

Mars 1974

LRP 78/74

MESURES DIAMAGNETIQUES D'UN THETA PINCH

R. Keller

C R P P

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

MESURES DIAMAGNETIQUES D'UN THETA PINCH

R. Keller

A b s t r a c t

The formative and adiabatic phase of a theta pinch are investigated by diamagnetic probe measurements. The radial implosion is interpreted with the aid of an analytic shock wave model which enables the determination of the initial ionization and the mass collection. Measurements of temperature and mean beta value during the adiabatic compression are made for different deuterium pressures and preionization conditions.

Lausanne

## 1. Introduction

Dans l'intention de stabiliser un pinch hélicoïdal par rétroaction, nous avons entrepris un diagnostic préliminaire de la décharge azimutale au moyen d'une sonde diamagnétique. Nous développons en détail les méthodes habituelles d'analyse de la forme du signal détecté. Elles permettent de déduire le taux d'ionisation initial, le taux de collection de masse au moment du collapse et pendant la période adiabatique, ainsi que la température et le rapport  $\beta$  moyen. Nous avons mis en évidence l'influence des impuretés libérées dans différentes conditions de préionisation.

## 2. Les paramètres de l'expérience

La bobine  $\theta$  est formée de 10 sections de 4 spires, enroulées sur un guide de flux en aluminium de 10,0 cm de diamètre extérieur, mesurant 0,3 cm d'épaisseur. Sa longueur est de 142 cm. Pour garantir l'homogénéité du champ, la fente du guide de flux est recouverte d'une feuille d'aluminium isolée. Les sections de la bobine sont connectées deux à deux à un banc de condensateurs de 43  $\mu$ F, constitué de 5 sections avec crowbar. Un système de contrôle du jitter permet de repérer les défauts d'allumage éventuels des éclateurs. Le champ maximum est de 16 kG avec une tension de charge de 27 kV, et le quart de période est de 3,9  $\mu$ sec.

Le tube de décharge en verre Pyrex possède un diamètre intérieur de 5,0 cm, la place entre le tube et la bobine permet d'installer les conducteurs de rétroaction. Les électrodes de préionisation sont constituées de barreaux de molybdène de 1,2 cm  $\varnothing$  venant à fleur de la bobine  $\theta$ . Elles sont alimentées par un banc de condensateurs chargé à 27 kV, amorti par une résistance non linéaire. L'impulsion de courant est quasi-sinusoidale, avec arrêt net lorsqu'elle retombe à zéro.

### 3. Phase d'implosion

#### 3.1. Modèle chasse-neige et onde de choc

La question a été traitée par exemple sous références |1|, |2|, |3|, |4|. Nous partons des hypothèses habituelles du modèle chasse-neige simple: densité homogène du plasma, température initiale nulle, conductivité infinie, courant de surface, pas de champ piégé. Le champ magnétique axial augmente linéairement avec le temps

$$B = \dot{B}t \quad (1)$$

Il n'est pas influencé par le mouvement du plasma, grâce au fait que son volume est beaucoup plus petit que celui de la bobine. L'équation du mouvement est alors

$$- \frac{d}{dt} \left( M \frac{dr}{dt} \right) = \frac{\pi}{\mu_0} r B^2 \quad (2)$$

M est la masse accumulée sur le piston magnétique de rayon r. Elle forme une couche infiniment mince. La masse (par unité de longueur) est donnée par

$$M = \pi \rho (b^2 - r^2) \quad (3)$$

b désigne le rayon du tube de décharge. Si nous introduisons des variables normalisées

$$y = \frac{r}{b} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad (4)$$

et un temps caractéristique

$$t_0^4 = \mu_0 \rho b^2 / \dot{B}^2 \quad (5)$$

$$\frac{v'}{v} = c = \text{const} \quad (8)$$

Cette dernière hypothèse se vérifiera après coup. Avec  $M = c \rho_1 x$  et  $v = dx/dt$  l'équation du mouvement est maintenant

$$\frac{d}{dt} \left[ c \rho_1 x \frac{dx}{dt} \right] = \frac{\dot{B}^2 t^2}{2 \mu_0} \quad (9)$$

La solution s'écrit

$$v = \frac{\dot{B} t}{\sqrt{3 \mu_0 c \rho_1}} \quad (10)$$

Nous voyons que le piston subit une accélération uniforme. L'énergie cinétique (ordonnée) du gaz est

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{\dot{B}^3 t^4}{12 \mu_0 \sqrt{3 \mu_0 c \rho_1}} \quad (11)$$

Le travail du piston s'avère être égal à

$$W = \int \frac{\dot{B}^2 t^2}{2 \mu_0} v dt = \frac{3}{2} E_c \quad (12)$$

La différence se retrouve dans l'énergie thermique du gaz  $E_T = W - E_c = E_c / 2$ .

A l'intérieur de la couche l'équation du mouvement est

$$\rho_2 \frac{dv}{dt} = - \text{grad } p \quad (13)$$

Comme  $dv/dt = \dot{v} = \text{const}$ , il y règne un gradient de pression barométrique que nous linéarisons, l'erreur commise est minime. Après intégration selon  $x$ , la

l'équation différentielle devient

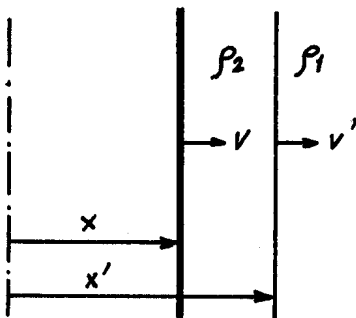
$$\frac{d}{d\tau} \left[ (\gamma^2 - 1) \frac{d\gamma}{d\tau} \right] = \gamma \tau^2 \quad (6)$$

La figure 1 montre la solution obtenue par intégration numérique. Pour des valeurs de  $\gamma$  supérieures à 0,5, le développement en série ci-dessous constitue une excellente approximation

$$\gamma \cong 1 - \frac{\tau^2}{2\sqrt{3}} + \frac{\tau^4}{360} \quad (7)$$

Le collapse a lieu au temps  $\tau_c = 1,92$ . Par la seule mesure du temps de collapse, il est donc possible de déduire, à l'aide de la formule (5), la masse totale du plasma. Connaissant la pression de remplissage, nous obtenons simultanément le taux de collection, ceci sous réserve des hypothèses de départ.

Afin d'exploiter la richesse d'information d'une mesure diamagnétique, nous allons raffiner le modèle chasse-neige en considérant l'épaisseur de la couche accumulée. Cela revient à résoudre le problème de l'onde de choc accélérée. En géométrie unidimensionnelle et avec quelques simplifications, l'intégration est élémentaire.



Soit  $v$  la vitesse du piston et  $v'$  la vitesse du front d'onde (voir figure ci-contre).  $\rho_1$  est la densité initiale et  $\rho_2$  une valeur moyenne de la densité après compression. Nous admettons que la matière dans la couche accélérée est animée d'une vitesse uniforme  $v$ , c-a-d.  $\partial v / \partial x = 0$ . Comme le choc va en s'intensifiant,

le gaz nouvellement comprimé est de plus en plus chaud. Un gradient de température a donc tendance à s'établir, mais nous admettons qu'il est négligeable en raison de la grande conductivité thermique du plasma. Supposons, en outre, que la vitesse frontale  $v'$  et la vitesse du piston  $v$  restent dans un rapport constant:

différence de pression entre les deux limites de la couche devient  $\Delta p = \rho_2 \dot{v}(x' - x)$ . En faisant appel à la loi de conservation de la matière, et en substituant  $v$ , nous trouvons

$$\Delta p = \frac{1}{3} P_m \quad (14)$$

La pression du gaz est égale à la pression magnétique  $p_m$  du côté du piston, tandis qu'elle est égale à  $p_m - \Delta p$  vers le front d'onde. La pression moyenne lors d'un gradient linéaire est donc

$$\bar{p} = \frac{5}{6} P_m \quad (15)$$

En égalant l'énergie thermique  $fp(x' - x)/2$  avec la valeur trouvée plus haut  $Mv^2/4$ , nous obtenons la constante  $c$

$$c = 1 + \frac{2}{5f} \quad (16)$$

Le taux de compression est alors

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{5f}{2} \quad (17)$$

Dans le cas d'un plasma dominé par les collisions, soit  $f = 3$ , le taux de compression d'une onde de choc accélérée uniformément est égal à 8,5. Le même calcul fait pour une pression magnétique constante aurait conduit à un taux de compression égal à  $1 + f$ , conformément au résultat bien connu de la théorie des ondes de choc. (Nombre de Mach infini lors d'une température initiale nulle).

