

Novembre 1973

LRP 73/73

LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN PINCH HELICOIDAL  
STABILISE PAR RETROACTION

R. Keller

Centre de Recherches en Physique des Plasmas

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

Novembre 1973

LRP 73/73

LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN PINCH HELICOIDAL  
STABILISE PAR RETROACTION

R. Keller

A b s t r a c t

We are analyzing the feedback control system which will be used to stabilize the kink mode of a screw pinch. Optical and magnetic detection systems are compared, taking into account the coupling between the probe and the feedback control windings. We find that the impedance of the feedback amplifier may be positive or negative, depending on stability conditions.

Lausanne

## 1. INTRODUCTION

Le présent travail consiste en l'analyse du circuit de rétroaction servant à la stabilisation d'un pinch hélicoïdal rendu instable par un dépassement de la limite de Kruskal-Shafranov. Deux structures magnétiques extérieures, sélectives aux deux degrés de liberté du mode  $m = 1$ , engendrent une force opposée à la déformation de la colonne de plasma. Chaque structure est alimentée par un amplificateur piloté par un signal proportionnel à la déviation du plasma. Lors d'une détection optique, le système réagit à la position du centre de gravité de la source lumineuse. Comme cette position ne coïncide pas nécessairement avec le centre de gravité du courant longitudinal, nous considérons aussi le cas d'une détection magnétique, réalisée au moyen de sondes dipolaires donnant la position du courant. Or, une sonde magnétique est également sensible au champ de la structure extérieure, dont l'effet introduit un couplage qui modifie la dynamique du système d'asservissement dans un sens défavorable. A l'aide d'un blindage approprié, il est possible de réduire le couplage. L'amplificateur peut être considéré du point de vue de son impédance. Lors de la détection optique et lors d'un couplage faible, l'impédance apparaissant aux bornes de l'amplificateur doit être positive. Dans le cas d'un couplage fort, la stabilité est obtenue si l'impédance est négative.

Divers travaux théoriques (1) à (11) et expérimentaux (12) à (14) ont paru récemment au sujet de la stabilisation par rétroaction magnétique.

## 2. RETROACTION PAR DETECTION OPTIQUE

En raison de l'inductivité mutuelle du plasma et des conducteurs extérieurs, le mouvement du plasma induit une force électromotrice. Soit  $\xi$  le déplacement,  $U_{po}$  la tension induite et  $J$  le courant des conducteurs extérieurs (voir figure 1). Le plasma est soumis à une force transversale  $F$  proportionnelle au courant

$$F = \alpha J \quad (1)$$

Le coefficient  $\alpha$  est déterminé par la géométrie et les paramètres du plasma . En vertu du théorème de l'énergie, le travail est égal à l'énergie électrique fournie de l'extérieur:

$$F \xi = - \int J U_{po} dt \quad (2)$$

En éliminant  $F$  et en introduisant le formalisme de Laplace, il vient

$$U_{po} = - s \alpha \xi \quad (3)$$

$s = d/dt$  désigne la variable de Laplace.

Le point de mesure de  $U_{po}$  n'est pas accessible physiquement, mais il convient de définir l'impédance  $Z_{po}$  du plasma vue en ce point

$$Z_{po} = \frac{U_{po}}{-J} = \frac{s \alpha^2 \xi}{F} \quad (4)$$

$F$  et  $\xi$  sont liés par l'équation du mouvement. Les forces entrant en jeu sont: la force d'inertie  $M \ddot{\xi}$ , la force de rappel  $- M \gamma^2 \xi$ , et une force de freinage du type visqueux  $M \cdot 2w \dot{\xi}$ . La grandeur  $w$  est une mesure de l'amortissement dû à la résistivité, la viscosité, et à des effets de mélange de phase.  $\gamma$  exprime le taux de croissance de l'instabilité pour un amortissement supposé absent . L'équation caractéristique du mouvement est

$$F = M (s^2 + 2ws - \gamma^2) \xi \quad (5)$$

En réunissant (4) et (5) nous obtenons la valeur de l'impédance

$$\frac{1}{Z_{po}} = \frac{M}{\alpha^2} \left( s + 2w - \frac{\gamma^2}{s} \right) \quad (6)$$

En termes électriques elle est formée de 3 éléments branchés en parallèle, une capacité, une résistance et une self:

$$\frac{1}{Z_{p0}} = s C_p + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{s L_p} \quad (7)$$

Par identification, il vient

$$C_p = \frac{M}{\alpha^2} \quad \gamma^2 = \frac{1}{-L_p C_p} \quad 2w = \frac{1}{R_p C_p} \quad (8)$$

L'inductivité apparente du plasma est donc négative s'il est instable.

