

Janvier 1976

LRP 100/76

EVOLUTION QUASILINEAIRE D'UN PLASMA
HOMOGENE, NON MAGNETISE

T.M. Tran, K. Appert, J. Vaclavik

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

EVOLUTION QUASILINEAIRE D'UN PLASMA

HOMOGENE, NON MAGNETISE

T.M. Tran^{*}, K. Appert, J. VaclavikRESUME

Les équations quasilinéaires sont dérivées à partir de l'équation de Vlasov, donnant un coefficient de diffusion non négatif. Pour des raisons de simplicité de programmation et d'efficacité dans un code bidimensionnel de stabilité MHD /15/, une méthode hybride Différences Finies - Eléments Finis /2/ est utilisée pour l'étude numérique de ces équations. Ces résultats montrent que la situation de l'énergie des ondes est atteinte au temps $\cong 30\omega_{pe}$, mais que l'état n'est pas encore stationnaire; en effet, jusqu'à $t \cong 600/\omega_{pe}$, un déplacement du spectre vers les petites longueurs d'ondes est observé.

* travail pratique de diplôme d'ingénieur-physicien.

INTRODUCTION

Un problème important de la théorie des ondes dans le plasma est la description de l'état stationnaire dans le cas où la distribution des particules dans l'espace des vitesses est telle que les ondes sont linéairement instables (distribution en gentle-bump, instabilités ion-acoustiques, etc...).

Un premier pas vers cette étude dans le cas d'un spectre assez large ($\tau_{\text{auto}} \ll \tau_{\text{trap}}$) est la théorie de la turbulence faible dont l'approximation à l'ordre le plus bas se trouve être la théorie quasilinear qui traite essentiellement l'interaction entre les ondes et les particules. Dans le cadre de cette théorie, on obtient une équation de diffusion pour la fonction de distribution des particules dans l'espace des vitesses.

L'intérêt d'une étude numérique des équations quasilineaires réside dans les deux faits suivants:

- Par un traitement purement analytique, seule la solution asymptotique peut être connue. Dans le cas unidimensionnel, l'état final est entièrement spécifié, tandis que dans les cas bi et tridimensionnel, seule l'existence d'un état final stationnaire peut être démontrée; la description de cet état reste encore problématique.
- Les simulations numériques n'arrivent pas jusqu'à présent à isoler les effets de la turbulence faible de ceux de la turbulence forte (piégeage des particules).

Le plan de ce rapport est organisé comme suit:

Dans la section 1, les équations quasilineaires sont dérivées dans le cas d'un plasma homogène, non-magnétisé. Seule la dynamique des électrons est considérée. On obtient ainsi des équations cinétiques identiques à celles données par A.N. Kaufman /4/. Les lois de la conservation des particules, de l'impulsion et de l'énergie sont vérifiées.

Dans la section 2, une formulation variationnelle /5/ est déduite du système différentiel pour l'étude numérique. Les discrétisations dans l'espace des vitesses dans le temps y sont aussi exposées.

Dans la section 3, les résultats analytiques et numériques sont discutés. On verra que l'existence d'un état final stationnaire est démontrée par un théorème H.

Enfin, une description sommaire du code bidimensionnel SELENE est donnée dans l'appendice.

Note: Toutes les grandeurs physiques utilisées dans la section 1 sont exprimées en unités MKS naturelles ($\epsilon_0 = 1$, $c = 1$).

1. PROBLEME PHYSIQUE

1.1 Les équations cinétiques

Soient $F(\underline{r}, \underline{v}, t)$ et $\underline{E}(\underline{r}, t)$ respectivement la fonction de distribution microscopique à une particule et le champ électrique microscopique. On désigne par $\langle A \rangle$, la moyenne statistique de la grandeur A prise sur un ensemble de systèmes macroscopiquement identiques, et δA la partie fluctuante de cette grandeur /1/:

$$A(\underline{r}, \underline{v}, t) = \langle A \rangle (\underline{r}, \underline{v}, t) + \delta A (\underline{r}, \underline{v}, t) \quad (1.1)$$
$$\langle \delta A \rangle = 0$$

Pour un ensemble de systèmes homogènes, $\langle A \rangle$ ne dépend pas de la position \underline{r} .

1.1a Distribution des Particules

Pour un plasma homogène, non-magnétisé et sans champ électrique extérieur les équations cinétiques pour $\langle F \rangle$ et δF s'écrivent dans l'approximation électrostatique /6/:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle = - \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \frac{e}{m} \langle \delta \underline{E} \delta F \rangle \quad (1.2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} + \frac{e}{m} \delta \underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right] \delta F = - \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \frac{e}{m} \left[\delta \underline{E} \langle F \rangle - \langle \delta \underline{E} \delta F \rangle \right] \quad (1.3)$$

$\delta \underline{E}$ est lié à δF par l'équation de Poisson:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \delta \underline{E} = ne \int d^3 \underline{v} \delta F \quad (1.4)$$

où n désigne la densité des particules.

Les trois équations (1.2), (1.3) et (1.4) forment un système clos d'équations non-linéaires.

En admettant que le terme $\langle \delta \underline{E} \delta F \rangle$ est négligeable /3/:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \langle \delta \underline{E} \delta F \rangle \right| \ll \left| \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \delta \underline{E} \langle F \rangle \right| \quad (1.5)$$

l'équation (1.3) peut être intégrée suivant les caractéristiques:

$$\frac{d}{d\tau} \underline{r}(\tau) = \underline{v}(\tau) \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} \underline{v}(\tau) = \frac{e}{m} \delta \underline{E}(\underline{r}(\tau), \tau) \quad (1.7)$$

avec

$$\underline{r}(t) = \underline{r} \quad (1.8)$$

$$\underline{v}(t) = \underline{v} \quad (1.9)$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \delta F(\underline{r}, \underline{v}, t) = & \delta F(\underline{r}(0), \underline{v}(0), 0) \\ & - \frac{e}{m} \int_0^t d\tau \delta \underline{E}(\underline{r}(\tau), \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \langle F \rangle(\underline{v}(\tau), \tau) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour des fluctuations faibles de F et de \underline{E} , on peut négliger en première approximation le terme $\delta \underline{E}$ dans (1.7); autrement dit, on fait l'intégration sur des "orbites non-perturbées des particules". Par conséquent:

$$\underline{r}(\tau) = \underline{r} - (t-\tau) \underline{v} \quad (1.11)$$

$$\underline{v}(\tau) = \underline{v} \quad (1.12)$$

et l'équation (1.10) devient:

$$\begin{aligned} \delta F(\underline{r}, \underline{v}, t) = & \delta F(\underline{r} - \underline{v}t, \underline{v}, 0) \\ & - \frac{e}{m} \int_0^t d\tau \delta \underline{E}(\underline{r} - \underline{v}\tau, t-\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \langle F \rangle(\underline{v}, t-\tau) \end{aligned} \quad (1.13)$$

et si l'on remplace la valeur de δF dans l'équation (1.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle(\underline{v}, t) = & - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \langle \delta \underline{E}(\underline{r}, t) \delta F(\underline{r} - \underline{v}t, \underline{v}, 0) \rangle \\ & + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \int_0^t d\tau \underline{C}(\underline{v}, t, \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \langle F \rangle(\underline{v}, t-\tau) \end{aligned} \quad (1.14)$$

où

$$\underline{C}(\underline{v}, t, \tau) = \langle \delta E(\underline{r}, t) : \delta E(\underline{r} - \underline{v}\tau, t - \tau) \rangle \quad (1.15)$$

Pour des temps t suffisamment grands par rapport au temps de corrélation des fluctuations, le premier terme du membre de droite de (1.14) est nul et on peut remplacer la borne d'intégration t par ∞ . L'équation d'évolution pour $\langle F \rangle$ se réduit donc à

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle(\underline{v}, t) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{I}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \langle F \rangle(\underline{v}, t) \quad (1.16)$$

où

$$\underline{I}(\underline{v}, t) = \int_0^\infty d\tau \underline{C}(\underline{v}, t, \tau) \quad (1.17)$$

L'intégrale \underline{I} est calculée dans l'appendice A.1, et l'on obtient l'équation d'évolution suivante pour $\langle F \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle(\underline{v}, t) = & \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \frac{\underline{k} : \underline{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \langle F \rangle \\ & - \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \frac{\underline{k} : \underline{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial \underline{v}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où σ désigne les différents modes des ondes, et $I_{\underline{k}}^{\sigma}$ l'intensité spectrale:

$$\frac{I_{\underline{k}}^{\sigma}(t)}{V} = \langle [\delta E_{\underline{k}}^{\sigma}]^2 \rangle \quad (1.19)$$

$\delta E_{\underline{k}}^{\sigma}$ est l'amplitude de l'onde.

Séparons $\langle F \rangle$ en deux termes:

$$\langle F \rangle(\underline{v}, t) = f_0(\underline{v}, t) + f_1(\underline{v}, t) \quad (1.20)$$

où f_0 est telle que sa grandeur est indépendante de $I_{\underline{k}}^\sigma$ mais son évolution (dérivée temporelle) proportionnelle à $I_{\underline{k}}^\sigma / 4$, et f_1 est telle que sa valeur est proportionnelle à $I_{\underline{k}}^\sigma$.

En utilisant cet artifice et en négligeant les termes en $I_{\underline{k}}^{\sigma 2}$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0(\underline{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} f_0(\underline{v}, t) \quad (1.21)$$

$$\underline{D}(\underline{v}, t) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \cdot \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \quad (1.22)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\underline{v}, t) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \quad (1.23)$$

L'équation (1.21) est bien une équation de diffusion de diffusivité \underline{D} positive.

L'équation (1.23) s'intègre facilement et donne:

$$f_1(\underline{v}, t) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \quad (1.24)$$

On vérifie que:

$$\left| \frac{\frac{\partial}{\partial \underline{v}} f_1}{\frac{\partial}{\partial \underline{v}} f_0} \right| \approx \frac{E_{\text{ondes}}}{nm \bar{v}^2} \ll 1 \quad (1.25)$$

où E_{ondes} est l'énergie des ondes, \bar{v} la vitesse thermique des électrons.

1.1b Evolution des Ondes

En posant:

$$\underline{\delta E}(\underline{r}, t) = i \frac{\underline{R}}{R} \underline{\delta E}_{\underline{R}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{r} - i \omega_{\underline{R}} t - i \phi_{\underline{R}}} \quad (1.26)$$

où \underline{k} , $\underline{\delta E}_{\underline{k}}$, $\omega_{\underline{k}}$ et $\phi_{\underline{k}}$ sont des grandeurs réelles, l'équation de Poisson (1.4) donne avec (1.13):

$$\underline{\delta E}_{\underline{R}}(t) = i \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \int_0^{\infty} d\tau \underline{\delta E}_{\underline{R}}(t-\tau) e^{i \omega_{\underline{R}} \tau} \int d^3 \underline{v} e^{-i \underline{k} \cdot \underline{v}} \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, t-\tau) \quad (1.27)$$

dans laquelle le terme initial (terme de free streaming) est négligé, et la borne d'intégration sur τ remplacée par ∞ , puisque l'intégrale sur les vitesses décroît rapidement par mélange de phase.

Développons $\underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(t-\tau)$ et $\underline{\delta E}_{\underline{k}}(t-\tau)$ en série de Taylor:

$$\underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(t-\tau) = \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(t) - \dots \quad (1.28)$$

$$\underline{\delta E}_{\underline{R}}(t-\tau) = \underline{\delta E}_{\underline{R}}(t) - \tau \dot{\underline{\delta E}}_{\underline{R}}(t) + \dots \quad (1.29)$$

L'équation (1.27) devient alors

$$\begin{aligned} \underline{\delta E}_{\underline{R}}(t) & \left\{ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 \underline{v} \exp[i(\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v})\tau] \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, t) \right\} \\ & = -i \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \dot{\underline{\delta E}}_{\underline{R}}(t) \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 \underline{v} \tau \exp[i(\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v})\tau] \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, t) + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

en utilisant l'identité

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{iy\tau} = \pi \delta(y) + i \mathcal{P} \left(\frac{1}{y} \right) \quad (1.31)$$

et en séparant l'équation (1.30) en ses parties imaginaire et réelle:

$$\frac{\delta \dot{E}_{\underline{R}}(t)}{\delta E_{\underline{R}}(t)} = \frac{\int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v}) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{R}}} \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v}} \right) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}} = \gamma_{\underline{R}}(t) \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{\underline{R}}(t) \left\{ 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v}} \right) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \right\} = \\ - \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \delta \dot{E}_{\underline{R}}(t) \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{R}}} \int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{R}} - \underline{R} \cdot \underline{v}) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \end{aligned} \quad (1.33)$$

La relation (1.32) donne le taux de croissance (ou d'amortissement) $\gamma_{\underline{k}}(t)$. Comme

$$\gamma_{\underline{R}} \ll \omega_{\underline{R}} \quad (1.34)$$

il est consistant de négliger le membre de droite de (1.33) et on a la relation de dispersion:

$$\epsilon(\underline{R}, \omega_{\underline{R}}^{\sigma}) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{R^2} \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v}} \right) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} = 0 \quad (1.35)$$

et

$$\gamma_{\underline{R}}^{\sigma}(t) = \frac{\int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v}) \underline{R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}}{\frac{R^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{R}}^{\sigma}} \epsilon(\underline{R}, \omega_{\underline{R}}^{\sigma})} \quad (1.36)$$

où $\omega_{\underline{k}}^{\sigma}$ désigne la solution de (1.35).

L'équation d'évolution pour $I_{\underline{k}}^{\sigma}(t)$ s'écrit donc en utilisant la définition (1.19):

$$\frac{\partial I_{\underline{R}}^{\sigma}(t)}{\partial t} = 2 \gamma_{\underline{R}}^{\sigma}(t) I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \quad (1.37)$$

Finalement la solution générale de l'équation de Poisson peut s'écrire:

$$\delta \underline{E}(\underline{r}, t) = \sum_{\sigma, \underline{k}} i \frac{\underline{k}}{k} \delta E_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \exp[i \underline{k} \cdot \underline{r} - i \omega_{\underline{k}}^{\sigma} t - i \phi_{\underline{k}}^{\sigma}] \quad (1.38)$$

où le spectre des \underline{k} est donné par les conditions périodiques dans une boîte de volume $V = L_1 L_2 L_3$:

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_j \quad i = 1, 2, 3 \dots ; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.39)$$

A la limite d'un volume infini, on peut remplacer:

$$\frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \leftrightarrow \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} \quad (1.40)$$

On note que, de $\delta \underline{E}$ réel, découle à partir de (1.38):

$$\begin{aligned} \delta E_{-\underline{k}}^{\sigma} &= \delta E_{\underline{k}}^{\sigma} \\ \omega_{-\underline{k}}^{\sigma} &= -\omega_{\underline{k}}^{\sigma} \\ \phi_{-\underline{k}}^{\sigma} &= -\phi_{\underline{k}}^{\sigma} \end{aligned} \quad (1.41)$$

et l'énergie électrostatique peut s'écrire:

$$E_d = \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}, \sigma} I_{\underline{k}}^{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(\underline{k}, t) \quad (1.42)$$

1.2 Lois de Conservation

La conservation de la constante de normalisation de $\langle F \rangle$ est évidente.

En effet, en tenant compte des relations (1.21) et (1.23):

$$\frac{d}{dt} \int \langle F \rangle d^3 \underline{v} = \int \left[\frac{\partial}{\partial t} f_0 + \frac{\partial}{\partial t} f_1 \right] d^3 \underline{v} = 0 \quad (1.43)$$

L'impulsion totale est donnée par:

$$\underline{P}_{\text{tot}}(t) = mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} f_0(\underline{v}, t) + mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} f_1(\underline{v}, t) \quad (1.44)$$

l'impulsion du champ électrostatique étant nulle.