L'onde de choc cylindrique peut être assimilée au cas unidimensionnel, tout au moins dans sa période initiale, tant que le rayon n'a pas changé beaucoup. Nous allons corriger son équation du mouvement (2) en faisant apparaître, selon le modèle de l'équation (9), un facteur  $c = 1,133$  devant la densité. La forme de l'équation ne change pas, mais le temps caractéristique est maintenant

$$t_0^4 = \mu_0 c \rho b^2 / \dot{B}^2 \quad (18)$$

Nous admettons que l'équation reste en vigueur jusqu'au moment du collapse défini comme suit: le volume lors du collapse est égal à la place qu'occuperait un plasma de densité homogène ayant subit un taux de compression donné par (17). Son rayon est fixé à  $r_c = b / \sqrt{8,5}$  ou bien

$$\gamma_c = 0,343 \quad \text{et} \quad \tau_c = 1,53 \quad (19)$$

Nous nous servons du signal diamagnétique au point  $y_c$  pour évaluer les résultats.

### 3.2. Mesure du taux de collection au moment du collapse

La méthode de mesure est décrite par exemple dans les réf. |5|, |6|. Le signal diamagnétique est égal au flux exclu par le plasma. Il s'obtient par soustraction du flux en présence de plasma et de celui qui passerait en l'absence de plasma. Le premier se mesure au moyen d'une boucle entourant le tube de verre. Le second est mesurable au moyen d'une boucle située entre le tube de verre et la bobine  $\theta$ . Les deux boucles sont connectées en opposition et ajustées à l'aide d'un potentiomètre. La différence de tension est intégrée avec un circuit RC passif. Ainsi l'oscilloscope indique directement la différence des flux, ceux-ci étant proportionnels à l'intégrale des tensions. L'inconvénient d'un pick-up électrostatique est évité grâce à l'emploi de fils blindés.

Pour des raisons de commodité, nous avons fait passer le retour d'une boucle par l'extérieur du guide de flux. Comme le champ pénètre dans ce dernier en raison de l'effet de peau, il se produit une variation de flux non linéaire captée par la sonde et causant une inflexion de la trace de l'oscilloscope. L'ajustage potentiométrique du zéro n'est donc qu'imparfaitement réalisable. Il



est nécessaire de soustraire graphiquement ou numériquement le signal zéro lors de chaque mesure. Les tirs sont reproductibles, il suffit de relever une seule fois le signal zéro lors d'une série de mesures.

La question importante de l'étalonnage est résolue comme suit: nous ouvrons le tube et y plaçons une barre d'aluminium concentrique de 1,8 cm de diamètre. Le signal obtenu dans cette condition équivaut au diamagnétisme d'un plasma de même diamètre ayant un  $\beta$  égal à l'unité. Dans la figure 2, nous montrons le signal zéro, le signal avec barre d'alu et le champ magnétique extérieur.

La tension délivrée par la sonde diamagnétique est

$$U = \pi \frac{d}{dt} (r^2 B) \quad (20)$$

où B est le champ extérieur au plasma. Le signal intégré est égal au diamagnétisme

$$S = \int U dt = \pi \dot{B} b^2 \gamma^2 t \quad (21)$$

Mais la valeur lue à l'oscilloscope est affectée de divers facteurs d'étalonnages. Ceux-ci s'éliminent par comparaison des mesures avec le signal de référence

$$S_a = \pi r_a^2 B \quad (22)$$

où  $r_a$  désigne le rayon de la barre métallique:  $r_a = 0,9$  cm. Soit  $S_c$  le diamagnétisme à l'instant  $t_c$ . Le point  $(t_c, S_c)$  de l'oscillogramme forme avec l'origine une droite dont la pente est

$$\frac{S_c}{t_c} = \pi \dot{B} b^2 \gamma_c^2 = \frac{b^2 \gamma_c^2}{r_a^2} \dot{S}_a = 0,91 \dot{S}_a \quad (23)$$

L'intersection de la droite avec la trace donne immédiatement  $t_c$ , d'où  $t_o = t_c / \tau_c$ . Ensuite, nous déduisons la densité en utilisant la formule (18). La dérivée

initiale du champ est

$$\dot{B} = 0,65 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-2} \quad (24)$$

La masse entraînée se chiffre comme suit (unités MKS)

$$\alpha_2 \rho_r = 0,876 \cdot 10^{20} \text{ t}^4 \quad (25)$$

$\alpha_2$  désigne le taux de collection lors du collapse et  $\rho_r$  la densité au remplissage. Pour le deutérium à la température ambiante, la relation entre pression et densité est

$$P_r = 4,54 \cdot 10^6 \rho_r \quad (26)$$

(millitorr)                      (Kg/m<sup>3</sup>)

Deux séries de mesures ont été faites, dans des conditions de préionisation différentes. Dans le 1er cas, le courant de pointe est de 14 kA et la durée de 8  $\mu$ sec. Les résultats indiqués dans le Tableau I montrent un taux de collection dépassant largement 100 % lorsque les pressions de remplissage sont faibles. Il y a donc un fort dégagement d'impuretés lors de la décharge de préionisation. Nous avons pu constater, à l'aide de sondes magnétiques dipolaires, que le cheminement du courant se déplace violemment, rencontre la paroi et tourne plusieurs fois le long de sa surface. Le récipient de Pyrex subit de ce fait un fort dégazage.

Les sondes dipolaires n'ont pas révélé d'instabilité lors de la seconde condition de préionisation: courant de pointe 6,2 kA, durée 3,2  $\mu$ sec. Les taux de collection indiqués dans le tableau II sont tous inférieurs à 100 %. Le plasma contient donc beaucoup moins d'impuretés dans ce cas. Ainsi nous confirmons le fait que l'instabilité du Z-pinch est cause d'un dégazage important [7].

### 3.3. Influence du taux d'ionisation initial

Si nous déduisons le taux de collection à partir du maximum du signal diamagnétique, nous obtenons systématiquement une valeur inférieure au résultat obtenu à partir du temps de collapse. Cette différence semble indiquer un taux de collection plus faible au début du pinch. Mais une explication correcte ne peut être donnée qu'avec l'appui d'un code numérique. Des mesures de probabilité d'ionisation ont été interprétées [8] avec un modèle chasse-neige unidimensionnel et à l'aide d'un programme de calcul à l'ordinateur. Les deux méthodes ont conduit à des résultats concordants. Grâce à la flexibilité du modèle analytique, il est facile de tester séparément les différents phénomènes physiques qui interviennent, par exemple, l'effet de la résistivité et du travail d'ionisation.

La dissipation causée par la résistance anormale, lors de la formation du pinch, provoque une diffusion rapide du champ vers l'intérieur [9], [10], [11]. Il s'ensuit un abaissement du rapport  $\beta$  et par conséquent, du signal diamagnétique. La dissipation due au travail d'ionisation provoque aussi une diffusion du champ. Son effet est prépondérant au début de la décharge, quand le courant est encore faible. Nous allons calculer l'influence du travail d'ionisation avec le modèle analytique.

