$ {14}. Considérons, à titre d'exemple, la désintégration en une onde hybride inférieure et en une onde acoustique ionique. Les règles de sélection, Eqs. (1), appliquées à une onde hybride inférieure de fréquence $\omega_1 = \omega_{LH} \{1 + Mk_{//}^2/k^2\}^{1/2}$ et à une onde acoustique de fréquence $\omega_2 = kc_s$, montrent que la condition d'existence des ondes acoustiques dans un plasma magnétisé, soit $\omega_2^2/k_{//}^2 v_e^2 \ll 1$, n'est satisfaite que lorsque $Mk_{//}^2/k^2 \gg 1$, soit lorsque $\omega_1 > 3\omega_{LH}$. Le même raisonnement s'applique aux ondes cyclotroniques ioniques. Etant donné leur intérêt pour le chauffage de la

partie centrale d'un Tokamak, où la fréquence ω_0 de la pompe est proche de ω_{LH} , nous nous sommes proposés une étude comparative de l'instabilité de désintégration non-résonnante et de l'instabilité non-oscillante. Nous sommes intéressés en particulier par l'importance relative des taux de croissance et de l'occupation du spectre en k des deux types d'instabilités.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans un premier paragraphe nous dérivons une relation de dispersion générale gouvernant les instabilités paramétriques concernant des ondes électrostatiques couplées par une pompe traitée dans l'approximation dipolaire. Différentes relations de dispersion sont apparues dans la littérature et nous nous proposons de les comparer à la nôtre. Dans un second paragraphe nous présentons des résultats numériques obtenus à l'aide de notre relation de dispersion pour des fréquences de pompes $\omega_0 \leq 3\omega_{LH}$. Etant donnée la faible influence des effets cyclotroniques ioniques observée par Porkolab { 14 }, nous nous sommes contentés de traiter les ions démagnétisés. L'amplitude de la pompe est caractérisée par la vitesse de dérive des électrons, v_D , induite par le champ électrique E_0 : $v_D = E_0/B_0$. La vitesse de dérive v_D a été variée de $v_D/c_s = .5$ à 1. Les résultats montrent que l'OTSI a des taux de croissance supérieurs à ceux de l'instabilité de désintégration non-résonnante, et pour $v_D = c_s$, l'occupation du spectre en k est supérieure pour l'OTSI lorsque $\omega_0 \gtrsim 2\omega_{LH}$, alors qu'elle est comparable pour les deux types d'instabilités lorsque $2\omega_{LH} < \omega_0 < 3\omega_{LH}$. L'OTSI a donc été sous-estimé par Porkolab et elle est probablement plus importante que l'instabilité de désintégration en tant que mécanisme d'absorption de la pompe au centre du plasma. Dans un dernier paragraphe des résultats analytiques pour l'OTSI sont dérivés à partir d'une relation de dispersion simplifiée. Une bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques est trouvée en ce qui concerne les seuils et les taux de croissance maxima. Ceci justifiera l'emploi de la relation de dispersion simplifiée pour l'étude de l'influence du shear sur l'OTSI qui constitue l'objet du chapitre suivant.

1. Dérivation de la relation de dispersion

En présence d'un champ électrique $\underline{E}_0(t)$, spatialement homogène et oscillant à la fréquence ω_0 , les particules chargées d'espèce α subissent un déplacement autour de leurs trajectoires naturelles qui peut s'écrire :

$$\underline{x}_\alpha(t) = \underline{d}_\alpha \sin \omega_0 t \quad (2)$$

où \underline{d}_α est l'amplitude maximum de ce déplacement. Ce mouvement oscillant des particules va à son tour pouvoir coupler des oscillations collectives du plasma se produisant aux fréquences $\omega + n\omega_0$ (n est un entier) et sous certaines conditions les déstabiliser (croissance temporelle). On définit des coefficients de couplage μ_α pour ce processus :

$$\mu_\alpha = \underline{k} \cdot \underline{d}_\alpha \quad (3)$$

où \underline{k} est le vecteur d'onde des oscillations couplées. Il est évident que les oscillations électrostatiques seront mieux couplées que les oscillations électromagnétiques, dû à leurs plus grands vecteurs d'ondes \underline{k} et au fait que le facteur de couplage est maximum lorsque \underline{k} est parallèle à \underline{d}_α . Sous ces conditions, nous allons dériver une relation de dispersion en employant l'équation de Vlasov pour décrire les perturbations de densité et l'équation de Poisson pour décrire les perturbations du potentiel électrique. La résolution de l'équation de Vlasov se fait dans des référentiels oscillants avec les particules soumises au champ $\underline{E}_0(t)$ de la pompe. Éliminant alors le potentiel perturbé à l'aide de l'équation de Poisson exprimée dans le référentiel du laboratoire, on obtient un système infini d'équations pour les densités de charge perturbées $\rho_\alpha(\omega + n\omega_0, \underline{k})$, après transformation de Fourier. Le déterminant de ce système infini et homogène d'équations algébriques est ensuite développé par la méthode de Fredholm en une série entière pour les coefficients de couplage μ_α {25,26}. Ne retenant que les termes en μ_α^2 , on obtient une relation de dispersion qui contient cependant une somme infinie sur les fréquences, $\omega + n\omega_0$.

Dans un plasma chaud magnétisé, les fonctions de distribution $f_\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t)$ des particules d'espèce α satisfont l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}_0] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \underline{v}} = 0, \quad (4)$$

où q_α est la charge de l'espèce α . En présence de la pompe $\underline{E}_0(t)$ et de perturbations électrostatiques, le champ électrique total \underline{E} s'écrit :

$$\underline{E} = \underline{E}_0(t) - \nabla \phi, \quad (5)$$

où $\phi(\underline{r}, t)$ est le potentiel perturbé. La pompe est une grandeur d'équilibre, de telle sorte que la fonction de distribution d'ordre zéro $F_\alpha\{\underline{v}(t)\}$ satisfait l'équation de Vlasov suivante :

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\underline{E}_0(t) + \underline{v} \times \underline{B}_0] \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \underline{v}} = 0. \quad (6)$$

Ecrivons la solution de l'Eq. (6) sous la forme :

$$F_\alpha = n_0 F_{\alpha 0} [\underline{U} + \underline{v}_\alpha(t)], \quad (7)$$

où n_0 est la densité d'ordre zéro. La vitesse $\underline{v}_\alpha(t)$ satisfait alors l'équation de mouvement

$$\frac{d\underline{v}_\alpha}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\underline{E}_0(t) + \underline{v}_\alpha \times \underline{B}_0]. \quad (8)$$

Nous admettons que les trajectoires $\underline{x}_\alpha(t) = \int^t \underline{v}_\alpha(t') dt'$ sont celles données par l'Eq. (2). L'équation de Vlasov pour la fonction de distribution d'ordre un, f_α^1 s'écrit :

$$\frac{\partial f_\alpha^1}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha^1}{\partial \underline{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\underline{E}_0(t) + \underline{v} \times \underline{B}_0] \cdot \frac{\partial f_\alpha^1}{\partial \underline{v}} = \frac{n_0 q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \phi \cdot \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial \underline{v}}. \quad (9)$$

La présence explicite du champ électrique $\underline{E}_0(t)$ de la pompe est éliminée par le changement de variables

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \underline{x} + \underline{x}_\alpha(t') \\ \underline{v} &= \underline{u} + \underline{v}_\alpha(t') \\ t &= t'\end{aligned}\tag{10}$$

et par la définition des nouvelles grandeurs fonctions des nouvelles variables :

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\alpha^1(\underline{x}, \underline{u}, t') &= f_\alpha^1(\underline{r}, \underline{v}, t) ; \tilde{F}_{\alpha 0}(\underline{u}) = F_{\alpha 0}(\underline{v}) \\ \tilde{\phi}(\underline{x}, t') &= \phi(\underline{r}, t).\end{aligned}\tag{11}$$

L'équation de Vlasov, Eq. (9), pour ces nouvelles grandeurs se réduit alors à

$$\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^1}{\partial t'} + \underline{u} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_\alpha^1}{\partial \underline{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\underline{u} \times \underline{B}_0) \frac{\partial \tilde{f}_\alpha^1}{\partial \underline{u}} = \frac{n_0 q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{F}_{\alpha 0}}{\partial \underline{u}},\tag{12}$$

qui est identique à l'équation de Vlasov qui résulterait pour les grandeurs f_α^1 et ϕ , en l'absence de pompe.

Définissons à présent les transformées de Fourier pour toutes fonctions $g(\underline{r}, t) = \tilde{g}(\underline{x}, t')$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega, \underline{k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\underline{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt g(\underline{r}, t) \exp [i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})], \\ \hat{\tilde{g}}(\omega, \underline{k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\underline{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \tilde{g}(\underline{x}, t') \exp [i(\omega t' - \underline{k} \cdot \underline{x})].\end{aligned}\tag{13}$$

Les relations entre ces deux types de transformées sont obtenues par la définition des nouvelles variables, Eqs. (10), de μ_α , Eq. (3), et en utilisant la fonction génératrice des fonctions de Bessel :

$$\exp [i\mu_\alpha \sin \omega_0 t] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mu_\alpha) \exp(in\omega_0 t),\tag{14}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}\hat{q}(\omega, \underline{k}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(-\mu_\alpha) \hat{q}(\omega + n\omega_0, \underline{k}), \\ \hat{q}(\omega, \underline{k}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mu_\alpha) \hat{q}(\omega + n\omega_0, \underline{k}).\end{aligned}\quad (15)$$

Les transformées de Fourier, Eqs. (13), appliquées à l'équation de Vlasov, Eq. (12), intégrée sur les vitesses \underline{u} , conduisent, par définition des susceptibilités χ_α , à la relation suivante :

$$\hat{n}_\alpha(\omega, \underline{k}) = -\varepsilon_0 \frac{k^2 \chi_\alpha(\omega, \underline{k})}{q_\alpha} \hat{\phi}(\omega, \underline{k}). \quad (16)$$

De même, l'équation de Poisson, exprimée dans les anciennes variables, et transformée par les Eqs. (13), s'écrit :

$$\hat{\phi}(\omega, \underline{k}) = \frac{e}{\varepsilon_0 k^2} \left[\hat{n}_i(\omega, \underline{k}) - \hat{n}_e(\omega, \underline{k}) \right]. \quad (17)$$

Éliminons le potentiel entre les Eqs. (16) et (17), en utilisant les relations de passage données par les Eqs. (15) :

$$q_\alpha \hat{n}_\alpha(\omega, \underline{k}) = -\chi_\alpha(\omega, \underline{k}) \left[q_\alpha \hat{n}_\alpha(\omega, \underline{k}) + \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} J_\ell(\mu_\alpha - \mu_\beta) q_\beta \hat{n}_\beta(\omega + \ell\omega_0, \underline{k}) \right], \quad (18)$$

où $\beta \neq \alpha$. L'équation (18) représente deux ensembles (un pour chaque espèce de particules) infinis d'équations couplées pour les densités. Elle a été obtenue en utilisant la formule d'addition des fonctions de Bessel

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} J_\ell(x) J_{n-\ell}(y) = J_n(x+y), \quad (19)$$

qui se réduit à la propriété d'orthogonalité lorsque $y = -x$:

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} J_\ell(x) J_{n-\ell}(-x) = \delta(n), \quad (20)$$

où $\delta(n) = 0$ pour $n \neq 0$ et $\delta(n) = 1$ pour $n = 0$.

La masse des ions étant beaucoup plus grande que celle des électrons ($m_i \gg m_e$), les amplitudes $|\underline{d}_i|$ des trajectoires oscillantes des ions sont en général négligeables devant les amplitudes $|\underline{d}_e|$ des électrons. En conséquence, nous supposons que $\mu_i = 0$, et nous définissons

$$\mu = \mu_e \quad (21)$$

Pour des raisons de commodité, nous introduisons la notation :

$$\begin{aligned} n_\alpha(m) &\equiv \hat{n}_\alpha(\omega + m\omega_0, \underline{k}) \\ \chi_\alpha(m) &\equiv \chi_\alpha(\omega + m\omega_0, \underline{k}) \end{aligned} \quad (22)$$

Enfin, éliminant les densités ioniques $n_i(\ell)$ dans les Eqs. (18), nous obtenons un système infini unique d'équations couplées homogènes, pour les densités électroniques :

$$n_e(m) = A_e(m) \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} n_e(\ell) \left[\sum_{\rho=-\infty}^{+\infty} J_{\rho-m}(\mu) J_{\ell-\rho}(-\mu) A_i(\rho) \right], \quad (23)$$

où

$$A_\alpha(n) = \frac{\chi_\alpha(n)}{1 + \chi_\alpha(n)} \quad (24)$$

La relation de dispersion, obtenue en annulant le déterminant de ce système d'équations, ne pourra s'exprimer explicitement comme fonction des susceptibilités que si l'on parvient à tronquer au moins une des deux sommes infinies dans l'Eq. (23). Dans la limite du couplage faible, $\mu < 1$, il est possible de développer ce déterminant infini autour de sa diagonale, par la technique de Fredholm {25,26}, en développant les fonctions de Bessel en série de puissances de μ , négligeant les puissances de μ supérieures à μ^2 . L'hypothèse : $\mu < 1$ signifie physiquement que l'amplitude $|\underline{d}_e|$ des oscillations électroniques induites par la pompe est inférieure à la longueur d'onde des ondes électrostatiques couplées, comme l'indique l'Eq. (3).

Afin de faire converger le développement de Fredholm du déterminant infini, il faut extraire les termes unités apparaissant dans $J_0^2(\mu) \approx 1 - \mu^2/2$, et les faire passer dans le membre de gauche de l'Eq. (23), qui s'écrit alors :

$$n_e(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(m,n) n_e(n), \quad (25)$$

où

$$g(m,n) = H(m) \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} J_{\ell}(\mu) J_{\ell+m-n}(\mu) A_i(\ell+m),$$

$$H(m) = A_e(m) / (1 - A_e(m) A_i(m)), \quad (26)$$

et \sum_{ℓ} signifie que lorsque $m = n$ et $\ell = 0$, il faut remplacer $J_0^2(\mu)$ par $J_0^2(\mu) - 1$. Alors, tous les termes sous la somme \sum_{ℓ} sont au minimum d'ordre μ . Développons à présent le déterminant des Eqs. (25) autour de sa diagonale :

$$\Delta_F = 1 - \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(\ell,\ell) + \sum_{\substack{m > \ell \\ \ell, m}} \begin{vmatrix} g(\ell,\ell) & g(\ell,m) \\ g(m,\ell) & g(m,m) \end{vmatrix}$$

$$- \sum_{\substack{n > m > \ell \\ \ell, m, n}} \begin{vmatrix} g(\ell,\ell) & g(\ell,m) & g(\ell,n) \\ g(m,\ell) & g(m,m) & g(m,n) \\ g(n,\ell) & g(n,m) & g(n,n) \end{vmatrix} + \dots = 0. \quad (27)$$

Afin de simplifier le calcul des divers termes de l'Eq. (27), il sera utile de noter certaines propriétés des éléments $g(n,m)$ et de donner leurs expressions en puissances de μ . Les termes symétriques $g(n,m)$ et $g(m,n)$ ne diffèrent que par la composante de fréquence apparaissant dans H :

$$\frac{g(n,m)}{g(m,n)} = \frac{H(n)}{H(m)} \quad (28)$$

Le premier terme du développement d'une fonction de Bessel d'ordre n , $J_n(\mu)$, est proportionnel à μ^n . Lorsque $m \neq n$, la puissance minimale en μ du terme $\sum_e' J_e(\mu) J_{e+m+n}(\mu)$ est $\mu^{|m-n|}$ et s'obtient pour $\ell=0$. lorsque $m=n$, la puissance minimale en μ de ce terme est μ^2 , suivant la définition \sum_e' . Ces propriétés nous permettent de ne conserver qu'un nombre limité de sous-déterminants dans l'Eq.(27). Il se trouve que les seules fonctions de Bessel contribuant à l'ordre μ^2 sont J_0 et $J_{\pm 1}$, dont les développements s'écrivent :

$$\begin{aligned} J_0(\mu) &\cong 1 - \mu^2/4 \\ J_1(\mu) &= -J_1(-\mu) = \frac{J_1(-\mu)}{-1} \cong \mu/2 ; \quad J_1^2(\mu) \cong \mu^2/4 . \end{aligned} \quad (29)$$

A cet ordre, les seules contributions à la relation de dispersion proviennent des expressions suivantes

$$\begin{aligned} g(\ell, \ell) &= -\frac{\mu^2}{4} H(\ell) [2A_i(\ell) - A_i(\ell+1) - A_i(\ell-1)] \\ g(\ell, \ell+1) \cdot g(\ell+1, \ell) &= \frac{\mu^2}{4} H(\ell) H(\ell+1) [A_i(\ell) - A_i(\ell+1)]^2 , \end{aligned} \quad (30)$$

puisque l'on ne garde que le sous-déterminant d'ordre 2×2 et que les produits $g(\ell, \ell+n) \cdot g(\ell+n, \ell)$ donnent des contributions d'ordre supérieur à μ^2 . pour $n > 1$. La contribution minimale en μ de la diagonale du sous-déterminant d'ordre 2×2 est en μ^4 ; il faut donc aussi la rejeter. Par des translations appropriées de l'indice ℓ , après introduction dans l'Eq. (27) des expressions données par l'Eq. (30), on obtient la relation de dispersion recherchée, en fonction des susceptibilités :

$$1 - \frac{\mu^2}{4} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{[\chi_i(\ell) - \chi_i(\ell+1)] [\chi_e(\ell+1) - \chi_e(\ell)]}{\epsilon(\ell) \epsilon(\ell+1)} \right\} = 0 \quad (31)$$

Les fonctions diélectriques $\epsilon(\ell)$ ont été définies dans le chapitre précédent.

Comparons à présent notre relation de dispersion, Eq. (31), à quelques autres apparaissant dans la littérature. Dans son étude des instabilités paramétriques au voisinage de ω_{LH} , Porkolab a dérivé deux relations de dispersion [14]. Ayant tronqué les équations couplées pour les densités de charge $\rho_{\alpha}(\omega+n\omega_0, \mathbf{k})$ en ne retenant que les oscillations à ω et $\omega \pm \omega_0$, il a obtenu une relation de dispersion contenant toutes les puissances en μ dans les fonctions de Bessel. Multipliant sa première relation de dispersion, numérotée Eq. (12), par les dénominateurs y apparaissant, puis développant les fonctions de Bessel en série de puissances de μ , ne retenant que les termes jusqu'à μ^2 , nous obtenons

$$\epsilon(0) = \frac{\mu^2}{4} \left\{ \frac{[\chi_i(0) - \chi_i(1)][\chi_e(1) - \chi_e(0)]}{\epsilon(1)} + \frac{[\chi_i(-1) - \chi_i(0)][\chi_e(0) - \chi_e(-1)]}{\epsilon(-1)} \right\} \quad (32)$$

Cette même équation s'obtient à partir de notre relation de dispersion (31), si nous y posons $\chi_{\alpha}(n) = 0$ pour $|n| > 1$. De plus, sous l'hypothèse $|\chi_{\alpha}(+1)| \ll |\chi_{\alpha}(0)|$, nous retrouvons sa seconde relation de dispersion, numérotée (15), à l'exception d'un terme unité:

$$\epsilon(0) = -\frac{\mu^2}{4} \chi_e(0) \chi_i(0) \left[\frac{1}{\epsilon(1)} + \frac{1}{\epsilon(-1)} \right], \quad (33)$$

L'équation (33) est la relation de dispersion qui a été dérivée précédemment par Kindel et al. [13]. Cette dernière relation de dispersion de par sa simplicité, semble très attrayante pour une étude analytique des instabilités paramétriques. Aussi allons-nous comparer ses solutions à celles obtenues numériquement à partir de la relation complète donnée par l'Eq. (31).

2. Résultats numériques

Le modèle choisi est celui d'un plasma homogène plongé dans un champ magnétique \underline{B}_0 dirigé selon l'axe z . Le vecteur d'onde \underline{k} est situé dans le plan (y, z) tel que $k_y \gg k_z$. Un champ électrique \underline{E}_0 , spatialement homogène, dirigé selon l'axe x , oscille à une fréquence $\omega_{LH} < \omega_0 \ll 3\omega_{LH}$, suivant la loi :

$$\underline{E}_o(t) = \underline{E}_o \cos \omega_o t . \quad (34)$$

Dans ce domaine de fréquences, la réponse des particules chargées, obtenue en intégrant l'Eq. (8), est dominée par la vitesse de dérive \underline{v}_D électronique selon l'axe y, ayant pour expression

$$\underline{v}_D = \frac{\underline{E}_o \times \underline{B}_o}{B_o^2} . \quad (35)$$

Les corrections à cette vitesse sont d'ordre $M^{-1/2}$, sous l'hypothèse $\omega_{pe} \ll \omega_{ce}$, et la vitesse ionique, induite par la pompe, dirigée selon x, est elle aussi plus petite que \underline{v}_D par un facteur $M^{-1/2}$. On peut donc négliger μ_i devant μ_e obtenu en intégrant \underline{v}_y sur le temps, soit

$$\mu = \frac{k_y E_o}{\omega_o B_o} . \quad (36)$$

Sous ces conditions, nous avons résolu numériquement notre relation de dispersion complète, donnée par l'Eq. (31). Le programme numérique est destiné à rechercher les solutions complexes de la basse fréquence ω en fonction des vecteurs d'onde \underline{k} . Nous nous sommes restreints à des longueurs d'onde telles que $kr_i > 1$ et $kr_e < 1$, où $r_{i,e}$ sont les rayons de Larmor des ions et des électrons respectivement. Ces conditions sont nécessaires pour démagnétiser les ions et pour magnétiser fortement les électrons. Utilisant les définitions de $r_{i,e}$, ces deux conditions se réduisent à une seule condition sur $k\lambda_D$:

$$\left(\frac{T_e}{T_i} \frac{1}{M} \right)^{1/2} < k\lambda_D < 1 , \quad (37)$$

qui s'avère être le domaine intéressant du spectre instable en k. Tant que les fréquences $\omega + n\omega_o \ll \omega_{ce}$, les susceptibilités calculées dans l'Appendice A s'appliqueront. Rappelons leurs expressions en termes de la fonction Z(x) :

$$\chi_i(\omega_n, \underline{k}) = \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \frac{T_e}{T_i} \left[1 + x_i(n) Z(x_i(n)) \right], \quad (37)$$

$$\chi_e(\omega_n, \underline{k}) = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \left[1 + x_e(n) Z(x_e(n)) \right],$$

où $x_i(n) = \omega_n / \sqrt{2} k v_{Ti}$, $x_e(n) = \omega_n / \sqrt{2} k_{||} v_{Te}$. Définissant les grandeurs normalisées suivantes :

$$\Omega_n \equiv \frac{\omega + n \omega_0}{\sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}}, \quad (38)$$

$$D \equiv k \lambda_D,$$

$$\Theta \equiv \sqrt{M} k_{||} / k,$$

$$\Omega_p \equiv \omega_{pe} / \omega_{ce} = \omega_{pi} / \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}},$$

On peut récrire les susceptibilités sous la forme :

$$\chi_i(\Omega_n, \underline{k}) = \frac{1}{D^2} \frac{T_e}{T_i} F_i \left[\frac{\Omega_n}{D \Omega_p} \frac{T_e}{T_i} \right], \quad (39)$$

$$\chi_e(\Omega_n, \underline{k}) = \Omega_p^2 + \frac{1}{D^2} F_e \left[\frac{\Omega_n}{D \Theta \Omega_p} \right],$$

où $F_\alpha(x_\alpha) = 1 + x_\alpha Z(x_\alpha)$. Grâce à ces normalisations les résultats seront indépendants de la température électronique et du rapport des masses M . De plus, ni la valeur de la densité n_0 , ni celle du module de B_0 n'ont à être spécifiées. Elles sont introduites dans le problème à travers la valeur de la fréquence normalisée Ω_p . Les solutions complexes Ω de la relation de dispersion s'obtiendront donc comme fonctions de Ω_p , T_e/T_i , D et Θ ainsi que de la fréquence normalisée de la pompe Ω_0 et de l'intensité de la pompe caractérisée par v_D/c_s . Le programme numérique se compose de trois parties principales : une sous-routine qui calcule la fonction Z , une sous-routine qui calcule la valeur des susceptibilités et de la relation de dispersion, Eq. (31), et enfin une sous-routine cherchant les solutions Ω de

la relation de dispersion à l'aide de la méthode de "steepest descent".

Les résultats ont été obtenus en fixant $\Omega_p = 1$, $T_e = 3T_i$, $-5 \leq n \leq +5$, pour les fréquences de pompe $\Omega_{LH} < \Omega_0 \leq 3\Omega_{LH}$ et pour des intensités de pompe correspondant à : $.5 \leq v_D/c_s \leq 1$. Ils sont présentés dans les figures 1 et 2 sous forme de diagrammes dans le plan $(k\lambda_D, Mk_{//}/k)$, délimitant les zones d'instabilités du decay et de l'OTS (nous utiliserons couramment la dénomination decay pour l'instabilité de désintégration). Dans ces diagrammes seules les informations sur $\gamma_g \equiv \text{Im}(\omega)$, le taux de croissance, sont à disposition. Les courbes délimitant les deux types d'instabilités sont les lieux de $\gamma_g = 0$. Les valeurs indiquées dans chaque zone d'instabilité sont celles du taux de croissance maximum normalisé à $\sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$. Les modes instables sont les ondes hybrides inférieures.