Le 2ème terme de (1.44) représente la contribution des particules à l'impulsion des ondes dans le plasma. D'après (1.24):

$$\begin{aligned} mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} f_1(\underline{v}, t) &= \\ &= -\omega_{pe}^2 \int d^3 \underline{v} \underline{v} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \frac{\underline{k} \cdot \underline{v}}{k^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \\ &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \underline{k} \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \epsilon(\underline{k}, \omega_{\underline{k}}^{\sigma}) \underline{k} \end{aligned} \quad (1.45)$$

d'où:

$$\underline{P}_{\text{tot}} = mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} f_0(\underline{v}, t) + \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \quad (1.46)$$

En utilisant l'équation de diffusion (1.21):

$$\frac{d}{dt} mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} f_0(\underline{v}, t) = -mn \int d^3 \underline{v} \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \quad (1.47)$$

D'après (1.37), (1.36) et (1.22):

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \underline{k} \\
 &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} \gamma_{\underline{k}}^{\sigma}(t) I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \underline{k} \\
 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \underline{k} \cdot \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \\
 &= mn \int d^3 \underline{v} \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

d'où:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{\text{tot}} = 0 \tag{1.49}$$

L'énergie totale du système est donnée par:

$$E_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 f_0(\underline{v}, t) + \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 f_1(\underline{v}, t) + E_{el} \tag{1.50}$$

Le 2ème terme est la contribution des particules à l'énergie des ondes dans le plasma. D'après (1.24):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 f_1(\underline{v}, t) \\
 &= -\frac{1}{2} \omega_{pe}^2 \int d^3 \underline{v} v^2 \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \\
 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \cdot \\
 & \quad \cdot (\underline{k} \cdot \underline{v}) \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Or:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int d^3 \underline{v} \underline{k} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \underline{v}} = \\
 &= \int d^3 \underline{v} \omega_{\underline{k}}^\sigma \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^\sigma - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \underline{k} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \underline{v}} - \int d^3 \underline{v} \underline{k} \cdot \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^\sigma - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \underline{k} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \underline{v}}
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 p_1(\underline{v}, t) &= \\
 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^\sigma(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^\sigma} \omega_{\underline{k}}^\sigma \int d^3 \underline{v} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^\sigma - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \underline{k} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \underline{v}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^\sigma(t) \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^\sigma} \omega_{\underline{k}}^\sigma \left[\epsilon(\underline{k}, \omega_{\underline{k}}^\sigma) - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

et l'énergie totale des ondes s'écrit, en utilisant l'expression de E_{e1} donnée par (1.42):

$$\begin{aligned}
 E_{\text{ondes}}(t) &= \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 p_1(\underline{v}, t) + E_{e1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^\sigma(t) \omega_{\underline{k}}^\sigma \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^\sigma} \epsilon(\underline{k}, \omega_{\underline{k}}^\sigma)
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

En utilisant l'équation de diffusion (1.21):

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} mn \int d^3 \underline{v} v^2 p_0(\underline{v}, t) = -mn \int d^3 \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, t) \tag{1.55}$$

D'après (1.37), (1.36) et (1.22):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} E_{\text{ondes}}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} 2 \gamma_{\underline{k}}^{\sigma}(t) I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \omega_{\underline{k}}^{\sigma} \frac{\partial E}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \\
 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \omega_{\underline{k}}^{\sigma} \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \\
 &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2\pi)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \int d^3 \underline{v} \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \underline{v} \cdot \underline{k} \cdot \underline{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} \\
 &= m n \int d^3 \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}}
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

d'où:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{tot}}(t) = 0 \tag{1.57}$$

L'impulsion totale de même que l'énergie totale sont donc bien conservées.

2. PROBLEME NUMERIQUE

Le système différentiel décrivant l'évolution du plasma est:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}(\underline{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{D}(\underline{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} f_0(\underline{v}, t) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) = 2 \gamma_{\underline{k}}^{\sigma}(t) I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \tag{2.2}$$

Pour résoudre numériquement l'équation (2.1), une formulation variationnelle est proposée.

2.1 Problème Variationnel

Soit \mathcal{F} , l'espace des fonctions sur \mathbb{R}^n (où $n = 2,3$), dont les dérivées sont continues et les valeurs à l'infini sont nulles. Le problème variationnel s'énonce de la façon suivante:

- déterminer pour tout t $f(\underline{v},t) \in \mathcal{F}$ tel que:

$$\int d^3 \underline{v} \ g(\underline{v}) \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{v},t) = - \int d^3 \underline{v} \ \frac{d}{d\underline{v}} g(\underline{v}) \cdot \underline{D}(\underline{v},t) \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{v},t) \quad (2.3)$$

pour tout $g \in \mathcal{F}$

Il est clair que les formes bilinéaires:

$$a(f,g) = \int g(\underline{v}) \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{v},t) d^3 \underline{v} = \frac{d}{dt} \int g(\underline{v}) f(\underline{v},t) d^3 \underline{v} \quad (2.4)$$

et

$$b(g,f) = - \int d^3 \underline{v} \ \frac{dg(\underline{v})}{d\underline{v}} \cdot \underline{D}(\underline{v},t) \cdot \frac{\partial f(\underline{v},t)}{\partial \underline{v}} \quad (2.5)$$

sont symétriques, $D(\underline{v},t)$ étant un tenseur symétrique (1.22).

La solution du problème différentiel, si elle existe, est aussi solution du problème variationnel et inversement.

Nous allons maintenant étudier le problème numérique dans le cas bidimensionnel. On considère que la distribution initiale suit essentiellement une loi de Maxwell (pour le plasma) à laquelle se superposent une ou plusieurs maxwelliennes de moindre importance correspondant aux faisceaux d'électrons.

En général un seul faisceau dont la vitesse de dérive se trouve sur l'axe des X est considéré.

2.2 Normalisation et Equations Numériques

Fonction de distribution	$f_o \cdot v_n^2$
Intensité des ondes	$I_k / v_n T_{eo}$
Vitesse	v / v_n
Temps	$t \cdot \omega_{pe}$
Nombre d'onde	k / k_n
Energie	$E / m n v_n^2$
Impulsion	$P v_n / n T_{eo}$

où v_n est la composante en X de la vitesse thermique de la distribution principale à l'instant initial.

$$v_n = v_{ther x} = (T_{eo} / m)^{1/2} \quad (2.6)$$

et

$$k_n = \omega_{pe} / v_n \quad (2.7)$$

les équations normalisées s'écrivent donc, en tenant compte des relations de symétries (1.41):

$$\int g(v) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(v, t) d^2 v = - \int d^2 v \frac{\partial g(v)}{\partial v} \cdot \underline{D}(v, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(v, t) \quad (2.8)$$

$$\underline{D}(v, t) = \sum_{\sigma} \sum_{\substack{R_y \\ R_x > 0}} I_R^{\sigma} 2\pi \delta(\omega_R^{\sigma} - R \cdot v) \frac{R \cdot R}{R^2} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial I_R^{\sigma}(t)}{\partial t} = 2 \gamma_R^{\sigma} I_R^{\sigma}(t) \quad (2.10)$$

$$\gamma_R^{\sigma}(t) = \int d^2 v \pi \delta(\omega_R^{\sigma} - R \cdot v) R \frac{\partial f}{\partial v} / \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_R^{\sigma}} \quad (2.11)$$

$$E_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} \int f v^2 d^2 \underline{v} + \sum_{\sigma} \sum_{\substack{R_x > 0 \\ R_y > 0}} I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \omega_{\underline{R}}^{\sigma} \frac{\partial E}{\partial \omega_{\underline{R}}^{\sigma}} \quad (2.12)$$

$$P_{\text{tot}}(t) = \int f v d^2 \underline{v} + \sum_{\sigma} \sum_{\substack{R_x > 0 \\ R_y > 0}} I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \frac{\partial E}{\partial \omega_{\underline{R}}^{\sigma}} \underline{R} \quad (2.13)$$

$$N(t) = \int f d^2 \underline{v} \quad (2.14)$$

Pour la relation de dispersion nous prenons /7/:

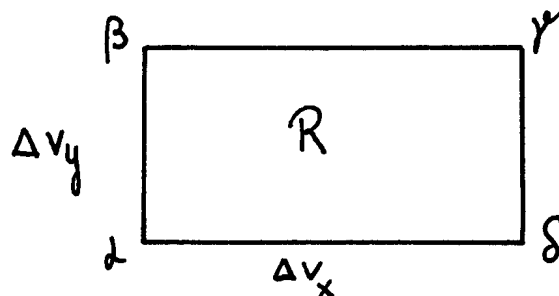
$$E(\underline{R}, \omega) = 1 - \frac{1}{\omega^2} - \frac{3R^2}{\omega^4} \quad (2.15)$$

Remarque: Dans le cas d'une distribution où il n'y a qu'un seul faisceau sur l'axe des X seul le mode σ^+ est instable. Par conséquent on peut laisser tomber l'autre mode dans les sommes sur σ .

2.3 Discrétisation dans l'Espace des Vitesses

Dans le problème discret on ne peut considérer qu'un domaine fini de l'espace des vitesses. Pour cela, nous définissons un domaine tel que les valeurs de la fonction de distribution $f(\underline{v}, t)$ sur sa frontière soient assez petites pour qu'on puisse supposer qu'elles n'influencent pas fortement les phénomènes physiques.

Définissons dans ce domaine, un réseau formé de rectangles, de côtés Δv_x et Δv_y . Considérons un de ces rectangles:



où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les sommets du rectangle et R le domaine ouvert délimité par les segments $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma], [\gamma, \delta], [\delta, \alpha]$. La représentation discrète de la fonction $f(\underline{v})$ et ses dérivées partielles f_{v_x}, f_{v_y} est donnée par [2]:

$$\text{valeur de } f \text{ dans R} = \frac{f_\alpha + f_\beta + f_\gamma + f_\delta}{4} \quad (2.16)$$

$$\text{valeur de } f_{v_x} \text{ dans R} = \frac{f_\gamma - f_\beta + f_\delta - f_\alpha}{2 \Delta v_x} \quad (2.17)$$

$$\text{valeur de } f_{v_y} \text{ dans R} = \frac{f_\beta - f_\alpha + f_\gamma - f_\delta}{2 \Delta v_y} \quad (2.18)$$

Ceci revient à utiliser la méthode des Différences Finies. Les éléments finis sont introduits comme suit /2/:

Dans la formulation discrète du problème variationnel (2.8), nous devons considérer, non pas l'espace entier \mathcal{F} mais seulement un sous-espace de dimension finie. La construction de cet espace se fait en spécifiant les éléments de base. D'après les prescriptions de discrétisation ci-dessus il existe 3 classes d'éléments de base, $e_i(\underline{v}), d_i^1(\underline{v}), d_i^2(\underline{v})$ où $i = 1, 2, \dots, n$ définis par:

$$f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n f_i e_i(\underline{v}) \quad (2.19)$$

$$f_{v_x}(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n f_i d_i^1(\underline{v}) \quad (2.20)$$

$$f_{v_y}(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n f_i d_i^2(\underline{v}) \quad (2.21)$$

Il est clair que ces éléments de base sont non-nuls seulement dans le domaine

ouvert formé par les 4 rectangles adjacents au noeud i . En effet en posant dans les relations (2.19), (2.20) et (2.21):

$$\begin{aligned} p_i &= 1 \\ p_j &= 0 \quad \text{si } j \neq i \end{aligned} \quad (2.22)$$

on obtient, en se servant des relations (2.16), (2.17) et (2.18):

$$e_i(\underline{v}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$d_i^1(\underline{v}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{2} \Delta v_x & -\frac{1}{2} \Delta v_x \\ \hline \frac{1}{2} \Delta v_x & -\frac{1}{2} \Delta v_x \\ \hline \end{array}$$

$$d_i^2(\underline{v}) = \begin{array}{|c|c|} \hline -\frac{1}{2} \Delta v_y & -\frac{1}{2} \Delta v_y \\ \hline \frac{1}{2} \Delta v_y & \frac{1}{2} \Delta v_y \\ \hline \end{array}$$

Remarque: Les valeurs des éléments de base sur les bords importent peu puisque ceux-ci sont de mesure nulle (segments, points).

Une manière naturelle de les déterminer est de définir les valeurs de $f(\underline{v})$ sur les bords comme la moyenne arithmétique des valeurs de f dans les domaines adjacents à ces bords /2/.

En prenant:

$$g(\underline{v}) = e_i(\underline{v}) \quad (2.23)$$

$$\frac{dg}{d\underline{v}}(\underline{v}) = \underline{d}_i(\underline{v}) = \begin{pmatrix} d_i^1(\underline{v}) \\ d_i^2(\underline{v}) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.24)$$

le problème variationnel discret revient donc à résoudre le système:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \dot{\underline{f}} = \underline{\underline{B}}(t) \underline{f}(t) \quad (2.25)$$

où

$$A_{ij} = \int d^2 \underline{v} e_i(\underline{v}) e_j(\underline{v})$$

$$B_{ij}(t) = - \int d^2 \underline{v} \underline{d}_i(\underline{v}) \cdot \underline{\underline{D}}(\underline{v}, t) \cdot \underline{d}_j(\underline{v}) \quad (2.26)$$

Remarques:

1) $\underline{\underline{A}}$ est une matrice symétrique de bande, de même pour la matrice $\underline{\underline{B}}$ ($\underline{\underline{D}}$ étant symétrique) qui admet la même largeur de bande que $\underline{\underline{A}}$. Grâce à ces 2 propriétés, on peut stocker suivant la méthode utilisée dans le Hymnia Package /8/ économisant ainsi de la place en mémoire.

2) $\underline{\underline{A}}$ est constante dans le temps.

3) On peut montrer que $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont singulières. En effet dans le système (2.25), seules les valeurs centrées (c'est-à-dire la valeur de la fonction au centre de chaque rectangle), interviennent d'une façon indépendante, et par conséquent le système devient sousdéterminé. Il faut donc ajouter des contraintes à ce système pour qu'il soit résoluble. On discutera de ce problème dans la section 2.4.

En utilisant l'expression de $D(\underline{v}, t)$ (2.9), on peut récrire (2.26) comme

$$B_{ij}(t) = \sum_{\substack{R_x > 0 \\ R_y}} B_{ij}^k I_k(t) \quad (2.27)$$

où la matrice B_{ij}^k est constante dans le temps:

$$B_{ij}^k = - \frac{2M}{k^2} \int d^2 \underline{v} \delta(\omega_k - k \cdot \underline{v}) \underline{d}_i(\underline{v}) \cdot \underline{d}_j(\underline{v}) \quad (2.28)$$

Comme dans chaque rectangle du réseau $(\underline{k} \cdot \underline{d}_i)(\underline{k} \cdot \underline{d}_j) = \text{constant}$ et que:

$$\int_{\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} = 0} d^2 \underline{v} \delta(\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v}) = \frac{1}{R_x} \int d v_y = \frac{L}{R} \quad (2.29)$$

où L est la longueur du segment formé par l'intersection de la droite $\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} = 0$ avec le domaine d'intégration, la contribution d'un rectangle à $B_{ij}^{\underline{k}}$ peut être calculée facilement et l'on obtient:

$$B_{ij}^{\underline{k}} = \sum_{\mu} - \frac{2\pi L_{\mu}}{R^3} (\underline{k} \cdot \underline{d}_i) (\underline{k} \cdot \underline{d}_j) \quad (2.30)$$

où on somme sur tous les rectangles μ où passe la droite $\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} = 0$. Par un calcul similaire, on obtient pour le taux de croissance:

$$\gamma_{\underline{k}}(t) = \sum_i \Gamma_{\underline{k}_i} f_i(t) \quad (2.31)$$

où

$$\Gamma_{\underline{k}_i} = \sum_{\mu} \frac{\pi L_{\mu}}{R^3} \underline{k} \cdot \underline{d}_i / \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_{\underline{k}}} \quad (2.32)$$

où μ et L_{μ} ont la même signification que dans (2.30).

Pour avoir une idée sur la précision de la représentation numérique du taux de croissance, nous avons comparé dans les Fig. 1 et 2, les valeurs analytiques et numériques calculées à partir de (2.31) au temps $t = 0$, pour des réseaux équidistants et non-équidistants dans l'espace des vitesses. (Le réseau non-équidistant est construit d'après une méthode exposée dans /12/). On observe que:

- pour des ondes obliques (par rapport à l'axe x), les taux de croissance sont en général un peu mieux représentés si on prend un réseau non-équidistant.
- Les ondes parallèles sont très mal représentées (voir Fig. 1d). La convergence de l'erreur numérique relative commise sur le taux de croissance en fonction de l'intervalle Δv_x est représentée sur la Fig. 2b. On note

qu'elle est très irrégulière; ceci est dû aux sauts de la dérivée quand on passe d'un intervalle à l'autre selon la direction v_x . Par conséquent la valeur calculée du taux de croissance dépend fortement de l'emplacement de la ligne d'interaction $\omega_k - k \cdot v = 0$ dans le réseau. La Fig. 2c montre clairement ce phénomène: on a reporté l'erreur numérique en fonction de l'incrément Δv_x pour des points soit à gauche soit à droite du noeud p_0 . Dans le cas des ondes obliques (Fig. 2a) cet effet se trouve amoindri puisque les lignes d'interaction ne sont plus confinées dans une même bande du réseau.