Admettons un taux d'ionisation initial  $\alpha_1$  constant dans l'espace, et soit  $\alpha_2 \rho_r$  la densité du plasma collecté lors du passage du choc.  $\alpha_2$  désigne le taux de collection, il est également supposé homogène. Le travail d'ionisation par unité de longueur est alors

$$W = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) E_i \rho_r}{m_i} \pi (b^2 - r^2) \quad (27)$$

où  $E_i$  désigne l'énergie nécessaire à la formation d'une paire d'ions, soit  $E_i = 25 \text{ eV}$  [12]. Ce travail est fourni par l'énergie électrique dissipée

$$\dot{W} = VJ \quad (28)$$

V est la chute de tension développée le long du pourtour de la couche limite. Elle obéit à la loi d'induction

$$V = \frac{d}{dt} (\pi r^2 B_i) \quad (29)$$

$B_i$  est le champ diffusant au travers de la couche limite, supposée infiniment mince. Il a le temps de s'homogénéiser à l'intérieur grâce à la grande résistivité du plasma froid. Le courant (par unité de longueur) est donné par

$$\mu_0 J = B - B_i \quad (30)$$

En identifiant les énergies, nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$(\dot{B}t - B_i) \frac{d}{dt} (y^2 B_i) = - \frac{\mu_0 \rho_r (\alpha_2 - \alpha_1) E_i}{m_i} \cdot \frac{dy^2}{dt} \quad (31)$$

Cette équation est facilement intégrable si nous nous tenons à une petite valeur du champ intérieur, c'est-à-dire si nous négligeons  $B_i$  devant  $\dot{B}t$  dans le membre de gauche. Nous cherchons le maximum du signal diamagnétique; comme il intervient très tôt, vers  $y \cong 4/5$ , nous pouvons nous contenter de l'expression approchée  $y = 1 - \tau^2/2\sqrt{3}$ . Le résultat de l'intégration s'écrit

$$\frac{B_i}{\dot{B}t_0} = \alpha \frac{\eta \tau}{y^2} \quad (32)$$

avec

$$\eta \cong 1 - \frac{\tau^2}{6\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2\sqrt{\mu_0 \alpha_2 \rho_r} (1 - \alpha_1/\alpha_2) E_i}{\sqrt{3c} m_i b \dot{B}} \quad (33)$$

$\alpha$  est une constante dépendant des conditions expérimentales. Le signal diamagnétique est maintenant

$$S^* = \pi r^2 (B - B_i) \cong \pi b^2 \dot{B} t [y^2 - \alpha \eta] \quad (34)$$

Il ne reste qu'à chercher le maximum de la fonction  $t [y^2 - \alpha \eta]$ . Nous trouvons un abaissement relatif de

$$\frac{S_{max}^*}{S_{max}} \cong \frac{(1 - \alpha)^{3/2}}{(1 - \frac{\alpha}{6})^{1/2}} \quad (35)$$

Lorsque  $\tau$  est petit, la formule (32) tend vers  $B_i \rightarrow \alpha B$ . Le calcul est seulement valable pour  $\alpha$  nettement inférieur à l'unité, ce qui est bien le cas dans notre expérience.

Sur la base de cette théorie, nous présentons maintenant une mesure du taux initial d'ionisation à partir de l'abaissement du signal diamagnétique. Le résultat est comparé avec le calcul du taux initial. Ce dernier est fonction du délai écoulé entre l'arrêt du courant de préionisation et le début du pinch. La figure 3 montre un exemple de deux décharges ayant lieu à des temps différents. La pression de remplissage est de  $43 \mu D_2$ . D'après le temps de collapse (il est pratiquement indépendant du délai), la densité moyenne s'avère égale à

$$\alpha_2 \rho_r = 6,8 \cdot 10^{-6} \text{ Km}^{-3}$$

d'où un taux de collection de 72 %.

Après introduction des valeurs numériques, nous obtenons  $\alpha = 0,234 (1 - \alpha_1/\alpha_2)$ . Dans la figure 4 sont reportés les taux d'ionisation initiaux  $\alpha_1$ , en fonction du délai, obtenus à l'aide des formules (33) et (35). La courbe pleine montre l'ionisation initiale calculée à partir des coefficients de recombinaison. La concordance des résultats permet d'affirmer le bien-fondé de nos hypothèses de travail.

Le calcul de la recombinaison est basé sur les données de Quinn [13] : Coefficient de recombinaison  $\alpha = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$ . Coefficient de diffusion  $D_a = 1,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ . Le bilan des particules obéit à l'équation

$$\frac{dn}{dt} \approx - \frac{n}{t_a} - \alpha n^2 \quad (36)$$

où  $n$  désigne la moyenne de la densité ionique effectuée sur un profil de Bessel.  $t_a$  est une constante de temps égale à

$$\frac{b^2}{(2,4)^2 D_a} = 7,3 \mu\text{sec}$$

La solution de l'équation ci-dessus est

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{n_0}{n} = (1 + \alpha n_0 t_a) e^{t/t_a} - \alpha n_0 t_a \quad (37)$$

Dans le graphique 4, la courbe est translatée de manière à rendre  $\alpha_1$  égal à 100 % au temps  $t = 0$ . L'origine du temps précède de  $1,7 \mu\text{sec}$  l'arrêt du courant de préionisation. Une part appréciable du plasma se recombine déjà pendant la chute du courant.

Remarque:

Lorsque  $\alpha$  atteint ou dépasse l'unité, nous pouvons affirmer par extrapolation du résultat (32), valable au 1er ordre, que  $B_i$  devient comparable avec le champ extérieur  $B$  dès le début. Dans ce cas, la pression magnétique du champ intérieur empêche la formation de l'onde de choc. A faible taux d'ionisation initiale, l'égalité  $\alpha = 1$  correspond à une montée du champ de l'ordre de  $1 \text{ kG}/\mu\text{sec}$ . Donc  $B$  doit être largement supérieur à cette valeur pour que les conditions d'un pinch efficace soient réalisées. Cette circonstance a été confirmée maintes fois dans la littérature [14], [15], [23].

#### 4. Phase adiabatique

##### 4.1. Masse totale mesurée à partir des oscillations radiales

Un moyen précis de mesure de la masse totale du plasma est offert par l'observation des oscillations radiales. Il a été démontré, à plusieurs reprises, [16], [17], [18], que la fréquence est peu sensible au profil de densité, au  $\beta$ , au rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  et à la proximité des parois. Pour une paroi éloignée, la fréquence angulaire est donnée par

$$\omega^2 = \frac{4\pi g^2 B^2}{\mu_0 M} \left[ 1 - \beta \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \right] \quad (38)$$

M désigne la masse linéaire. Si  $\rho_r$  est de nouveau la densité lors du remplissage et  $\alpha_3$  un taux de collection régnant au moment des oscillations, nous aurons

$$\omega = \frac{2gB}{b\sqrt{\mu_0 \alpha_3 \rho_r}} \sqrt{1 - \beta \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right)} \quad (39)$$

Le facteur  $g$  dépend du profil de densité. Dans le cas d'une couche mince,  $g$  est égal à l'unité. Pour un profil rectangulaire  $2g$  est égal à 2,405 (zéro de la fonction de Bessel). Il est légèrement plus grand si le profil présente un sommet dans l'axe. Pour le dépouillement des mesures, nous adoptons  $g = 1,2$ .