Les résultats présentés dans la figure 1, obtenus pour $v_D = c_s$, montrent que les taux de croissance maximum de l'OTSI sont toujours supérieurs à ceux du decay, typiquement d'un facteur 50%. L'instabilité de decay existe dans deux régimes non-résonnants : le régime des quasi-modes cinétiques caractérisé par $(\omega_0 - \omega_{LK})/k_{//}v_e \approx 1$ et le régime des quasi-modes fluides où $(\omega_0 - \omega_{LK})/k_{//}v_e > 1$. Le régime des quasi-modes cinétiques est de loin le plus important, ses taux de croissance étant beaucoup plus élevés (un facteur 10 au moins) que ceux du régime des quasi-modes fluides en accord avec les résultats de Porkolab {14}. Dans le régime des quasi-modes cinétiques, l'instabilité de decay a une extension en $k\lambda_D$ comparable à celle de l'OTSI lorsque $\omega_0 > \sqrt{2} \omega_{LH}$, mais inférieure lorsque $\omega_0 < \sqrt{2} \omega_{LH}$. Lorsque $\omega_0 = 2\omega_{LH}$, le decay a une extension en $k\lambda_D$ supérieure à celle de l'OTSI, mais en examinant les valeurs de $(\omega_0 - \omega_{LK})/k_{//}v_e$ nous notons que la partie du decay s'étendant au-delà de celle de l'OTSI est dans le régime des quasi-modes fluides, où les taux de croissance chutent fortement. A titre d'exemple, nous avons tracé en traitillés la ligne le long de laquelle $(\omega_0 - \omega_{LK})/k_{//}v_e = 1$. Cette ligne traversant la zone instable du decay, longe la ligne des taux de croissance

Zones d'instabilité

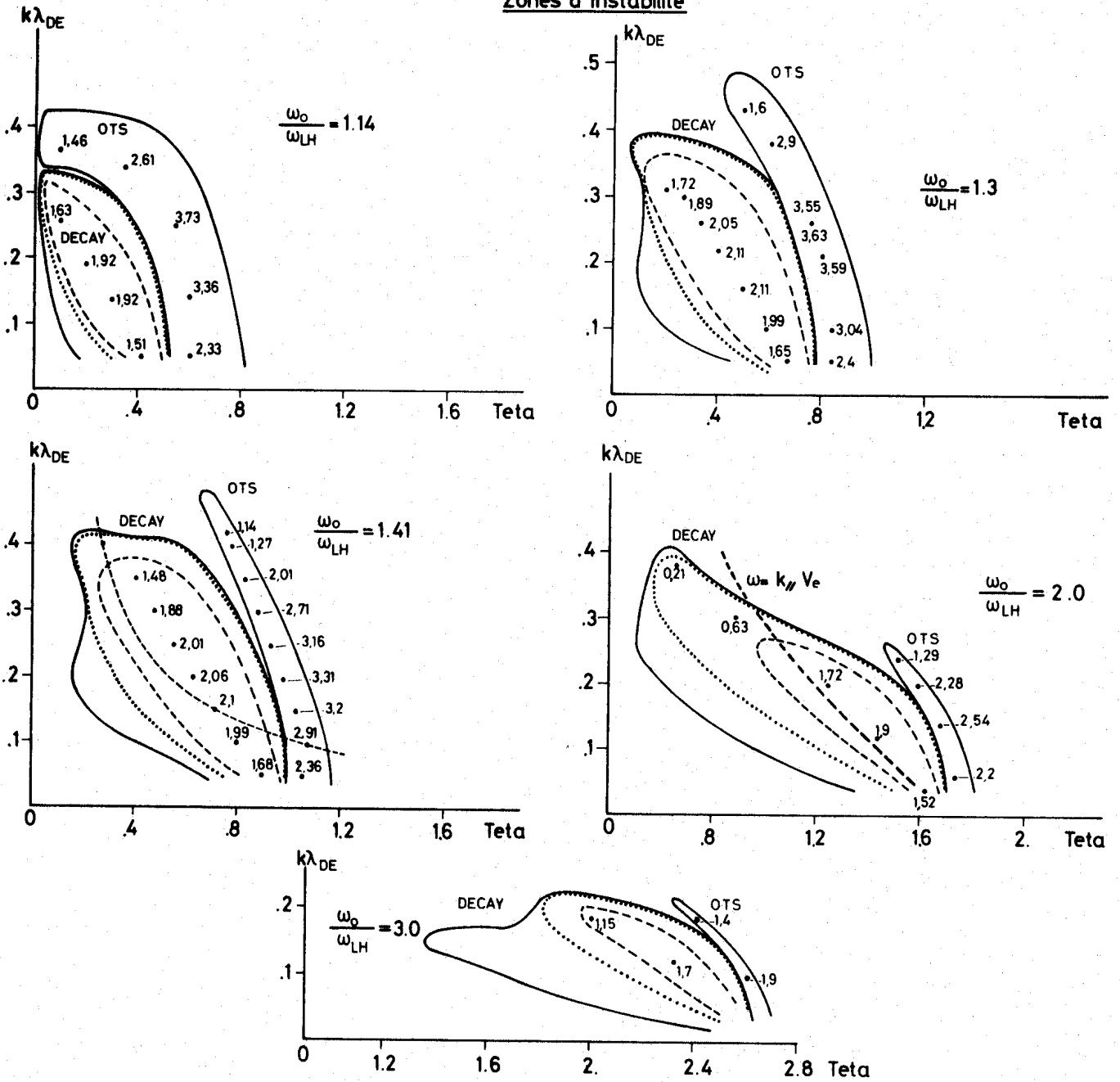


Figure 1.

Zones d'instabilités paramétriques dans l'espace k . La puissance de pompe produit une vitesse de dérive $v_0 = c_s$. L'abscisse $Teta$ est égal à $k_{//} \sqrt{M}/K$. Les nombres indiquent les valeurs du taux de croissance γ normalisé à $\sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$ et multiplié par 100. Les courbes en trait plein (—) correspondent à $\gamma = 0$, en pointillé (.....) à $\gamma = 10^{-3}$ et en traitillé (-----) à $\gamma = 10^{-2}$.

maxima en la serrant de près jusqu'en $k\lambda_D \approx .26$, qui est l'extension maximum de l'OTSI. Lorsque ces deux lignes se croisent, les taux de croissance du decay sont fortement réduits.

Notons aussi que les taux de croissance les plus grands ont lieu à des valeurs de $k\lambda_D$ plus grandes pour l'OTSI que pour le decay. De plus, ils se produisent pour des valeurs croissantes de $k\lambda_D$ lorsque ω_0 se rapproche de ω_{LH} .

Quelques résultats pour une intensité de pompe plus faible, $v_D/c_s = .5$, sont présentés dans la figure 2. L'OTSI est toujours dominante en ce qui concerne les taux de croissance, son extension en $k\lambda_D$ est réduite, mais reste comparable à celle du decay.

Dans tous les cas présentés dans les deux figures, l'instabilité de decay a toujours les taux de croissance maxima dans le régime des quasi-modes cinétiques, le régime des quasi-modes fluides étant localisé sur la gauche (valeurs inférieures de Mk_{\parallel}/k) des diagrammes où l'on note une sorte de nez. Les caractéristiques du decay non-résonnant ont été discutées par Porkolab { 14}. Cependant, comparant l'OTSI et le decay, il a trouvé une extension en $k\lambda_D$ beaucoup plus faible pour l'OTSI que pour le decay et en a conclu qu'en dépit de leurs taux de croissance inférieurs les quasi-modes sont plus importants que l'OTSI pour la détermination de l'absorption anormale. Dans sa détermination de l'extension en $k\lambda_D$ des instabilités, Porkolab a fixé $k_{\parallel}\lambda_D$ par sa valeur au taux de croissance maximum absolu du decay, puis il a varié $k\lambda_D$. Si nous appliquons cette technique dans le plan $(k\lambda_D, \sqrt{M}k_{\parallel}/k)$, nous obtenons une hyperbole traversant l'OTSI sur une étendue de $k\lambda_D$ très faible comparée à celle du decay. Nous présentons un de ces cas dans la Fig. 1 pour $\omega_0 = 1.41 \omega_{LH}$.

En conclusion, nos résultats montrent que pour de fortes pompes ($v_D \approx c_s$) l'instabilité non-oscillante domine l'instabilité de désintégration non-résonnante par ses taux de croissance plus élevés, les deux types d'instabilité ayant une extension comparable en $k\lambda_D$.

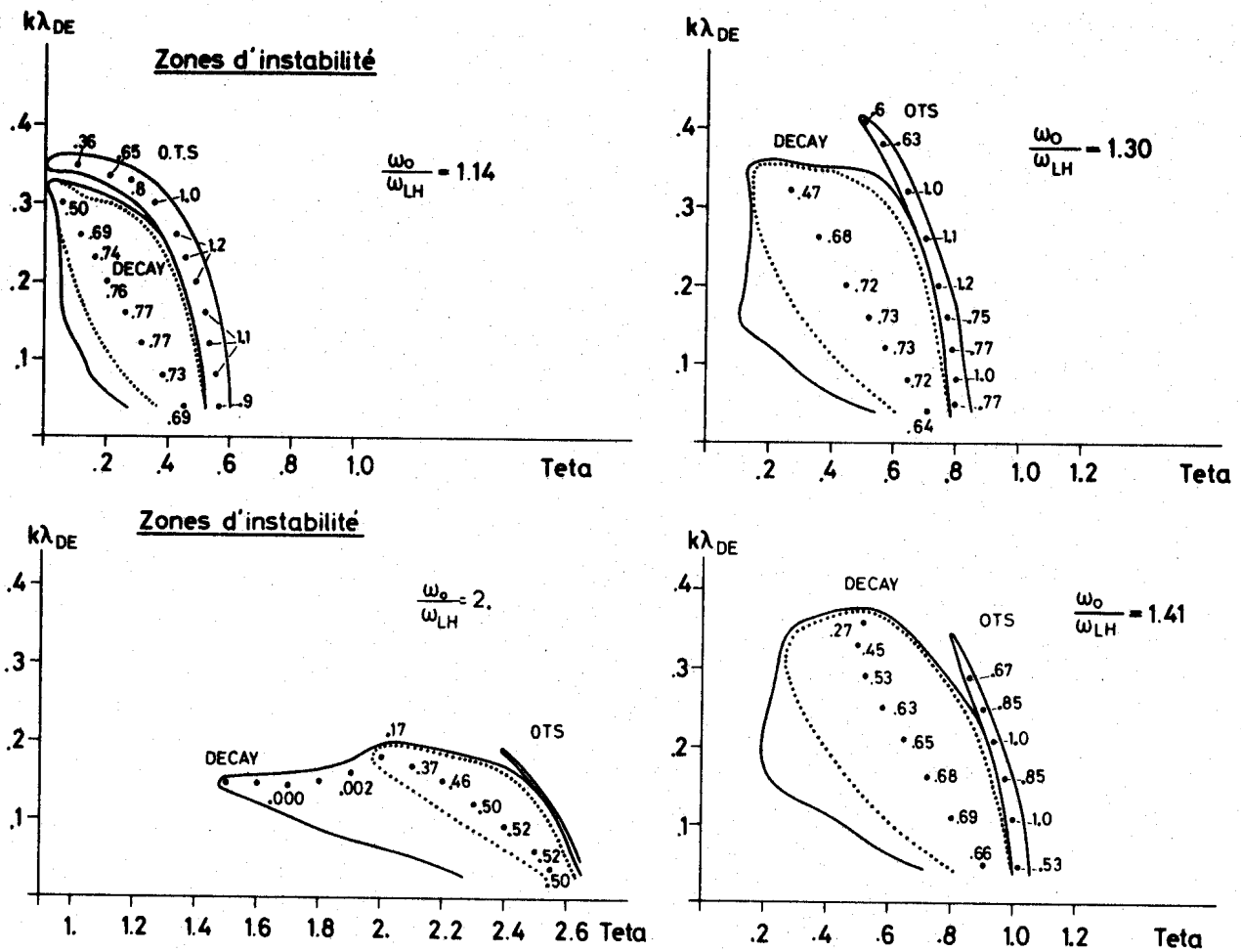


Figure 2.

Zones d'instabilité paramétriques dans l'espace k . La puissance de pompe produit une vitesse de dérive $v_D = c_s/2$. L'abscisse $Teta$ est égal à $k_p \sqrt{M} / k$. Les nombres indiquent les valeurs du taux de croissance γ normalisé à $\sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$ et multiplié par 100. Les courbes en trait plein (—) correspondent à $\gamma = 0$ et en pointillé à $\gamma = 10^{-3}$.

3. Etude analytique de l'instabilité non-oscillante

La relation de dispersion complète, Eq. (31), étant impossible à manier analytiquement, nous aurons recours dans les chapitres ultérieurs à sa forme simplifiée, donnée par l'Eq. (33), ne retenant que les oscillations aux fréquences ω et $\omega \pm \omega_0$, et supposant $|\chi_\alpha(\pm 1)| \ll |\chi_\alpha(0)|$. Récrivons l'Eq. (33) sous la forme

$$\epsilon(+1)\epsilon(-1) = -\frac{\mu^2}{4} \frac{\chi_i(0)\chi_e(0)}{\epsilon(0)} \left[\epsilon(+1) + \epsilon(-1) \right]. \quad (40)$$

Nous utiliserons les susceptibilités fluides, dont nous rappelons les définitions pour les ondes hybrides

$$\chi_i(\pm 1) = -\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega \pm \omega_0)^2 - 3k^2 V_i^2}$$

$$\chi_e(\pm 1) = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_{||}^2 / k^2}{(\omega \pm \omega_0)^2 - 3k_{||}^2 V_e^2}$$

d'où l'expression des fonctions diélectriques

$$\epsilon(\pm 1) = \frac{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2}{(\omega \pm \omega_0)^2} \left[(\omega \pm \omega_0)^2 - \omega_{Lk}^2 \right]. \quad (41)$$

Pour l'étude de l'instabilité non-oscillante, nous posons $\omega = i\gamma$, où

$$\gamma = \gamma_g + \gamma_{Lk} \quad (42)$$

dans l'expression de $\epsilon(\pm 1)$, γ_g étant le taux de croissance et γ_{Lk} étant défini au chapitre II, Eq. (36), à partir des fréquences de collision effectives. Pour la composante à zéro-fréquence, γ se limite à γ_g en l'absence de collisions. Deux régimes sont à distinguer : le régime des petits nombres d'onde caractérisé par $\gamma_g \gg kV_i, k_{||}V_e$ où les susceptibilités s'écrivent

$$\begin{aligned} \chi_i(0) &\approx \omega_{pi}^2 / \eta_g^2 \\ \chi_e(0) &\approx \frac{\omega_{pe}^2 k_{||}^2 / k^2}{\eta_g^2} \end{aligned} \quad (43)$$

et le régime des grands nombres d'onde caractérisés par $\eta_g \ll kV_i, k_{||}V_e$ où les susceptibilités se réduisent à

$$\begin{aligned} \chi_i(0) &\approx \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \frac{T_e}{T_i} \quad , \\ \chi_e(0) &\approx 1 / k^2 \lambda_D^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Dans les deux régimes, on vérifie bien que dans tout le domaine intéressant des paramètres $\chi_\alpha(0) \gg 1$, de telle sorte que $\epsilon(0) \approx \chi_i(0) + \chi_e(0)$. La relation de dispersion, Eq. (40), s'écrit à présent

$$\left(\frac{\omega_{Lk}^2}{\omega_0^2} - 1 + \frac{\eta^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{4\eta^2}{\omega_0^2} = \frac{\mu^2}{4} \frac{\chi_i(0)\chi_e(0)}{\chi_i(0)+\chi_e(0)} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_{pi}^2} \cdot 2 \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_{Lk}^2}{\omega_0^2} - 1 + \frac{\eta^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{4\eta^2}{\omega_0^2} \right] \quad (45)$$

Pour que μ , satisfaisant l'Eq. (45), soit réel, il faut que

$$\omega_{Lk}^2 > \omega_0^2 + 3\eta^2, \quad (46)$$

ce qui nous suggère de faire l'approximation $\omega_{Lk}^2 - \omega_0^2 \gg \eta^2$ sous laquelle l'Eq. (45) se simplifie. Définissant l'écart de fréquence δ par

$$\delta = \frac{\omega_{Lk}}{\omega_0} - 1, \quad (47)$$

qui sera toujours bien inférieur à l'unité, l'Eq. (45) se réduit à :

$$\delta^2 + \frac{\eta^2}{\omega_0^2} - \delta \frac{\mu^2}{4} \frac{\chi_i(0)\chi_e(0)}{\chi_i(0)+\chi_e(0)} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_{pi}^2} = 0 \quad (48)$$

Dans le régime des petits nombres d'onde, où les Eqs. (43) s'appliquent, les taux de croissance maximum sont obtenus pour $\delta = \gamma/\omega_0$ et valent

$$\gamma_{g\max} = \frac{\omega_0}{2} \left[\frac{k^2 v_D^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \right) \right]^{1/3}. \quad (49)$$

Cette dépendance de γ_{\max} en k explique l'augmentation des taux de croissance de l'OTSI avec $k\lambda_D$, pour petites valeurs de $k\lambda_D$. La dépendance en $k^{2/3}$ n'est cependant vérifiée sur les Fig. 1 et 2 que pour $k\lambda_D \lesssim .05$. En effet pour $k\lambda_D > .05$ les hypothèses $\gamma_g \gg kV_i$, $k_{\parallel}V_e$ ne sont plus vérifiées. Dans les régimes des grands nombres d'ondes, où les Eqs. (44) s'appliquent, les taux de croissance maximum sont encore obtenus pour $\delta = \gamma/\omega_0$ et valent

$$\gamma_{g\max} = \frac{\omega_0}{2} \left[\frac{v_D^2}{4C_S^2} \frac{\omega_{LH}^2/\omega_0^2}{1+T_i/T_e} \right] - \gamma_{Lk}. \quad (50)$$

Ici, γ_{\max} ne dépend plus explicitement de k , mais est réduit, pour $k\lambda_D$ croissant, par l'augmentation de l'amortissement Landau à travers γ_{Lk} . Un calcul numérique déterminant les solutions en fréquence de la relation de dispersion linéaire des ondes hybrides à partir de la fonction Z , montre que si l'on injecte ces solutions pour ω_{Lk} et γ_{Lk} dans δ et $\gamma_{g\max}$, on obtient une bonne concordance entre les résultats présentés dans les Fig. 1 et 2 et ceux de l'Eq. (50), typiquement dans un domaine d'erreur inférieur à 20%, lorsque $k\lambda_D \gtrsim .15$, où $\gamma \ll kV_i$, $k_{\parallel}V_e$. Dans le domaine intermédiaire, où $\gamma \approx k_{\parallel}V_e, kV_i$, le modèle fluide est difficile à appliquer.

L'expression du seuil d'instabilité ($\gamma_g = 0$) s'obtient immédiatement à partir de l'Eq. (48) et peut s'écrire :

$$\frac{v_D}{C_S} = 2 \sqrt{1 + \frac{T_i}{T_e}} \cdot \left[\frac{\delta^2 + \gamma_{Lk}^2/\omega_0^2}{\delta} \right]^{1/2}. \quad (51)$$

Utilisant les valeurs de ω_{Lk} et γ_{Lk} calculées numériquement on reproduit étonnamment bien, à partir de l'Eq. (51), les contours des zones d'instabi-

lité de l'OTSI présentées dans les Figs. 1 et 2, même pour l'extension maximum en $k \lambda_D$. Notons encore l'expression du seuil minimum, obtenue soit à partir de l'Eq. (51) minimisée par rapport à δ , soit à partir de l'Eq. (50) où l'on pose $\gamma_g = 0$:

$$\frac{v_D}{c_s} = 2 \frac{\omega_0}{\omega_{LH}} \sqrt{1 + \frac{T_i}{T_e}} \left(\frac{2 \gamma_{Lk}}{\omega_0} \right)^{1/2}. \quad (52)$$

Etant donnée la bonne concordance entre les résultats obtenus à partir de la relation de dispersion complète, Eq. (31), et de ceux, dérivés analytiquement à partir de la relation de dispersion simplifiée, Eq. (40), nous utiliserons cette dernière dans les limites d'applicabilité du modèle fluide pour déterminer les effets du shear et de l'inhomogénéité de densité sur l'instabilité non-oscillante.

IV EFFETS DU CISAILLEMENT DES LIGNES DU CHAMP MAGNETIQUE SUR
L'INSTABILITE NON-OSCILLANTE

Nous avons vu au chapitre II que la rotation du champ magnétique \underline{B}_0 produisait une rotation amplifiée d'un facteur \sqrt{M} pour le vecteur d'onde total des ondes hybrides inférieures lorsqu'elles sont proches de leur coupure. Au centre d'un plasma de type Tokamak le profil de densité est plat et le shear est l'inhomogénéité dominante. C'est aussi l'endroit où l'instabilité non-oscillante domine l'instabilité de désintégration. Nous nous sommes donc proposés l'examen de l'effet du shear sur les ondes hybrides inférieures couplées sous les conditions OTSI. Nous reprenons les modèles développés au chapitre II : le plasma est décrit par les équations fluides fermées par l'équation de Poisson; le shear est dû à la rotation du champ magnétique dans un plan perpendiculaire à la direction x, le vecteur \underline{B}_0 gardant un module constant. Dans une première partie, nous dérivons les équations du couplage en faisant les hypothèses permettant d'obtenir la relation de dispersion simplifiée {Eq. (33), chapitre III} dans l'approximation WKB. Les équations du couplage sont deux équations différentielles ordinaires du second ordre semblables à celles développées par Perkins et Flick dans leur traitement de l'OTSI près de ω_p dans un gradient de densité {23}. Les ondes couplées sont piégées dans une région d'extension finie en x. Pour de faibles extensions de cette région de piégeage les équations peuvent être linéarisées et analysées par la méthode de la transformée de Fourier {27}. Dans cette limite le shear produit un amortissement convectif réduisant les taux de croissance proportionnellement à $(kL_s)^{-1}$, k étant le nombre d'onde des ondes hybrides inférieures couplées et $L_s \sim M^{-1/2} H_s$ l'échelle effective du shear. Pour de grandes extensions de la région de piégeage des ondes couplées nous résolvons les équations du couplage par la méthode WKB en imposant des conditions aux limites compatibles avec la physique. L'amortissement convectif n'est plus linéaire en $(kL_s)^{-1}$, mais agit exponentiellement en $\exp \{-(kL_s)^{-1}\}$. Les valeurs propres $\gamma^{(n)}$ des taux de croissances ont alors une tendance à

s'accumuler. Le passage de la dépendance linéaire à la dépendance exponentielle en $(kL_s)^{-1}$ est associé à une réduction de la vitesse de groupe des ondes hybrides inférieures, fuyant de moins en moins vite la région de fort couplage.

1. Dérivation des équations du couplage

Le modèle du shear développé dans le chapitre II est appliqué à un plasma isotherme et homogène soumis à un champ électrique $\underline{E}_0(t)$, dirigé selon l'axe x, défini par

$$\underline{E}_0(t) = \underline{E}_0 \cos \omega_0 t, \quad (1)$$

et agissant comme pompe. Nous avons vu au chapitre III que la réponse des particules du plasma est dominée par la vitesse de dérive des électrons, qui, dans le cas du shear, s'exprime comme suit :

$$\underline{v}_D(t) = \frac{E_0}{B_0} \cos \omega_0 t \left(0, -\cos \varphi(x), \sin \varphi(x) \right). \quad (2)$$

Le couplage des ondes hybrides inférieures sera optimum pour les ondes proches de leur coupure, puisque ces ondes ont un vecteur d'onde essentiellement dans le plan de rotation du champ \underline{B}_0 , où se situe la vitesse de dérive \underline{v}_D . Notons encore que d'après les résultats du chapitre II, ce sont les ondes se propageant près de leur coupure qui sont le plus fortement affectées par le shear. La composante invariable du vecteur d'onde, \underline{k} , est choisie selon l'axe y. La géométrie de notre modèle est représentée dans la Fig. 1 ci-dessous.