Pour remédier à cette mauvaise représentation des ondes parallèles, nous avons pensé effectuer un lissage sur les γ en prenant pour la dérivée en v_x , une dérivée approchée au 2ème ordre (interpolation quadratique de la fonction f) mais il se trouve que si γ est très bien représenté initialement, nous obtenons au contraire des erreurs énormes lorsque la fonction f présente un plateau, surtout si les points où l'on veut calculer la dérivée se trouvent près d'un noeud du réseau. C'est pourquoi, on a finalement renoncé à appliquer ce traitement à γ .

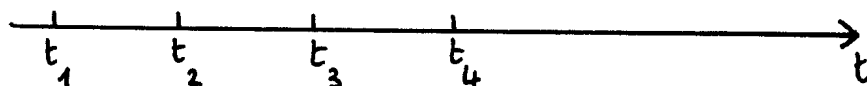
2.4 Discrétisation dans le Temps

Une fonction $h(t)$ et sa dérivée sont approximées respectivement par:

$$h(t_{i+1/2}) = \frac{h(t_{i+1}) + h(t_i)}{2} \quad (2.33)$$

$$\dot{h}(t_{i+1/2}) = \frac{h(t_{i+1}) - h(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.34)$$

Considérons les temps équidistants suivants:



L'équation (2.25) peut être approximée par:

$$\underline{A} \cdot \left(\frac{f_3 - f_1}{t_3 - t_1} \right) \approx \underline{B}(t_2) \cdot \left(\frac{f_3 + f_1}{2} \right) \quad (2.35)$$

Le système à résoudre sera donc:

$$\underline{A} \cdot \underline{f}_3 = \underline{B} \cdot \underline{f}_1 \quad (2.36)$$

où

$$\underline{A} = \underline{A} - \frac{t_3 - t_1}{2} \underline{B}(t_2) \quad (2.37)$$

$$\underline{B} = \underline{A} + \frac{t_3 - t_1}{2} \underline{B}(t_2) \quad (2.38)$$

De même l'équation (2.10) devient:

$$I_{\underline{R}}(t_4) = \frac{1 + (t_4 - t_2) \gamma_{\underline{R}}(t_3)}{1 - (t_4 - t_2) \gamma_{\underline{R}}(t_3)} I_{\underline{R}}(t_2) \quad (2.39)$$

On doit noter que si les temps ne sont pas équidistants, l'ordre de convergence sera d'un ordre plus bas.

D'après la remarque faite au paragraphe précédent, la matrice \underline{A} est singulière. On peut remédier à cela en imposant des valeurs de $f(\underline{v})$ constantes dans le temps, au bords. Cette contrainte est assez raisonnable puisqu'on suppose avoir choisi un réseau tel que les valeurs de $f(\underline{v})$ sur les bords soient pratiquement nulles et par conséquent, n'influencent pas les effets physiques qui se passent surtout à l'intérieur.

On remarque que (voir la construction de \underline{B} (2.30)) la dérivée de f intervient dans le système (2.36) uniquement s'il existe des lignes d'interaction passant dans le domaine considéré de l'espace des \underline{v} . Dans les autres régions, seule la valeur de f dans chaque rectangle intervient, et par conséquent à une réalité physique. C'est pourquoi, on devrait considérer plutôt

les valeurs moyennes données par (2.16) que les valeurs f_i comme solutions réelles du problème. Pour retrouver les f_i , on effectue une interpolation linéaire entre les valeurs moyennées. Cette opération est répétée à chaque pas d'intégration. Or il se trouve que cette opération (répétée un grand nombre de fois) provoque une "diffusion numérique" à cause de la grossièreté de l'interpolation; c'est pourquoi on a effectué cette opération non pas sur la fonction f , mais sur sa variation Δf dans le temps. C'est l'opération que nous appellerons "lissage de f ".

3. RESULTATS

3.1 Résultats Analytiques

Le tenseur de diffusion $\underline{D}(\underline{v}, t)$ est non-négatif dans la formulation présentée à la section 1. A partir de cette propriété, on peut déduire facilement un "Théorème H" pour l'évolution du système /9,10/. En effet, en intégrant par parties /9,10,11/:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{f^2}{2} d^3 \underline{v} &= \int f \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \underline{v} \\ &= \int f \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{D} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} d^3 \underline{v} \\ &= - \int \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{D} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} d^3 \underline{v} \end{aligned} \quad (3.1)$$

D'après la positivité de D :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{f^2}{2} d^3 \underline{v} \leq 0 \quad \forall t \quad (3.2)$$

L'état asymptotique sera tel que:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{D} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 0 \quad (3.3)$$

Il existe 2 solutions satisfaisant à cette équation:

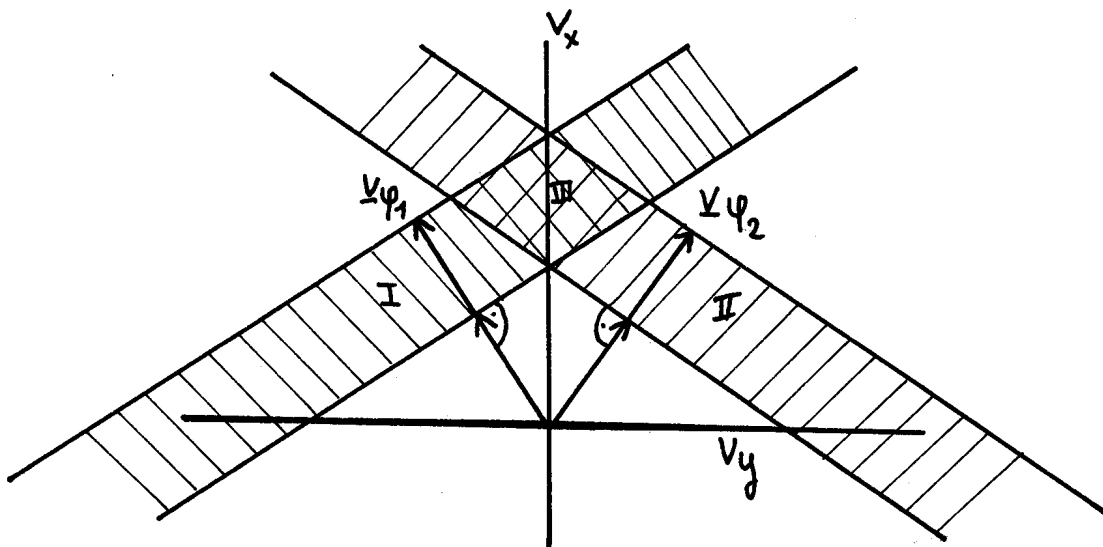
$$\underline{D}(\underline{v}, \infty) = 0 \quad (3.4)$$

ou

$$\underline{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{v}, \infty) = 0 \quad (3.5)$$

Dans le 1er cas, toutes les ondes seront asymptotiquement amorties. Dans le 2ème cas, on a les 2 possibilités suivantes:

- si le spectre des \underline{k} devient unidimensionnel (l'amplitude des ondes est non-nulle seulement dans une ou plusieurs directions isolées), on obtient la formation de plateaux. Le cas où il existe 2 orientations où les ondes sont non amorties est dessiné ci-dessous:



Dans la région I , f est constant dans la direction \underline{v}_{ψ_1}
 Dans la région II , f est constant dans la direction \underline{v}_{ψ_2}
 Dans la région III , f est une constante

- si le spectre n'est pas unidimensionnel, f est constant dans un domaine Ω de l'espace des vitesses où $D(\underline{v}, \infty)$ est non-nul. Par des considérations géométriques similaires à celles exposées ci-dessus, Ω est de volume infini. Or le nombre de particules dans Ω doit être fini, on en déduit que

f doit être nul dans Ω . Physiquement cette possibilité paraît invraisemblable car l'énergie nécessaire pour construire une telle distribution devrait être infinie /10/.

3.2 Résultats Numériques

Nous avons successivement fait tourner le code avec:

- 1) - un réseau en \underline{v} de 254 points et 174 ondes (Fig. 6a)
- 2) - un réseau en \underline{v} de 300 points et 570 ondes (Fig. 6b)
- 3) - un réseau en \underline{v} de 600 points et 570 ondes (Fig. 6c)
- 4) - comme dans 1) mais avec une distribution de particules "tournée", c'est-à-dire que la vitesse de dérive du faisceau n'est plus sur l'axe des x , mais légèrement déplacée (Fig. 7).
- 5) - comme dans 1) mais avec "lissage" de la fonction f (Fig. 8).

Tous ces cas sont traités avec des conditions physiques initiales identiques (E_{ondes} , densité de particules dans le faisceau, v_{ther} , etc ...). Si nous regardons les courbes d'évolution de E_{ondes} dans les 5 cas, nous remarquons à première vue que l'évolution de E_{ondes} dans le cas 4) est plus proche de celle du cas 2) que celle du cas 1) (nous pouvons naturellement supposer que le cas 2) est le plus proche de la réalité). Ceci peut être aisément expliqué si nous nous rappelons que dans l'étude de la convergence de γ initial, les ondes parallèles sont très mal représentées par le fait que les dérivées $f_{\underline{v}_x}$ font des sauts en passant d'une bande d'intervalles à une autre dans la direction x . Ces sauts ne se rencontrent plus dans le cas 4), puisque les lignes d'interaction $\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} = 0$ des ondes parallèles ne sont plus confinées dans une bande d'intervalles, d'où un meilleur résultat.

On remarque clairement ce phénomène dans les courbes de convergence de E_{ondes} (Fig. 4,5).

Nous observons aussi dans les courbes d'évolution (sauf dans celle du cas 3)) l'apparition d'une corrélation entre l'évolution de E_{ondes} et la non-conservation de l'énergie ΔE_{tot} , surtout dans la Fig. 8. Ceci peut être dû à l'accumulation des erreurs numériques au cours de l'intégration, des effets de bord (qu'on a toujours supposés négligeables), à la discrétisation de la fonction f initiale (approximer une maxwellienne par une fonction en escalier), etc... Cependant dans les cas 1) à 4), la corrélation n'apparaît qu'à des temps assez grands de sorte qu'on peut tirer un certain nombre de conclusions sur l'évolution du système, conclusions qu'on pourrait affirmer être assez significatives du point de vue physique:

- d'abord la saturation de l'énergie des ondes (qu'on peut qualifier d'état "quasi-stationnaire") est atteinte très rapidement au temps $t = 30$, à une valeur d'un ordre 10 fois plus grand que la valeur initiale de E_{ondes} ;
- dans cet état "quasi-stationnaire", un net déplacement du spectre vers des k_x plus grands apparaît. L'évolution de ce spectre est dessinée dans la Fig. 10, pour le cas 2). Bien que la partie de la courbe E_{ondes} comprise entre $t = 30$ et $t = 600$ de la Fig. 6b soit "accompagnée" d'une non-conservation de l'énergie ΔE_{tot} de l'ordre de 10% à 30% de E_{ondes} , on peut la considérer comme assez significative, puisque les effets de bords qu'on a supposés négligeables peuvent devenir importants. Par conséquent il semble qu'il y ait transfert d'énergie vers les petites longueurs d'ondes à la "quasi-saturation";
- on observe aussi un rétrécissement du spectre dans la direction k_y (Fig. 10) laissant prévoir une tendance à un spectre unidimensionnel, admettant 2 orientations (symétriques par rapport à l'axe x) où les ondes sont non-amorties (voir le schéma dessiné à la sec. 3.1).

CONCLUSION

D'après ce que nous avons vu, nous pouvons conclure que l'évolution quasilineaire vers une "saturation quasi-stationnaire" du système plasma-ondes de Langmuir dans le cas du Gentle Bump est assez bien représentée par les éléments Hybrides. L'apparition du déplacement du spectre vers les petites longueurs d'onde qu'on peut voir d'une façon très nette dans les résultats numériques, semble être un effet physique assez significatif de l'évolution quasilineaire, bien que la forme du spectre présente des irrégularités relativement prononcées. Cependant le problème que nous avons commencé d'étudier est loin d'être terminé. En effet, plusieurs possibilités pour améliorer la méthode dans une étude numérique ultérieure du problème quasilineaire peuvent être dégagées dans cette conclusion:

- il serait intéressant d'étudier d'une façon plus approfondie l'effet des bords. En effet, la non-conservation de l'énergie peut provenir du transfert d'une partie non négligeable de l'énergie dans la queue de la distribution;
- pour améliorer la représentation des dérivées, la méthode des éléments finis réguliers (approximation par des fonctions linéaires) devrait être essayée;
- choisir un réseau en \underline{y} tel que les lignes du réseau ne soient plus parallèles aux axes x et y (réseau formé de losanges par exemples) semble pouvoir améliorer les résultats puisqu'on a vu qu'avec une "distribution tournée" les résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec une distribution "symétrique";
- du point de vue technique, le code SELENE tel qu'il est actuellement conçu prend encore trop de temps pour les opérations d'input-output, ce qui nous impose une limitation sévère pour traiter des cas où on a un très grand nombre de points du réseau en \underline{y} et du réseau en \underline{k} . Il semble qu'il existe un remède à cet handicap technique;
- enfin, la symétrie par rapport à l'axe v_x du problème numérique devrait être exploitée dans un code ultérieur.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier M. R. Gruber pour les précieux conseils lors du développement numérique de cette étude, ainsi que le personnel du Centre de Calcul pour les facilités de calcul accordées. Enfin, nous aimerions remercier M. P.A. Haldy qui a soigneusement lu et corrigé ce rapport.

APPENDICE I

Calcul de l'intégrale $\underline{\underline{I}} = \int_0^{\infty} d\tau \underline{\underline{C}}(\underline{v}, t, \tau)$

On a: $\underline{\underline{C}}(\underline{v}, t, \tau) = \langle \delta \underline{E}(\underline{r}, t) : \delta \underline{E}(\underline{r} - \underline{v}\tau, t - \tau) \rangle$ (A1.1)

En remplaçant l'expression de $\underline{E}(\underline{r}, t)$ (1.38) dans (A1.1):

$$\underline{\underline{C}}(\underline{v}, t, \tau) = \sum_{\underline{R}, \sigma} \langle \delta E_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \delta E_{\underline{R}}^{\sigma}(t - \tau) \rangle e^{i(\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v})\tau} \cdot \frac{\underline{R} \cdot \underline{R}}{R^2} \quad (A1.2)$$

Dans (A1.2) les relations (1.41) sont utilisées.

Par mélange de phases, la somme sur \underline{k} décroît en τ . En développant $\delta E_{\underline{k}}^{\sigma}(t - \tau)$ en série de Taylor:

$$\underline{\underline{C}}(\underline{v}, t, \tau) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{R}, \sigma} \left\{ I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) - \frac{1}{2} \tau \frac{d}{dt} I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \right\} \exp[i(\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v})\tau] \frac{\underline{R} \cdot \underline{R}}{R^2} \quad (A1.3)$$

où $I_{\underline{k}}^{\sigma}(t)$ est définie par:

$$\frac{I_{\underline{R}}^{\sigma}(t)}{V} = \langle [\delta E_{\underline{R}}^{\sigma}]^2 \rangle \quad (A1.4)$$

Soit $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_1 + \underline{\underline{I}}_2$ où:

$$\underline{\underline{I}}_1(t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{R}, \sigma} I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \frac{\underline{R} \cdot \underline{R}}{R^2} \int_0^{\infty} d\tau \exp[i(\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v})\tau] \quad (A1.5)$$

En utilisant l'identité (1.31) et en remarquant que la partie imaginaire est impaire en \underline{k} :

$$\underline{\underline{I}}_1(t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{R}, \sigma} I_{\underline{R}}^{\sigma}(t) \frac{\underline{R} \cdot \underline{R}}{R^2} \pi \delta(\omega_{\underline{R}}^{\sigma} - \underline{R} \cdot \underline{v}) \quad (A1.6)$$

et

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I}}_2(t) &= -\frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}, \sigma} \frac{d}{dt} I_{\underline{k}}^{\sigma} \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \int_0^{\infty} d\tau \tau \exp[i(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v})\tau] \\
 &= \frac{i}{2V} \sum_{\underline{k}, \sigma} \frac{d}{dt} I_{\underline{k}}^{\sigma} \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \int_0^{\infty} d\tau \exp[i(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v})\tau] \\
 &= -\frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}, \sigma} \frac{d}{dt} I_{\underline{k}}^{\sigma} \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right)
 \end{aligned} \tag{A1.7}$$

la partie imaginaire étant impaire en \underline{k} .