Voici une manière instructive de déduire la relation (38). Soit un plasma cylindrique de rayon  $r$ , dont le profil reste rectangulaire pendant le mouvement. Cela revient à introduire une contrainte qui maintient la vitesse proportionnelle à l'éloignement de l'axe. (En réalité  $v$  est une fonction de Bessel lorsque l'amplitude est petite). La pression obéit à la loi adiabatique

$$P = P_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2\gamma} \quad (40)$$

où  $r_0$  et  $p_0$  sont les valeurs à l'équilibre. Le champ extérieur  $B$  est constant et le flux intérieur est piégé:

$$\frac{B_i}{B_{i0}} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (41)$$

Cherchons les énergies du système. L'énergie potentielle du gaz est égale au travail de compression

$$E_g = -\int p_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\gamma} 2\pi r dr = \frac{\pi p_0 r_0^2}{(\gamma-1) x^{2\gamma-2}} \quad (42)$$

Nous utilisons ici une nouvelle variable  $x = r/r_0$ . L'énergie potentielle du champ est

$$E_m = \int \frac{B^2 - B_i^2}{2\mu_0} 2\pi r dr \quad (43)$$

En faisant appel à la condition d'équilibre

$$B_{i0} = B^2 (1-\beta) \quad , \quad 2\mu_0 p_0 = \beta B^2 \quad (44)$$

l'énergie potentielle totale devient

$$E_{pot} = \frac{\pi B^2 r_0^2}{2\mu_0} \left[ \frac{1-\beta}{x^2} + \frac{\beta}{(\gamma-1) x^{2\gamma-2}} + x^2 \right] \quad (45)$$

D'autre part, l'énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{M r_0^2}{4} \dot{x}^2 \quad (46)$$

la loi de conservation d'énergie  $E_c + E_{pot} = U = \text{const}$  conduit à l'équation du



mouvement suivante

$$\dot{x}^2 + \frac{\Omega^2}{4} \left[ \frac{1-\beta}{x^2} + \frac{\beta}{(\gamma-1)x^{2\gamma-2}} + x^2 \right] = \frac{4U}{Mr_0^2} \quad (47)$$

avec

$$\Omega^2 = \frac{8\pi B^2}{\mu_0 M} \quad (48)$$

Pour  $\gamma = 2$ , l'expression entre crochets devient simplement  $1/x^2 + x^2$  et l'équation est intégrable de façon élémentaire

$$x^2 = u + \sqrt{u^2 - 1} \sin \Omega t \quad (49)$$

$u-1$  est constant et proportionnel à l'énergie d'oscillation. Le volume du plasma varie donc sinusoïdalement et la fréquence est indépendante de l'amplitude. Pour  $\gamma = 5/3$ , réalisé dans notre cas [19], nous opérons de la façon suivante : A l'équation (47), nous ajoutons sa dérivée selon  $x$ , multipliée par  $x/2$ , ce qui donne

$$\frac{d^2}{dt^2} x^2 + \Omega^2 \left[ \beta \frac{1-\gamma/2}{\gamma-1} x^{2-2\gamma} + x^2 \right] = \frac{8U}{Mr_0^2} \quad (50)$$

Nous remarquons que la nouvelle équation admet effectivement la solution (49) lorsque  $\gamma$  est égal à 2. Aux petites amplitudes  $u$  est voisin de l'unité, ce qui permet d'écrire  $x^2 \rightarrow 1 + \varepsilon$ . Le premier terme du développement mène à une équation harmonique

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \Omega^2 \left[ 1 - \beta \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right) \right] \varepsilon = \text{const} \quad (51)$$

Nous reconnaissons immédiatement la fréquence

$$\omega = \Omega \sqrt{1 - \beta \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)} \quad (52)$$

D'après (48), elle équivaut à (38) si  $g = \sqrt{2}$ . La valeur exagérée de  $g$  provient de la contrainte sur le profil de vitesse mentionné au début.

Lors du dépouillement des résultats, nous devons tenir compte de la dépendance de la fréquence vis-à-vis du champ magnétique, mais nous pouvons négliger la variation de  $\beta$  parce que sa valeur est petite, de l'ordre de 0,1. Lors d'une variation lente de l'amplitude, la phase de l'oscillation se conforme à l'expression suivante:

$$\varphi = \int \omega dt \quad (53)$$

Soit  $\nu = \varphi/\pi$  le nombre de demi-périodes

$$\nu = \frac{2,4 \sqrt{1 - \beta/6}}{\pi b \sqrt{\mu_0 \alpha_3 \rho_r}} \int B dt \quad (54)$$

En reportant graphiquement  $\nu$  en fonction de l'intégrale  $\int B dt$ , nous devons trouver une droite, et la valeur cherchée  $\alpha_3 \rho_r$  se déduit d'après la pente. La figure 5 montre un cas typique. Les points indiquent les extrêmes du signal diamagnétique. Nous constatons qu'ils sont bien alignés, à l'exception des deux premiers qui sont en dehors du domaine adiabatique. Le taux de collection  $\alpha_3$  est reporté dans les tableaux I et II. Sa valeur est systématiquement supérieure à  $\alpha_2$ . La thermalisation consécutive au collapse entraîne donc une ionisation supplémentaire.

#### 4.2. Mesure diamagnétique de la température et du $\beta$ moyen

A l'équilibre, la température et le rapport  $\beta$  sont des grandeurs corrélées, elles sont en relation directe avec le diamagnétisme. Comme le profil est toujours arrondi (il est assimilable à une gaussienne [10]), nous devons définir un  $\beta$  moyen. Partons d'un champ magnétique donné

$$B(r) = B - (B - B_0) F(r) \quad (55)$$

$F(r)$  est une fonction décroissante qui décrit le profil du champ:  $F(0) = 1$ ;  $F(b) = 0$ .  $B_0$  désigne le champ sur l'axe et  $B$  le champ extérieur au plasma. Soit  $\beta(r)$  le quotient de la pression du gaz et de la pression magnétique extérieure:

$$\beta(r) = 1 - \left( \frac{B(r)}{B} \right)^2 \quad (56)$$

La valeur sur l'axe est  $\beta_0 = 1 - B_0^2/B^2$ . Soit  $\Delta B = B - B(r)$  le champ exclu par le plasma. Nous pouvons l'écrire sous les deux formes suivantes

$$\Delta B = B \left( 1 - \sqrt{1 - \beta(r)} \right) = B \left( 1 - \sqrt{1 - \beta_0} \right) F(r) \quad (57)$$

Effectuons la moyenne du champ exclu

$$\langle \Delta B \rangle = \frac{1}{r_p^2} \int_0^b \Delta B dr^2 \quad (58)$$

où  $r_p$  désigne le rayon d'un profil rectangulaire excluant un champ moyen, dont la valeur est précisément celle donnée par (58). Ceci étant, le diamagnétisme devient

$$S = \pi r_p^2 \langle \Delta B \rangle = \pi B \int_0^b \left( 1 - \sqrt{1 - \beta(r)} \right) dr^2 \quad (59)$$

Soit  $\langle \beta \rangle$  une valeur moyenne de  $\beta$  à l'intérieur du profil rectangulaire conduisant au même signal diamagnétique

$$S = \pi B (1 - \sqrt{1 - \langle \beta \rangle}) r_p^2 \quad (60)$$

Dans ce cas  $\langle \beta \rangle$  remplit la condition

$$1 - \sqrt{1 - \langle \beta \rangle} = \frac{1}{r_p^2} (1 - \sqrt{1 - \beta_0}) \int_0^b F(r) dr^2 \quad (61)$$

Nous aimerions définir un  $\beta$  moyen à la façon de (58)

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{r_p^2} \int_0^b \beta(r) dr^2 \quad (62)$$

Pour rendre les deux dernières expressions compatibles, il faut que le rayon moyen résulte de l'opération suivante

$$r_p^2 = \frac{\left[ \int F dr^2 \right]^2}{\int F^2 dr^2} \quad (63)$$

Dans le cas isotherme, il se trouve que  $r_p$  correspond justement au rayon moyen massique du plasma. En effet, la condition d'équilibre de pression demande que

$$kT = \frac{B^2 \beta(r)}{4\mu_0 n(r)} = \frac{B^2 \langle \beta \rangle}{4\mu_0 \langle n \rangle} \quad (64)$$

La fonction  $n(r)$  possède donc la même forme que  $\beta(r)$ . La moyenne de la densité des ions est

$$\langle n \rangle = \frac{1}{r_p^2} \int_0^b n(r) dr^2 = \frac{N}{\pi r_p^2} \quad (65)$$

Si  $N$  représente la densité linéaire des ions,  $r_p$  est bien le rayon moyen massique.