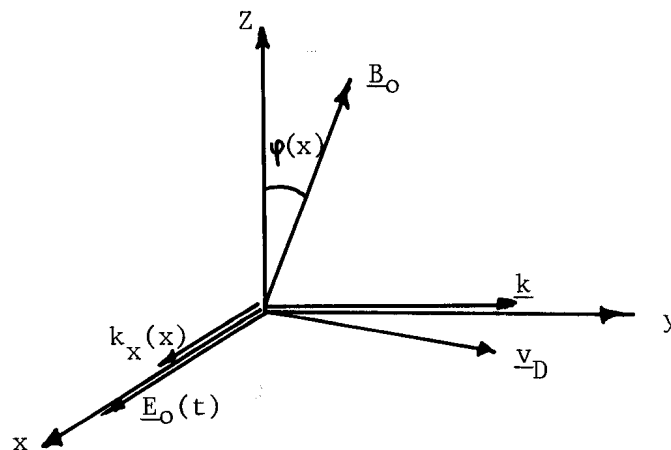


Figure 1.

Nous nous limiterons donc au couplage d'ondes hybrides inférieures proches de leur coupure, où l'angle $\varphi(x)$ se développe comme suit :

$$\varphi(x) = \varphi_c \left(1 + x/L_s\right) . \quad (3)$$

Rappelons les définitions

$$L_s \equiv \frac{2}{\pi} \varphi_c H_s \ll H_s$$

$$\varphi_c^2 \equiv \frac{\omega_o^2 - \omega_{LH}^2}{M \omega_{LH}^2}$$

puisque les ondes hybrides inférieures ont pour fréquences $\pm \omega_o$ sous les conditions OTSI. Rappelons aussi que H_s est la longueur sur laquelle le champ \underline{B}_o tourne d'un angle égal à $\pi/2$. Aussi longtemps que la fréquence ω_o est de l'ordre de ω_{LH} , $\varphi_c \ll 1$, et le facteur de couplage $\mu = \underline{k} \cdot \underline{v}_D / \omega_o$ varie à l'échelle H_s , alors que tous les phénomènes intéressants se déroulent à l'échelle L_s . Nous ferons donc l'approximation

$$\underline{v}_D(t) = - \frac{E_o}{B_o} \cos \omega_o t (0, 1, 0) . \quad (4)$$

La réponse du plasma à une perturbation de champ électrique \underline{E} est décrite à l'aide du modèle fluide défini au chapitre II par les Eqs. (30) et (31). Les trajectoires ioniques étant insensibles au champ \underline{E}_o de la pompe, les équations pour les ions s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} + \nu_i \frac{\partial n_i}{\partial t} - \gamma_i V_i^2 \nabla^2 n_i + \omega_{pi}^2 \frac{E_o}{e} (\underline{v}_D \cdot \underline{E}) = 0 , \quad (5)$$

dans le référentiel du laboratoire où la position est repérée par le vecteur \underline{r} . Dans les équations électroniques, où l'opérateur $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{v}_D \cdot \underline{\nabla})$, on élimine le terme convectif $(\underline{v}_D \cdot \underline{\nabla})$ par le changement variable

$$\underline{r} = \tilde{\underline{r}} - \frac{E_o}{\omega_o B_o} \sin \omega_o t (0, 1, 0) . \quad (6)$$

Comme au chapitre III, on définit les fonctions de la variable \tilde{r} comme suit :

$$\tilde{f}(\tilde{r}, t) = f(r, t). \quad (7)$$

Les équations électroniques se réduisent alors à une équation unique analogue à l'Eq. (5) pour les ions, mais pour les fonctions tildées :

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_e}{\partial t^2} + \nu_e \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} - \nu_e \nu_e^2 \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla}_{||} \tilde{n}_e) - \omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{e} \left[(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{E}_{||}) + \frac{1}{\omega_{ce}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{E}) \right] = 0, \quad (8)$$

où

$$\tilde{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{r}},$$

$$\tilde{\nabla}_{||} \equiv \varphi_c \left(1 + \frac{x}{L_s} \right) \tilde{\nabla}.$$

Les ondes étant électrostatiques :

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi,$$

$$\tilde{\underline{E}} = -\tilde{\nabla} \tilde{\phi},$$

$$\tilde{E}_{||} = -\varphi_c \left(1 + x/L_s \right) \tilde{\nabla} \tilde{\phi}. \quad (9)$$

Les Eqs. (5) et (8) sont résolues en faisant l'Ansatz suivant pour toutes fonctions :

$$f(r, t) = \exp[-i\omega t + ik_y y] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n, x) \exp(-in\omega_0 t)$$

$$\tilde{f}(\tilde{r}, t) = \exp[-i\omega t + ik_{\tilde{y}} \tilde{y}] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(n, x) \exp(-in\omega_0 t), \quad (10)$$

de telle sorte que $F(n, x)$ et $\tilde{F}(n, x)$ sont reliés par la transformation

$$F(n, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(\mu) \tilde{F}(m, x). \quad (11)$$

Pour simplifier la notation nous définissons

$$\omega_{\alpha}^2(n) = (\omega + n\omega_0)^2 + i\nu_{\alpha}(\omega + n\omega_0). \quad (12)$$

En substituant l'Ansatz (10) dans les Eqs. (5) et (8), nous obtenons deux systèmes d'équations différentielles en x pour les densités et les potentiels

$$\begin{aligned} \left[n_i V_i^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) - \omega_i^2(m) \right] N_i(m, x) + \omega_{pi}^2 \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi(m, x) &= 0 \\ \left[n_e V_e^2 k^2 \left(1 + \frac{x}{L_s} \right)^2 - \omega_e^2(n) \right] \tilde{N}_e(n, x) - \omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{e} \left[k^2 \left(1 + \frac{x}{L_s} \right)^2 - \frac{\omega_e^2(n)}{\omega_{ce}^2} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \tilde{\Phi}(n, x) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Nous introduisons à présent les conditions sous lesquelles nous traitons l'instabilité non-oscillante :

- 1) Nous ne retenons que les oscillations aux fréquences ω et $\omega \pm \omega_0$,
- 2) La partie réelle de ω est nulle : $\omega = i\gamma_g$,
- 3) Nous négligeons les corrections thermiques pour les ondes hybrides inférieures,
- 4) Nous traitons la composante à zéro-fréquence dans la limite des "grands nombres d'onde", définie par $\gamma_{\alpha}^2 \nu_{\alpha} \gamma_g \ll k^2 V_i^2$, $k^2 V_e^2$.

Utilisant l'équation de Poisson, exprimée dans les deux variables x et \tilde{x} :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi(n, x) &= N_i(n, x) - N_e(n, x) \\ \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}(n, x) &= \tilde{N}_i(n, x) - \tilde{N}_e(n, x), \end{aligned} \quad (14)$$

nous réduisons les Eqs. (13) au système suivant :

$$\frac{\epsilon_0}{e} \left[\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right) \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) - \frac{\omega_{pe}^2 k^2 \varphi_c^2 \left(1 + \frac{x}{L_s} \right)^2}{(\omega_0 \pm i \bar{\nu}_e)^2} \right] \tilde{\Phi}^\pm = \tilde{N}_i^\pm, \quad (a)$$

$$N_i^\pm = \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i \bar{\nu}_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi^\pm, \quad (b)$$

(15)

$$\left[1 + \lambda_D^2 \frac{T_i}{T_e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] N_i^0 = N_e^0, \quad (c)$$

$$\left[1 + \lambda_D^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \tilde{N}_e^0 = \tilde{N}_i^0, \quad (d)$$

où nous avons défini pour toute fonction : $F^\pm = F(\omega \pm \omega_0, x)$ et $F^0 = F(\omega, x)$. De plus nous avons négligé les produits $\gamma_g \nu_\alpha$, procédé à l'approximation :

$$(\omega_0 \pm i \gamma_g)^2 \pm i \nu_\alpha \omega_0 \simeq \left(\omega_0 \pm i \frac{\nu_\alpha}{2} \pm i \gamma_g \right)^2 \quad \text{et défini}$$

$$\bar{\nu}_\alpha = \frac{\nu_\alpha}{2} + \gamma_g. \quad (16)$$

En utilisant la transformation définie par l'Eq. (11), nous réduisons dans l'Appendice B les Eqs. (15) à deux équations couplées pour les potentiels $\tilde{\Phi}^\pm$, ne retenant que les contributions jusqu'à l'ordre μ^2 et négligeant les susceptibilités à haute fréquence devant les susceptibilités à zéro-fréquence. Ces équations s'écrivent :

$$\left[(1 \pm i \bar{\gamma}) \left(1 - \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) - \left(1 + \frac{x}{L_s} \right)^2 + \Delta \right] \tilde{\Phi}^\pm = \Delta \tilde{\Phi}^\mp \quad (17)$$

où

$$\Delta = \frac{\nu_D^2}{4c_s^2 (1 + T_i/T_e)} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}, \quad (18)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2(\gamma_{Lk} + \gamma_g)}{\omega_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}$$

Ici, l'amortissement Landau conduisant à l'expression de \mathcal{V}_{Lk} a été pris constant. En fait, \mathcal{V}_{Lk} est une fonction de la position x et nous corrigerons les résultats obtenus pour \mathcal{V}_{Lk} constant, ultérieurement.

Avant de passer à la résolution des équations couplées (17), nous analyserons ces équations dans l'approximation WKB définie au chapitre II. De nombreuses approximations ayant été faites pour obtenir les Eqs. (17), la méthode WKB appliquée à la relation de dispersion simplifiée, dérivée au paragraphe 3 du chapitre III, nous semble être un test nécessaire de la validité des Eqs. (17). Rappelons l'expression de la relation de dispersion simplifiée dans le cas du plasma homogène et du champ B_0 fixe :

$$\left(\frac{\omega_{LR}^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{4\mathcal{V}^2}{\omega_0^2} = \frac{\mu^2}{4} \frac{\omega_{LH}^2}{k^2 c_s^2 (1 + T_i/T_e)} \mathcal{Q} \left(\frac{\omega_{LR}^2}{\omega_0^2} - 1\right) \quad (19)$$

Cette équation est généralisée au cas du shear selon la technique décrite au chapitre II, c'est-à-dire en écrivant :

$$\omega_{LR}^2 = \omega_{LH}^2 \left[1 + \frac{M\varphi_c^2 (1 + x/L_s)^2}{1 + K^2(x)} \right], \quad (20)$$

$$K^2(x) \equiv k_x^2(x) / k^2,$$

et en remplaçant partout k^2 par $k^2 \{1 + K^2(x)\}$.

L'équation (19) peut s'écrire comme équation bicarrée pour $1 + K^2(x)$:

$$\left[1 + K^2(x)\right]^2 (1 + \bar{\nu}^2) - \mathcal{Q} \left[\left(1 + \frac{x}{L_s}\right)^2 - \Delta \right] \left[1 + K^2(x)\right] + \left(1 + \frac{x}{L_s}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{x}{L_s}\right)^2 - 2\Delta \right] = 0, \quad (21)$$

qui s'avère être la forme obtenue à partir des équations de couplage (17), auxquelles on applique l'approximation WKB. Les solutions $K^2(x)$ de l'Eq.(21) sont :

$$K_{\frac{1}{2}}^2(x) \approx \left[\left(1 + \frac{x}{L_s}\right)^2 - 1 - \Delta - \bar{\nu}^2 \right] \pm \sqrt{\Delta^2 (1 + \bar{\nu}^2) - \bar{\nu}^2 \left[\left(1 + \frac{x}{L_s}\right)^2 - \Delta \right]^2}. \quad (22)$$

Deux types de points remarquables limitent la propagation des ondes couplées. Il y a d'une part deux points miroirs situés en

$$x_{1,2} = \frac{L_s}{2} \left[\Delta \mp \sqrt{\Delta^2 - \bar{\gamma}^2} \right] \quad (23)$$

où K_2^2 s'annulent. Ces points sont obtenus en développant $(1+x/L_s)^2 \approx 1+2x/L_s$, car $x_2 \ll L_s$. A l'autre limite de la zone de propagation il existe un point de conversion x_c où le discriminant de l'Eq. (21) s'annule :

$$x_c = L_s \left\{ \left[\Delta + \frac{\Delta}{\bar{\gamma}} \sqrt{1 + \bar{\gamma}^2} \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (24)$$

Il y a propagation pour au moins une des solutions $K_1^2(x)$ lorsque $\Delta \geq \bar{\gamma}$, la zone de propagation se réduisant à un point pour $\Delta = \bar{\gamma}$, ce point étant $x = \Delta L_s/2$. Notons que l'équation $\Delta = \bar{\gamma}$ est l'expression du taux de croissance maximum, se réduisant à celle du seuil minimum pour $\gamma_g = 0$ {voir Eq. (52), chapitre III}. Il y a deux solutions propageantes lorsque $x_c > x_2$, soit lorsque $\Delta > \bar{\gamma}(1+\bar{\gamma}^2)^{1/2}$. Ces résultats sont illustrés dans la figure 2, ci-dessous.

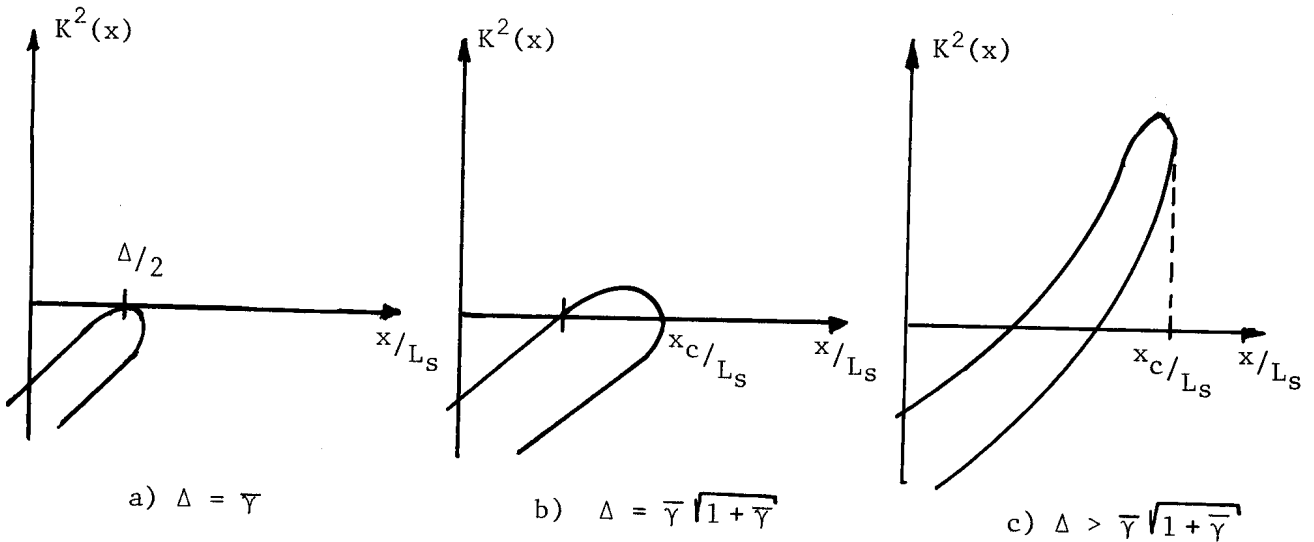


Figure 2.

La parallèle entre les résultats du cas homogène et ceux du cas du shear se fait à partir de l'écart de fréquence δ {défini au chapitre III, Eq.(47)}:

$$2\bar{\delta} = \frac{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \left[\frac{(1+x/L_s)^2}{1+K^2(x)} - 1 \right] \equiv \frac{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \bar{\delta} \quad (25)$$

La relation de dispersion (21) permet d'exprimer $\bar{\delta}$ en fonction de $K^2(x)$:

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta}{1+K^2(x)} \pm \sqrt{\left[\frac{\Delta}{1+K^2(x)} \right]^2 - \bar{\gamma}^2} \quad (26)$$

Les valeurs de $K^2(x)$ permises sont celles qui conduisent à des écarts de fréquence $\bar{\delta}$ réels, le maximum de $K^2(x)$ étant $K^2(x_c) = \frac{\Delta}{\bar{\gamma}^2} - 1$, pour lequel on atteint la valeur de $\bar{\delta}$ qui donne, dans le cas homogène, les taux de croissance maximum, c'est-à-dire : $\bar{\delta} = \bar{\gamma}$.

La région de propagation des ondes couplées, située entre x_2 et x_c est comparable à une cavité, et les solutions $\bar{\gamma}$ recherchées seront des valeurs propres discrètes. Deux méthodes seront utilisées afin de déterminer ces valeurs propres : la méthode WKB complète appliquée aux Eqs. (17) transformées en équations d'Airy autour des points limites x_1 , x_2 et x_c d'une part, et une transformation de Fourier appliquée aux Eqs. (17) linéarisées en x d'autre part {23,27}.

2. Résolution des équations du couplage par la méthode WKB

Les solutions WKB des Eqs. (17) étant valables asymptotiquement, nous supposons, dans ce paragraphe, $\Delta \gg \bar{\gamma}^2$. Au voisinage des points limites x_1 , x_2 et x_c , où les solutions WKB ne sont pas valables, on peut linéariser les Eqs. (17) qui se réduisent alors à des équations d'Airy. L'élimination des solutions non-physiques à l'extérieur de la zone de propagation détermine le rapport des amplitudes des ondes incidentes et réfléchies en chaque point limite. Les solutions d'Airy sont identifiées aux solutions WKB au centre de la zone de propagation. Il en résulte une équation intégrale aux valeurs propres, les valeurs propres étant les solutions $\bar{\gamma}$.

Linéarisant les Eqs. (17) pour $x \ll L_s$, et négligeant l'action des opérateurs $\frac{d}{dx}$ sur les coefficients en $\frac{x}{L_s}$, nous obtenons les deux équations d'Airy:

$$\left[\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} + K_1^2(x) \right] \tilde{\Phi}_1^\pm = 0, \quad (27)$$

$$\left[\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} + K_2^2(x) \right] \tilde{\Phi}_2^\pm = 0,$$

sachant que $\tilde{\Phi}^\pm = \tilde{\Phi}_1^\pm + \tilde{\Phi}_2^\pm$ et $K_{1,2}^2(x) \simeq \frac{2(x - x_{1,2})}{L_s}$, dans la limite $\Delta \gg \bar{\eta}$, $\bar{\eta}^2 \ll 1$. Le rejet des solutions exponentiellement croissantes pour $x \ll x_{1,2}$, conduit à des solutions d'Airy propageantes qui prennent la forme :

$$\tilde{\Phi}^\pm = A \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \int_{x_1}^x K_1(x') dx'\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \int_{x_2}^x K_2(x') dx'\right), \quad (28)$$

où les amplitudes A et B, proportionnelles à $K_{1,2}^{-\frac{1}{2}}$ respectivement, n'ont pas à être spécifiées.

Dans le voisinage du point de conversion $x_c \gg L_s$, nous approximons les Eqs. (17) par :

$$\left[\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{x}{L_s}\right)^2 - \Delta \pm i \bar{\eta} \frac{x^2}{L_s^2} \right] \tilde{\Phi}^\pm = -\Delta \tilde{\Phi}^\mp, \quad (29)$$

ayant remplacé $\frac{\bar{\eta}}{k^2} \frac{d^2}{dx^2}$ par sa solution WKB, valable lorsque $x \gg L_s$. Négligeant toujours l'action des opérateurs sur les coefficients en x/L_s , les équations (29) se réduisent à l'équation unique :

$$\left\{ \left[\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{L_s^2} - \Delta\right) \right]^2 + \bar{\eta}^2 \frac{x^4}{L_s^4} - \Delta^2 \right\} \tilde{\Phi}^\pm = 0. \quad (30)$$

Dans cette limite les solutions (22) s'écrivent

$$K_2^2(x) \simeq \left[\frac{x^2}{L_s^2} - \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \bar{\eta}^2 x^4 / L_s^4} \right]^{1/2}, \quad (31)$$

ce qui nous suggère de chercher aux alentours de $x_c \approx L_S \sqrt{\Delta/\gamma}$, des solutions pour $\tilde{\Phi}^\pm$ de la forme :

$$\tilde{\Phi}^\pm = S_1(x) e^{i\psi(x)} + S_2(x) e^{-i\psi(x)} \quad (32)$$

$$\psi(x) \equiv k \int_{x_c}^x \sqrt{\frac{x'^2}{L_S^2} - \Delta} \cdot dx' ,$$

où $\psi(x)$ représente la partie WKB de la solution.

Négligeant alors les termes $\frac{d^2 S}{dx^2}$ et $S \frac{d^2 \psi}{dx^2}$ devant les termes $\frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dS}{dx}$, nous approximations l'opérateur agissant sur $S_{1,2} e^{\pm i\psi}$ par :

$$\left[\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{L_S^2} - \Delta \right) \right] S_{1,2} e^{\pm i\psi} \approx \pm \frac{2ie^{\pm i\psi}}{k^2} \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d}{dx} S_{1,2} \quad (33)$$

Nous linéarisons l'Eq. (30) autour de x_c et obtenons l'équation d'Airy recherchée :

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2 S_{1,2}}{dx^2} - \bar{\eta}^2 \frac{x_c}{L_S} \left(\frac{x-x_c}{L_S} \right) S_{1,2} = 0 \quad (34)$$

La solution non-physique, exponentiellement croissante pour $x \gg x_c$ étant éliminée, les solutions d'Airy dans la région $x < x_c$ sont :

$$S_1(x) = \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \sin \left[\frac{\bar{\eta}}{4} + k \int_{x_c}^x \bar{\eta} \sqrt{\frac{x_c(x_c-x')}{L_S^2}} dx' \right] \quad (35)$$

Reconnaissant dans l'intégrant de l'Eq. (35) le développement du radical des solutions $K_1(x)$ données par l'Eq. (31), nous écrivons les solutions (32) pour $\tilde{\Phi}^\pm$ sous la forme :

$$\tilde{\Phi}^\pm = C \left\{ \exp \left[ik \int_{x_c}^x K_2(x') dx' - i \frac{\bar{\eta}}{4} \right] + \exp \left[ik \int_{x_c}^x K_1(x') dx' + i \frac{\bar{\eta}}{4} \right] \right\} \quad (36)$$

$$+ D \left\{ \exp \left[-i \int_{x_c}^x k K_1(x') dx' - i \frac{\bar{\eta}}{4} \right] + \exp \left[-ik \int_{x_c}^x K_2(x') dx' + i \frac{\bar{\eta}}{4} \right] \right\}$$

Ayant obtenu les solutions pour $\tilde{\Phi}^{\pm}$ dans les deux régions extrêmes de la zone de propagation, nous extrapolons ces résultats à la région intermédiaire. Identifiant les solutions sur chaque branche ($K_1(x)$ et $K_2(x)$), et imposant des rapports identiques d'ondes "progressives et rétrogrades" pour les solutions obtenues à partir des Eqs. (28) et (36), nous obtenons l'équation intégrale aux valeurs propres suivante :

$$I \equiv k \int_{x_1}^{x_c} K_1(x) dx - k \int_{x_2}^{x_c} K_2(x) dx = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (37)$$

où n est un entier qui détermine le nombre de noeuds dans la zone de propagation.

Les intégrales de l'Eq. (37) ne peuvent être résolues analytiquement qu'au prix d'approximations sur l'intégrant. Nous définissons le changement de variables $\xi \equiv (1 + x/L_g)^2 - 1$. Alors sous les conditions $\Delta \gg \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^2 \ll 1$, les solutions (22) s'écrivent :

$$K_{\frac{1}{2}}(\xi) = \left\{ (\xi - \Delta) \pm \sqrt{\Delta^2 - \bar{\gamma}^2 \xi^2} \right\}^{1/2}, \quad (38)$$

et les points limites ont pour expressions approchées

$$\xi_1 \simeq 0$$

$$\xi_2 \simeq 2\Delta$$

$$\xi_c \simeq \Delta / \bar{\gamma},$$

sachant que par sa définition $\Delta < 1$.

L'intégrale I est alors séparée en trois parties :

$$\begin{aligned}
 I_1 &\equiv k \int_{x_1}^{x_2} K_1(x) dx \simeq \frac{kL_s}{2} \int_0^{2\Delta} \sqrt{\xi} d\xi \\
 I_2 &\equiv k \int_{x_2}^{\sqrt{2}-1} \left[\frac{K_1^2(x) - K_2^2(x)}{K_1(x) + K_2(x)} \right] dx \simeq \frac{\Delta k L_s}{2} \int_{2\Delta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \\
 I_3 &\equiv k \int_{\sqrt{2}-1}^{x_c} \left[\frac{K_1^2(x) - K_2^2(x)}{K_1(x) + K_2(x)} \right] dx \simeq \frac{\bar{\gamma} k L_s}{2} \int_1^{\xi_c} \frac{\sqrt{\xi_c^2 - \xi^2}}{\xi} d\xi
 \end{aligned} \tag{39}$$

où nous avons fait les approximations suivantes : pour $\xi < 1$ nous avons négligé ξ devant 1 et pour $\xi > 1$ nous avons négligé 1 devant ξ ; pour $\xi > 2\Delta$ nous avons négligé Δ devant ξ . L'équation aux valeurs propres (37) est alors :

$$1 - \frac{2}{3} \sqrt{2\Delta} + \text{Ln} \left(\frac{2\Delta}{\bar{\gamma}^{(n)}} \right) = \frac{(2n+1)\pi}{\Delta k L_s} \tag{40}$$

où $\bar{\gamma}^{(n)}$ est la n^{ième} valeur propre. Considérons Δ suffisamment grand devant $\bar{\gamma}^{(n)}$ de telle sorte que le logarithme domine dans le membre gauche de l'équation (40). Les valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$ obtenus dans cette limite :

$$\bar{\gamma}^{(n)} = 2\Delta \exp \left[- \frac{(2n+1)\pi}{\Delta k L_s} \right] \tag{41}$$

ont un point d'accumulation en $\bar{\gamma} = 0$, soit $\gamma_g = -\gamma_{Lk}$, lorsque l'entier $n \rightarrow \infty$. Cette accumulation n'est cependant qu'une tendance, car le point d'accumulation lui-même sort du domaine de validité du calcul, puisqu'il correspond à $x_c/L_s \rightarrow \infty$.