On a donc:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I}}(t) &= \underline{\underline{I}}_1(t) + \underline{\underline{I}}_2(t) \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\sigma, \underline{k}} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) - \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}, \sigma} \frac{d}{dt} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \\
 &\quad \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \\
 &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2M)^3} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2} \pi \delta(\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \underline{k}}{(2M)^3} \frac{d}{dt} I_{\underline{k}}^{\sigma}(t) \frac{\partial}{\partial \omega_{\underline{k}}^{\sigma}} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\underline{k}}^{\sigma} - \underline{k} \cdot \underline{v}} \right) \frac{\underline{k} \cdot \underline{k}}{k^2}
 \end{aligned} \tag{A1.8}$$

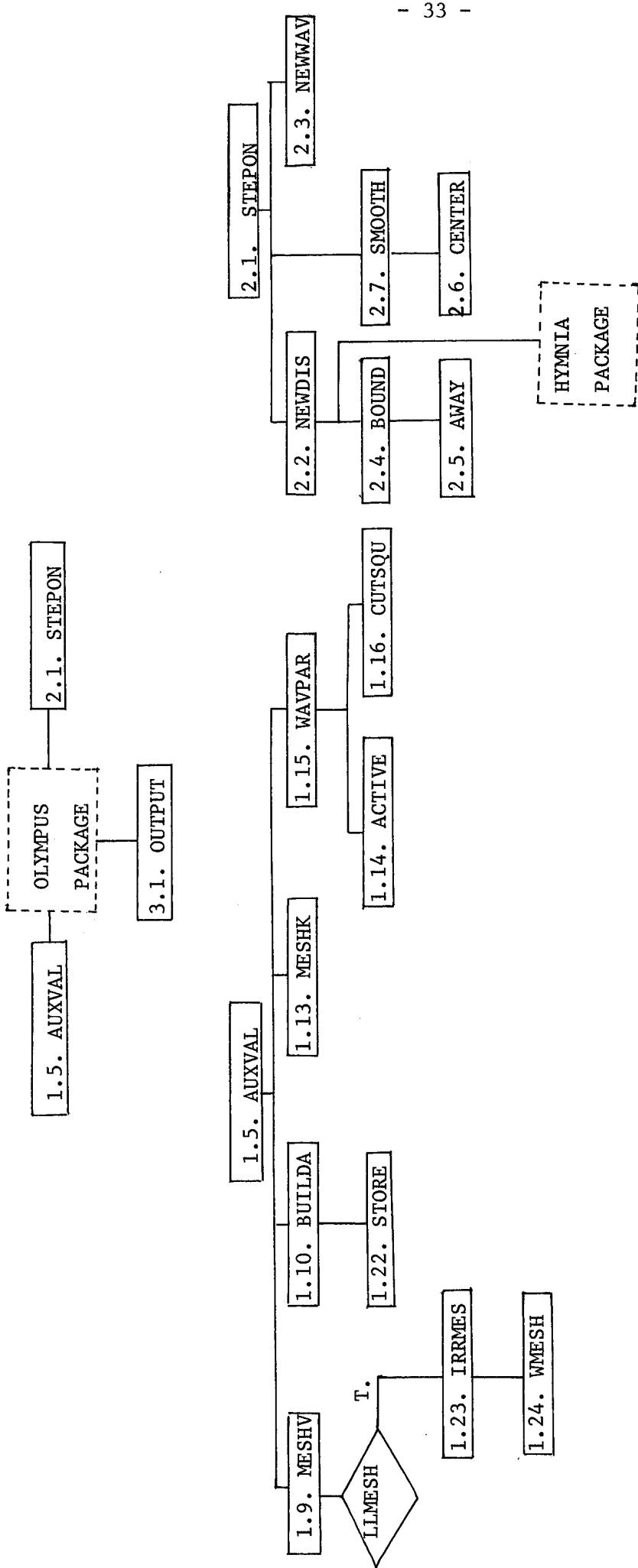
APPENDICE II

Code bidimensionnel SELENE: Le code numérique SELENE a été écrit en suivant les normes standards du système OLYMPUS /13,14/. La méthode utilisée est celle des éléments finis réguliers. Pour ce travail, nous l'avons modifié en introduisant les éléments hybrides, à cause de la simplicité de programmation de cette dernière méthode, et surtout de son efficacité à résoudre le problème bidimensionnel de la Stabilité MHD /15/. Les sous-programmes sont divisés en classes. D'une façon générale, dans la classe

1, les valeurs auxiliaires, c'est-à-dire toutes les constantes dont on a besoin dans l'intégration, sont définies (réseau dans l'espace des vitesses, spectre des \underline{k} , matrices A, $B^{\underline{k}}$, etc...). La classe 2 est utilisée pour l'intégration dans le temps, et la classe 3, pour contrôler les sorties (ouptut).

Le système (2.36) est résolu par des routines du HYMNIA PACKAGE /8/.

L'organigramme sommaire des sous-programmes est donné ci-après:



NOM ET FONCTION DES SOUS-PROGRAMMES APPARAISSANT DANS L'ORGANIGRAMME

<u>Nom</u>	<u>No</u>	<u>Function</u>
<u>Classe 1</u>		
AUXVAL	1.5	Calculer les valeurs auxiliaires
MESHV	1.9	Définir le réseau en <u>v</u>
BUILD A	1.10	Construire la matrice A
MESHK	1.13	Définir le réseau en <u>k</u>
WAVPAR	1.15	Interaction ondes-particules
STORE	1.22	Faciliter le stockage des matrices de bandes
IRRMES	1.23	Construire un réseau irrégulier
WMESH	1.24	Définir la densité des points du réseau
ACTIVE	1.14	Interaction d'une onde avec le réseau en <u>v</u>
CUTSQU	1.16	Contribution d'un carré du réseau à une ligne d'interaction
<u>Classe 2</u>		
STEPON	2.1	Commencer l'intégration
NEWDIS	2.2	Calculer f_3
NEWWAV	2.3	Calculer I_4
BOUND	2.4	Contraintes sur les bords
AWAY	2.5	Modifier la matrice A et la matrice B
CENTER	2.6	Calculer les valeurs centrées de f
SMOOTH	2.7	Lissage des valeurs de f

REFERENCES

- /1/ N.V. Goldman "Non-Linear Waves and Fluctuations in Plasmas". Cours donné au CRPP, 1974. EPFL, Lausanne, LRP 84/74
- /2/ R. Gruber. Thèse à soumettre, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- /3/ F. Engelmann, Ecole d'Eté, Juillet 1974, Cadarache, Société Française de Physique
- /4/ A. Kaufman, J. Plasma Physics, 8 (1972), 1
- /5/ G. Strang, G. Fix. An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, 1973
- /6/ K. Appert "The Wave Kinetic Equations in Weak Turbulence", CRPP, EPFL, Lausanne, INT 53/75
- /7/ S. Ichimaru, "Basic Principles of Plasma Physics", Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, 1973
- /8/ R. Gruber, Computer Phys. Commun. 10 (1975), 30
- /9/ R. Davidson, "Method in Non-Linear Plasma Theory", N-Y, London (1972)
- /10/ I.R. Bernstein, F. Engelmann, Phys. Fluids, 9 (1966), 937
- /11/ G. Vahala, D. Montgomery, J. Plasma Phys. 4 (1970), 677
- /12/ K. Appert, D. Berger, R. Gruber, K.V. Roberts, Computer Phys. Commun. 10 (1975), 11
- /13/ K.V. Roberts, Computer Phys. Commun. 7 (1974), 237
- /14/ J.P. Christiansen, K.V. Roberts, Computer Phys. Commun. 7 (1974), 245
- /15/ R. Gruber, Communication orale

LEGENDES

- Figures 1a, 1b, 1c, 1d : Comparaison des valeurs analytiques et numériques à l'instant initial. La courbe continue représente les valeurs analytiques.
- Figures 2a, 2b : Convergence des erreurs numériques sur le taux de croissance γ à l'instant initial, en fonction de Δv_x .
- Figure 2c : Erreurs $\Delta \gamma / \gamma_{an}$ commises selon où on estime γ en calculant la dérivée dans l'intervalle (p_1, p_0) ou (p_0, p_2) .
- Figure 3 : Convergence de E_{ondes} au temps $t = 2.$, en fonction de Δt .
- Figures 4a, 4b : Convergence de E_{ondes} à $t = 4$ en fonction du nombre n_x des points dans la direction v_x et n_y , dans la direction v_y .
- Figures 5a, 5b : Convergence de E_{ondes} à $t = 4$ en fonction de n_{xwave} et n_{ywave} .
- Figures 6a, 6b, 6c : Evolution temporelle de E_{ondes} (sans lissage sur f) et courbe de non-conservation de l'énergie ΔE_{tot} .
- Figure 7 : Evolution dans le cas d'une distribution "tournée".
- Figure 8 : Courbe d'évolution obtenue si on fait le lissage sur f .
- Figure 9 : Comparaison des différentes courbes d'évolution obtenues dans les Figures 6a,6b,6c,7.
- Figure 10 : Evolution du spectre (570 ondes et 300 points).
- Figure 11 : Coupes de f à $t = 0$ et à $t = 35$.