Avec ce qui précède, température et diamagnétisme obéissent aux relations suivantes

$$kT = \frac{S_a S}{2\mu_0 \pi r_a^2 N} \left[ 1 - \frac{r_a^2 S}{2 r_p^2 S_a} \right] \quad (66)$$

et

$$\langle \beta \rangle = \frac{2 r_a^2 S}{r_p^2 S_a} \left[ 1 - \frac{r_a^2 S}{2 r_p^2 S_a} \right] \quad (67)$$

après avoir introduit l'étalonnage  $S_a = \pi r_a^2 B$ . Le dépouillement des mesures se fait de préférence à l'aide des deux dernières formules. Il est coutume [20] de mettre (66) sous la forme

$$kT = \frac{S_a S}{4\mu_0 \pi r_a^2 N} \left[ 1 + \sqrt{1 - \langle \beta \rangle} \right] \quad (68)$$

Pour un profil rectangulaire  $\sqrt{1 - \langle \beta \rangle}$  est égal au flux piégé divisé par  $\pi r_p^2 B$ .

Dans le cas particulier d'un profil gaussien

$$F(r) = e^{-r^2/r_1^2} \quad (69)$$

la densité devient, d'après (56) et (57)

$$n(r) \sim \beta(r) = 1 - \left[ 1 - (1 - \sqrt{1 - \beta_0}) e^{-r^2/r_1^2} \right]^2 \quad (70)$$

Elle tend vers une gaussienne lorsque  $\beta_0$  est très petit

$$\beta(r) \Rightarrow \beta_0 e^{-r^2/r_1^2} \quad (\beta_0 \ll 1) \quad (71)$$

D'après (63), la relation entre  $r_1$  et le rayon moyen est

$$r_p = \sqrt{2} r_1 \quad (72)$$

(à condition que  $r_0$  soit nettement inférieur à  $b$ ). La relation entre  $\beta_0$  et  $\langle \beta \rangle$ , formule (61), devient simplement

$$\left. \begin{aligned} 2(1 - \sqrt{1 - \langle \beta \rangle}) &= 1 - \sqrt{1 - \beta_0} \\ \langle \beta \rangle &= \frac{3}{4} \quad \text{pour } \beta_0 = 1 \\ \langle \beta \rangle &\equiv \frac{1}{2} \beta_0 \quad \text{pour } \beta_0 \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Un développement de  $\beta$  moyen a été donné pour un profil de densité gaussien [21], il rejoint le nôtre lorsque  $\beta$  est petit.

Les présentes déductions sont valables dans le cas quasi-stationnaire. Il est aisé de trouver la signification de la moyenne arithmétique du diamagnétisme lors des oscillations, du moins pour le cas simple  $\gamma = 2$ . Reprenons l'équation (47)

$$\dot{x}^2 + \frac{\Omega^2}{4} \left( \frac{1}{x^2} + x^2 \right) = \frac{4U}{Mr_0^2} \quad (74)$$

A l'instant  $\dot{x} = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'énergie cinétique est nulle,  $x^2$  passe par un maximum ou un minimum. En vertu de (49), les deux extrêmes obéissent à la condition

$$x_{max} \cdot x_{min} = 1 \quad (75)$$

Au maximum, par exemple, nous aurons

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_{max}^2} + x_{max}^2 \right) = \frac{1}{2} (x_{min}^2 + x_{max}^2) = \text{moyenne de } x^2 \quad (76)$$

Par conséquent, la moyenne arithmétique du signal diamagnétique est une mesure de l'énergie totale. La température correspondante sera celle qu'aurait le plasma après thermalisation de l'énergie cinétique. C'est ainsi que nous avons défini la température présentée dans la figure 6. La même chose peut être dite pour  $\langle \beta \rangle$  en raison de (64). La figure 7 montre l'évolution de  $\langle \beta \rangle$ . Le rayon moyen  $r_p = 0,7$  cm a été déduit d'après la détermination de la limite de Krushkal-Shafranov.

Nous observons l'échauffement causé par la compression adiabatique. Dès que la perte d'énergie due à la radiation l'emporte, la température commence à redescendre. La rapide diminution s'explique par un taux d'impureté considérable. La confrontation des deux courbes notées 42 et 45  $\mu$  montre d'une façon flagrante l'effet du dégazage provoqué par une préionisation de trop longue durée.

Dans les mêmes figures, nous avons reporté la température calculée au moment du collapse, après thermalisation. Nous trouvons, avec l'appui du modèle chasse-neige corrigé

$$kT = - \frac{cb^2 m_i}{ft_0^2} \int_0^{\tau_c} \gamma \dot{\gamma} \tau^2 d\tau = 0,151 b \dot{B} \sqrt{\frac{m_i}{\mu_0 n}} \quad (77)$$

Le facteur numérique coïncide avec la valeur citée par R. Mewe [22], si l'on donne à la grandeur qu'il a désignée par  $a$  la valeur de 0,68. On mentionne l'accord expérimental pour  $a = 0,6$ .

## 5. Conclusion

Nous analysons le signal diamagnétique d'un theta pinch dans ses diverses phases en exploitant les données suivantes: la durée de l'implosion, la hauteur du premier maximum, la fréquence de l'oscillation radiale et la hauteur moyenne lors de la phase adiabatique.

D'après la durée de l'implosion, nous obtenons le taux de collection de masse au moment du collapse. La hauteur du 1er maximum dépend du travail d'ionisation dans le cas d'un plasma dense. Il permet de déterminer le taux d'ionisation initial. Sa valeur est en accord avec le calcul du déclin de l'ionisation consécutive à la recombinaison. La fréquence des oscillations conduit à un taux de collection plus grand, ce qui indique une ionisation supplémentaire lors de la thermalisation qui a lieu au moment du collapse. La hauteur moyenne du signal permet de déduire la température et le  $\beta$  moyen. Nous observons l'échauffement dû à la compression adiabatique, suivi d'une chute rapide de la température et du  $\beta$  en raison des impuretés libérées pendant la préionisation. Un dégazage excessif est mis en évidence lorsque la décharge axiale de préionisation est violemment instable.



Références

- 1) S. Glasstone and R.H. Lovberg. Controlled Thermonuclear Reactions. D. van Nostrand Co. Inc. (1960) p. 230.
- 2) L.A. Artsimovich. Controlled Thermonuclear Reactions. Oliver and Boyd (1964) p. 154.
- 3) H. Kever. Fusion Nucléaire, Suppl. 2, 613 (1962).
- 4) M. Kornherr: Stationäre stossfreie Stosswellen in einem Ausgangsplasma mit hoher Iontemperatur. IPP 1/97 (1969) Garching.
- 5) T.S. Green: An investigation of the theta pinch using magnetic pick-up loops. Nucl. Fusion 2, 92 (1962).
- 6) L.M. Goldman, R.W. Kilb, H.C. Pollock and J.A. Reynolds: Low-density theta pinch experiments. Phys. Fluids 8, 522 (1965).
- 7) E. Eberhagen, W. Köppendörfer and M. Münich: Breakdown and preionization studies for a megajoule theta pinch at lower densities. Proc. APS topical conf. on pulsed high-density plasmas. LA 3770, Los Alamos (1967) H 2,
- 8) T.S. Green, A.A. Newton and S.E. Segrè: Radial implosion of a partially ionized plasma in a theta pinch. Nucl. Fusion 6, 223 (1966).
- 9) H.A.B. Bodin, J. McCartan, A.A. Newton and G.H. Wolf: Diffusion and stability of high-beta plasma in an 8-metre theta pinch. Conf. Proc. Novosibirsk. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vol. II, 533 (1969).
- 10) A.A. Newton: Distribution of plasma density and beta in high beta pinches, CLM-P 347, Culham (1973).
- 11) H.A.B. Bodin and D.J. Dancy: Factors determining beta in a theta pinch experiment. Nuclear Fusion 7, 191 (1967).