En effet, la linéarisation de $\varphi(x)$ autour de φ_c est valable tant que $x \ll H_s$, soit $\sqrt{\Delta/\bar{\gamma}} \ll \sqrt{M}$, ce qui limite le logarithme dans l'équation (40) et donc le second membre de cette équation à des valeurs inférieures à 9, pour un plasma de deutérium.

Le résultat (41) peut être considéré comme l'expression des valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$ soit à grands n , soit à petites valeurs de $\Delta k L_S$. L'accumulation des valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$ sera donc effective dans la limite des grandes valeurs de $\Delta k L_S$ pour grands n . Le mode fondamental, ayant pour valeur propre $\bar{\gamma}^{(0)}$, est le plus instable. Il sera décrit par le résultat (41) dans la limite des valeurs $\Delta k L_S \approx 1$: l'effet du shear sera donc violent dans cette limite.

Lorsque $L_S \rightarrow \infty$, nous devons retrouver le résultat du plasma plongé dans un champ B_0 fixe. Notons que la méthode WKB employée s'applique aussi longtemps que : $\frac{dk_x}{dx} \ll k_x^2$, qui est une condition sur $k L_S$ à ξ fixé :

$$k L_S \gg \frac{1 + \frac{\bar{\eta}^2 (\xi - \Delta + 1)}{\sqrt{\Delta^2 (4 + \bar{\eta}^2) - \bar{\eta}^2 (\xi - \Delta + 1)^2}}}{k_1^{\frac{3}{2}}(\xi)} \sqrt{\xi + 1} \quad (42)$$

On vérifie donc bien la non-validité de la méthode WKB aux points limites. Ces points limites peuvent cependant être approchés d'autant plus près par les solutions WKB que $k L_S$ est plus grand. Il existe donc une valeur de $k L_S$ arbitrairement grande telle que la condition intégrale (37) se réduise à :

$$\frac{k L_S}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} k_1(\xi) \sqrt{1 + \xi} d\xi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (42)$$

$$\xi_1 = \Delta + \sqrt{\Delta^2 - \bar{\eta}^2},$$

et lorsque $L_S \rightarrow \infty$, l'intégrale doit tendre vers zéro, soit $\xi_1 \rightarrow \xi_2$, ce qui nous ramène à l'expression des taux de croissance maximum obtenue dans le cas du champ B_0 fixe, s'écrivant :

$$\Delta = \bar{\eta}. \quad (43)$$

Nous allons retrouver cette limite, dans le paragraphe suivant, où nous appliquerons la méthode de la transformée de Fourier aux équations (17) linéarisées { 27 }.

3. Résolution des équations du couplage par transformée de Fourier

Supposant $x \ll L_s$, nous linéarisons les équations du couplage (17)

$$\left[-(1 \pm i\bar{\eta}) \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{2\xi}{kL_s} + \Delta \pm i\bar{\eta} \right] \tilde{\Phi}^{\pm} = \Delta \tilde{\Phi}^{\mp}, \quad (44)$$

$$\xi = kx.$$

Définissons la transformée :

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik\xi} f(k), \quad (45)$$

et appliquons-la aux équations du couplage; nous obtenons :

$$\left[(1 \pm i\bar{\eta})k^2 + \Delta \pm i\bar{\eta} - \frac{2i}{kL_s} \frac{d}{dk} \right] \tilde{\Phi}^{\pm}(k) = \Delta \tilde{\Phi}^{\mp}(k). \quad (46)$$

Simplifions ces équations en définissant une nouvelle fonction $\tilde{\Psi}^{\pm}(k)$:

$$\tilde{\Phi}^{\pm}(k) = \tilde{\Psi}^{\pm}(k) \exp \left\{ -\frac{ikL_s}{2} \int_0^k dk' [\Delta \pm i\bar{\eta} + k'^2(1 \pm i\bar{\eta})] \right\}, \quad (47)$$

d'où

$$\begin{aligned} -\frac{2i}{kL_s} \frac{d\tilde{\Psi}^+}{dk} &= \Delta \tilde{\Psi}^- \exp \left\{ -kL_s \bar{\eta} \int_0^k dk' [1+k'^2] \right\}, \\ -\frac{2i}{kL_s} \frac{d\tilde{\Psi}^-}{dk} &= \Delta \tilde{\Psi}^+ \exp \left\{ kL_s \bar{\eta} \int_0^k dk' [1+k'^2] \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Eliminons $\tilde{\psi}^-$ entre ces deux équations :

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}^+}{dk^2} + \bar{\gamma} k L_s (1+k^2) \frac{d\tilde{\psi}^+}{dk} + \left(\frac{k L_s}{2}\right)^2 \Delta^2 \tilde{\psi}^+ = 0 . \quad (49)$$

La dérivée première de l'Eq. (49) est éliminée en définissant

$$\tilde{\psi}^+(k) = \psi(k) \exp \left[-\frac{\bar{\gamma} k L_s}{2} \int^k dk' (1+k'^2) \right] , \quad (50)$$

d'où l'équation de Schrödinger

$$\frac{d^2 \psi}{dk^2} + A(k) \psi = 0 \quad (51)$$

$$A(k) \equiv \left(\frac{k L_s}{2}\right)^2 \left[\Delta^2 - \bar{\gamma}^2 (1+k^2)^2 \right] - k L_s \bar{\gamma} k .$$

Nous appliquons la méthode WKB pour résoudre l'équation (51) dont les solutions sont alors de la forme :

$$\psi(k) = \varphi \exp \left[\pm i \int^k A^{1/2}(k') dk' \right] . \quad (52)$$

Dans ce paragraphe, nous limitons notre étude aux valeurs de Δ proches de $\bar{\gamma}$, obtenues pour $k L_s$ "grand". Les racines de $A(k)$, obtenues pour $k \ll 1$, ce qui nous permet d'éliminer le terme en k^4 , sont au nombre de deux; appellons-les K_1 et K_2 . Pour que la transformée de Fourier, Eq. (45), existe, il faut que les fonctions $\psi(k)$ aient un bon comportement à l'infini. Il faut donc rejeter les solutions exponentiellement croissantes de $\psi(k)$ pour $k < K_1$ et $k > K_2$, ce qui conduit comme dans le paragraphe précédent à l'équation aux valeurs propres :

$$\int_{K_1}^{K_2} A^{1/2}(k) dk = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi , \quad (53)$$

qui n'est autre que la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld { 27 }. Définissons la variable $\tilde{K} = K + 1/(kL\bar{\gamma})$, alors $A(K)$ s'annule pour les deux valeurs symétriques

$$\tilde{K}_2 = \mp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{\bar{\gamma}^2} - 1 \right) + \frac{1}{k^2 L_S^2 \bar{\gamma}^2} \right]^{1/2}, \quad (54)$$

et possède un maximum positif à l'origine. L'intégrale (53) est alors :

$$\frac{k L_S \bar{\gamma}^{(n)}}{\sqrt{2'}} \int_{-\tilde{K}_2}^{+\tilde{K}_2} \sqrt{\tilde{K}_2^2 - \tilde{K}^2} d\tilde{K} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (55)$$

qui dans la limite $L_S \rightarrow \infty$ ($\bar{\gamma}$ fini) impose $\tilde{K}_2 = 0$, soit $\Delta = \bar{\gamma}$, qui est le résultat obtenu dans le cas du champ B_0 fixe pour les taux de croissance maxima. Les corrections en kL_S à ce résultat sont obtenus dans la limite $\Delta kL_S \gg 1$:

$$\bar{\gamma}^{(n)} = \Delta - \frac{(2n+1)\sqrt{2'}}{kL_S} \quad (56)$$

Le terme en $1/kL_S$ est assimilable à un amortissement puisqu'il réduit les taux de croissance à pompe fixée au même titre que γ_{Lk} : nous l'appellerons amortissement convectif (convective damping).

4. Discussion des résultats

Les valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$, obtenues dans les deux limites ont été dérivées en supposant constant l'amortissement naturel γ_{Lk} des ondes hybrides inférieures. L'effet de la variation de γ_{Lk} selon x est à présent traité comme un effet d'ordre supérieur. Nous admettons les points miroirs et le point de conversion donnés par les résultats obtenus pour γ_{Lk} constant et nous définissons un amortissement moyen $\langle \bar{\gamma}_{Lk} \rangle$ pris sur la région de propagation :

$$\langle \bar{\gamma}_{LR} \rangle = \frac{1}{x_c} \int_0^{x_c} dx \bar{\gamma}_{LR}(x),$$

$$\bar{\gamma}_{LR}(x) = \frac{\gamma_{LR}(x)}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}, \quad (57)$$

où nous avons admis que les points miroirs sont en $x = 0$. Supposant $\frac{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2} > \frac{T_i}{T_e}$, nous nous limiterons à l'amortissement Landau sur les électrons. L'amortissement γ_{Lk} donné au chapitre II, Eq. (27) est généralisé au cas du plasma plongé dans un champ B_0 cisailé par l'approximation WKB :

$$\gamma_{LR}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{LH}^2)}{2 \omega_{pi}^3 M^{3/2} k^3 \lambda_D^3 \varphi_c^3 (1 + \frac{x}{L_S})^3} \exp \left[- \frac{\omega_0^2}{2 M \omega_{pi}^2 k^2 \lambda_D^2 \varphi_c^2 (1 + \frac{x}{L_S})^2} \right] \quad (58)$$

Introduisant $\gamma_{Lk}(x)$ dans l'équation (57), nous obtenons, dans la limite $x_c \gg L_S$, l'expression suivante pour l'amortissement moyen :

$$\langle \bar{\gamma}_{LR} \rangle = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}^{(m)}}{\Delta}} \bar{\gamma}_{LR}(0) \left[\frac{\omega_{pi}^2 k^2 \lambda_D^2 M \varphi_c^2}{\omega_0^2} \right] \left\{ \exp \left[\frac{\omega_0^2}{2 \omega_{pi}^2 k^2 \lambda_D^2 M \varphi_c^2} \left(1 - \frac{\bar{\gamma}^{(m)}}{\Delta} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (59)$$

Ici $\bar{\gamma}_{Lk}(0)$ est l'amortissement en $x = 0$. Notons que l'expression (59) sera une bonne approximation de l'amortissement effectif lorsque $\gamma_g > \gamma_{Lk}(x_c)$.

Afin de vérifier les résultats pour $\bar{\gamma}^{(n)}$ dérivés dans les deux paragraphes précédents nous avons procédé à un traitement numérique de l'équation aux valeurs propres (37) dans la limite $\Delta, \bar{\gamma} \ll 1$, mais $\Delta/\bar{\gamma}$ fini. Introduisons :

$$d = \bar{\gamma} / \Delta, \quad (60)$$

alors les points limites sont :

$$\frac{X_{1,2}}{L_s} \approx \frac{\Delta}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \alpha^2} \right] \ll 1 \quad (60)$$

$$\frac{X_c}{L_s} \approx \frac{1 - \alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha'}} \quad (61)$$

Dans ce cas l'intégrale est indépendante de Δ et l'équation (37) peut se récrire :

$$\int_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\sqrt{\alpha'}}} dy \sqrt{\frac{1-\alpha^2(1+y)^4}{y(y+2)}} = \frac{(\mathcal{L}_{n+1})\tilde{\pi}}{2\Delta k L_s} \quad (62)$$

Nous constatons que les résultats précédents pour $\bar{\gamma}^{(n)}$ sont bien reproduits par l'équation (62). En particulier la correction autour de $\alpha \approx 1$:

$$\int_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\sqrt{\alpha'}}} dy \sqrt{\frac{1-\alpha^2-4\alpha^2 y}{2y}} \approx \frac{1-\alpha}{\sqrt{2'}} \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} = (1-\alpha) \frac{\sqrt{2'}}{4} \tilde{\pi}, \quad (63)$$

est bien celle obtenue par la méthode de la transformée de Fourier, et la limite $L_s \rightarrow \infty$ livre le résultat du cas du champ B_0 fixe.

Les résultats numériques de l'équation (62) sont présentés ci-dessous dans la figure 3.

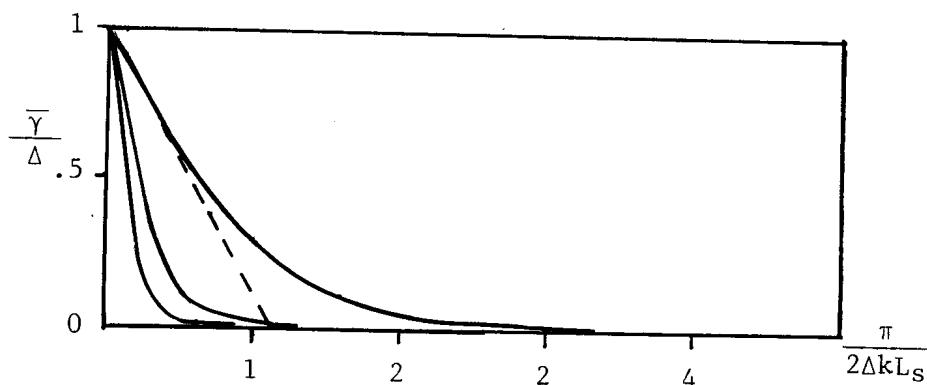
La dépendance linéaire de $\bar{\gamma}^{(n)}/\Delta$ en fonction de $\Pi(2 k L_s)^{-1}$ pour $\bar{\gamma}^{(n)} \approx \Delta$ est en accord avec le résultat (56) jusqu'en $\bar{\gamma}^{(n)}/\Delta < .7$. La droite, tracée pour $n = 0$, dans la figure 3 représente le résultat analytique (56). Pour $\bar{\gamma}^{(n)}/\Delta < .25$ nous retrouvons la dépendance exponentielle donnée par l'équation (41), à une constante additive près. Effectivement, les résultats numériques conduisent à :

$$\ln \left(\frac{\Delta}{\bar{\gamma}^{(n)}} \right) = \frac{(\mathcal{L}_{n+1})\tilde{\pi}}{\Delta k L_s} - 1.08 \quad (64)$$

pour $\bar{\gamma}^{(n)}/\Delta < .25$, alors que l'équation (40) donne

$$\ln\left(\frac{\Delta}{\bar{\gamma}^{(n)}}\right) = \frac{(2n+1)\pi}{\Delta k L_S} - 1.69, \quad (65)$$

lorsque $\Delta \ll 1$. Pour les valeurs intermédiaires $.7 < \bar{\gamma}^{(n)}/\Delta < .25$, il y a transition continue entre les résultats linéaire et exponentiel, sans accident.



Résultats numériques: valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}/\Delta$ obtenus dans la limite $\Delta, \bar{\gamma}^{(n)} \ll 1$. Les nombres 0, 1, 2 numérotent les valeurs propres pour $n = 0, 1, 2$. La droite en pointillés est le résultat analytique (56) pour $n = 0$.

Figure 3

Le seuil d'instabilité est atteint lorsque $\bar{\gamma}^{(0)} = \langle \bar{\gamma}_{Lk} \rangle$. Si $\Delta \approx \langle \bar{\gamma}_{Lk} \rangle$ seules les grandes valeurs de k seront instables. L'effet du shear est donc de stabiliser les petites valeurs de k . Cette stabilisation est générale dans le cas d'instabilités absolues {23,24,27}. Cependant, c'est

à notre connaissance la première fois, dans le domaine des instabilités paramétriques, que l'on voit une décroissance exponentielle des valeurs propres en fonction de l'amortissement convectif et leur accumulation subséquente pour grands n . Les instabilités de la MHD idéale connaissent des spectres avec point d'accumulation des valeurs propres { 34 }. Dans notre cas une interprétation en terme de vitesse de groupe peut expliquer la réduction plus faible que la réduction linéaire des valeurs propres pour kL_s décroissant. La vitesse de groupe selon x , v_{gx} est obtenue dans l'approximation WKB appliquée à la relation de dispersion des ondes hybrides inférieures :

$$v_{gx}(x) \equiv \frac{\partial \omega_0}{\partial k_x(x)} = \frac{\omega_{LH}^2 - \omega_0^2}{\omega_0} \cdot \frac{k_x(x)}{k^2 + k_x^2(x)} \quad (66)$$

Lorsque $k_x < k$, v_{gx} croit linéairement avec k_x , passe par un maximum en $k_x = k$ et décroît en $1/k_x$ pour des valeurs plus grandes de k_x . Dans le domaine où v_{gx} est une fonction linéaire de k_x , les valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$ sont des fonctions linéaires de l'amortissement convectif $(2n + 1)/kL_s$. Ce régime classique a été interprété en définissant l'amortissement convectif comme l'inverse du temps de vol τ des ondes dans la région de fort couplage, soit :

$$\tau = 2 \int_{\Delta x} \frac{dx}{v_{gx}(x)} \quad (67)$$

où Δx est la longueur sur laquelle k_x varie de zéro à k { 23 }. Ce modèle n'est cependant valable que si v_{gx} continue à croître linéairement avec k_x pour $k_x > k$. Les ondes hybrides voyant leur vitesse de groupe décroître pour $k_x > k$ sont donc ralenties et la convection de l'énergie est réduite, ce qui se traduit par une décroissance moindre des valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$.

En conclusion, la nature-même des ondes hybrides inférieures conduit à un résultat nouveau à notre connaissance dans le domaine des instabilités paramétriques absolues : un spectre de modes discrets avec point d'accumulation de valeurs propres $\bar{\gamma}^{(n)}$ pour n infini.

V INSTABILITE DE DESINTEGRATION DANS UN PLASMA INHOMOGENE

Nous avons vu, au chapitre III, que l'instabilité de désintégration se produit dans deux régimes : le régime des quasi-modes pour $\omega_0 < 3\omega_{LH}$ et le régime résonnant pour $\omega_0 > 3\omega_{LH}$. Dans un plasma inhomogène le régime des quasi-modes se produira donc pour des valeurs élevées de la densité, tandis que le régime résonnant aura lieu dans la région de faible densité où la fréquence ω_{LH} locale est bien inférieure à la fréquence ω_0 de la pompe. Dans la plupart des Tokomaks le profil de densité est presque plat au centre du plasma et le gradient de densité est maximum dans la région périphérique. Dans les expériences de chauffage par ondes hybrides inférieures, où la fréquence ω_0 est de l'ordre de ω_{LH} au centre du plasma, le régime résonnant se produit donc dans la région où le gradient de densité est maximum. Le seuil d'instabilité non-oscillante étant plus élevé que celui de l'instabilité de désintégration, nous nous limiterons à l'étude de cette dernière.

Une question fondamentale est la nature absolue ou convective des instabilités dans un plasma inhomogène comme l'ont indiqué plusieurs auteurs {23,24,35,36}. L'argument étant que l'amplitude des ondes de désintégration est limitée par des effets non-linéaires pour une instabilité absolue et par la convection linéaire de l'énergie dans le cas d'une instabilité convective. On s'attend donc en général, à ce que le niveau final des amplitudes soit plus élevé pour les instabilités absolues.

Dans un plasma homogène, l'instabilité de désintégration est produite par une interaction à trois ondes, dont la pompe. Elle se produit lorsque les règles de sélection sur les fréquences et les vecteurs d'ondes sont satisfaites, voir chapitre III, Eq. (1). Dans un plasma inhomogène selon x , une composante $k_x(x)$ s'ajuste et l'interaction forte entre les ondes est localisée au voisinage de points x où les règles de sélection sont vérifiées. Une onde de désintégration incidente sur ces régions d'interaction forte est amplifiée en les traversant, puis elle s'échappe : nous dirons qu'il y a

convection après l'amplification. L'instabilité de désintégration en une onde plasma électronique et une onde acoustique dans un gradient de densité a été analysée par Perkins et Flick { 23 }. Ils ont montré que cette instabilité, de nature convective, produit une amplification maximum lorsque les ondes interagissent près de leur coupure. Ce résultat a été obtenu en ne tenant compte que du satellite inférieur de la pompe, oscillant à $\omega - \omega_0$, et de la basse fréquence ω . Le satellite supérieur, oscillant à $\omega + \omega_0$, a été négligé et il a été admis qu'aucune réflexion des ondes amplifiées n'avait lieu. Cette simplification se justifie pour les ondes plasma électroniques, où le satellite supérieur est dans la région d'évanescence de la pompe, mais non dans le cas des ondes hybrides inférieures.

Nous montrons que l'inclusion du satellite supérieur de la pompe peut conduire à une instabilité absolue. Le mécanisme est le suivant. Une onde acoustique, de fréquence ω , interagit fortement avec le satellite inférieur de la pompe, de fréquence $\omega - \omega_0$, au voisinage d'un point x_1 que nous appelons LSBIR (lower sideband interaction region). Lorsqu'elle se propage vers des densités plus élevées, elle va interagir ensuite avec le satellite supérieur de la pompe de fréquence $\omega + \omega_0$ au voisinage d'un point x_2 que nous appellerons USBIR (upper sideband interaction region). Cette onde acoustique, se propageant entre ces deux régions, séparées par une distance $\Delta x = x_1 - x_2$, est réfléchie dans la région USBIR. De plus cette onde acoustique incidente sur la région LSBIR a pour produits une composante acoustique transmise amplifiée, et une composante hybride inférieure à $\omega - \omega_0$ se propageant hors du système. En conséquence, la zone limitée par les points x_1 et x_2 agit comme un laser émettant des ondes acoustiques et des ondes hybrides inférieures selon le mode satellite inférieur, lorsqu'un seuil d'intensité de pompe est atteint. Ce seuil est atteint lorsque le produit de l'amplification en LSBIR et de la réflexion en USBIR compense l'amortissement naturel des ondes acoustiques au cours d'un aller-retour à travers la cavité laser.

Dans un premier paragraphe, nous dérivons les équations différentielles du couplage entre les ondes hybrides inférieures et acoustiques dans un gradient de densité. Les deux régions, USBIR et LSBIR, sont traitées séparément,

supposant leur extension petite devant la distance Δx les séparant. Dans un second paragraphe nous connectons les amplitudes des ondes se propageant autour de chaque région d'interaction forte, en résolvant les équations de couplage à l'aide de transformées. Dans le troisième paragraphe nous obtenons les valeurs propres caractérisant les ondes acoustiques propageantes entre x_1 et x_2 .

1. Dérivation des équations du couplage

Considérons un plasma dont la densité d'équilibre est une fonction de x :

$$n_o(x) = n_o \left(1 - x/H_n \right) \quad (1)$$

où H_n est l'échelle de variation de la densité et n_o est la densité en $x=0$. Le plasma est plongé dans un champ magnétique \underline{B}_o fixe dirigé selon z . Le champ électrique de la pompe $\underline{E}_o(t)$ dirigé selon y produit la vitesse de drift électronique $\underline{v}_D(t)$ responsable du couplage :

$$\underline{v}_D(t) = \frac{E_o}{B_o} \cos \omega_o t \ (0, -1, 0). \quad (2)$$

La réponse du plasma à une perturbation de champ électrique \underline{E} est décrite par le modèle fluide défini au chapitre II, Eqs. (3) et (31). Ecrivons les équations ioniques dans le référentiel du laboratoire sans effets collisionnels pour le moment :

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - n_i V_i^2 \nabla^2 n_i + \omega_{pi}^2(x) \frac{\epsilon_o}{e} (\underline{\nabla} \cdot \underline{E}) = 0, \quad (3)$$

et les équations électroniques dans le référentiel où les électrons oscillent sous l'influence de la pompe :

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_e}{\partial t^2} - n_e V_e^2 \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{\nabla}_z \tilde{n}_e \right) - \omega_{pe}^2(x) \frac{\epsilon_o}{e} \left[(\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{E}}_z) + \frac{1}{\omega_{ce}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{E}}) \right] = 0. \quad (4)$$

Les variables et les fonctions tildées ont les mêmes définitions qu'au chapitre IV, Eqs. (6), (7). Nous continuons à utiliser la méthode et les définitions du chapitre IV, Eqs. (10) à (13), ainsi que l'équation de Poisson (14), qui nous permet d'éliminer le potentiel électrique pour obtenir les équations couplées suivantes pour les densités perturbées :

$$\begin{aligned} \left[\omega_{pi}^2(x) - (\omega + n\omega_0)^2 + \eta_i V_i^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] N_i(n, x) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \omega_{pi}^2(x) J_{p-n}(\mu) \tilde{N}_e(p, x) \\ \left\{ \omega_{pe}^2(x) k_z^2 - \left[\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega_{ce}^2} \right) (\omega + n\omega_0)^2 - \eta_e k_z^2 V_e^2 \right] \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right\} \tilde{N}_e(n, x) & \quad (5) \\ = \left[\omega_{pe}^2(x) k_z^2 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega_{ce}^2} (\omega + n\omega_0)^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}(-\mu) N_i(p, x), \end{aligned}$$

où $k^2 = k_y^2 + k_z^2$. Nous ne retenons que les oscillations aux fréquences ω et $\omega \pm \omega_0$, négligeant les termes de température pour les ondes hybrides inférieures aux fréquences $\omega \pm \omega_0$. Les fonctions de Bessel sont développées pour $\mu < 1$. Une procédure analogue à celle développée dans l'Appendice B est alors appliquée aux équations (5), où l'on néglige les susceptibilités à haute fréquence devant les susceptibilités à basse fréquence dans les termes de couplage. Nous obtenons les équations du couplage à quatre modes pour les densités électroniques seules :

$$\begin{aligned} \left[\omega^2 - c_s^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \tilde{N}_e^0 &= \frac{\mu}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{1 - \omega_{pi}^2/\omega_0^2} (\tilde{N}_e^- - \tilde{N}_e^+) \\ \left\{ \left[1 - \frac{\omega_{LH}^2(x)}{(\omega \pm \omega_0)^2} \right] \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) - \frac{\omega_{LH}^2(x)}{(\omega \pm \omega_0)^2} M k_z^2 \right\} \tilde{N}_e^\pm &= \mp \frac{\mu}{2} \left[\frac{1 - \omega_{pi}^2/\omega_0^2}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2} \right] \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{N}_e^0, \end{aligned} \quad (6)$$

où nous avons supposé $T_i \ll T_e$, approximé $(\omega \pm \omega_0)^2$ par ω_0^2 dans les membres de droite où nous avons aussi négligé les dépendances en x , admettant leurs effets négligeables pour le couplage, mais déterminants pour les caractéristiques de propagation des ondes.