- réseau équadistant
- ◻ réseau non-équadistant

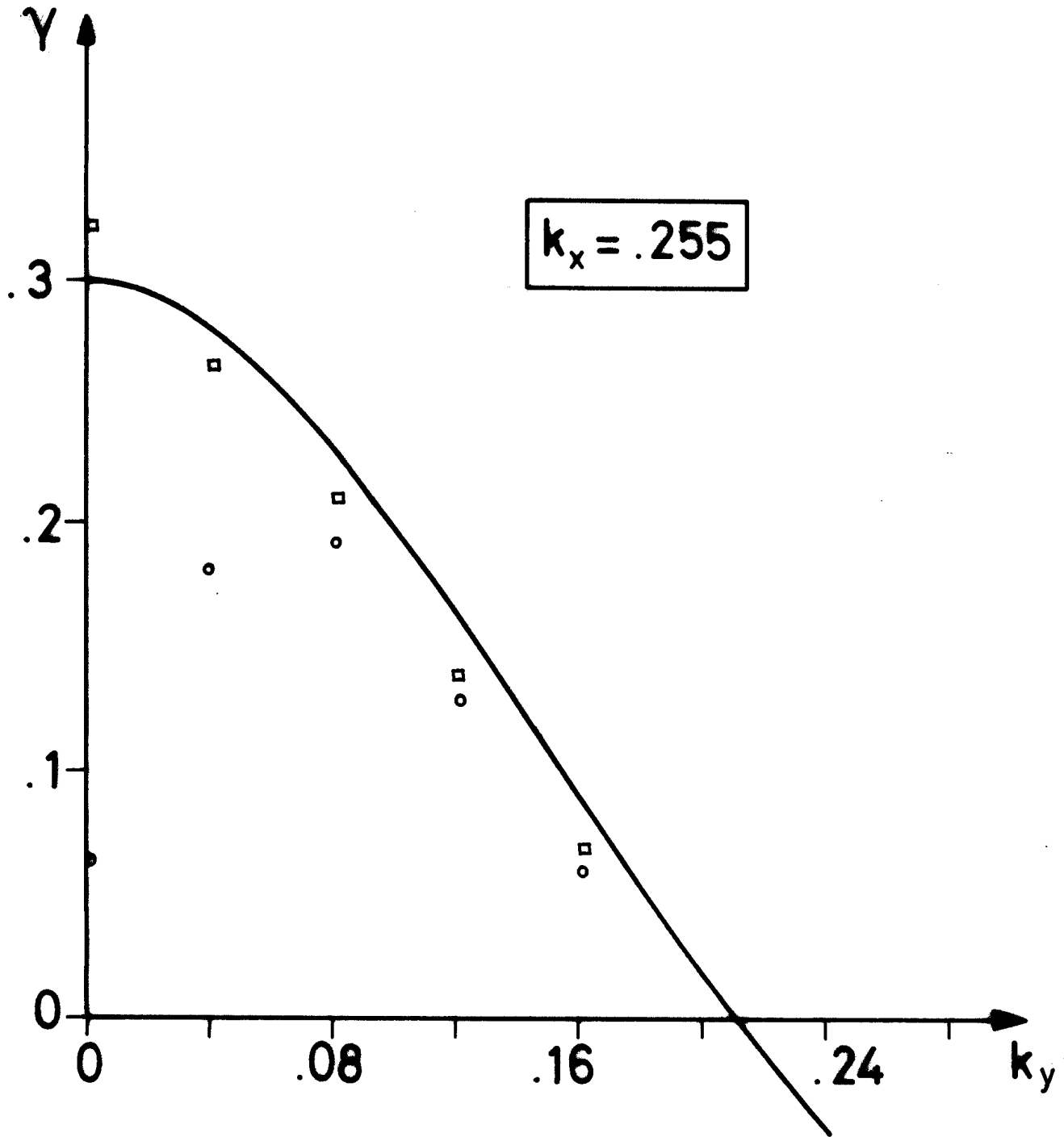


Figure 1a

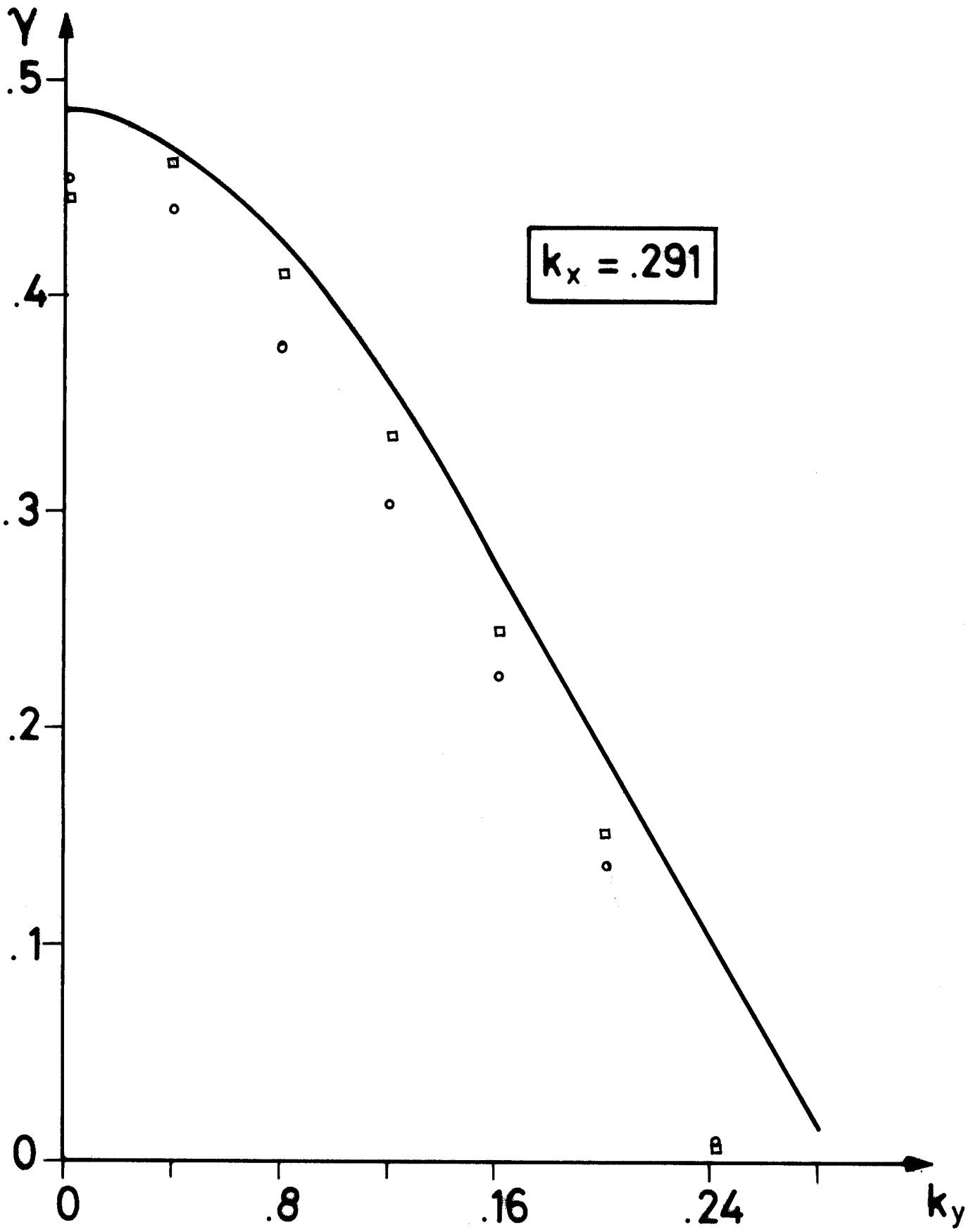


Figure 1b

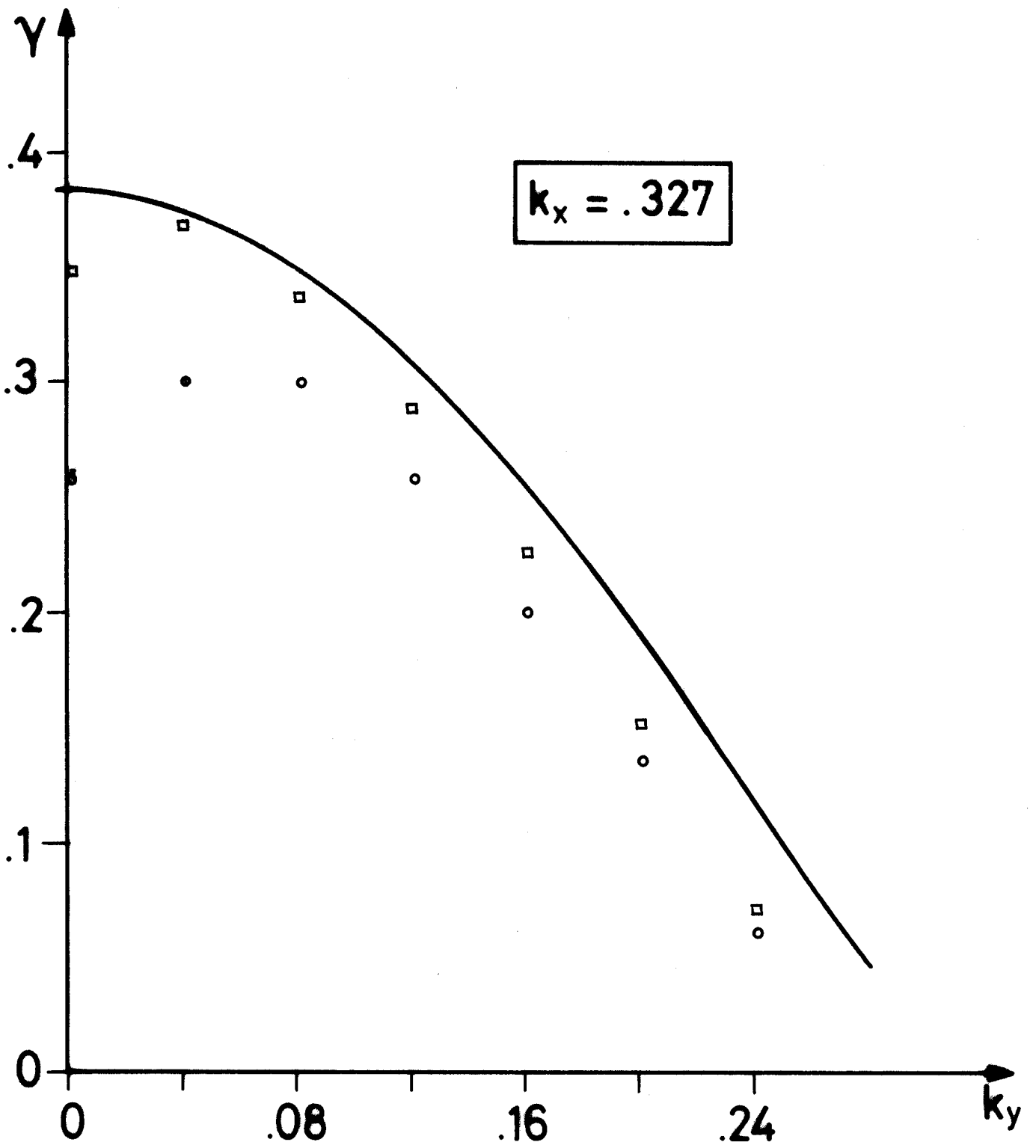


Figure 1c

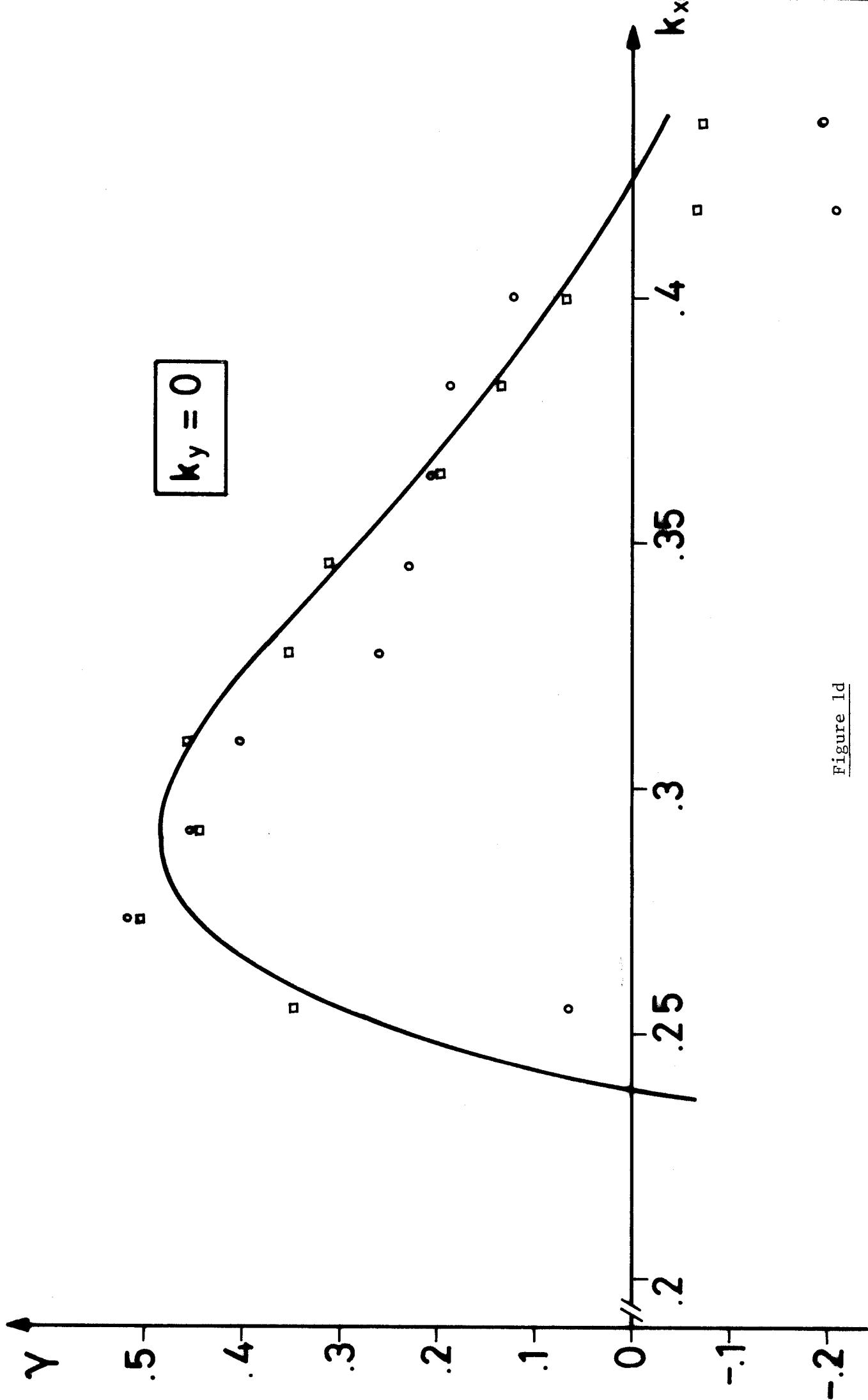


Figure 1d

$k_x = .327$
 $k_y = .0817$