Références (suite)

- 12) E. Hinnov, A.S. Bishop and F.W. Hofmann: Interpretation of atomic hydrogen light in the C Stellarator. Princeton University, Matt-270 (1964).
- 13) J.M.P. Quinn: Gas Laser determination of the electron density in the afterglow of a hydrogen discharge. Plasma Physics (J.N.E. Part C) Vol. 7, 113 (1965).
- 14) A. Wootton: the motion of a theta pinch in a perturbing magnetic field. Dept. of Physics, Royal Holloway College. Thèse p. 51 (1973).
- 15) H.A.B. Bodin, E.P. Butt, J.E. Crow, F.E. Irons, J. Junker, A.A. Newton, D.C. Robinson: Experimental and Theoretical studies of a high-beta toroidal pinch. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Madison Conference 1, 236 (1971).
- 16) G.B.F. Niblett and T.S. Green: Radial hydromagnetic oscillations. Proc. Physical Soc. 74, 737 (1959).
- 17) J.B. Taylor: Radial oscillations of cylindrical plasma confined by axial magnetic fields. Proc. Conf. Theoretical Aspects of Controlled Fusion Research. Gatlinburg, Tennessee (TID - 7582) p. 26 (1959).
- 18) H.A.B. Bodin and B. McNamara: Radial oscillations of a plasma cylinder with arbitrary density distribution. Plasma Physics 9, 505 (1967).
- 19) H.A.B. Bodin, J. McCartan and G.H. Wolf: The early stages of a theta pinch. Third European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Utrecht, p. 74 (1969).
- 20) T.S. Green et al. : Energy loss from a theta pinch. Phys. Fluids 10, 1663 (1967).
- 21) H.A.B. Bodin, A.A. Newton, G.H. Wolf and J.A. Wesson: Stability of a bulged theta pinch. Phys. Fluids 13, 2735 (1970).

Références (Suite)

- 22) R. Mewe: On the heating of a pinch. Z. f. Naturforschung 25 a, 1803 (1970).
  
- 23) C.W. Gowers, G.E. Nalesso, A.A. Newton, D.C. Robinson, A. Verhage, A. Wootton, H.A.B. Bodin: Theoretical and experimental study of heating and energy losses in pinch discharges. Proc. 2d Topical Conf. on Pulsed high-beta Plasmas. IPP 1/127 (1972) A 4, Garching.

$p_r$ $\mu D_2$	$\alpha_2$ %	$\alpha_3$ %
110	64	61
80	74	89
65	78	81
52	84	95
45	81	98
36	108	137
27	111	130
21	153	175
17	165	205

Tableau I

Préionisation 14 kA ; 8  $\mu$ sec

$p_r$ : pression de remplissage

$\alpha_2$  et  $\alpha_3$ : taux de collection lors de l'implosion et lors des oscillations radiales.

$p_r$ $\mu D_2$	$\alpha_2$ %	$\alpha_3$ %
95	57	76
65	65	86
43	72	83
42	68	83
30	82	77
22	98	100
16	94	92

Tableau II

Préionisation 6,2 kA ; 3,2  $\mu$ sec

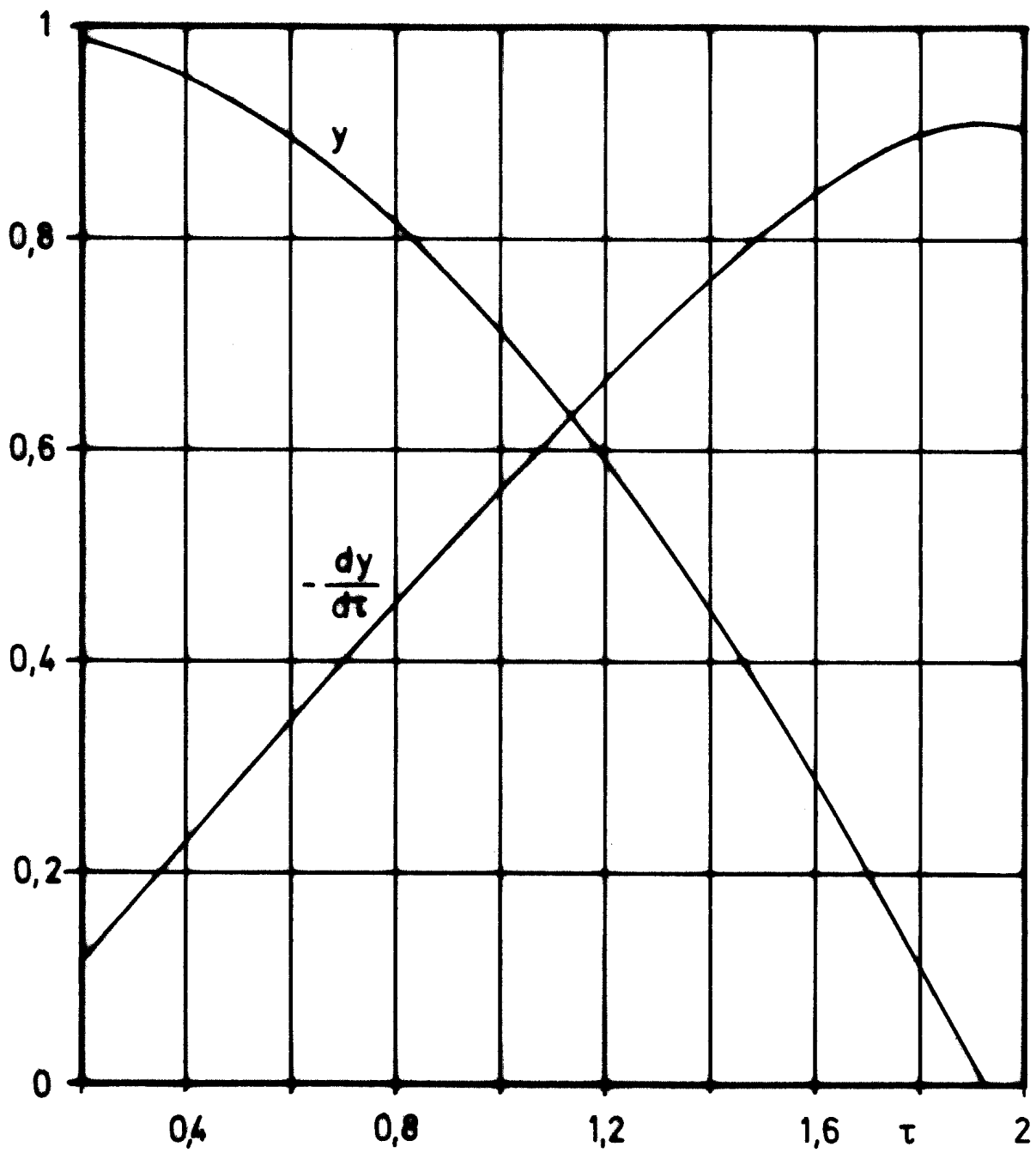


Fig. 1 La Fonction  $y(\tau)$

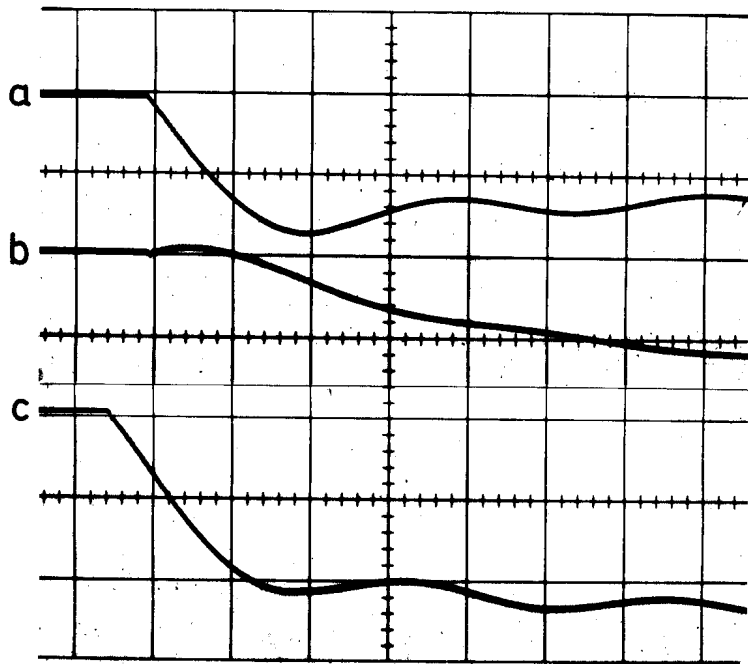


Fig. 2 a: champ magnétique. 1,94  $\mu$ sec / div ; 9,6 kG / div.  
 b: signal zéro  
 c: signal diamagnétique d'étalonnage