Le traitement de la désintégration résonnante est valable dans le domaine $\omega_0 \gg \omega_{LH}(x)$, ce qui permet de négliger l'effet de la résonance hybride inférieure dans le premier terme de la seconde équation (6). Linéarisons la fréquence $\omega_{LH}^2(x)$ autour de $x = 0$:

$$\omega_{LH}^2(x) = \omega_{LH}^2 \left(1 - x/H_n \right), \quad (7)$$

et posons : $\omega = kc_s + \delta\omega$

$$\omega_0 = \omega_{LH} \sqrt{M} k_z / k \quad (8)$$

$$\delta\omega = \delta\omega_r + i\gamma.$$

Nous nous intéressons au voisinage de la coupure des ondes considérées et faisons les hypothèses suivantes :

$$|\delta\omega| \ll kc_s$$

$$|x| \ll H_n$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} \tilde{N}_e \ll \tilde{N}_e \quad (9)$$

que nous vérifierons après l'obtention des résultats. Nous introduisons phénoménologiquement l'amortissement naturel des ondes en remplaçant ω par $\omega + i\gamma_a$ et $\omega \pm \omega_0 + i\gamma_{Lk}$ où γ_a et γ_{Lk} sont définis positifs. Définissons une position normalisée

$$\xi = kx. \quad (10)$$

Les équations du couplage (6) prennent à présent la forme simplifiée :

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2(\delta\omega + i\gamma_a)}{kc_s} \right] \tilde{N}_e^0 = \frac{\mu}{2} \frac{\omega_{pi}^2 / k^2 c_s^2}{1 - \omega_{pi}^2 / \omega_0^2} (\tilde{N}_e^- - \tilde{N}_e^+) \quad (11)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\xi}{kH_n} \mp \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{Lk})}{\omega_0} \right] \tilde{N}_e^\pm = \pm \frac{\mu}{2} \frac{1 - \omega_{pi}^2 / \omega_0^2}{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_0^2} \tilde{N}_e^0$$

Les deux satellites de la pompe sont supposés interagir indépendamment avec l'onde acoustique. Une analyse dans l'approximation WKB donne une première sensation du comportement des ondes. Toute amplitude $\tilde{N}_e(\xi)$ est supposée de la forme : $\exp \left[i \int^{\xi} K(\xi') d\xi' \right]$. Les solutions $K_{\pm}^2(\xi)$ pour l'interaction entre \tilde{N}_e^{-} et \tilde{N}_e^0 sont alors :

$$K_{-}^2(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{\xi}{kH_n} + \frac{2(\delta\omega + i\gamma_a)}{kc_s} + \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{Lk})}{\omega_0} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\xi}{kH_n} + \frac{2(\delta\omega + i\gamma_a)}{kc_s} - \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{Lk})}{\omega_0} \right]^2 - 4\Delta} \right\}, \quad (12)$$

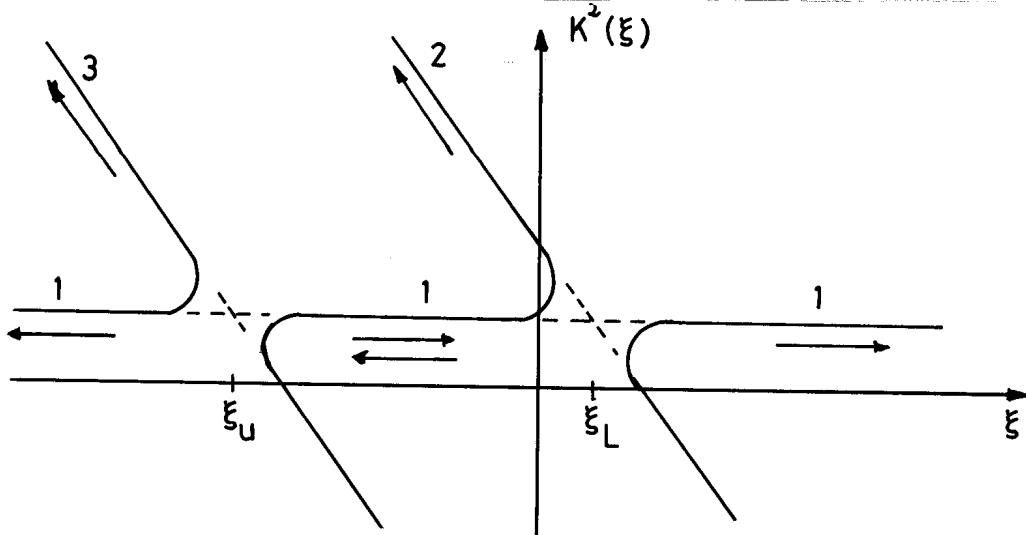
et les solutions $K_{+}^2(\xi)$ pour l'interaction entre \tilde{N}_e^{+} et \tilde{N}_e^0 :

$$K_{+}^2(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{\xi}{kH_n} + \frac{2(\delta\omega + i\gamma_a)}{kc_s} - \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{Lk})}{\omega_0} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\xi}{kH_n} + \frac{2(\delta\omega + i\gamma_a)}{kc_s} + \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{Lk})}{\omega_0} \right]^2 - 4\Delta} \right\}, \quad (13)$$

où Δ a été défini au chapitre précédent et devient dans la limite $\omega_0 \gg \omega_{LH}$:

$$\Delta \equiv \frac{v_D^2}{4c_s^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2}. \quad (14)$$

Les solutions $K^2(\xi)$ sont représentées dans la figure 1 ci-dessous dans le cas particulier où tous les termes imaginaires sont nuls.



Solutions WKB des équations du couplage. Les lignes traitillées représentent les solutions sans pompe ($\Delta=0$) et les traits pleins les solutions à pompe finie. La branche 1 représente l'onde acoustique, la branche 2 le satellite inférieur et la branche 3 le satellite supérieur de la pompe.

Figure 1

La figure 1 indique qu'il n'y a pas de solutions réelles pour $K^2(\xi)$ dans les régions centrées en ξ_u et ξ_L : ce sont les régions de forte interaction, USBIR et LSBIR. Autour des points :

$$\begin{aligned} \frac{\xi_u}{kH_n} &= - \frac{2\delta\omega_r}{kc_s} - \frac{2(kc_s + \delta\omega_r)}{\omega_0} , \\ \frac{\xi_L}{kH_n} &= - \frac{2\delta\omega_r}{kc_s} + \frac{2(kc_s + \delta\omega_r)}{\omega_0} , \end{aligned} \quad (15)$$

les discriminants dans les équations (12) et (13) sont négatifs. La condition de bonne séparation des deux régions de forte interaction, permettant de séparer les équations (11) pour N_e^+ et N_e^- , est que l'extension $\delta\xi$ des régions de forte interaction doit être faible devant la distance $\Delta\xi = \xi_L - \xi_u$.

$$\delta\xi = 4\sqrt{\Delta} kH_n , \quad (16)$$

de telle sorte que nous imposons :

$$\Delta \ll kc_s^2 / \omega_0^2 . \quad (17)$$

Si cette condition est violée on doit résoudre simultanément les trois équations différentielles du second ordre (11). Les solutions WKB sont valables asymptotiquement. Pour pouvoir faire des développements asymptotiques dans la cavité limitée par ξ_u et ξ_L il faut que $\Delta\xi \gg 1$, ce qui est une condition sur l'échelle H_n :

$$kH_n \gg \omega_0 / 4kc_s . \quad (18)$$

Asymptotiquement les solutions WKB donnent des ondes acoustiques et hybrides inférieures découplées :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_e^0(\xi) &\sim \exp [\pm i k_A \xi] \\ \tilde{N}_e^\pm(\xi) &\sim \exp \left[\pm i \int^\xi k_L^\pm(\xi') d\xi' \right] \end{aligned} \quad (19)$$

où :

$$K_A = \sqrt{\frac{2(\delta\omega + i\mathcal{N}_a)}{kc_s}} \quad (19)$$

$$K_L^\pm(\xi) = \sqrt{-\frac{\xi}{kH_n} \mp \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\mathcal{N}_{Lk})}{\omega_0}}$$

Rappelons le comportement temporel des ondes, défini au chapitre IV, Eq.(10):

$$\tilde{n}_e^0 \sim \exp(-i\omega t) \quad (20)$$

$$\tilde{n}_e^\pm \sim \exp[-i(\omega \pm \omega_0)t].$$

La vitesse de groupe et la vitesse de phase sont parallèles pour les ondes acoustiques et anti-parallèles pour les ondes hybrides inférieures. En conséquence, l'écoulement de l'énergie associée aux ondes acoustiques est dirigé selon $\xi \rightarrow +\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^0(\xi) \sim \exp[+iK_A\xi]$ et selon $\xi \rightarrow -\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^0(\xi) \sim \exp[-iK_A\xi]$. Le satellite inférieur de la pompe oscille à la fréquence $\text{Re}[(\omega - \omega_0)] < 0$, donc l'énergie associée s'écoule vers $\xi \rightarrow +\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^- \sim \exp[+i\int_\xi^\xi K_L^-(\xi')d\xi']$ et vers $\xi \rightarrow -\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^- \sim \exp[-i\int_\xi^\xi K_L^-(\xi')d\xi']$. Le satellite supérieur oscille à la fréquence $\text{Re}[(\omega + \omega_0)] > 0$ et l'énergie associée s'écoule vers $\xi \rightarrow +\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^+ \sim \exp[-i\int_\xi^\xi K_L^+(\xi')d\xi']$ et vers $\xi \rightarrow -\infty$ lorsque $\tilde{N}_e^+ \sim \exp[+i\int_\xi^\xi K_L^+(\xi')d\xi']$. Lorsque $\text{Im}(\delta\omega) > 0$, il y a instabilité temporelle et toutes les ondes considérées ont une enveloppe décroissante dans la direction de leur vitesse de groupe.

Seules les solutions à enveloppes nulles à $\xi = \pm\infty$ sont autorisées. En conséquence les ondes dont la vitesse de groupe est incidente sur la cavité sont à rejeter. Dans la figure 1 les flèches indiquent les directions des vitesses de groupe permises : à l'intérieur de la cavité les ondes acoustiques se propagent dans les deux directions ; à l'extérieur de la cavité l'énergie de toutes les ondes fuit à $\pm\infty$. La cavité se comporte comme une source de rayonnement.

Les solutions WKB ne permettent pas de relier les amplitudes et les phases à travers chaque région d'interaction forte. Dans le paragraphe suivant nous déterminons ces connexions en résolvant les équations du couplage par une méthode de transformées. On identifie les solutions obtenues asymptotiquement autour de chaque région d'interaction forte au centre de la cavité. On obtient alors les valeurs propres $\delta\omega$. Nous verrons que des solutions $\text{Im}(\delta\omega) > 0$ existent : l'instabilité peut être absolue.

2. Résolution des équations du couplage

Nous définissons pour toute fonction $f(\xi)$ la transformée :

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-ik\xi} f(\xi), \quad (21)$$

et la transformée inverse

$$f(\xi) = \oint_C dk e^{ik\xi} f(k), \quad (22)$$

où C est un "bon" contour dans le plan complexe K . Les solutions des équations différentielles (11) séparées pour $\tilde{N}_e^{\pm}(\xi)$ s'expriment alors comme suit :

$$\tilde{N}_e^{\pm}(\xi) = A^{\pm} \oint_{C^{\pm}} dk \exp\left[ikH_n \Phi^{\pm}(k)\right], \quad (23)$$

$$\Phi^{\pm}(k) = \frac{k^3}{3} + k \left[\frac{\xi}{kH_n} \pm \frac{2(kc_s + \delta\omega + i\gamma_{lk})}{\omega_0} \right] - \frac{\Delta}{2K_A} \ln \left(\frac{k+K_A}{k-K_A} \right),$$

où A^{\pm} sont des constantes d'intégration et C^{\pm} des contours dans le plan complexe K . Les intégrales dans l'équation (23) sont résolues dans l'Appendice C. Les contributions essentielles proviennent des lignes d'embranchement issues des points $K = \pm K_A$ qui déterminent asymptotiquement le comportement des ondes acoustiques, et des points stationnaires (ou cols) situés en $K = \pm K_L$ qui déterminent asymptotiquement le comportement des ondes hybrides inférieures. Éliminant les solutions exponentiellement croissantes

dans la région d'évanescence des ondes hybrides inférieures, il nous reste trois solutions linéairement indépendantes obtenues par intégration le long des trois contours présentés dans la figure 2, ci-dessous.

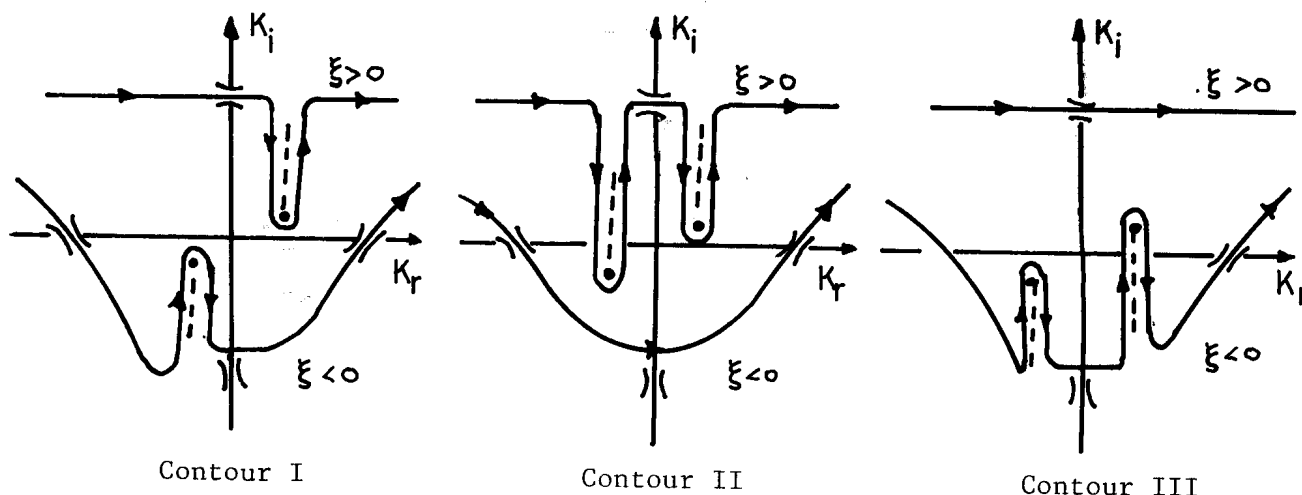


Figure 2.

Nous rappelons les conditions de validité des développements asymptotiques

$$\Delta \ll k^2 c_s^2 / \omega_0^2$$

$$k H_n \gg \omega_0 / 4 k c_s$$

$$\frac{\delta \omega_r}{k c_s}, \frac{\eta}{k c_s}, \frac{\eta_{LK}}{k c_s} \ll \frac{4 k c_s}{\omega_0},$$

(24)

que nous vérifierons et interpréterons après l'obtention des résultats pour les valeurs propres $\delta\omega$. Introduisons les dénominations IN et OUT pour les ondes dont l'énergie entre et sort des régions d'interaction forte, respectivement. Les résultats pour les amplitudes N_e^{\pm} et N_e^0 obtenues par intégration le long des contours représentés dans la figure 2 sont donnés dans le tableau 1, ci-dessous, où la notation utilisée est :

TABLEAU I

Onde	$\xi^{\pm} \ll -1$		$\xi^{\pm} \gg +1$		Contour
	IN	OUT	IN	OUT	
\tilde{N}_{e^0}	0	$-iD_{\text{exp}}\{2\pi\epsilon\}$	0	$-iD_{+ \text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	} LSBIR I USBIR
\tilde{N}_{e^-}	L	$-iL_{\text{exp}}\{2\pi\epsilon\}$	0	décroissante	
\tilde{N}_{e^0}	0	$-iE_{\text{exp}}\{2\pi\epsilon\}$	0	$-iE_{+ \text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	
\tilde{N}_{e^+}	$U \exp 2$	iU	0	décroissante	
\tilde{N}_{e^0}	0	0	$iD_{\text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	$-iD_{+ \text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	} LSBIR II USBIR
\tilde{N}_{e^-}	L	$-iL$	0	décroissante	
\tilde{N}_{e^0}	0	0	$iE_{\text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	$-iE_{+ \text{exp}}\{\pi\epsilon\}$	
\tilde{N}_{e^+}	U	iU	0	décroissante	
\tilde{N}_{e^0}	iD_{+}	$-iD_{-}$	0	0	} LSBIR III USBIR
\tilde{N}_{e^-}	L	$-iL$	0	décroissante	
\tilde{N}_{e^0}	iE_{+}	$-iE_{-}$	0	0	
\tilde{N}_{e^+}	U	iU	0	décroissante	

$$\varepsilon = \frac{\Delta k H_n}{2k_A} ; \theta = \frac{1}{2} \text{Arctg} \left(\frac{\eta + \eta_a}{\delta \omega_r} \right),$$

$$\xi_{\pm} = \xi \pm \mathcal{Q} (k c_s + \delta \omega_r) / \omega_0,$$

$$D_{\pm} = \frac{A^{-}}{k H_n} \left[\frac{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2}{\frac{\mu}{2} (1 - \omega_{pi}^2 / \omega_0^2)} \right] \Gamma(1 \pm i\varepsilon) \left[e^{\frac{\pi}{2} \varepsilon} - e^{-\frac{3\pi}{2} \varepsilon} \right] \cdot \exp \pm \left[\varepsilon \theta - i \varepsilon L_n / 2k_A \xi^{\pm} \right], \quad (25)$$

$$E_{\pm} = \frac{A^{+}}{k H_n} \left[\frac{1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2}{\frac{\mu}{2} (1 - \omega_{pi}^2 / \omega_0^2)} \right] \Gamma(1 \pm i\varepsilon) \left[e^{\frac{\pi}{2} \varepsilon} - e^{-\frac{3\pi}{2} \varepsilon} \right] \exp \pm \left[\varepsilon \theta - i \varepsilon L_n / 2k_A \xi^{\pm} \right],$$

$$L = A^{-} \sqrt{\frac{\pi}{k H_n k_L^{-}}} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$U = A^{+} \sqrt{\frac{\pi}{k H_n k_L^{+}}} \cdot e^{-i\pi/4}$$

Les situations physiquement intéressantes sont obtenues par des combinaisons linéaires de solutions telles que l'on ne trouve qu'une seule onde IN le long d'une seule des branches (acoustique ou hybride inférieure) autour de chaque région d'interaction forte. Nous appelons ces situations des cas purs. Les solutions du contour I constituent un cas pur à la fois pour la région LSBIR et la région USBIR. Analysons-la. Une onde hybride inférieure incidente produit une onde hybride inférieure sortante et deux ondes acoustiques se propageant en sens inverses. Autour de LSBIR l'onde hybride inférieure sortante a une amplitude supérieure à l'onde incidente d'un facteur $\exp\{\text{Re}(2\pi\varepsilon)\}$: il y a amplification. Autour de USBIR l'onde hybride inférieure sortante a une amplitude inférieure à l'onde incidente d'un facteur $\exp\{-\text{Re}(2\pi\varepsilon)\}$: il y a atténuation. Cette atténuation des ondes autour de USBIR est générale quelle que soit l'onde incidente : c'est le pendant spatial de la propriété stabilisatrice de la ligne anti-Stokes dans le cas du plasma homogène { 37 }.

L'amplification du satellite inférieur de la pompe a été analysé par Perkins et Flick pour le couplage entre l'onde plasma électronique et l'onde acoustique : ils ont conclu à une instabilité convective {23}. Nous nous intéressons à la situation représentée dans la figure 1 où la seule onde incidente sur chaque région d'interaction forte est une onde acoustique se propageant à l'intérieur de la cavité. A cet effet nous soustrayons les résultats du contour I de ceux du contour III pour LSBIR. Nous multiplions les solutions du contour I par $\exp\{-2\Pi\varepsilon\}$, puis les soustrayons des solutions du contour II afin d'éliminer l'onde hybride inférieure incidente sur USBIR. Le rapport des ondes acoustiques IN et OUT pour $\xi^- < 0$ en LSBIR est :

$$\frac{\tilde{N}_{e\text{ OUT}}^o}{\tilde{N}_{e\text{ IN}}^o} = \frac{\Gamma(1-i\varepsilon)}{\Gamma(1+i\varepsilon)} \left[e^{2\Pi\varepsilon} - 1 \right] \exp \left[-2iK_A \xi^- + 2i\varepsilon \ln |2K_A \xi^-| - 2\theta\varepsilon \right], \quad (26)$$

et pour $\xi^+ > 0$ autour de USBIR :

$$\frac{\tilde{N}_{e\text{ OUT}}^o}{\tilde{N}_{e\text{ IN}}^o} = \frac{\Gamma(1+i\varepsilon)}{\Gamma(1-i\varepsilon)} \left[e^{-2\Pi\varepsilon} - 1 \right] \exp \left[2iK_A \xi^+ - 2i\varepsilon \ln |2K_A \xi^+| + 2\theta\varepsilon \right]. \quad (27)$$

Dans le cas où $\gamma = \gamma_\alpha = \gamma_{Lk} = 0$, l'onde acoustique réfléchiée en LSBIR est amplifiée d'un facteur $|e^{2\Pi\varepsilon}-1|$ et partiellement réfléchiée en USBIR d'un facteur $|e^{-2\Pi\varepsilon}-1|$. Connectant les solutions (26) et (27) au centre de la cavité nous obtenons l'équation aux valeurs propres

$$4sh^2 \left(\frac{\Pi \Delta k H_n}{2K_A} \right) \exp \left[\frac{8iK_A k^2 c_s H_n}{\omega_0} \right] = -1, \quad (28)$$

Les valeurs propres étant K_A . Nous résolvons ce problème dans le paragraphe suivant.