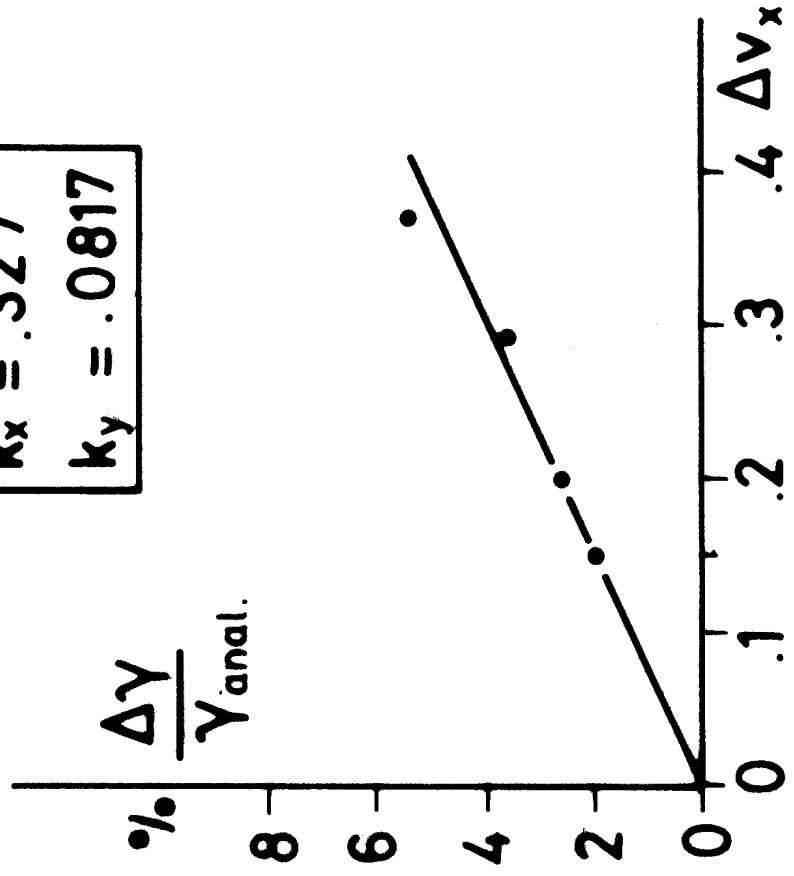


Figure 2a

$k_x = .327$
 $k_y = 0.$

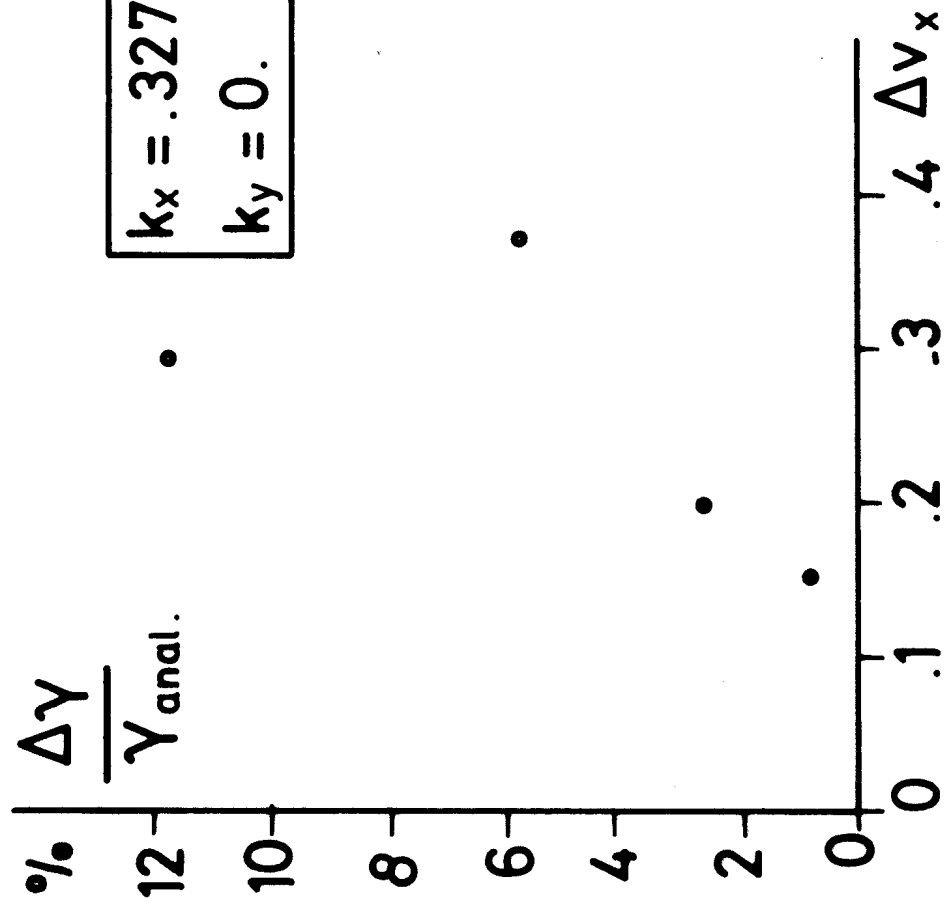


Figure 2b

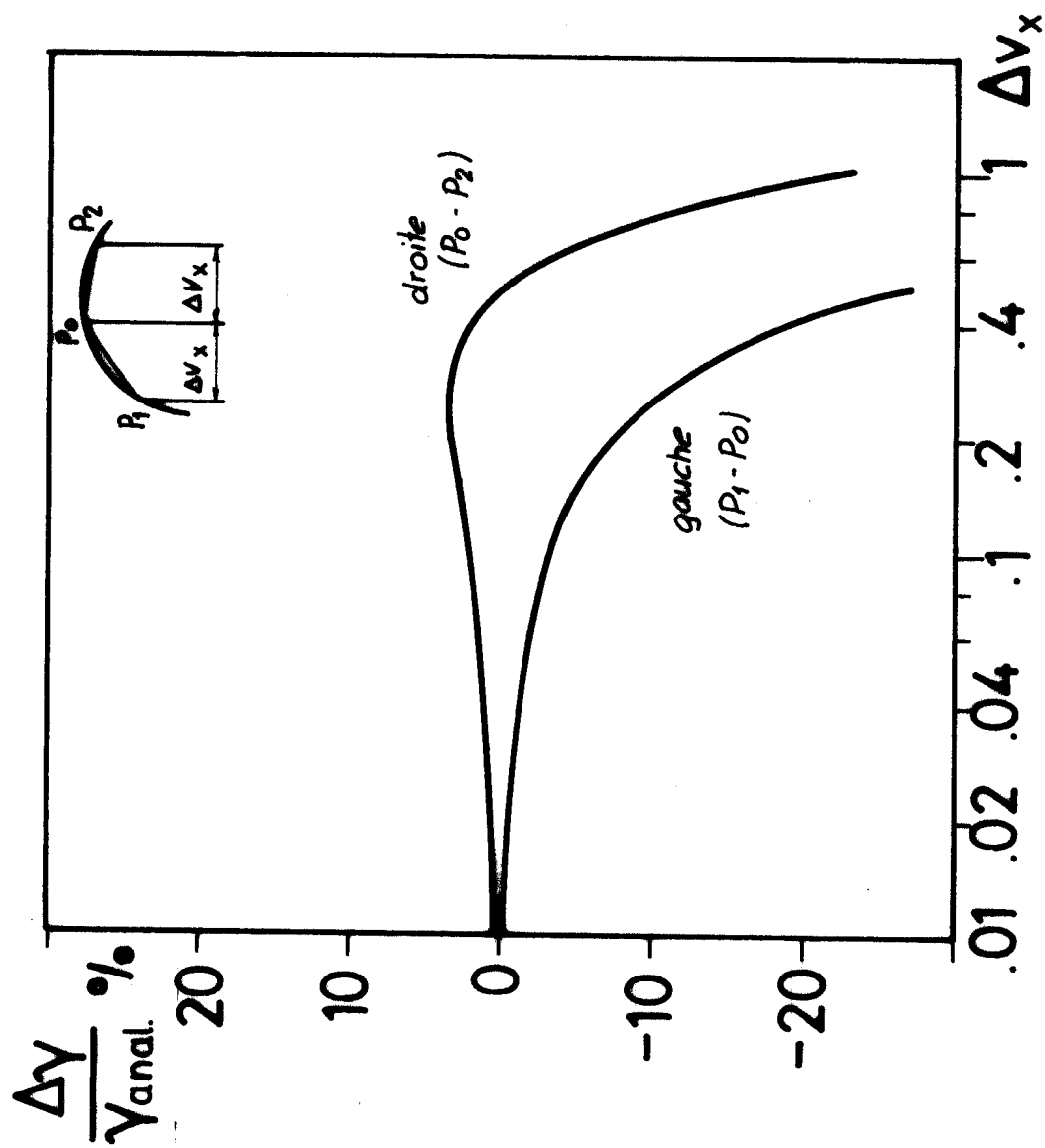


Figure 2c

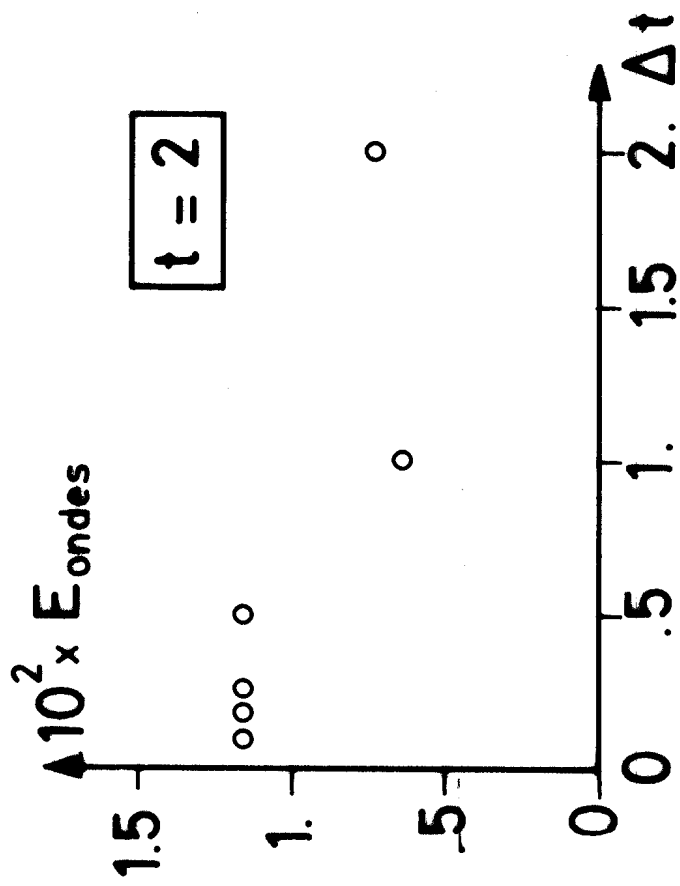


Figure 3

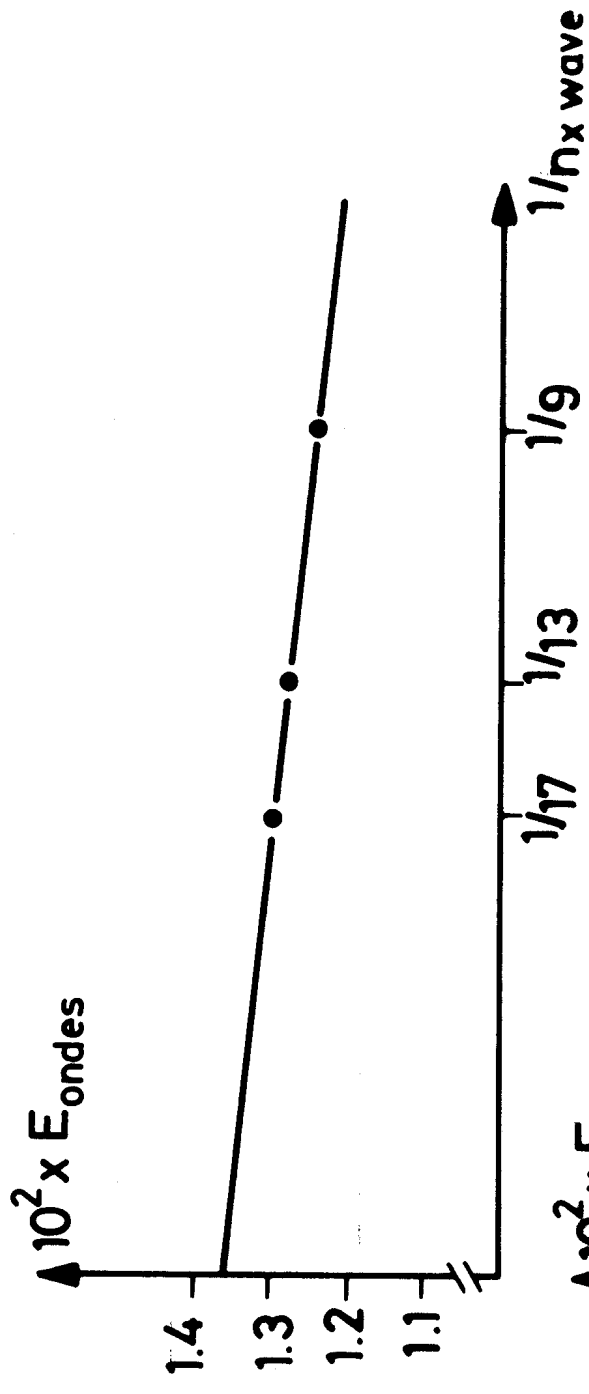


Figure 4a

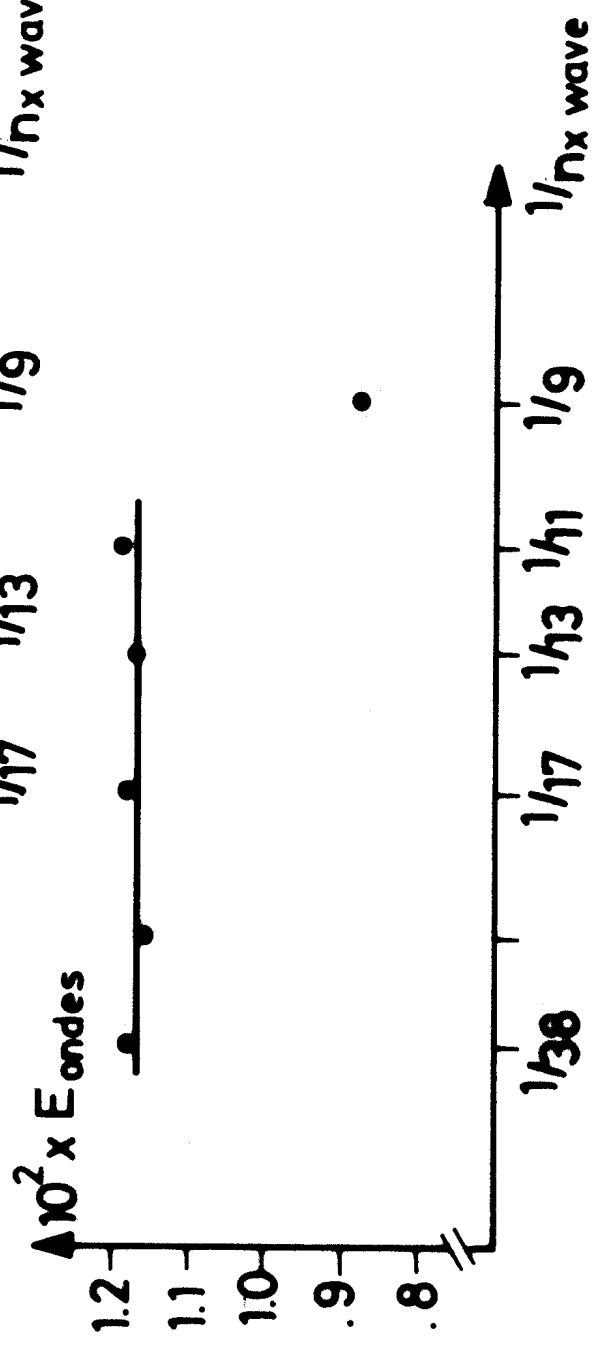