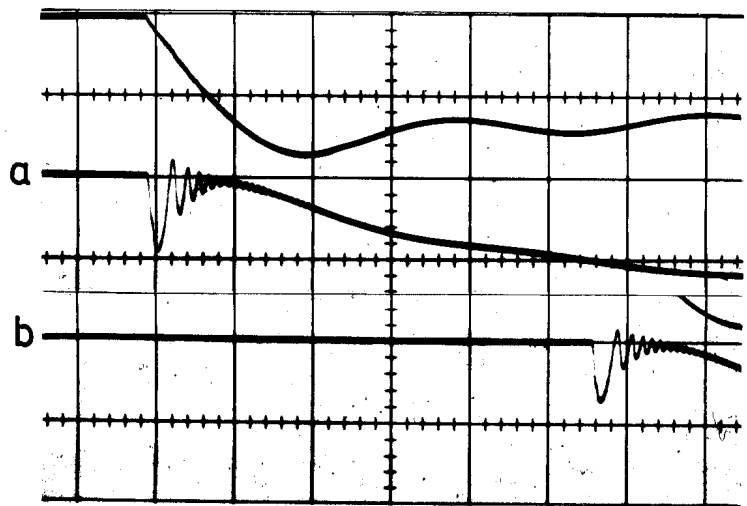


Fig. 3 a et b: Signal diamagnétique pour deux délais différents.  
 1,94  $\mu$ sec / div.