3. Solutions propres de l'instabilité absolue

Les valeurs propres K_A , solutions de l'équation (28), ne peuvent être obtenues analytiquement que dans certaines limites. Analysons cette équation en définissant

$$\alpha \equiv 4 K_A k H_n \frac{k c_s}{\omega_0},$$

$$P \equiv 2\pi \Delta (k H_n)^2 \frac{k c_s}{\omega_0}, \quad (29)$$

sachant que α est complexe, P est réel positif ou nul et que les solutions qui nous intéressent sont $\delta\omega$ et γ contenues dans $K_A = \left[2(\delta\omega_r + i\gamma + i\gamma_a)/kc_s \right]^{\frac{1}{2}}$. La fonction complexe α a donc deux branches. Nous nous limitons aux valeurs de α contenues dans le demi-plan complexe droit ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$). Avec les définitions (29), l'équation (28) peut se récrire sous la forme

$$2 \operatorname{sh} \left(\frac{P}{\alpha} \right) = \pm i \exp(-i\alpha), \quad (30)$$

et sera analysée dans diverses limites de α et de P/α . Posons

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i; \quad (31)$$

où α_r et α_i sont les parties réelle et imaginaire de α respectivement. Une première série de solutions est obtenue sur l'axe réel ($\alpha_i = 0$) où l'équation (30) devient :

$$2 \operatorname{sh} \left(\frac{P}{\alpha_r} \right) = \pm (\sin \alpha_r + i \cos \alpha_r) \quad (32)$$

d'où n solutions périodiques

$$\alpha_r(n) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

$$P_n = \alpha_r(n) \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \approx .48 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (33)$$

où n est un entier positif ou nul. Perturbons ces solutions en incluant une faible partie imaginaire α_i et en définissant

$$P(n) = .48 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \delta P(n)$$

$$\alpha_r(n) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \delta \alpha_r(n) \quad (34)$$

Introduisant ces expressions dans l'équation (30), développant les fonctions transcendentes autour des solutions purement réelles et ne gardant que les termes linéaires en α_i , $\delta P(n)$ et $\delta \alpha_r(n)$, nous obtenons les solutions autour de l'axe réel. Ces solutions sont

$$\delta \alpha_r(n) = \frac{.48 \sqrt{5} \alpha_i}{(n + 1/2) \pi},$$

$$\delta P(n) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{5}} + \frac{.48}{(n + 1/2) \pi} \delta \alpha_r(n). \quad (35)$$

En conséquence une infinité de solutions α traversent l'axe réel dans le sens imaginaire positif pour P croissant. Examinons une seconde série de solutions obtenue pour α imaginaire ($\alpha_r = 0$). L'équation (30) se réduit à :

$$2 \sin \left(\frac{P}{\alpha_i} \right) = \bar{r} e^{\alpha_i}. \quad (36)$$

Une étude graphique de cette équation est instructive. La figure 3 ci-dessous représente les deux fonctions transcendentes de l'équation (36).

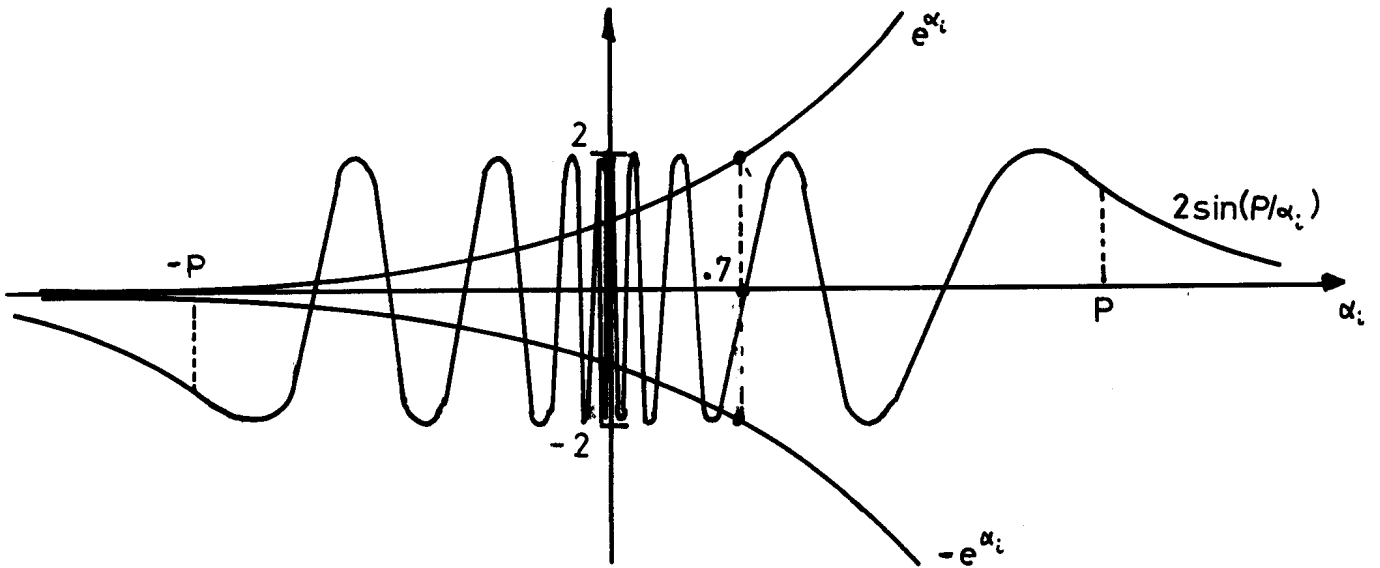


Figure 3.

Représentation des fonctions de l'équation (36).

Les informations obtenues à partir de ces courbes sont les suivantes. Pour $P \rightarrow 0$ les solutions sont tassées sur l'origine. Lorsque P croît, l'accordéon se déploie et les solutions s'étendent. Pour $\alpha_i < 0$ la solution $\alpha_i < -P$ disparaît de l'axe imaginaire lorsque l'exponentielle tend plus vite vers zéro que $\sin(P/\alpha_i)$ pour $\alpha_i \rightarrow -\infty$. Toutes les autres solutions restent sur l'axe imaginaire et tendent à coalescer deux à deux, sans jamais le pouvoir. Pour $\alpha_i > 0$ les solutions coalescent deux à deux en $\alpha_i = .7$ et disparaissent de l'axe imaginaire. La coalescence a lieu lorsque

$$P_n = .7 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (37)$$

On peut vérifier que pour une perturbation α_r de ces solutions $\delta P \sim \alpha_r^2$ et $\delta \alpha_i \sim \alpha_r^2$. Les solutions s'écartent donc perpendiculairement de l'axe imaginaire. Une moitié des solutions s'éloigne du côté $\alpha_r < 0$, l'autre moitié, qui nous intéresse, du côté $\alpha_r > 0$. Ayant obtenu les solutions purement réelles et les solutions purement imaginaires ainsi que leur évolution autour des axes nous sommes intéressés à les suivre pour diverses valeurs de P dans leur cheminement au sein du plan complexe α . Examinons en premier la limite $(P/|\alpha|) \rightarrow 0$, où $|\alpha|$ est le module du nombre complexe α . Alors $\text{sh}(P/\alpha) \approx P/\alpha$ et l'équation (30) livre :

$$\alpha_r \cos \alpha_r + \alpha_i \sin \alpha_r = 0 \quad (a)$$

$$2P = \pm (\alpha_r \sin \alpha_r - \alpha_i \cos \alpha_r) e^{\alpha_i} \quad (b)$$

La première de ces équations peut encore s'écrire sous la forme

$$-\frac{\alpha_i}{\alpha_r} = \text{ctg } \alpha_r \quad (39)$$

analysée graphiquement dans la figure 4.

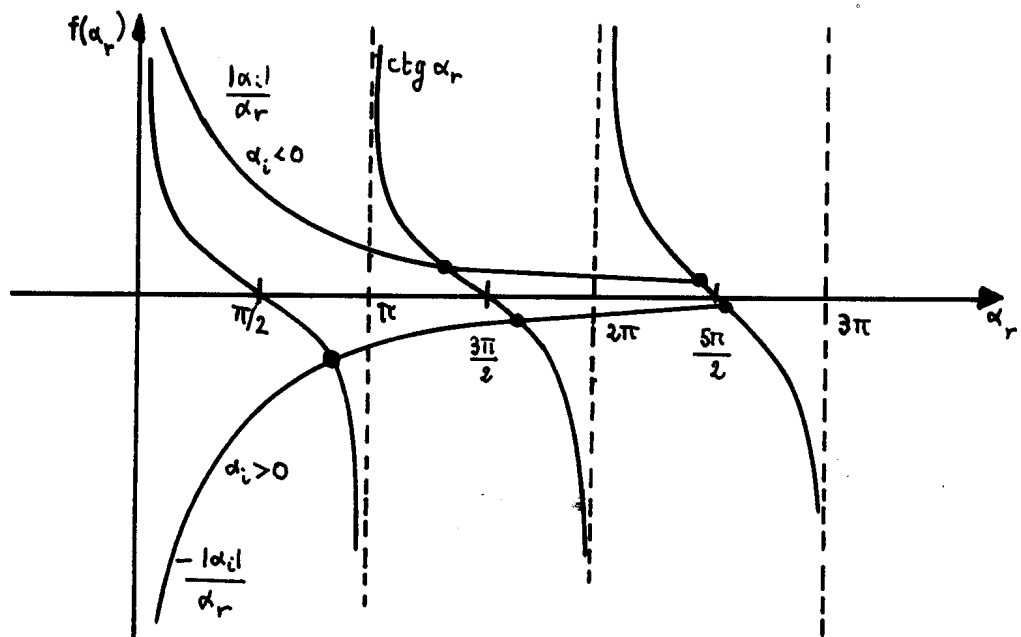


Figure 4.

Représentation des deux membres de l'équation (39).

Tant que $-1 < \alpha_i < 0$ il existe une intersection, donc une solution pour $\alpha_r < \pi/2$. Pour $\alpha_i < -1$ cette solution n'existe plus. Nous avons retrouvé la solution unique disparaissant sur l'axe $\alpha_i < 0$ (voir figure 3), qui tend ensuite vers l'origine pour $P \rightarrow 0$. Les autres solutions indiquées sur la figure 4 tendent bien vers les solutions obtenues sur l'axe réel lorsque $\alpha_i \rightarrow 0$. Les solutions $\alpha_i \rightarrow -\infty$ tendent asymptotiquement vers les lignes $\alpha_r = n\pi$. Injectant le résultat (39) dans l'équation (38b), nous observons que $P \rightarrow 0$ pour $\alpha_i \rightarrow -\infty$. Pour $\alpha_i > 0$ les résultats ne sont pas valables car l'hypothèse $P/|\alpha| \rightarrow 0$ n'est pas vérifiée.

La dernière limite que nous analysons est celle des grandes valeurs de $P/|\alpha|$. Dans cette limite $\text{sh}(P/\alpha)$ est approximée par $\frac{1}{2}\exp(P/\alpha)$ et l'équation (30) a pour solutions :

$$P = i\alpha \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - i\alpha^2. \quad (40)$$

Les grandes valeurs de n sont inintéressantes. Pour $n > 0$, P/α_r n'est pas grand, pour $n < 0$ on retrouve les solutions imaginaires $\alpha_i > 0$. Les grandes valeurs de α satisfont l'équation (40). Définissant le paramètre de petitesse

$$\epsilon = \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{\sqrt{P}} \quad (41)$$

et développant l'équation (40) en série de ϵ nous obtenons les solutions

$$\alpha = \sqrt{P} \left(\pm \sqrt{i} + \frac{\epsilon}{2} \mp \epsilon^2 \frac{i\sqrt{i}}{8} \right) \quad (42)$$

A l'ordre ϵ^0 les solutions sont sur la bissectrice du quart de plan supérieur :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_r \\ P &= 2\alpha_i \alpha_r \end{aligned} \quad (43)$$

L'ordre suivant donne la dépendance en n :

$$\alpha_r(n) = \sqrt{\frac{P}{2}} + \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2} , \quad (44)$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{P}{2}}$$

Pour $n \geq 0$ on a les solutions issues de l'axe réel α_r et pour $n < 0$ les solutions issues de l'axe imaginaire α_i . Les résultats sont résumés dans la figure 5. Revenons à la physique. Les axes du plan α sont les courbes à $\gamma = -\gamma_a$ et les bissectrices les courbes à $\delta\omega_r = 0$. les courbes à γ constant sont des hyperboles d'asymptotes α_r , α_i et les courbes à $\delta\omega_r$ constant sont des hyperboles ayant pour asymptotes les bissectrices du plan α .

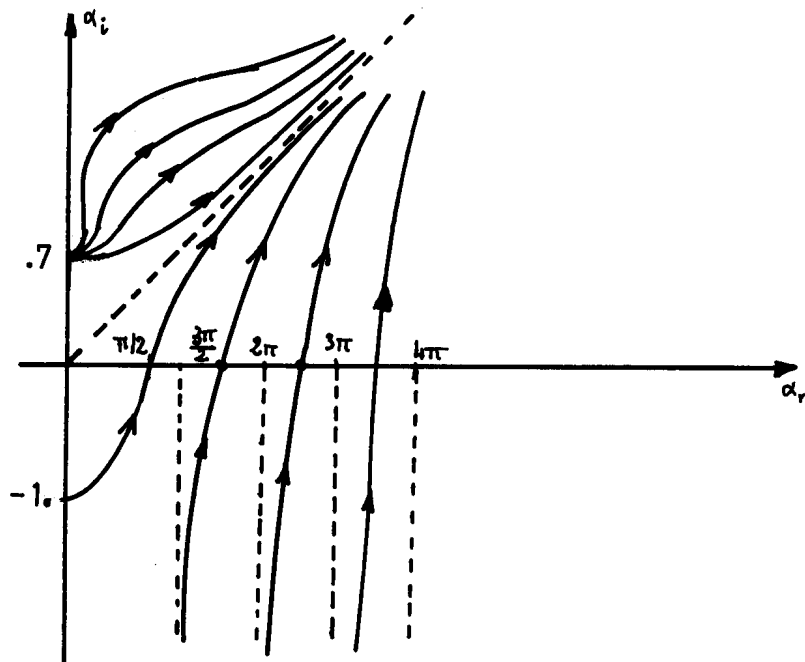


Figure 5.

Mouvement des solutions de l'équation (30) en fonction de P . Les flèches indiquent leurs évolutions pour P croissant. La ligne traitillée est la bissectrice du quart de plan supérieur droit.

Ayant des expressions explicites pour $\alpha(P,n)$ dans certaines limites nous pouvons y déterminer les valeurs propres γ et $\delta\omega$. Les seuils sont obtenus par les solutions autour des axes α_r et α_i . Le seuil minimum a lieu pour le mode $n=0$ près de l'axe réel. Supposant γ_a l'amortissement naturel des ondes acoustiques nul, la valeur de la force de pompe est donnée par l'équation (33) en utilisant les définitions (29) et (14) :

$$\frac{E_0^2}{B_0^2 c_s^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_{LH}^2} \cdot \frac{\omega_0}{k c_s} \cdot \left(\frac{1}{k H n} \right)^2 \quad (45)$$

Cette valeur peut sembler excessive étant donnée la dépendance en $\frac{\omega_0}{k c_s} \gg 1$. Cependant, n'oublions pas que la validité de nos résultats dépend des conditions (24), satisfaites pour $k H_n$ suffisamment grand. Ainsi le seuil minimum est bien décrit par notre modèle si $k H_n \gg (\omega_0/2k c_s)^{\frac{3}{2}}$. Notons encore que le seuil pour le premier mode à $\delta\omega_r < 0$ négatif est du même ordre de grandeur que celui donné par l'équation (45). Pour de grandes valeurs de pompes les modes proches du seuil sont obtenus pour de grandes valeurs de n . Dans cette limite les équations (35) pour $\delta\omega_r > 0$ donnent les valeurs propres approchées :

$$\frac{\gamma(n)}{\omega_0} = \frac{\sqrt{5}}{32} n \pi^2 \left[\frac{E_0^2}{B_0^2 c_s^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} - \frac{n \omega_0}{k c_s} \frac{1}{(k H n)^2} \right] - \frac{\gamma_a}{\omega_0} \quad (a) \quad (46)$$

$$\frac{\delta\omega_r(n)}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{32 k c_s} \left(\frac{n \pi}{k H n} \right)^2 \quad (b)$$

La valeur maximum de n pour laquelle il peut encore y avoir instabilité est celle qui annule le terme entre crochets dans l'équation (46a) :

$$n_{max} \approx \frac{E_0^2}{B_0^2 c_s^2} \cdot \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{k c_s}{\omega_0} (k H n)^2 \quad (47)$$

Pour les modes à $\delta\omega_r < 0$ la valeur maximum de n obtenue à partir de l'équation (37) est approximativement la même

$$n_{\max} \approx \frac{E_0^2}{B_0^2 c_s^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \frac{k c_s}{\omega_0} (k H n)^2 \quad (48)$$

Dans la limite des petites valeurs de n nous avons obtenus les solutions $\delta\omega_r \approx 0$ situées autour de la première bissectrice dans le plan α . Les solutions (44) conduisent aux valeurs propres suivantes :

$$\frac{\gamma(n)}{\omega_0} \approx \frac{\pi E_0^2}{64 B_0^2 c_s^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi E_0}{32 B_0 c_s} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0} \frac{1}{k H n} \sqrt{\frac{\pi \omega_0}{k c_s}} - \frac{\gamma_a}{\omega_0},$$

$$\frac{\delta\omega_r(n)}{\omega_0} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi E_0}{32 B_0 c_s} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0} \frac{1}{k H n} \sqrt{\frac{\pi \omega_0}{k c_s}}. \quad (49)$$

Ce résultat représente la limite $\frac{2n+1}{k H n} \sqrt{\frac{\pi \omega_0}{k c_s}} \ll \frac{E_0}{B_0 c_s} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0}$. Ce n'est pas la limite des taux de croissances maximum, puisque ceux-ci augmentent avec n pour $n > 0$. Pour $n < 0$, $\delta\omega_r(n) < 0$ et les taux de croissance diminuent. Cependant $\gamma(n)$ varie faiblement dans cette limite. La transition entre les deux régimes examinés se produit lorsque $\delta\omega_r \approx \gamma$. Notons qu'à un facteur deux près les parties réelles $\delta\omega_r$ des valeurs propres deviennent identiques dans la limite $\frac{E_0}{B_0 c_s} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0} = \frac{2n+1}{k H n} \sqrt{\frac{\pi \omega_0}{k c_s}}$ que l'on prenne l'équation (46) ou l'équation (49). Extrapolant alors la valeur de $\gamma(n)$ obtenue dans la limite des petites valeurs de n , nous obtenons une borne supérieure pour le taux de croissance maximum

$$\frac{\gamma(n)_{\max}}{\omega_0} \approx \frac{\pi E_0^2}{32 B_0^2 c_s^2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_a}{\omega_0}$$

$$n \approx \frac{E_0}{2 B_0 c_s} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0} k H n \sqrt{\frac{k c_s}{\pi \omega_0}} \quad (50)$$

En conclusion, nous avons trouvé qu'une pompe dipolaire pouvait engendrer une instabilité de désintégration absolue lorsqu'elle couple une onde acoustique et des ondes hybrides inférieures dans un gradient de densité. L'onde acoustique y joue le rôle actif, les ondes hybrides inférieures, satellites de la pompe, lui permettant de s'amplifier et de rester en partie piégée dans une zone de faible extension dans la direction du gradient. Les taux de croissances proportionnels au carré du champ électrique de la pompe sont typiques d'une instabilité absolue. De plus le seuil ne dépend pas de l'amortissement naturel des ondes hybrides inférieures, mais uniquement de celui de l'onde acoustique, à l'inverse de l'OTSI.

Nos résultats sont limités à de faibles valeurs de pompe et à de faibles gradients {voir conditions (24)}. Ces conditions proviennent de notre incapacité actuelle de traiter le problème de l'interaction simultanée de l'onde acoustique avec les deux satellites de la pompe. Il est cependant raisonnable de dire que pour des pompes fortes le caractère absolu de l'instabilité ne disparaît pas et que les taux de croissance sont augmentés.

Une infinité de modes existent dans la région d'évanescence de l'onde acoustique. Ces modes sont caractérisés par des valeurs propres $\delta\omega_r < 0$. Dans la limite où $\delta\omega_r = -kc_s$, hors de portée de notre modèle, on doit retrouver l'OTSI qui est produite par l'interaction entre les deux satellites de la pompe. Une extension possible de notre travail serait donc l'étude de la transition entre la désintégration absolue et l'OTSI dans un gradient de densité. La difficulté majeure sera de traiter trois équations différentielles du second ordre à coefficients variables.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au professeur F. Troyon qui m'a guidé dans ce travail. Les nombreuses discussions que nous avons eues ont permis des mises au point importantes. Sa collaboration, en particulier dans la partie mathématique, a été déterminante. Le problème présenté au chapitre IV a été traité en collaboration avec le Dr. A.H. Kritz. Son dynamisme et ses conseils ont fait progresser rapidement le travail. L'aide efficace de mon ami, le docteur M.Q. Tran a été vivement appréciée lors de la réalisation finale de ce mémoire. Le texte a été écrit à la machine en partie par Mademoiselle Nicole Marendaz; la version finale est le fait de Mademoiselle Béatrice Schwab. Je les remercie pour leur célérité et leur patience. Les figures ont été dessinées avec soin par Messieurs J.M. Mayor et P. Gorgerat.

Je remercie le professeur E.S. Weibel de m'avoir incorporé dans le groupe théorique du CRPP et d'avoir participé à la définition de ce problème.

Sans le soutien de ma famille ce travail n'aurait pu être mené à bien.

REFERENCES

- {1} H.P. Furth, Nucl.Fusion 15, 487 (1975)
- {2} Symposium on Plasma Heating and Injection (Editrice Compositon, Bologna, 1973)
- {3} O.M. Shvets, S.M. Sotnikov, V.F. Tarasenko, S.S. Ovchinnikov, Sov.Phys.Tech.Phys. 14, 459 (1969);
B.V. Galaktionov, V.V. D'yachenko, M.M. Larionov, O.N. Shcherbinin, Sov.Phys.Tech.Phys. 19, 459 (1974);
I.P. Gladkovskii, V.E. Golant, V.V. D'yachenko, M.M. Larionov, L.S. Levin, V.V. Rozhdestvenskii, V.A. Sadovnikov, O.N. Shcherbinin, Sov.Phys.Tech.Phys. 18, 1029 (1974);
V.M. Glagolev, V.V. Martynenko, Yu.V. Skosyrev, Sov.Phys.Tech.Phys. 19, 1543 (1975);
P.A. Raimbolt, J.L. Shohet, Plasma Phys. 17, 327 (1975);
R.L. Stenzel, W. Gekelman, Phys.Rev. A 11, 2057 (1975);
R.J. Hawryluk, S.L. Davis, J.A. Schmidt, Nucl.Fusion 16, 419 (1976)
- {4} M. Brambilla, P. Lallia, Nguyen Trong Khai, Third International Conference on Theoretical and Experimental Aspects of Heating of Toroidal Plasma (Grenoble 1976) Vol.2, p. 283
- {5} B.N. Moore and M.E. Oakes, Phys.Fluids 15, 144 (1972);
I.Fidone, Phys.Fluids 19, 334 (1976)
- {6} A. Rogister, Phys.Rev.Lett. 34, 80 (1975);
A. Rogister, G. Hasselberg, Phys.Fluids 19, 108 (1976);
Liu Chen, R.L. Berger, Lausanne Plasma Lab. Report, LRP-110/76

- {7} W.M. Hooke, S. Bernabei, Phys.Rev.Lett. 29, 1218 (1972)
- {8} R.P.H. Chang, M. Porkolab, Phys.Rev.Lett. 31, 1241 (1973)
- {9} R.P.H. Chang, M. Porkolab, Phys.Rev.Lett. 32, 1227 (1974)
- {10} A.B. Kitsenko, V.I. Panchenko, K.N. Stepanov, V.F. Tarasenko, Nucl.Fusion 13, 557 (1973);
M. Porkolab, V. Arunasalam, N.G. Luhmann, J.P.M. Schmitt, Nucl.Fusion 16, 269 (1976)
- {11} T.K. Chu, S. Bernabei, R.W. Motley, Phys.Rev.Lett. 31, 211 (1973)
- {12} C. Chu, J.M. Dawson, H. Okuda, University of California, Los Angeles, UCLA report PPG-219
- {13} J.M. Kindel, H. Okuda, J.M. Dawson, Phys.Rev.Lett. 29, 995 (1972)
- {14} M. Porkolab, Phys.Fluids 17, 1432 (1974)
- {15} E. Ott, J.B. Mc Bride, J.H. Oreus, Phys.Fluids 16, 270 (1973)
- {16} A. Hasegawa, Liu Chen, Phys.Fluids 18, 1321 (1975)
- {17} M. Porkolab, Symposium on Plasma Heating in Toroidal Devices, Varenna, Italie, Septembre 1974 (Princeton Plasma Laboratory Report Matt-1069, 1974)
- {18} E. Ott, Phys.Fluids 18, 566 (1975)
- {19} R.L. Berger, F.W. Perkins, Phys.Fluids 19, 406 (1976)
- {20} R.L. Berger, Liu Chen, Phys.Fluids 19, 1392 (1976)

- {21} R.J. Briggs, R.R. Parker, Phys.Rev.Lett. 29, 852 (1972);
P. Bellan, M. Porkolab, Phys.Fluids 17, 1592 (1974);
H.H. Kuehl, K.K. Ko, Phys.Fluids 18, 1816 (1975);
Y.Y. Kuo, Liu Chen, Phys.Fluids 19, 1223 (1976)
- {22} T.H. Stix, Phys.Rev.Lett. 15, 878 (1965)
- {23} F.W. Perkins, J. Flick, Phys.Fluids 14, 2012 (1971)
- {24} M.N. Rosenbluth, Phys.Rev.Lett. 29, 565 (1972);
C.S. Liu, M.N. Rosenbluth, R.B. White, Phys.Rev.Lett. 31, 697 (1973);
D. Pesme, G. Laval, R. Pellat, Phys.Rev.Lett. 31, 203 (1973);
E. Cassedy, C. Evans, J.Appl.Phys. 43, 4452 (1972);
R. White, P. Kaw, D. Perme, M.N. Rosenbluth, G. Laval, R. Huff,
R. Varma, Nucl.Fusion 14, 45 (1974);
V.P. Silin, A.N. Starodub, Sov.Phys. -JETP 39, 82 (1974)
- {25} G.G. Lister, F. Troyon, ZAMP 25, 241 (1974)
- {26} J.R. Sanmartin, Phys.Fluids 13, 1533 (1970)
- {27} C.S. Liu, M.N. Rosenbluth, Phys.Fluids 19, 967 (1976)
- {28} D.F. Dubois, M.V. Goldman, Phys.Rev.Lett. 14, 544 (1965);
V.P. Silin, Sov.Phys. -JETP 21, 1127 (1965);
Yu. M. Aliev, V.P. Silin, C. Watson, Sov.Phys. -JETP 23, 626 (1966);
D.F. Dubois, M.V. Goldman, Phys.Rev. 164, 207 (1967)
- {29} K. Nishikawa, J.Phys.Soc. Japan 24, 916 et 1152 (1968)
- {30} T.H. Stix, The Theory of Plasma Waves (Mc Graw Hill 1962) p. 11

- {31} B.D. Fried, S.D. Conte, The Plasma Dispersion Function, Acad.Press, New-York (1961)

- {32} D. Quémada, Ondes dans les Plasmas (Hermann-Paris 1968), Chap. VII

- {33} R.Z. Sagdeev, A.A. Galeev, in Nonlinear Plasma Theory, edited by T.M. O'Neil and D.L. Book (Benjamin, New-York, 1969)

- {34} Thèse de Ralph Gruber

- {35} R.A. Cairns, J.Plasma Phys. 14, 327 (1975)

- {36} A.D. Piliya, V.I. Fedorov, Sov.Phys. -JETP 41, 489 (1976)

- {37} M.V. Goldman (LRP: Instabilités Paramétriques)

APPENDICE A

Susceptibilités pour ondes électrostatiques dans un plasma chaud et magnétisé. Application aux fréquences $\omega \sim \omega_{ci} \omega_{ce}$.