Avant de poursuivre la description de la boucle de rétroaction, formulons la définition de la fonction de transfert du plasma en l'absence de rétroaction. Pour ce faire, déconnectons l'amplificateur au point I-II, sans toutefois interrompre le courant. Ce dernier est supposé provenir d'une source à impédance infinie. La fonction de transfert  $G_0$  se définit par le quotient du déplacement et de la force

$$G_0 = \frac{\xi}{F} \quad (9)$$

Avec (4) et (6), elle s'écrit aussi

$$G_0 = \frac{Z_{p0}}{s \alpha^2} = \frac{1}{M(s^2 + 2ws - \gamma^2)} \quad (10)$$

En l'absence de force et de courant l'équation caractéristique du mouvement (5) devient

$$s^2 + 2ws - \gamma^2 = 0 \quad (11)$$

Dans ce cas,  $G_0$  et  $Z_{p0}$  sont infinis en vertu du (9) et (4). Par conséquent, les pôles de la fonction de transfert sont en même temps les racines de l'équation

caractéristique du mouvement du plasma non perturbé. Nous venons de rappeler un théorème bien connu de la théorie des circuits.

Les racines de (11) sont égales à

$$s_{1,2} = -w \pm \sqrt{w^2 + \gamma^2} \quad (12)$$

$s_1$  représente le taux de croissance véritable de l'instabilité. Il peut être sensiblement plus petit que  $\gamma$  si l'amortissement est important.

L'élément suivant de la boucle de rétroaction est le système de détection optique. Il délivre une tension  $U_d$  proportionnelle à  $\xi$

$$U_d = \beta \xi \quad (13)$$

En choisissant convenablement le taux d'amplification du détecteur optique, nous pouvons nous arranger de telle sorte que  $U_d$  devienne exactement l'intégrale de  $U_{po}$ , à savoir

$$U_d = \frac{U_{po}}{s} \quad (14)$$

Ainsi nous rendons la détection optique équivalente à une détection magnétique. Pour cela, d'après (3) et (13), il faut que

$$\beta = -\alpha \quad (15)$$

Le signal  $U_d$  est ensuite traité par le préamplificateur placé devant l'étage de puissance. Sa fonction de transfert est définie par

$$h = \frac{U_g}{U_d} \quad (16)$$

Finalement la tension  $U_g$  commande le courant anodique  $J$  du tube électronique, dont la résistance interne est supposée infinie. (La caractéristique de pentode peut être obtenue au moyen d'une rétroaction accessoire). Le courant est alors égal à

$$J = S U_g \quad (17)$$

où  $S$  désigne la pente de la triode.

Vu du point II (voir figure 1) l'amplificateur apparaît aussi sous forme d'une impédance

$$Z = \frac{U_{po}}{J} \quad (18)$$

En substituant  $U_{po}$  et  $J$  à l'aide des formules précédentes, nous trouvons sa dépendance envers  $h$

$$Z = \frac{s}{S h} \quad (19)$$

Définissons la fonction de transfert  $H$  du chemin de rétroaction.  $H$  est égal à la variable de sortie  $F$  divisée par la variable d'entrée  $\xi$  de la voie de rétroaction

$$H = \frac{F}{\xi} \quad (20)$$

Après introduction de (1), (3) et (18), il vient

$$H = \frac{-s \alpha^2}{Z} \quad (21)$$

Refermons maintenant la boucle de rétroaction. Comme les deux impédances sont connectées ensemble, leurs valeurs doivent être égales mais de signe contraire, conformément à la loi de Kirchhoff. Ecrivons cette relation comme suit:

$$\frac{1}{Z_{po}} + \frac{1}{Z} = 0 \quad (22)$$

Cette expression n'est rien d'autre que l'équation caractéristique du système non perturbé. En introduisant les valeurs algébriques (7) et (19), elle devient

$$sC_p + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{sL_p} + \frac{Sh}{s} = 0 \quad (23)$$

Le système est stable si h est par exemple égal à une simple constante suffisamment grande. Faisons

$$h = \frac{a}{-L_p S} \quad (24)$$

où a désigne le gain relatif du préamplificateur. Avec ceci et en utilisant (6), l'équation (23) s'écrit

$$s^2 + 2ws + (a-1)r^2 = 0 \quad (25)$$

Il y a stabilité lorsque  $a > 1$ . D'après (19) l'impédance est

$$Z = \frac{-sL_p}{a} \quad (L_p < 0) \quad (26)$$

Il s'agit donc d'une inductance positive. La stabilité est obtenue lorsque l'on connecte une inductance positive susceptible de compenser l'inductance négative du plasma.