Figure 4b

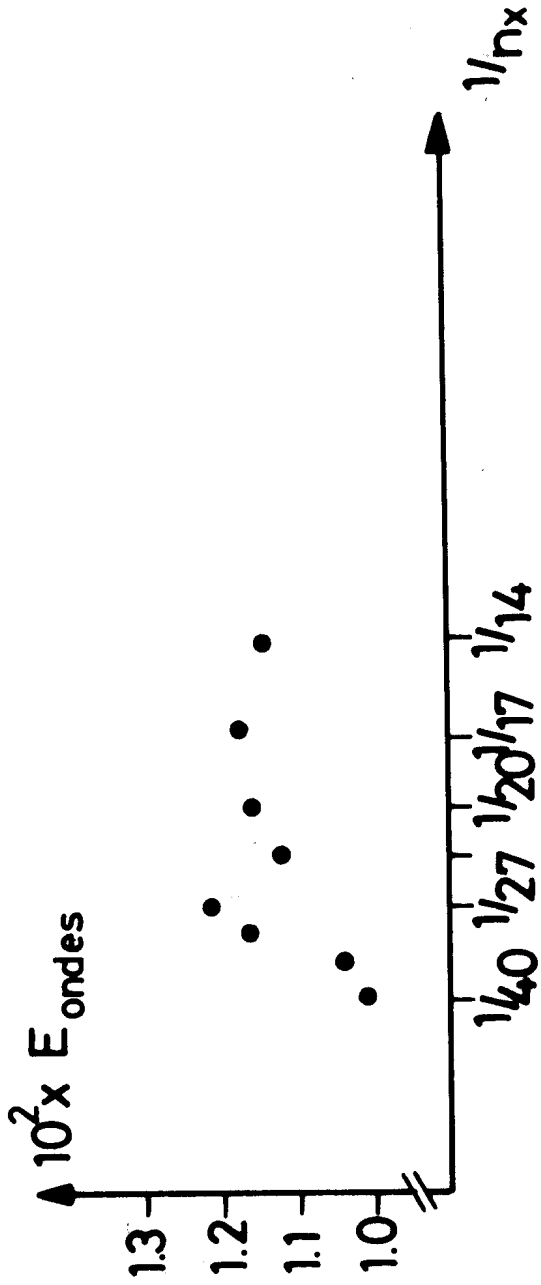


Figure 5a

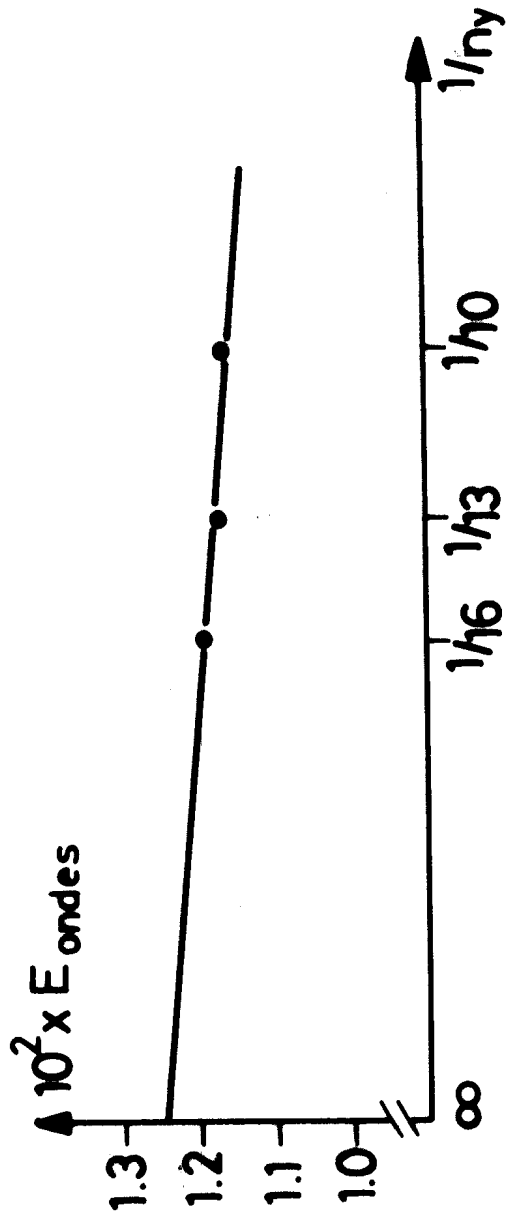


Figure 5b

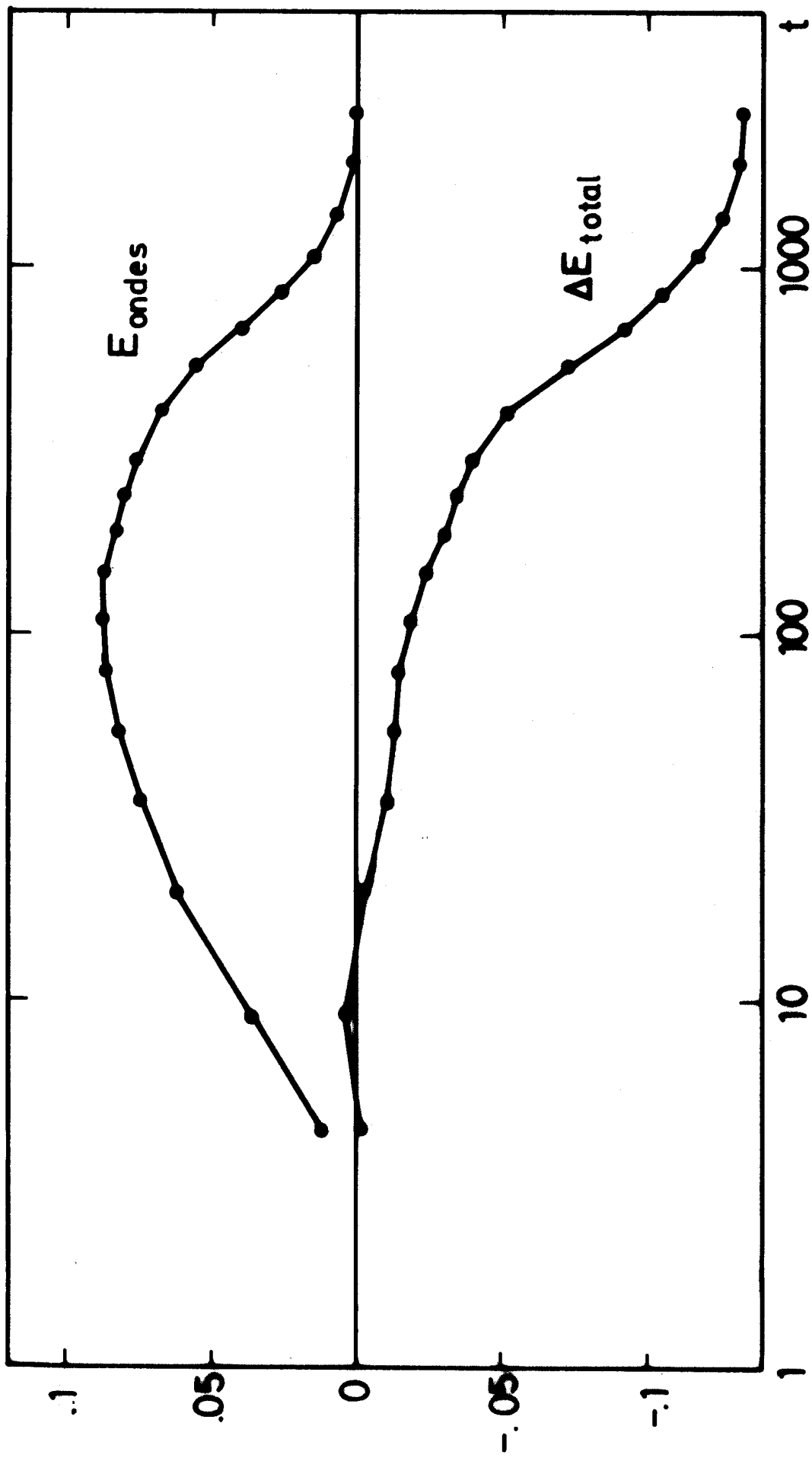


Figure 6a

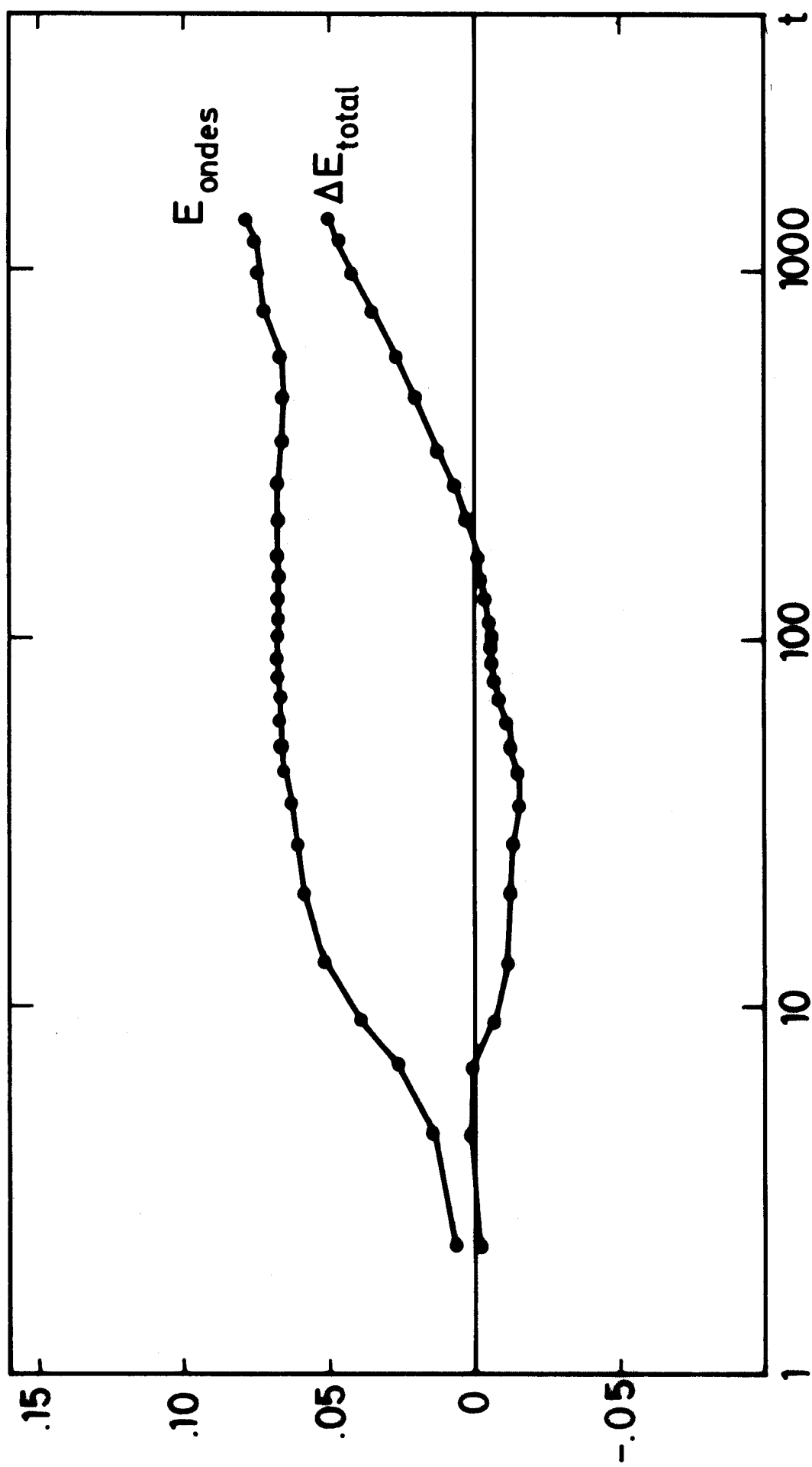


Figure 6b

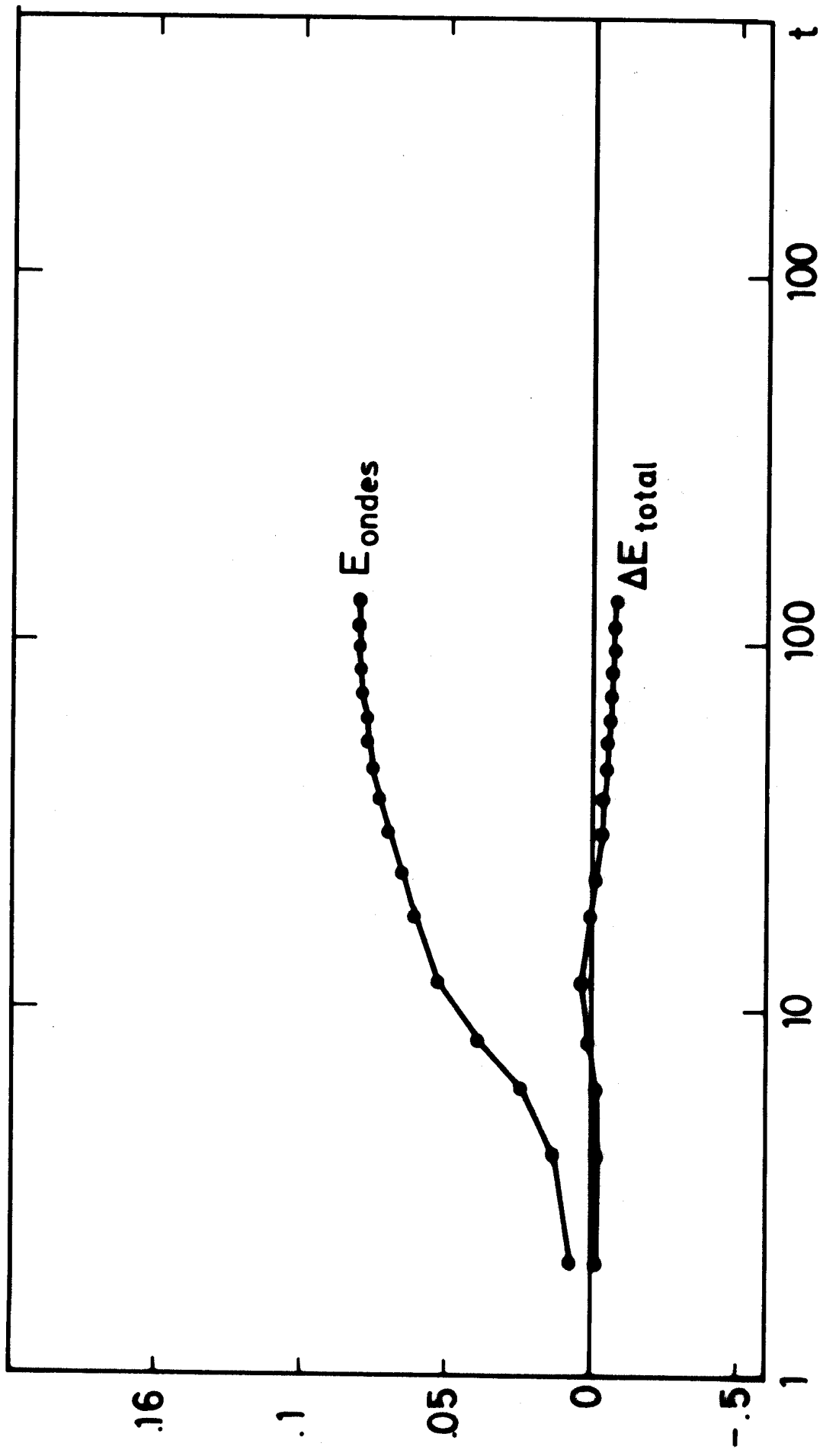


Figure 6c

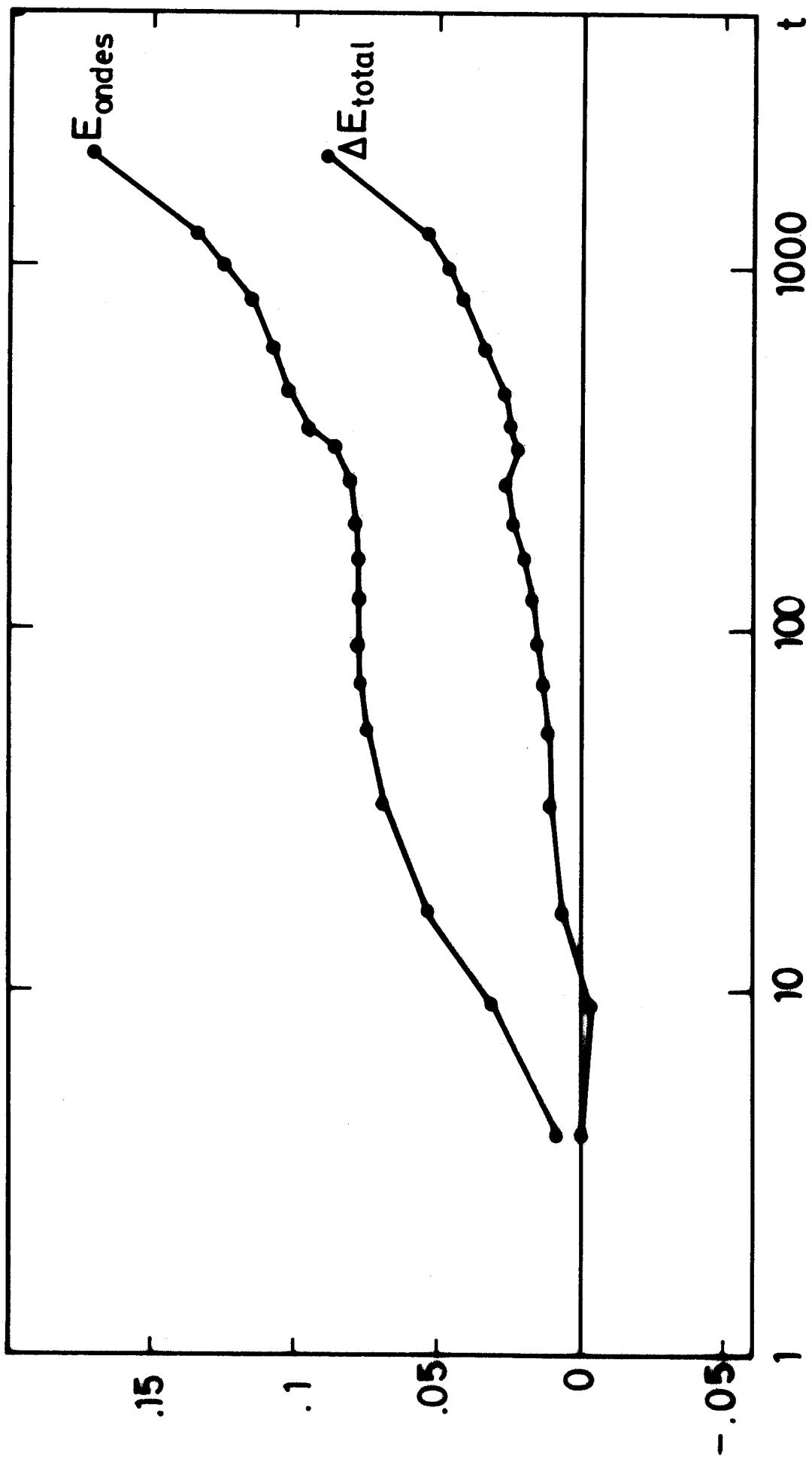