Dans l'espace de Fourier la perturbation de densité de charge $q_\alpha n_\alpha$ est liée au potentiel électrostatique ϕ :

$$q_\alpha n_\alpha(\omega, \underline{k}) = -\epsilon_0 \chi_\alpha(\omega, \underline{k}) k^2 \Phi(\omega, \underline{k}) \quad , \quad (1)$$

où $\chi_\alpha(\omega, \underline{k})$ est la susceptibilité pour les particules d'espèce α . La perturbation de densité n_α est calculée à partir de la fonction de distribution perturbée $f_\alpha^1(\omega, \underline{k}, \underline{u})$ satisfaisant l'équation de Vlasov

$$\left[-i(\omega - \underline{k} \cdot \underline{u}) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\underline{u} \times \underline{B}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \right] f_\alpha^1 = i \frac{n_0 q_\alpha}{m_\alpha} \Phi k \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial \underline{u}} \quad , \quad (2)$$

où $F_{\alpha 0}$ est la fonction de distribution d'équilibre. Introduisons le référentiel cartésien représenté dans la figure 1 ci-dessous

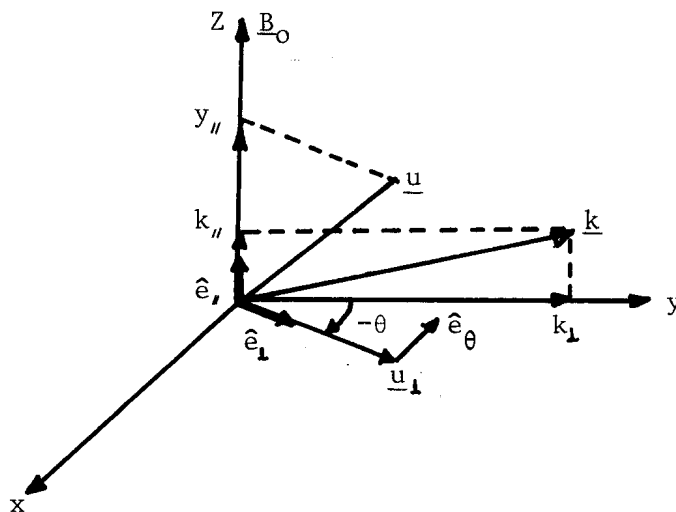


Figure 1.

Le champ magnétique, constant, est dirigé selon l'axe z, le vecteur \underline{k} des perturbations électrostatiques est situé dans le plan (y,z). Les symboles // et \perp réfèrent à des composantes de vecteurs parallèles et perpendiculaires à \underline{B}_0 respectivement. Définissons un nouveau système de coordonnées à l'aide des vecteurs unités $\hat{e}_{//}$, \hat{e}_{\perp} , \hat{e}_{θ} , sachant que θ est l'angle entre \underline{k}_{\perp} et \underline{u}_{\perp} , alors :

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{u} &= k_{//} u_{//} + k_{\perp} u_{\perp} \cos \theta, \\ \frac{\partial}{\partial \underline{u}} &\equiv \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + \frac{\hat{e}_{\theta}}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_{//} \frac{\partial}{\partial u_{//}}, \\ \underline{u} \times \underline{B}_0 &= -u_{\perp} B_0 \hat{e}_{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques la perturbation de densité est définie par l'intégrale suivante :

$$n_{\alpha}(\omega, \underline{k}) = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} du_{//} \int_0^{\infty} u_{\perp} du_{\perp} \int_0^{2\pi} d\theta f_{\alpha}^1(\omega, \underline{k}, u_{\perp}, u_{//}, \theta) \quad (4)$$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de l'intégrale sur l'angle θ apparaissant dans l'équation (4). Dans une première étape nous calculons la dépendance de f_{α}^1 en θ . La fonction d'équilibre $F_{\alpha 0}$ ne dépend pas de l'angle θ , mais en présence du champ \underline{B}_0 elle est une fonction de $u_{//}$ et de u_{\perp} :

$$\frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial \underline{u}} = \hat{e}_{//} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{//}} + \hat{e}_{\perp} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} \quad (5)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques l'équation de Vlasov (2) est une équation différentielle en θ pour f_{α}^1 :

$$\begin{aligned} -i(\omega - k_{//} u_{//} - k_{\perp} u_{\perp} \cos \theta) f_{\alpha}^1 - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}^1}{\partial \theta} &= \frac{iq_{\alpha} n_0 \Phi}{m_{\alpha}} \left[k_{//} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{//}} \right. \\ &\quad \left. + k_{\perp} \cos \theta \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

où $\omega_{c\alpha} = q_\alpha B_0/m$ a le signe de la charge $q_\alpha = \pm e$ selon l'espèce des particules traitée. La solution générale de l'équation (6) sans second membre est immédiate :

$$f_\alpha^1 = C \exp \left[-i \int^\theta d\theta' \left(\frac{\omega - k_{||} u_{||} - k_\perp u_\perp \cos \theta'}{\omega_{c\alpha}} \right) \right], \quad (7)$$

où C est une constante d'intégration. La causalité nous oblige à adjoindre une faible partie imaginaire positive ϵ à ω , la perturbation devant devenir nulle à $t \rightarrow -\infty$. L'intégrale dans l'équation (7) sera alors indépendante d'un angle initial si sa borne inférieure dépend du signe de la charge q_α (on doit suivre les trajectoires des particules dans leur mouvement de giration non perturbé autour de \underline{B}_0). Après utilisation de la fonction génératrice de Bessel

$$\exp \left[i \frac{k_\perp u_\perp \sin \theta}{\omega_{c\alpha}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{k_\perp u_\perp}{\omega_{c\alpha}} \right) \exp(in\theta), \quad (8)$$

la solution (7) devient :

$$f_\alpha^1 = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{k_\perp u_\perp}{\omega_{c\alpha}} \right) \exp \left[-i \left(\frac{\omega - k_{||} u_{||} - n\omega_{c\alpha}}{\omega_{c\alpha}} \right) \theta \right] \quad (9)$$

La solution de l'équation (6) complète est obtenue par la méthode de variation des constantes :

$$f_\alpha^1 = -\frac{i q_\alpha n_0}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} \Phi \int_{-\infty}^\theta d\theta' \left[k_{||} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{||}} + k_\perp \cos \theta' \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_\perp} \right] \exp \left[i G(\theta') - i G(\theta) \right], \quad (10)$$

$$\text{où } G(\theta) = \int_{-\infty}^\theta d\theta' \left(\frac{\omega + i\epsilon - k_{||} u_{||} - k_\perp u_\perp \cos \theta'}{\omega_{c\alpha}} \right).$$

La suite des opérations à effectuer sur l'équation (10) est : faire un changement de variables $\theta'' = \theta' - \theta$, interchanger les bornes d'intégration,

exprimer le cosinus sous la forme :

$$\cos(\theta''+\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[i(\theta''+\theta) \right] + \exp \left[-i(\theta''+\theta) \right] \right\},$$

et faire une translation d'indice dans les sommes infinies afin de pouvoir employer la formule de récurrence des fonctions de Bessel :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right) \left[J_{m+1} \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right) + J_{m-1} \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right) \right] = m J_m \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right).$$

L'expression finale de la fonction f_{α}^1 est :

$$f_{\alpha}^1 = - \frac{q_{\alpha} n_0}{m_{\alpha}} \oint \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right) J_m \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right) \cdot \left[\frac{k_{||} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{||}} + \frac{m \omega_{ca}}{u_{\perp}} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}}}{\omega - p_{k_{||}} u_{||} - m \omega_{ca}} \right] \exp \left[i(n-m)\theta \right]. \quad (11)$$

Cette fonction est périodique en θ comme le veut la physique. On peut à présent obtenir les expressions des susceptibilités sous la forme d'intégrales sur les vitesses. Pour ceci on introduit la solution (11) dans l'équation (4) et on l'intègre sur θ . Utilisant la définition (1) on obtient l'expression des susceptibilités dans un champ magnétique :

$$\chi_{\alpha}(\omega, \underline{k}) = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{||} \int_0^{\infty} u_{\perp} du_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_{||} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{||}} + \frac{n \omega_{ca}}{u_{\perp}} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}}}{\omega + i\epsilon - p_{k_{||}} u_{||} - n \omega_{ca}} \right] \cdot J_n^2 \left(\frac{p_{k_1} u_1}{\omega_{ca}} \right). \quad (12)$$

Application : calcul des susceptibilités électroniques dans le domaine des fréquences $\omega \sim \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$ pour une distribution des vitesses maxwellienne

Soit la fonction de distribution

$$F_{e0}(u_{||}, u_{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{KT_e} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m_e}{2KT_e} (u_{||}^2 + u_{\perp}^2) \right] \quad (13)$$

où K est la constante de Boltzmann et T_e la température électronique.

Observons que

$$\frac{\frac{\partial F_{e0}}{\partial u_{||}} + \frac{n \omega_{ce}}{u_{\perp}} \frac{\partial F_{e0}}{\partial u_{\perp}}}{\omega - k_{||} u_{||} - n \omega_{ce}} = \frac{F_{e0}}{V_e} \left(1 + \frac{\omega}{n \omega_{ce} + k_{||} u_{||} - \omega} \right), \quad (14)$$

et utilisons le résultat

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1,$$

alors l'expression de la susceptibilité s'écrit :

$$\chi_e = \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{||} \int_0^{+\infty} u_{\perp} du_{\perp} F_{e0}(u_{||}, u_{\perp}) \left[1 + \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}} \right)}{n \omega_{ce} + k_{||} u_{||} - \omega} \right], \quad (15)$$

où $V_e = KT_e/m_e$ est la vitesse thermique des électrons et $\lambda_D = V_e/\omega_{pe}$ la longueur de Debye. Introduisons les conditions de forte magnétisation des électrons, soient

$$\omega, k V_e \ll \omega_{ce} \quad (16)$$

de telle sorte que l'on puisse négliger $k_{||} u_{||} - \omega$ devant $n \omega_{ce}$ pour $n \neq 0$.

La somme sur les $n = 0$ est alors nulle, les indices positifs et négatifs se tuant deux à deux :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2\left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{n \omega_{ce} + k_{\parallel} u_{\parallel} - \omega} = \frac{J_0^2\left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{k_{\parallel} u_{\parallel} - \omega} + \sum_{n \neq 0} \frac{J_n^2\left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{n \omega_{ce}} = \frac{J_0^2\left(\frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\omega_{ce}}\right)}{k_{\parallel} u_{\parallel} - \omega} \quad (17)$$

Utilisons le résultat de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x dx e^{-x^2/2\lambda} J_n^2(x) = \lambda e^{-\lambda} I_n(\lambda), \quad (18)$$

et nous obtenons le résultat simple suivant :

$$\chi_e(\omega, \underline{k}) = \frac{1}{k_{\perp}^2 \lambda_0^2} \left[1 + e^{-k_{\perp}^2 r_e^2} I_0(k_{\perp}^2 r_e^2) x_e Z(x_e) \right] \quad (19)$$

$$x_e = \omega / \sqrt{2} k_{\parallel} v_e,$$

et $r_e = v_e / \omega_{ce}$ est le rayon de Larmor des électrons. La fonction Z est la fonction de Fried et Conte {31}

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - x} \quad (20)$$

Sous les conditions (16) : $k_{\perp}^2 r_e^2 \ll 1$; ne gardons que les termes en $k_{\perp}^2 r_e^2$ et négligeons les puissances supérieures, il vient

$$\chi_e(\omega, \underline{k}) = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + (1 - k_{\perp}^2 r_e^2) \left[1 + x_e Z(x_e) \right] \quad (21)$$

qui est l'expression des susceptibilités à l'ordre $(kr_e)^2$.

APPENDICE B

Dérivation de deux équations différentielles couplées décrivant l'instabilité non-oscillante dans un plasma avec shear

Récrivons les six équations différentielles de départ {Eqs. (15), chapitre IV} :

$$\frac{\epsilon_0}{e} \left[\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right) \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) - \frac{\omega_{pe}^2 k^2 \varphi_c^2 (1+x/L_s)^2}{(\omega_0 \pm i\nu_e)^2} \right] \tilde{\Phi}^\pm = \tilde{N}_i^\pm, \quad (1)$$

$$N_i^\pm = \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi^\pm, \quad (2)$$

$$\left[1 + \lambda_D^2 \frac{T_i}{T_e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] N_i^0 = N_e^0, \quad (3)$$

$$\left[1 + \lambda_D^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \tilde{N}_e^0 = \tilde{N}_i^0, \quad (4)$$

la formule de transformation qui relie les fonctions tildées et non tildées {Eq. (11), chapitre IV} :

$$F(n, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(\mu) \tilde{F}(m, x), \quad (5)$$

et les équations de Poisson :

$$\frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi(n, x) = N_i(n, x) - N_e(n, x) \quad (6)$$

$$\frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}(n, x) = \tilde{N}_i(n, x) - \tilde{N}_e(n, x) \quad (7)$$

Nous recherchons deux équations différentielles pour $\tilde{\Phi}^{\pm}$ à l'ordre μ^2 .
Nous développons donc les fonctions de Bessel dans l'Eq. (5), ne gardant que les fonctions J_0 , $J_{\pm 1}$ et $J_{\pm 2}$, à l'ordre μ^2 .

En conséquence, l'Eq. (5) permet de relier les fonctions F^0 et F^{\pm} aux fonctions \tilde{F}^0 et \tilde{F}^{\pm} comme suit :

$$\begin{aligned} F^0 &= J_0 \tilde{F}^0 + J_1 (\tilde{F}^+ - \tilde{F}^-) ; & \tilde{F}^0 &= J_0 F^0 + J_1 (F^- - F^+) ; \\ F^{\pm} &= J_0 \tilde{F}^{\pm} \mp J_1 \tilde{F}^0 + J_2 \tilde{F}^{\mp} ; & \tilde{F}^{\pm} &= J_0 F^{\pm} \pm J_1 F^0 + J_2 F^{\mp} ; \end{aligned} \quad (8)$$

étant entendu que : $J_0 = 1 - \mu^2/4$, $J_1 = \mu/2$, $J_2 = \mu^2/8$.

Exprimons \tilde{N}_i^{\pm} dans l'Eq. (1) et Φ^{\pm} dans l'Eq. (2) à l'aide des Eqs. (8) et combinons les résultats obtenus ; il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i^{\pm} &= J_0^2 \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} \cdot \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}^{\pm} + J_2 \left[\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \mp i\nu_i)^2} \right] \cdot \\ &\cdot \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}^{\mp} \mp J_1 \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}^0 \pm J_1 N_i^0 \end{aligned} \quad (9)$$

Les Eqs. (8) appliquées à N_e^0 dans l'Eq. (3) et l'utilisation de l'équation de Poisson, Eq. (7), conduisent à la forme suivante pour l'Eq. (3) :

$$\left[1 + \frac{T_i}{T_e} \lambda_D^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] N_i^0 = J_0 \tilde{N}_e^0 + J_1 (\tilde{N}_i^+ - \tilde{N}_i^-) - J_1 \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) (\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-) . \quad (10)$$

Nous supposons $\lambda_D^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{N}_e^0 \ll \tilde{N}_e^0$, ce qui revient à admettre $|\chi_e^0| \gg 1$ dans un champ \underline{E}_0 homogène, et nous inversons l'opérateur dans l'Eq. (4) :

$$\tilde{N}_e^0 \simeq \left[1 - \lambda_D^2 \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \right] \tilde{N}_i^0 . \quad (11)$$

Introduisant l'Eq. (11) dans l'Eq. (10), et utilisant une fois de plus l'Eq. (8), il vient :

$$\left(J_0^2 + \frac{\tau_i}{\tau_e}\right) N_i^0 = J_1 (N_i^+ - N_i^-) - J_1 \frac{\epsilon_0}{e} \frac{(\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-)}{\lambda_D^2} \quad (12)$$

L'expression de N_i^0 devant être introduite dans l'Eq. (9) où elle est multipliée par J_1 , le terme en μ^2 dans J_0^2 dans le membre de gauche de l'Eq. (12) sera inopérant à l'ordre μ^2 , donc :

$$J_1 N_i^0 \simeq \frac{J_1^2 (N_i^+ - N_i^-)}{1 + \tau_i/\tau_e} - J_1^2 \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-}{(1 + \tau_i/\tau_e) \lambda_D^2} \quad (12\text{bis})$$

A l'ordre μ^2 , l'Eq. (2) et les Eqs. (8) donnent $(N_i^+ - N_i^-)$ en fonction de $(\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-)$:

$$J_1^2 (N_i^+ - N_i^-) \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 + i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \tilde{\Phi}^+ - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 - i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \tilde{\Phi}^- \quad (13)$$

Comme annoncé à la fin du chapitre III, nous voulons retrouver la relation de dispersion simplifiée, obtenue sous les conditions $|\chi_\alpha^\pm| \ll |\chi_\alpha^0|$. En conséquence, négligeant χ_i^\pm devant χ_i^0 dans les termes de couplage, après avoir injecté les Eqs. (13) et (12bis) dans l'Eq. (9), il reste :

$$\tilde{N}_i^\pm \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \tilde{\Phi}^\pm \mp J_1^2 \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-}{\lambda_D^2 (1 + \frac{\tau_i}{\tau_e})} \mp J_1 \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\nu_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \tilde{\Phi}^0 \quad (14)$$

Dans l'Eq. (14) il faut encore déterminer le terme en $\tilde{\Phi}^0$. L'équation de Poisson et les Eqs. (8) appliquées à l'Eq. (11) donnent :

$$\tilde{\Phi}^0 \simeq \frac{e}{\epsilon_0} \lambda_D^2 \left[J_0 N_i^0 + J_1 (N_i^- - N_i^+) \right] \quad (15)$$

Nous avons vu ci-dessus que l'on pouvait négliger $J_1 (N_i^- - N_i^+)$ devant $J_0 N_i^0$ lorsque $|\chi_i^0| \gg |\chi_i^\pm|$, donc :

$$\tilde{\Phi}^0 \simeq J_1 \frac{(\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-)}{1 + \tau_i/\tau_e} \quad (16)$$

ce qui montre que le terme en $\tilde{\Phi}^0$ est négligeable devant le terme en N_i^0 dans l'Eq. (9), qui se réduit finalement à :

$$\tilde{N}_i^\pm \simeq \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_i)^2} \frac{\epsilon_0}{e} \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \tilde{\Phi}^\pm \mp J_1^2 \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\tilde{\Phi}^+ - \tilde{\Phi}^-}{\lambda_D^2 (1 + T_i/T_e)} \quad (17)$$

Injectant l'expression (17) dans l'Eq. (1), nous obtenons les deux équations différentielles du couplage pour $\tilde{\Phi}^\pm$:

$$\left\{ \left[1 - \frac{\omega_{LH}^2}{(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_i)^2} \right] \left(k^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) - \frac{\omega_{LH}^2}{(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_e)^2} M k^2 \varphi_c^2 \left(1 + x/L_S \right)^2 + \frac{\mu^2}{4} \frac{\omega_{LH}^2}{c_s^2 (1 + T_i/T_e)} \right\} \tilde{\Phi}^\pm = \frac{\mu^2}{4} \frac{\omega_{LH}^2}{c_s^2 (1 + T_i/T_e)} \tilde{\Phi}^\mp \quad (18)$$

Faisons apparaître l'amortissement naturel γ_{Lk} des ondes hybrides inférieures {défini au chapitre II, Eq. (36)} :

$$\gamma_{Lk} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2} \left[\nu_i + \nu_e \frac{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}{\omega_{LH}^2} \right], \quad (19)$$

en y approximant ω_{Lk} par ω_0 . Multiplions l'Eq. (18) par $\left[(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_e)/\omega_0 \right]^2$, développons les termes en $(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_\alpha)^2$ pour $\bar{\nu}_\alpha \ll \omega_0$:

$$(\omega_0 \pm i\bar{\nu}_\alpha)^2 \simeq \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{2i\bar{\nu}_\alpha}{\omega_0} \right), \quad (20)$$

et négligeons $\bar{\nu}_e$ apparaissant dans les termes de couplage en μ^2 , d'où la forme finale des équations couplées :

$$\left[(1 \pm i\bar{\gamma}) \left(1 - \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dx^2} \right) - \left(1 + \frac{x}{L_S} \right)^2 + \Delta \right] \tilde{\Phi}^\pm = \Delta \tilde{\Phi}^\mp \quad (21)$$

où

$$\bar{\gamma} \equiv \frac{2(\gamma_{Lk} + \gamma_g)}{\omega_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2} \quad (22)$$

$$\Delta \equiv \frac{\nu_D^2}{4c_s^2 (1 + T_i/T_e)} \frac{\omega_{LH}^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}$$

APPENDICE C

Solutions asymptotiques pour l'instabilité de désintégration dans un plasma inhomogène

Nous calculons séparément les contributions asymptotiques des lignes d'embranchement et des points stationnaires aux intégrales (23) du chapitre V. La présence des points d'embranchement nous oblige à définir une origine pour l'argument de tout nombre complexe K . Définissons l'argument de K nul pour $K = \text{Re}(K) \gg 1$. L'argument de tout K dépendra alors des directions des lignes d'embranchement. Les extrémités des contours où les intégrales convergent seront définis à la fin.