Il reste à examiner le comportement du système perturbé par une force extérieure  $F_e$ , en l'occurrence la fonction de transfert G du plasma sous l'effet de la rétroaction. A l'instar de (9) nous définissons

$$G = \frac{\xi}{F_e} \quad (27)$$

La perturbation  $F_e$  (voir figure 1) peut être réalisée par une intervention en un point quelconque de l'amplificateur. Dès lors, l'équation caractéristique du mouvement (9) est modifiée comme suit



$$\frac{\xi}{G_0} = F_e + F \quad (28)$$

Après substitution du membre de droite par (27) et (20) le résultat cherché devient

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} - H \quad \text{ou bien} \quad G = \frac{G_0}{1 - G_0 H} \quad (29)$$

Si nous introduisons encore les impédances données par (10) et (21), la fonction de transfert s'écrit

$$G = \frac{1}{s \alpha^2 \left( \frac{1}{Z_{p0}} + \frac{1}{Z} \right)} \quad (30)$$

Lorsque le système évolue en l'absence de perturbation, G est infini conformément à (27) et (22).

### 3. RETROACTION PAR DETECTION MAGNETIQUE

Le mode  $m = 1$  est détectable au moyen de sondes magnétiques dipolaires (15) et (16). Tant que le plasma n'exécute que la première harmonique  $n = 1$ , une seule sonde placée au centre de la déformation peut suffire. La détection magnétique offre l'avantage de délivrer un signal bien supérieur à celui d'une détection optique. En outre, elle indique la position réelle du centre de gravité du courant axial.

Un désavantage pourtant réside dans le couplage de la sonde aux conducteurs extérieurs, qui rendrait le système difficilement stabilisable, si des mesures spéciales pour diminuer le couplage n'étaient pas prises. Sans blindage approprié des conducteurs dans la région de la sonde, le couplage est toujours très fort, parce que les deux structures sont topologiquement identiques.

En l'absence de couplage le signal intégré de la sonde est égal à  $U_d$ , et nous sommes ramenés au cas précédent de la détection optique. Dans l'autre extrême d'un couplage parfait, la sonde délivre une tension proportionnelle à  $U_a$ . Il reviendrait alors au même de connecter le préamplificateur (intégrateur compris) directement à l'anode du tube, et les conducteurs extérieurs feraient office de sonde.

Le cas d'un couplage intermédiaire peut être représenté par le schéma équivalent à la figure 2. L'entrée du préamplificateur se trouve connectée à une prise médiane de l'inductivité  $L_a$  des conducteurs extérieurs. La fraction  $L_a - \Lambda$  doit être considérée comme faisant partie de l'amplificateur; elle ne joue plus de rôle. L'autre fraction  $\Lambda$  s'ajoute à l'impédance  $Z$  de l'amplificateur. La fonction  $H$  (formule (21)), est donc modifiée comme suit

$$H^* = \frac{-s \alpha^2}{Z + s\Lambda} \quad (31)$$

D'après (29) la fonction de transfert du système modifié par le couplage devient

$$G^* = \frac{1}{s \alpha^2 \left( \frac{1}{Z_{po}} + \frac{1}{Z + s\Lambda} \right)} \quad (32)$$

Le problème consiste à choisir une impédance  $Z$  rendant le système stable, et dont les paramètres du circuit peuvent être réalisés dans des limites raisonnables de tolérance.

#### 4. CHOIX DE L'IMPEDANCE

Dans la fonction de transfert  $G_o$  du plasma, l'instabilité est évidemment causée par la présence du terme  $-\gamma^2$ . Ce fait nous conduit tout naturellement à choisir une fonction

$$G^* = \frac{1}{M(s^2 + 2\mu s)} \quad (33)$$

dans laquelle le terme  $- \gamma^2$  est supprimé. Sa transformée inverse est

$$\xi(t) = \frac{1}{2\mu M} \left( 1 - e^{-2\mu t} \right) \quad (34)$$

lors d'une perturbation impulsionnelle. Il convient donc de choisir un amortissement  $\mu$  aussi grand que possible. Le comportement du système est d'autant plus rigide que  $\mu$  est grand. Il suffit d'identifier (33) avec (32) et d'en tirer  $Z$