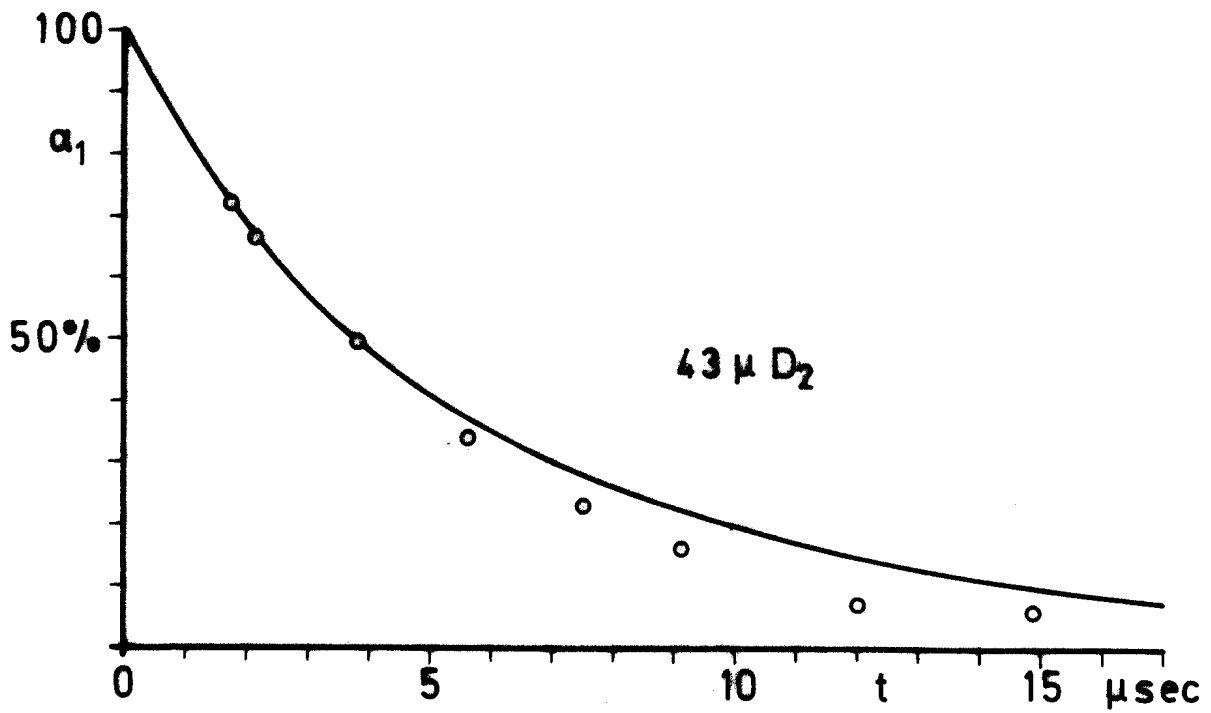


Fig. 4 Taux d'ionisation initial en fonction du délai

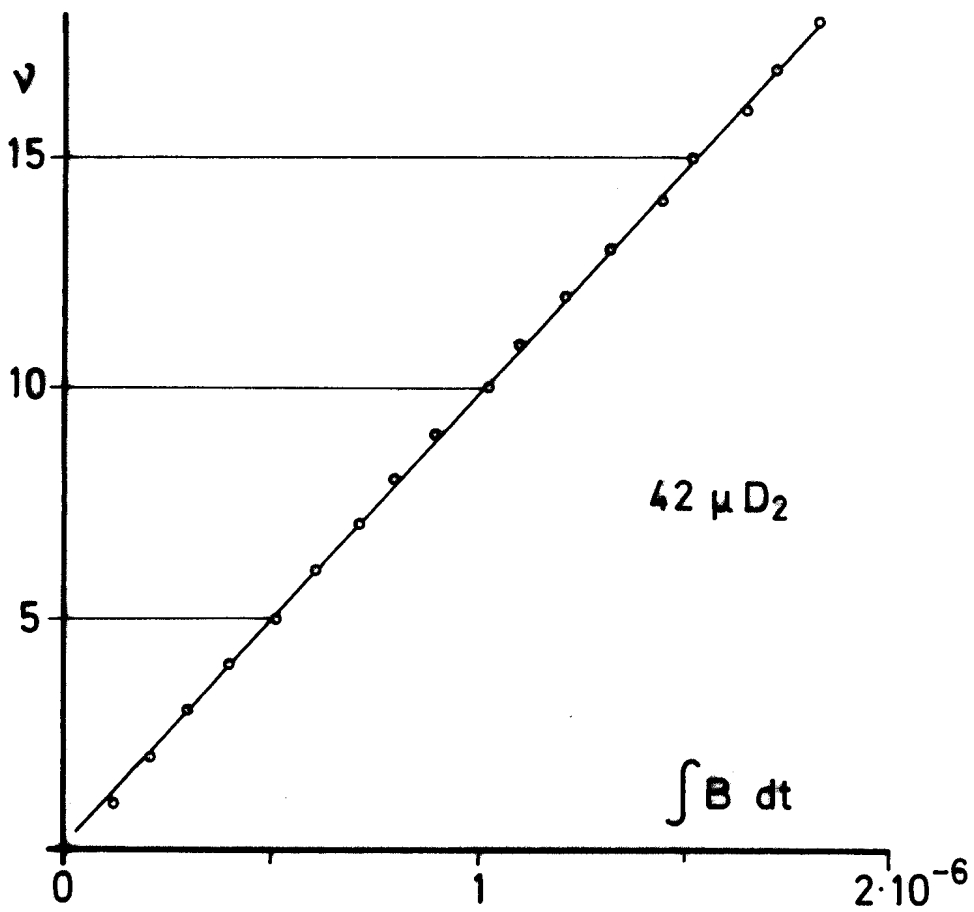


Fig. 5 Phase de l'oscillation radiale

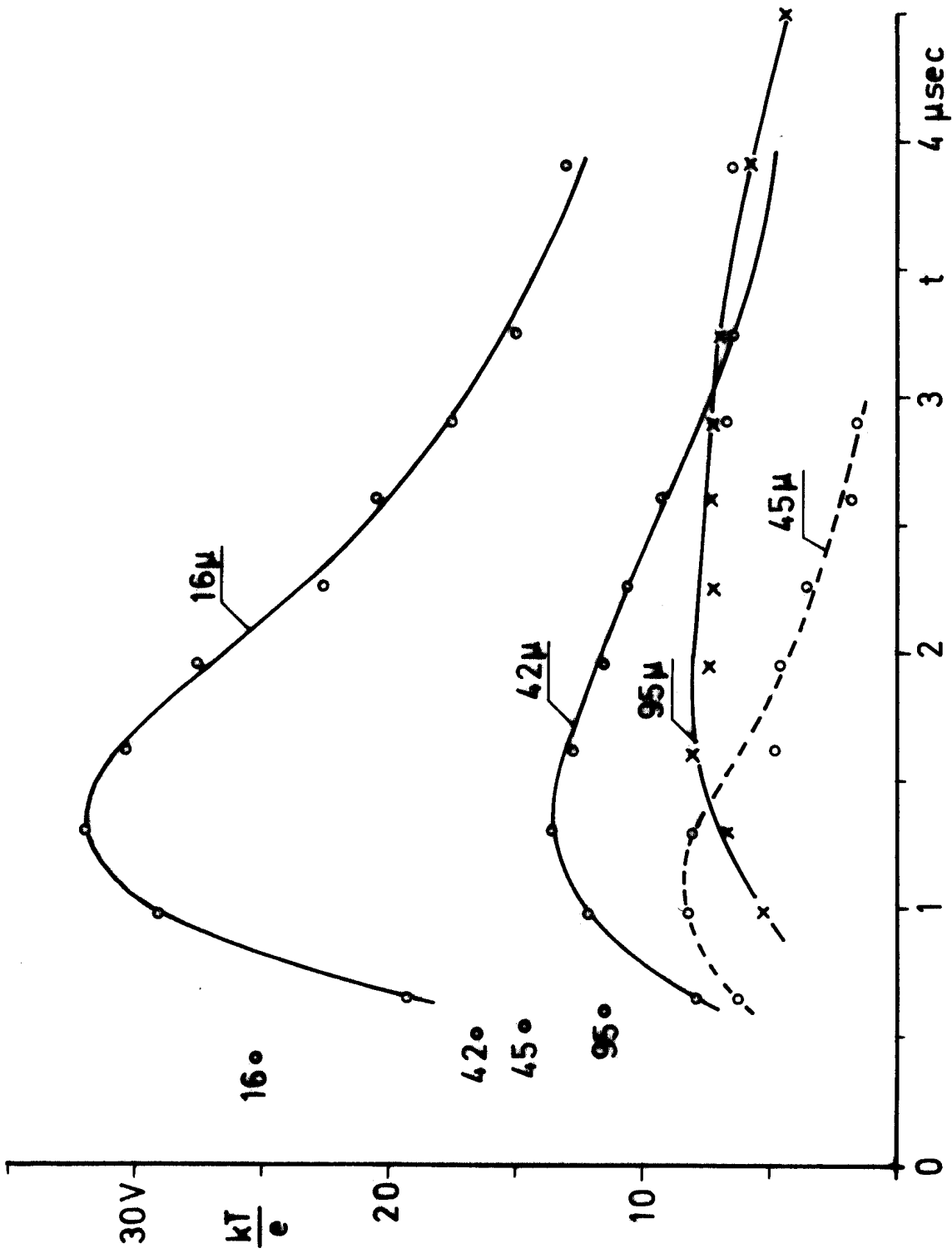


Fig. 6 Evolution de la température  
Préionisation de courte durée: 16,42, 95  $\mu$ . De longue durée: 45  $\mu$



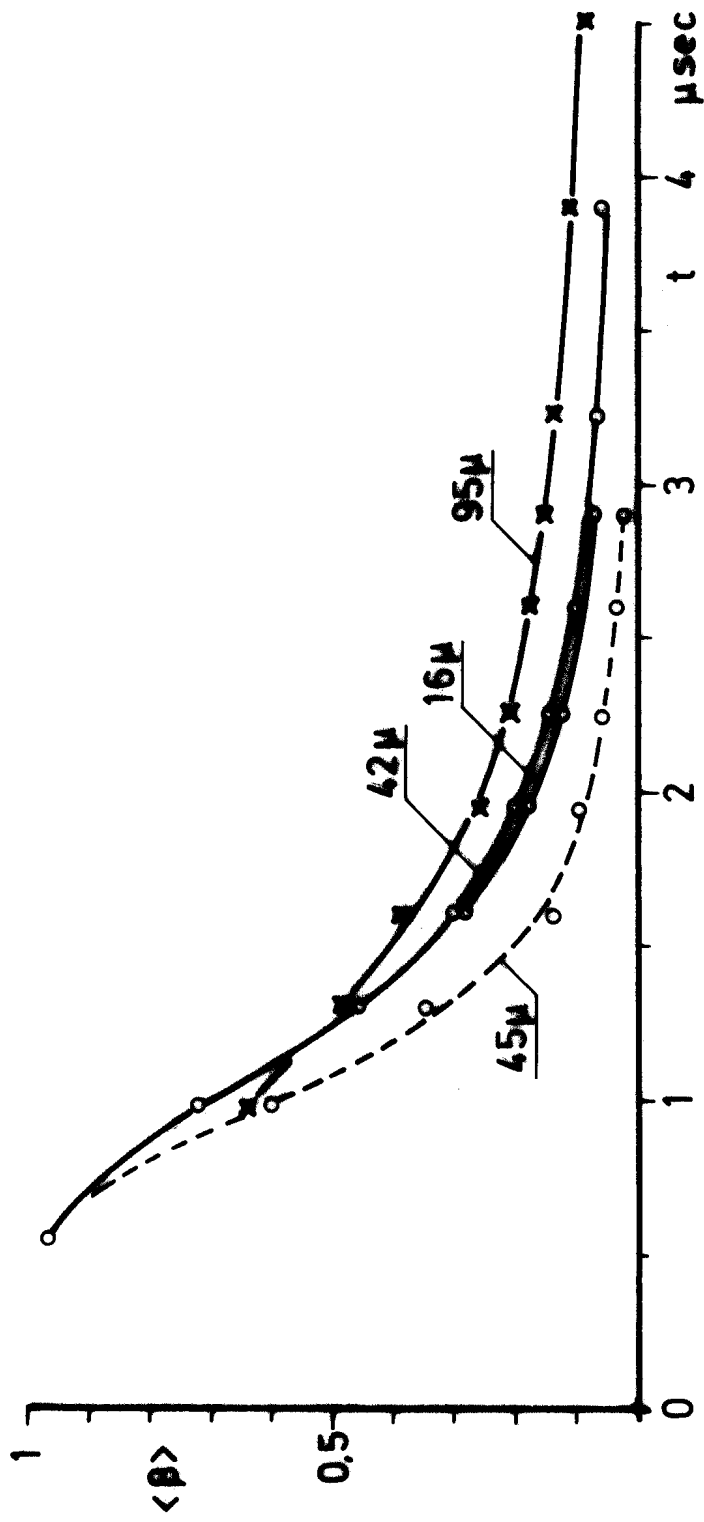


Fig. 7 Evolution du  $\beta$  moyen

Préionisation de courte durée: 16, 42, 95 μ. De longue durée: 45 μ