1. Contributions des lignes d'embranchement

Les points d'embranchement à la fois pour $\phi^+(K)$ et pour $\phi^-(K)$ sont situés en $K = \pm K_A$, où $K_A = \sqrt{\frac{2(\delta\omega_r + i\gamma + i\gamma_0)}{kc_s}}$. Nous utiliserons par la suite la forme de de Moivre :

$$K_A = |K_A| \exp(i\theta)$$

$$|K_A| = \left[\frac{2}{kc_s} \sqrt{\delta\omega_r^2 + (\gamma + \gamma_0)^2} \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Arctg} \left(\frac{\gamma + \gamma_0}{\delta\omega_r} \right)$$

1.1. Intégrales autour du point d'embranchement $K = + K_A$

Nous définissons une origine au centre de chaque région d'interaction forte:

$$\zeta^{\pm} = \zeta + kH_n \left[\frac{2\delta\omega_r}{kc_s} + \frac{2(kc_s + \delta\omega_r)}{\omega_0} \right], \quad (2)$$

et ferons des développements asymptotiques pour $|\xi^{\pm}| \gg 1$. Posons :

$$k = k_A + \delta k \quad (3)$$

et supposons $|\delta k| \ll |k_A|$ pour l'intégrale autour de k_A . Alors :

$$\begin{aligned} \Phi^{\pm}(k) &= k_A \left[\frac{\zeta^{\pm}}{kH_n} + \frac{2i(\gamma + \gamma_{Lk})}{\omega_0} + \frac{2i(\gamma + \gamma_a)}{kc_s} \right] - \frac{2}{3} k_A^3 \quad (4) \\ &+ \delta k \left[\frac{\zeta^{\pm}}{kH_n} + \frac{2i(\gamma + \gamma_{Lk})}{\omega_0} + \frac{2i(\gamma + \gamma_a)}{kc_s} \right] - \frac{\Delta}{2k_A} \operatorname{Ln} \left(\frac{2k_A}{\delta k} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Asymptotiquement les termes en ξ^{\pm} dominent :

$$\Phi^{\pm}(k) \simeq -\frac{2}{3} k_A^3 + \frac{k_A \zeta^{\pm}}{kH_n} + \frac{\delta k \zeta^{\pm}}{kH_n} - \frac{\Delta}{2k_A} \operatorname{Ln} \left(\frac{2k_A}{\delta k} \right). \quad (5)$$

La validité de cette expression pour $|\xi^{\pm}| = \Delta\xi$, à l'intérieur de la cavité implique

$$\frac{\gamma + \gamma_a}{kc_s}, \quad \frac{\gamma_{Lk}}{\omega_0} \ll \frac{4kc_s}{\omega_0}. \quad (6)$$

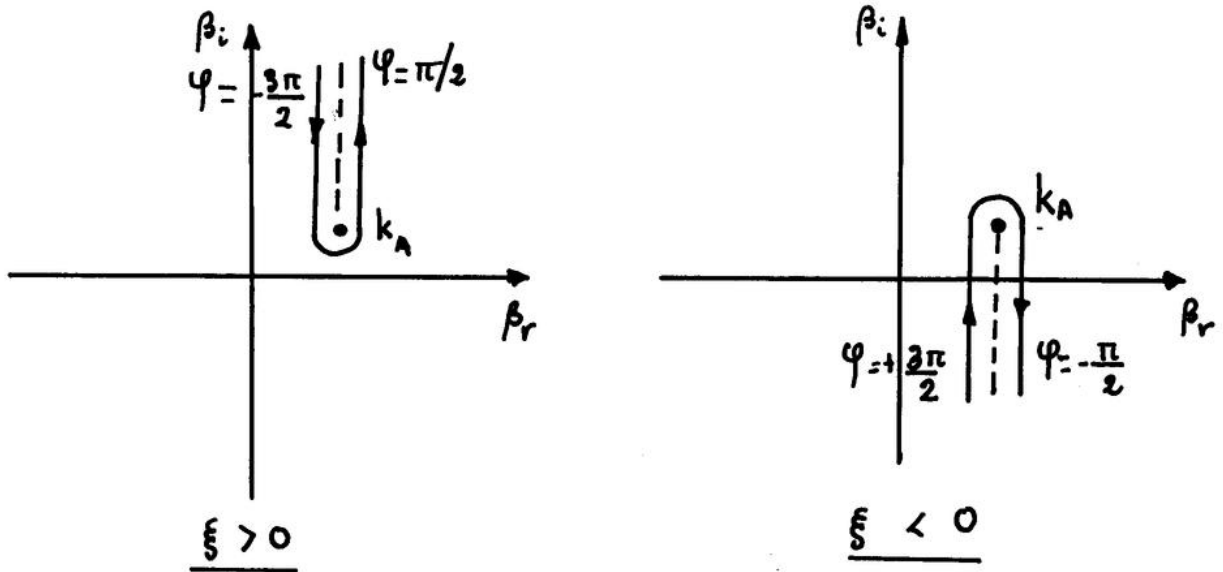
La condition sur γ_{Lk} est aussi celle de la validité du traitement de l'instabilité de désintégration par le couplage à trois modes seulement dans le cas du plasma homogène. Les intégrales (23) du chapitre V :

$$\tilde{N}_e^{\pm} = A^{\pm} \oint_{C^{\pm}} dk \exp \left[i k H_n \Phi^{\pm}(k) \right] \quad (7)$$

sont calculées en faisant le changement de variables

$$\delta k = \rho e^{i\varphi} / |\zeta^{\pm}|, \quad (8)$$

de telle sorte que pour grands $|\xi^\pm|$ on peut intégrer sur \mathcal{P} en conservant $|\delta K|$ fini. Les intégrales (7) convergent pour $\xi^\pm > 0$ lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{3\pi}{2}$ et pour $\xi^\pm < 0$ lorsque $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Ces conditions sur φ déterminent la direction des lignes d'embranchement, illustrées par la figure A, ci-dessous.



Les lignes en traitillé représentent les lignes d'embranchement, les traits pleins les contours d'intégration et les flèches la direction d'intégration.

Figure A

Utilisant la définition des logarithmes de nombres complexes :

$$\text{Ln} \left(\frac{2k_A}{\delta K} \right) = \text{Ln} |2k_A \xi^\pm| - \text{Ln} \mathcal{P} + i(\theta - \varphi), \quad (9)$$

et substituant les expressions (8), (9), (5) dans l'intégrale (7) nous obtenons des intégrales de la forme :

$$\int_0^\infty d\mathcal{P} \exp \left[-\mathcal{P} + \frac{i \Delta K H_n}{k_A} \text{Ln} \mathcal{P} \right], \quad (10)$$

qui s'expriment en terme de la fonction gamma pour variables complexes z :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \cdot e^{-t} \quad (11)$$

Simplifions la notation et définissons :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \Delta k H_n / 2 k_A \\ F^{\pm} &= \frac{i A^{\pm}}{\zeta^{\pm}} \Gamma(1+i\varepsilon) \cdot \exp[\theta \varepsilon - i \varepsilon \operatorname{Ln} |2 k_A \zeta^{\pm}|] \cdot \left[e^{\frac{\pi}{2} \varepsilon} - e^{-\frac{3\pi}{2} \varepsilon} \right] \cdot \exp\left[-i \frac{2}{3} k_A^3 k H_n\right] \end{aligned} \quad (12)$$

Les solutions $\tilde{N}_e^{\pm}(\xi^{\pm})$ dans la région $\xi^{\pm} \gg 1$ sont :

$$\tilde{N}_e^{\pm}(\zeta^{\pm}) = -F^{\pm} e^{\pi \varepsilon} e^{i k_A \zeta^{\pm}} \quad (13)$$

et dans la région $\xi^{\pm} \ll -1$:

$$\tilde{N}_e^{\pm}(\zeta^{\pm}) = F^{\pm} e^{i k_A \zeta^{\pm}} \quad (14)$$

1.2 Intégrales autour de $K = -K_A$

Posons $K = -K_A + \delta K$, supposant $|\delta K| \ll K_A$; asymptotiquement :

$$\Phi^{\pm}(K) \approx \frac{2}{3} k_A^3 - \frac{k_A \zeta^{\pm}}{k H_n} + \frac{\delta K \zeta^{\pm}}{k H_n} - \frac{\Delta}{2 k_A} \operatorname{Ln} \left(\frac{\delta K}{-2 k_A} \right) \quad (15)$$

et avec le changement de variables $\delta K = \rho_e^{i\varphi} / |\xi^{\pm}|$ les lignes d'embranchement doivent être dirigées selon les directions indiquées dans la figure B, ci-après :

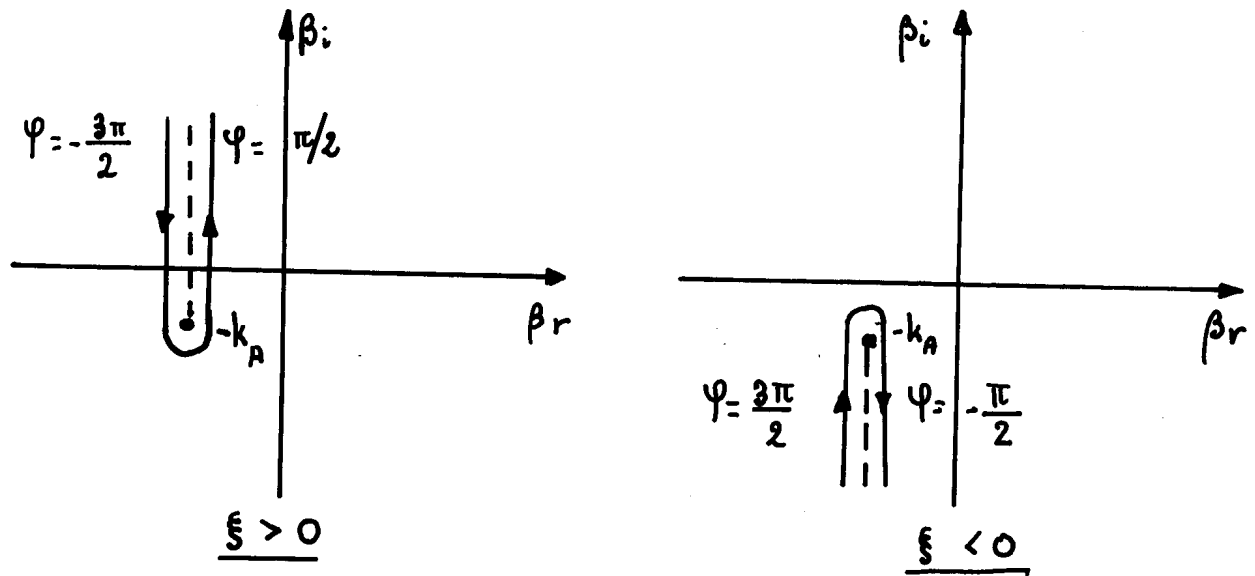


Figure B

Développons le logarithme :

$$\text{Ln} \left(\frac{\delta K}{-2K_A} \right) = \text{Ln} S - \text{Ln} |2K_A \xi^\pm| + i \left[\varphi - \text{arg}(-2K_A) \right]. \quad (16)$$

La valeur de $\text{arg}(-2K_A)$ dépend de la direction des lignes d'embranchement en $K = K_A$. Nous désignerons par H et B les cas où les lignes d'embranchement en $K = +K_A$ sont dirigées vers le haut ou vers le bas, respectivement.

Alors :

$$H: \text{arg}(-2K_A) = \theta - \pi,$$

$$B: \text{arg}(-2K_A) = \theta + \pi.$$

(17)

Définissons :

$$G^\pm = \frac{i A^\pm}{\xi^\pm} \Gamma(1-i\epsilon) \exp \left[-\theta\epsilon + i\epsilon \text{Ln} |2K_A \xi^\pm| \right] \cdot \left[e^{\frac{\pi}{2}\epsilon} - e^{-\frac{3\pi}{2}\epsilon} \right] \exp \left[i \frac{2}{3} K_A^3 k H_n \right].$$

(18)

alors dans la région $\xi^\pm \gg +1$:

$$\begin{aligned} H: \tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) &= G^\pm e^{\pi\varepsilon} e^{-iK_A \xi^\pm} \\ B: \tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) &= G^\pm e^{-\pi\varepsilon} e^{-iK_A \xi^\pm} \end{aligned} \quad (19)$$

et dans la région $\xi^\pm \ll -1$:

$$\begin{aligned} H: \tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) &= -G^\pm e^{2\pi\varepsilon} e^{-iK_A \xi^\pm} \\ B: \tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) &= -G^\pm e^{-iK_A \xi^\pm} \end{aligned} \quad (20)$$

Toutes les expressions pour $\tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm)$ ont une dépendance en $1/\xi^\pm$ et ne contribuent donc pas aux solutions hybrides inférieures pour grands $|\xi^\pm|$. Par contre elles vont donner le comportement asymptotique des ondes acoustiques. En effet, utilisant les équations du couplage pour grands $|\xi^\pm|$, Eqs. (11) chapitre V, nous obtenons les solutions acoustiques $\tilde{N}_e^{\pm 0}(\xi^\pm)$ à partir de $\tilde{N}_e^{\pm}(\xi^\pm)$:

$$\tilde{N}_e^{\pm 0}(\xi^\pm) \approx \pm \frac{\xi^\pm}{kH_n} \cdot \frac{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2}{\frac{1}{2}(1 - \omega_{pi}^2/\omega_o^2)} \tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) \quad (21)$$

La condition de validité de cette expression dans la cavité est :

$$|K_A^2| \ll \Delta\xi/kH_n, \text{ soit}$$

$$\frac{\delta\omega_r}{kc_s} \ll \frac{4kc_s}{\omega_o} \quad (22)$$

2. Contribution des points stationnaires

Les points stationnaires des fonctions $\Phi^\pm(K)$ définis par $\frac{d\Phi^\pm}{dK} = 0$, sont des solutions de :

$$K^2 + \frac{\xi^\pm}{kH_n} \pm \frac{2i(\gamma + \gamma_{Lk})}{\omega_0} - \frac{\Delta}{K_A^2 - K^2} = 0 \quad (23)$$

Sous la condition $\Delta \ll k^2 c_s^2 / \omega_0^2$ on obtient deux types de solutions bien distinctes pour les ondes hybrides d'une part et l'onde acoustique d'autre part. Les points stationnaires pour les ondes hybrides inférieures sont alors :

$$K_L^\pm(\xi^\pm) = \pm \left[-\frac{\xi^\pm}{kH_n} \mp \frac{2i(\gamma + \gamma_{Lk})}{\omega_0} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

et ceux de l'onde acoustique :

$$K = \pm \left[K_A^2 - \frac{\Delta kH_n}{\xi^\pm} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Les contributions des intégrales pour les ondes acoustiques ont déjà été calculées, aussi nous limiterons-nous aux points stationnaires des ondes hybrides inférieures. Autour d'un point stationnaire K_L , la fonction $\Phi(K)$ peut être développée :

$$\Phi(K) = \Phi(K_L) + \frac{(K - K_L)^2}{2} \left. \frac{d^2 \Phi}{dK^2} \right|_{K=K_L}. \quad (26)$$

Un point stationnaire doit être traversé par un parcours tel que $\text{Re}\{\Phi(K)\} = \text{Re}\{\Phi(K_L)\}$ et $\text{Im}\{\Phi(K)\}$ minimum en $K = K_L$. En conséquence :

$$\text{Re} \left[\frac{(K - K_L)^2}{2} \left. \frac{d^2 \Phi}{dK^2} \right|_{K=K_L} \right] = 0,$$

ce qui définit deux directions orthogonales pour les parcours. La condition: $\text{Im}\{\Phi(K)\}$ minimum en K_L sélectionne alors le bon parcours. Les intégrales le long de ces parcours sont classiques. Les résultats sont résumés ci-après.

1) Pour $\xi^\pm \gg +1$:

a) $K \sim i\sqrt{\xi^\pm/kH_n}$:

on obtient les ondes évanescentes :

$$\tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) = A^\pm \sqrt{\pi} \left(\frac{kH_n}{\xi^\pm} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\xi^\pm}{kH_n} \right)^{3/2} + \varepsilon \arg \left(\frac{i\sqrt{\xi^\pm/kH_n} + K_A}{i\sqrt{\xi^\pm/kH_n} - K_A} \right) \right] \quad (27)$$

b) $K \sim -i\sqrt{\xi^\pm/kH_n}$:

on obtient des ondes exponentiellement croissantes, qui sont interdites :

$$\tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) = A^\pm \sqrt{\pi} \left(\frac{kH_n}{\xi^\pm} \right)^{1/4} \exp \left[+\frac{2}{3} \left(\frac{\xi^\pm}{kH_n} \right)^{3/2} + \varepsilon \arg \left(\frac{-i\sqrt{\xi^\pm/kH_n} + K_A}{-i\sqrt{\xi^\pm/kH_n} - K_A} \right) \right] \quad (28)$$

2) Pour $\xi^\pm \ll -1$:

a) $K \sim +K_L^\pm$:

$$\tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) = A^\pm \left(\frac{\pi}{kH_n K_L^\pm} \right)^{1/2} \exp \left[-i\frac{2}{3} kH_n (K_L^\pm)^3 + i\frac{\pi}{4} + \varepsilon \arg \left(\frac{K_L^\pm + K_A}{K_L^\pm - K_A} \right) \right] \quad (29)$$

b) $K \sim -K_L^\pm$:

$$\tilde{N}_e^\pm(\xi^\pm) = A^\pm \left(\frac{\pi}{kH_n K_L^\pm} \right)^{1/2} \exp \left[i\frac{2}{3} kH_n (K_L^\pm)^3 - i\frac{\pi}{4} + \varepsilon \arg \left(\frac{-K_L^\pm + K_A}{-K_L^\pm - K_A} \right) \right] \quad (30)$$

Pour $|\xi^\pm| \gg 1$, la relation entre $\arg\left(\frac{-K_L^\pm + K_A}{-K_L^\pm - K_A}\right)$ et $\arg\left(\frac{K_L^\pm + K_A}{K_L^\pm - K_A}\right)$ dépend des directions des lignes d'embranchement. Lorsque les deux lignes d'embranchement sont à la fois "en-haut" ou "en-bas" :

$$\arg \left(\frac{-K_L + K_A}{-K_L - K_A} \right) = -\arg \left(\frac{K_L + K_A}{K_L - K_A} \right) \quad , \quad (31)$$

et lorsque les conditions (6) et (22) sont satisfaites $\arg \left(\frac{K_L + K_A}{K_L - K_A} \right) \approx 0$ -
 Lorsque les deux types de lignes d'embranchement sont antiparallèles :

$$\arg \left(\frac{-K_L + K_A}{-K_L - K_A} \right) = \pm 2\pi , \quad (32)$$

le signe + étant obtenu lorsque la ligne d'embranchement en $K = +K_A$ est "en-haut" et le signe - lorsqu'elle est "en-bas". La figure C ci-dessous montre les positions des points stationnaires pour les ondes hybrides inférieures dans le plan K pour $\xi^+ \gg +1$ et $\xi^- \ll -1$. Les lettres D et C se réfèrent aux ondes exponentiellement décroissantes et croissantes respectivement. Les flèches indiquent les directions des chemins d'intégration.

Les extrémités des contours pour $|K| \gg 1$ doivent être localisés dans des régions où le terme dominant K^3 de $\Phi^{\pm}(K)$ produit une décroissance exponentielle. Les zones hachurées de la figure C sont interdites pour les extrémités des contours d'intégration. Les contours ayant une extrémité dans la direction imaginaire négative du plan K doivent traverser le point stationnaire C qui produit des solutions physiquement interdites. Rejetant ces solutions, il nous reste trois solutions linéairement indépendantes autour de chaque région d'interaction forte.

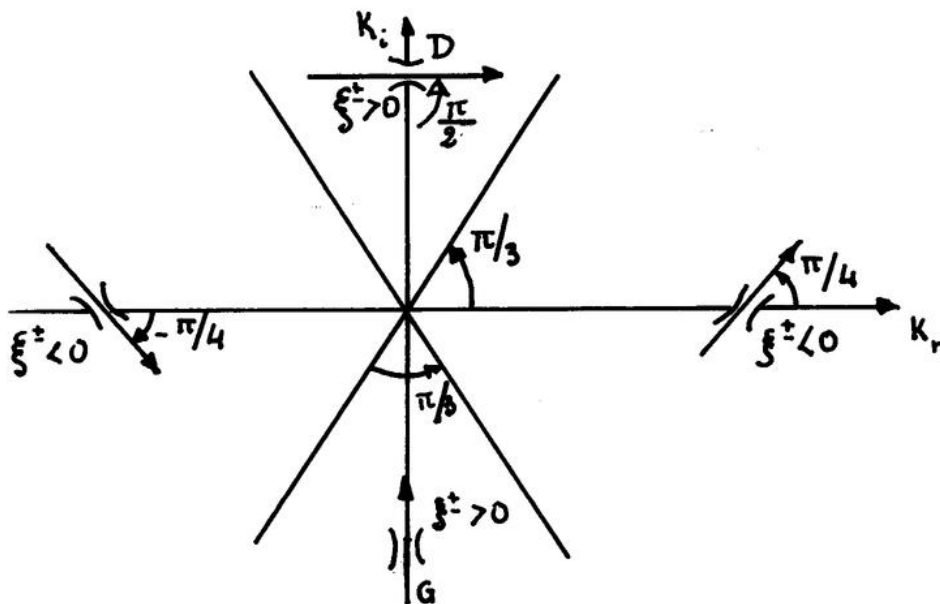


Figure C

GLOSSAIRE

Les symboles sont définis dans l'ordre chronologique d'apparition dans le texte.

ω	fréquence angulaire des ondes
ω_{LH}	fréquence de résonance hybride inférieure
T_e	température électronique
T_i	température ionique
ω_0	fréquence de la pompe
\underline{k}	vecteur d'onde
k	nombre d'onde
r_{Li}	rayon de Larmor (ou de giration) ionique
v_D	vitesse de dérive électronique induite par pompe
$c_s = \sqrt{\frac{KT_e}{m_i}}$	vitesse acoustique
K	constante de Boltzmann
m_i	masse de l'ion
E	champ électrique
B_0	champ magnétique
$k_{//}$	composante de \underline{k} parallèle au champ magnétique
k_{\perp}	composante de \underline{k} perpendiculaire au champ magnétique
m_e	masse de l'électron
$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{e n_0} \right)^{1/2}$	longueur de Debye
ϵ_0	constante diélectrique du vide

e	charge électrique
n_0	densité des particules
R	grand rayon du Tokamak
$H_s = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{-1}$	échelle du shear
φ	angle entre le champ \underline{B} local et le champ \underline{B} au centre du plasma
x	coordonnée selon la direction du petit rayon du plasma
ω_{pe}	fréquence plasma électronique
$L_s = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\omega^2 - \omega_{LH}^2}{M\omega_{LH}^2} \right)^{\frac{1}{2}} H_s$	échelle effective du shear
$M = \frac{m_i}{m_e}$	rapport des masses
n	numéro de l'harmonique
$H_n = \left(\frac{d}{dx} \ln n_0 \right)^{-1}$	échelle de la variation de densité
Δx	extension de la cavité laser pour l'instabilité de désintégration résonnante dans un plasma inhomogène
$\omega_{ci} = eB_0/m_i$	fréquence cyclotronique ionique
$\omega_{ce} = eB_0/m_e$	fréquence cyclotronique électronique
\underline{J}	courant électrique
$\underline{\sigma}$	tenseur de conductivité
$N = \frac{ck}{\omega}$	indice de réfraction
θ	angle entre \underline{R} et \underline{B}_0
c	vitesse de la lumière
ϕ	potentiel électrostatique

n_α	densité perturbée de particules d'espèce α
χ_α	susceptibilité électrique pour les particules d'espèce α
q_α	charge de la particule d'espèce α
$\epsilon = 1 + \chi_i + \chi_e$	fonction diélectrique
$F_{0\alpha}$	fonction de distribution d'équilibre pour les particules d'espèce α
\underline{u}	vitesse des particules
J_n	fonction de Bessel ordinaire d'ordre n
ϵ	partie imaginaire de la fréquence donnant la prescription de Landau
$V_\alpha = (KT_\alpha/m_\alpha)^{\frac{1}{2}}$	vitesse thermique des particules d'espèce α
$r_e = V_e/\omega_{ce}$	rayon de Larmor électronique
$Z(x_e)$	fonction de Fried et Conte
$x_e = \omega/\sqrt{2} k_{\parallel} V_e$	argument de la fonction Z pour les électrons
$x_i = \omega/\sqrt{2} k V_i$	argument de la fonction Z pour les ions
ω_{Lk}	fréquence des ondes hybrides inférieures
γ_{Lk}	amortissement naturel des ondes hybrides inférieures
V_α	vitesse fluide perturbée pour les particules d'espèce α
γ_α	rapport des chaleurs spécifiques
ν_α	fréquence de collision effective des particules d'espèce α
$\nu_{\alpha c}$	véritable fréquence de collision des particules d'espèce α

ψ_c	angle de coupure des ondes hybrides inférieures dans un champ magnétique cisailé
ψ_L	angle d'absorption complète par effet Landau
$\underline{x}_\alpha(t)$	déplacement des particules d'espèce α autour de leurs trajectoires naturelles sous l'effet du champ électrique $\underline{E}_0(t)$ de la pompe
\underline{d}_α	amplitude maximum de \underline{x}
$\mu_\alpha = \underline{k} \cdot \underline{d}_\alpha$	coefficient de couplage pour l'espèce α
ρ_α	densité de charge perturbée pour l'espèce α
$f_\alpha(\underline{r}, \underline{v}, t)$	fonction de distribution des particules d'espèce α
f_α^1	fonction de distribution perturbée des particules d'espèce α
γ_g	taux de croissance des instabilités
$\delta = \frac{\omega_{Lk}}{\omega_0} - 1$	écart de fréquence
$\Delta = \frac{v_0^2}{4\tilde{c}_s^2(1+T_i/T_e)} \frac{\omega_{LH}}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}$	intensité de pompe normalisée
$\bar{\gamma} = \frac{2(\gamma_{Lk} + \gamma_g)}{\omega_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{LH}^2}$	normalisation de la somme de l'amortissement ω_{Lk} et du taux de croissance γ_g
$K(x) = k_x(x)/k$	composante selon x du vecteur d'onde \underline{k} normalisée à la composante constante k située dans le plan y, z

CURRICULUM VITAE

Né le 23 janvier 1946 à Strasbourg (France), j'obtins en 1966 le baccalauréat français, section Mathématiques élémentaires. La même année je m'inscrivis à la section d'ingénieur physicien de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Après l'obtention, en 1971, du diplôme d'ingénieur physicien, j'ai travaillé au Centre de Recherches en Physique des Plasmas comme assistant scientifique. A l'achèvement de mon travail de thèse au mois de février 1977 je fus engagé à l'Université de Cornell (Ithaca, U.S.A.).