Figure 7

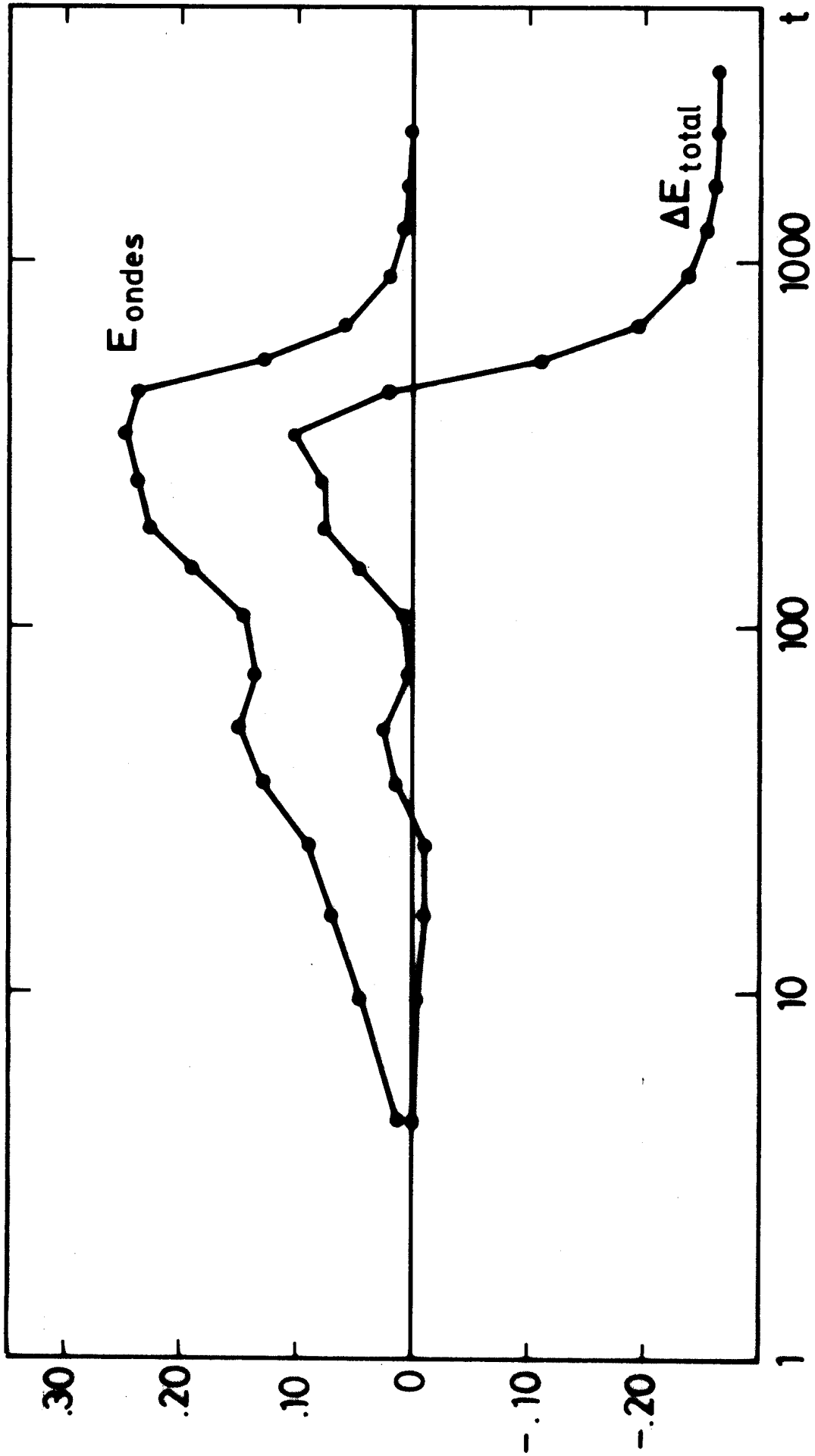


Figure 8

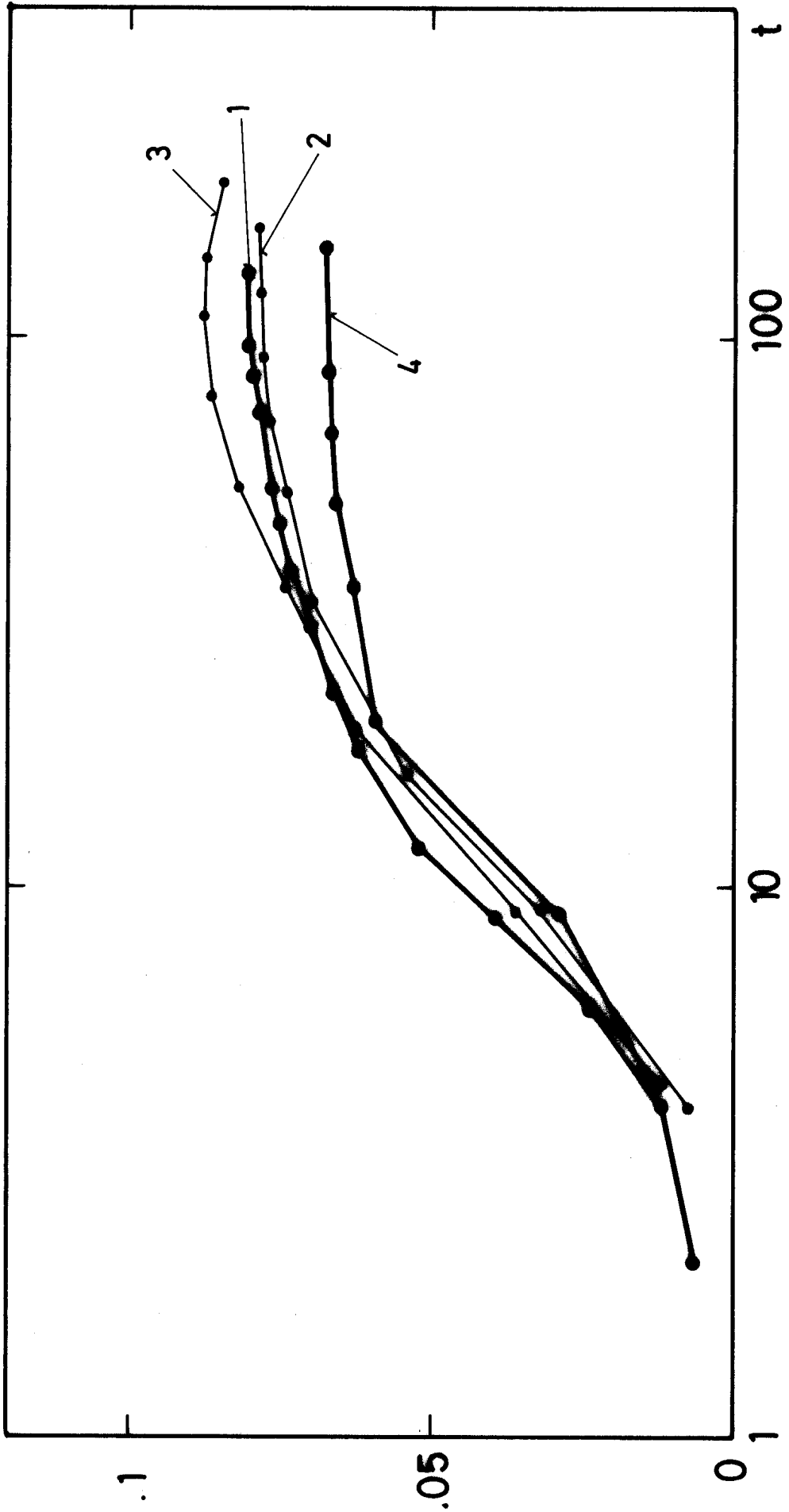
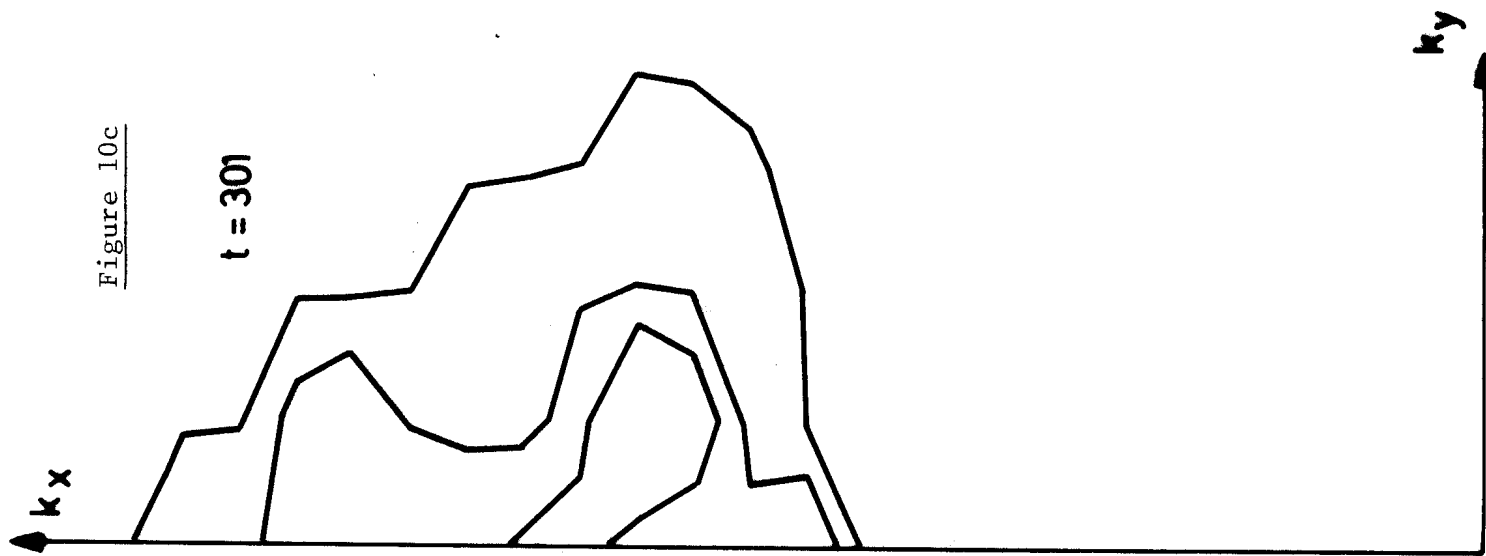
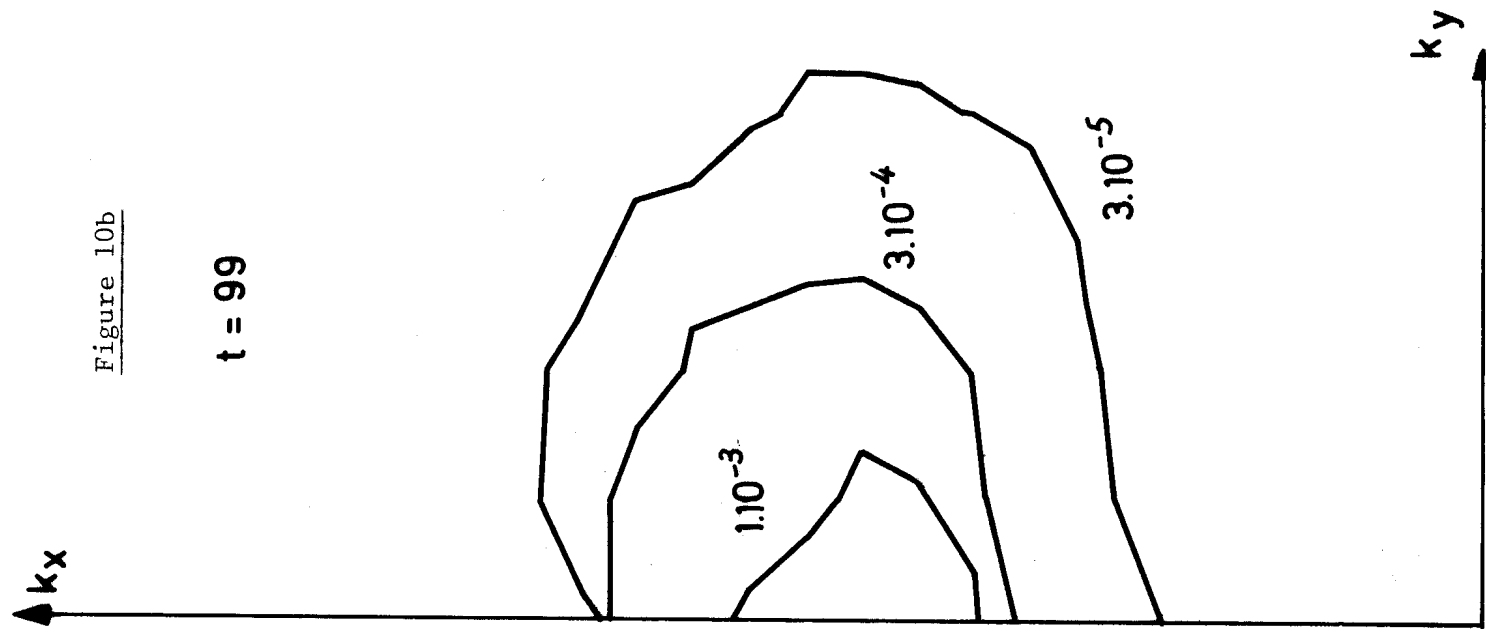
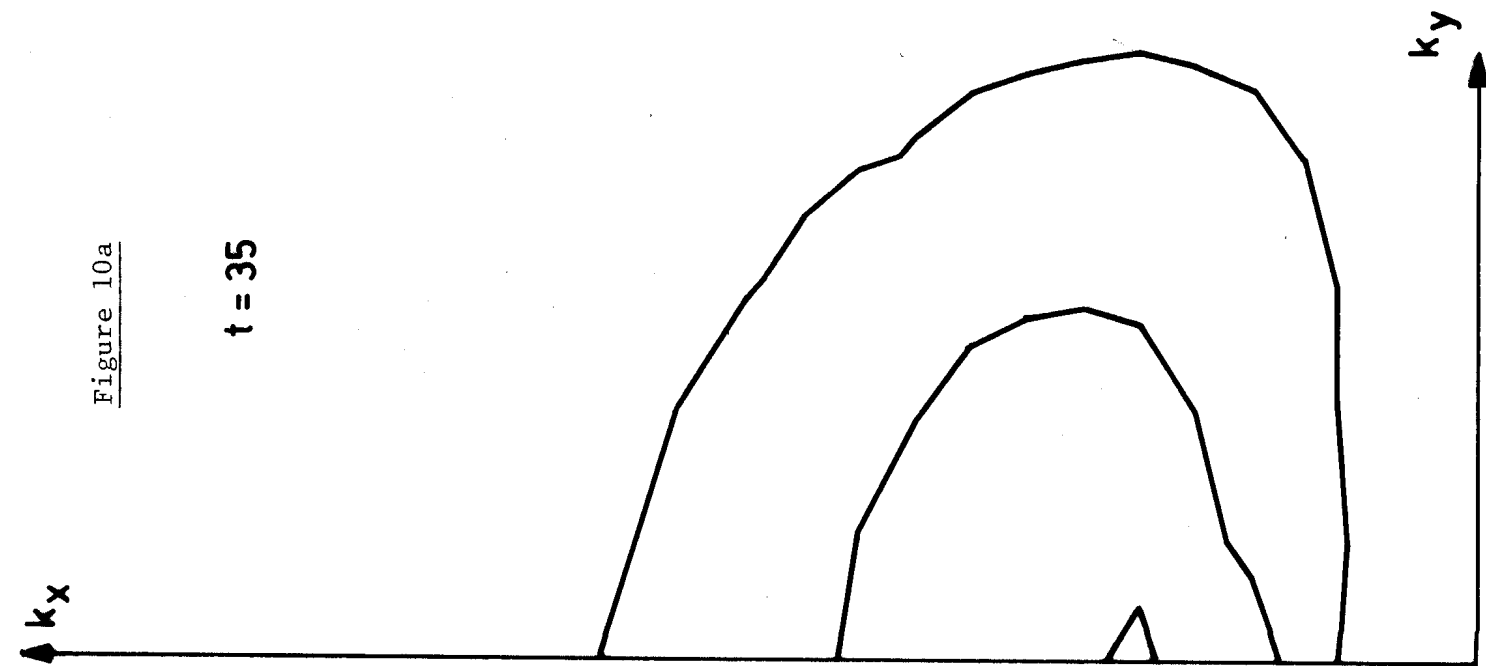


Figure 9



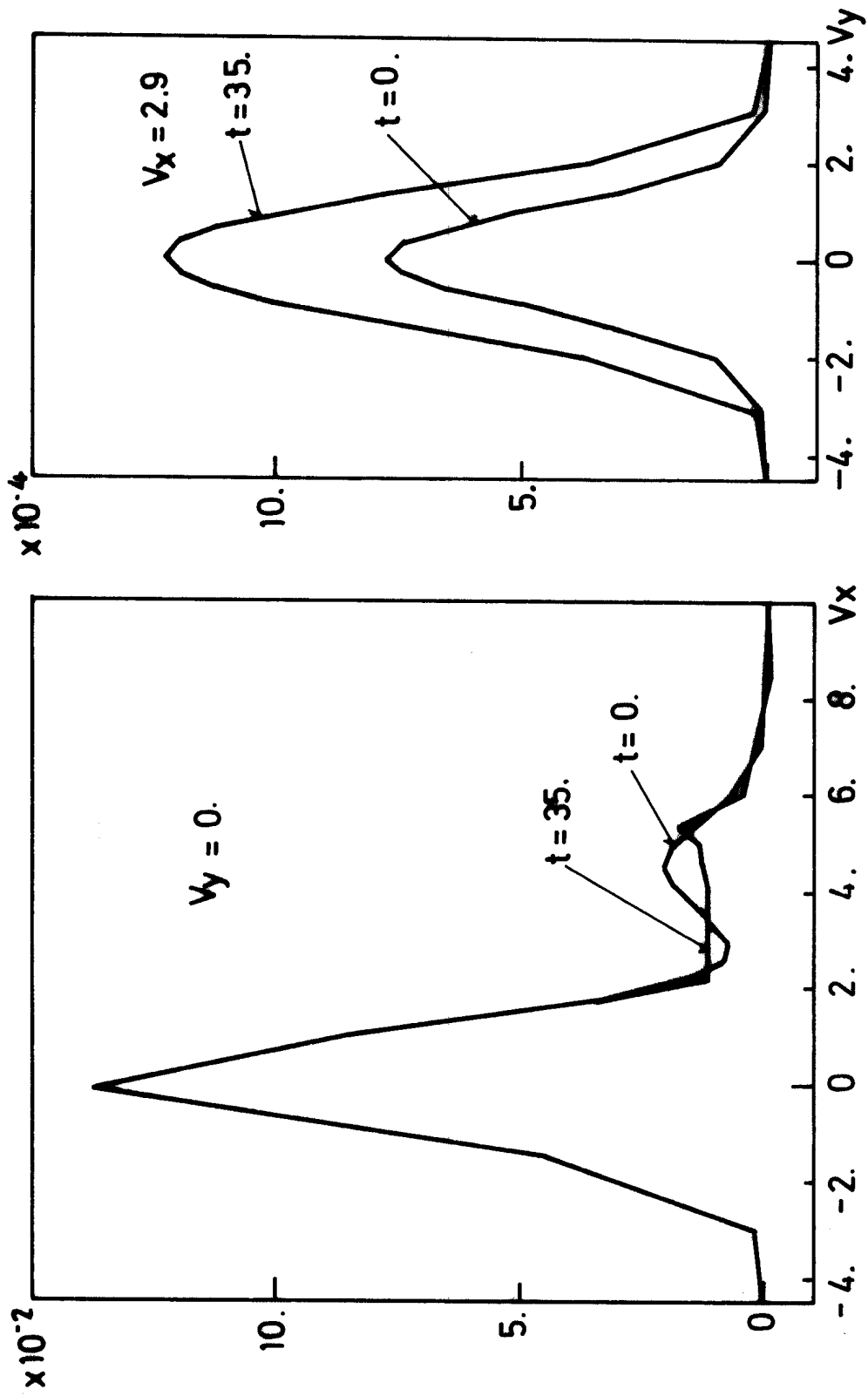


Figure 11