$$Z = \frac{1}{2C_p(\mu - w) - \frac{1}{sL_p}} - s\Lambda \quad (35)$$

En faisant tendre  $\mu$  vers l'infini,  $Z$  tend vers  $-s\Lambda$ . Par conséquent, une impédance négative égale à  $-s\Lambda$  rend le système complètement stable et même immobile. Dans ce calcul, le couplage n'intervient pas, le résultat est encore valable pour  $\Lambda = L_a$  (couplage parfait). La stabilité peut donc être obtenue en connectant une impédance négative  $-sL_a$  aux bornes des conducteurs extérieurs. (Si la résistance des conducteurs n'était pas négligeable, il faudrait aussi la compenser et l'impédance devrait être  $Z = -sL_a - R_a$ ).

Il n'est pas possible de réaliser en pratique un amplificateur puissant, dont les paramètres satisfont exactement la condition (35). De toute façon, la non-linéarité pose des limites. En vue de tester la sensibilité au désaccord, nous réintroduisons (35) dans (32) après avoir modifié  $L_p$  et  $\Lambda$ . Le calcul montre que les pôles réapparaissent dans le demi-plan droit lorsque la variation de ces paramètres dépasse une certaine limite qui est d'autant plus restreinte que  $\Lambda$  est grand par rapport à  $L_p$ .

Il se trouve que le quotient  $L_a / -L_p$  contient le taux de compression en facteur. Dans l'exemple du Tokamak (10) (13), ce quotient est voisin de l'unité pour les modes de faible indice. Il est possible de stabiliser le mode auquel le bobinage extérieur est sélectif en y connectant un circuit actif à impédance négative, dont la valeur est approximativement égale à  $-sL_a - R_a$ . Dans le cas du pinch hélicoïdal au contraire, la grande valeur du quotient  $L_a / -L_p$  exclut cette possibilité pour des raisons pratiques.

Avec des paramètres modifiés, l'impédance (35) introduite dans (31) conduit à une fonction de transfert dont le dénominateur est un polynôme du 3e degré. Le problème réside dans la recherche des conditions pour lesquelles les 3 racines restent dans le demi-plan gauche. D'autres formes d'impédances plus simples mènent aussi à un dénominateur du 3e degré, donc au même problème. Ce sont: l'impédance parallèle et l'impédance série. Par l'impédance parallèle ou série, nous entendons une inductivité et une résistance branchées soit en parallèle, soit en série. Le premier cas est plus favorable, nous allons le traiter de manière explicite.

## 5. DIAGRAMME DE STABILITE

La stabilité d'un système servomécanique est généralement assurée par le choix correct de deux grandeurs: l'amplification et l'avance de phase. De façon équivalente, la voie de rétroaction peut être conçue comme étant double, une voie directe amplifiant le signal détecté, et une voie parallèle amplifiant la dérivée du signal. Dans le cas de la détection optique, l'expression (24) représente la voie directe du préamplificateur. Ajoutons une voie de différenciation, c'est-à-dire un terme proportionnel à  $s$ :

$$h = \frac{a}{-L_p S} (1 + sb) \quad (36)$$

En vertu de (19) l'admittance s'écrit

$$\frac{1}{Z} = \frac{a}{-L_p} \left( \frac{1}{s} + b \right) \quad (37)$$

Dès maintenant, il est avantageux d'introduire des grandeurs normalisées. Soit  $\omega_0$  la fréquence angulaire de référence

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\Lambda C_p} \quad (38)$$

et écrivons

$$\left. \begin{array}{l} s = p\omega_0 \quad \tau = \omega_0 t \quad \gamma = b\omega_0 \quad w = v\omega_0 \\ \gamma^2 = \lambda\omega_0^2 \quad x = 1 + \frac{1}{\lambda a} \end{array} \right\} \quad (39)$$

La nouvelle variable de Laplace est relative au temps normalisé  $\tau$ . En vertu de (8) le paramètre  $\lambda$  est égal au quotient des inductivités, dont nous avons fait mention plus haut

$$\lambda = \frac{\Lambda}{-L_p} \quad (40)$$

$\lambda$  exprime l'intensité de l'instabilité. Il admet des valeurs négatives lorsque le plasma est stable en lui-même, c'est-à-dire lorsque le carré du taux de croissance est négatif.

Réécrivons l'admittance

$$\frac{\Lambda}{Z} = \frac{\lambda a}{\omega_0} \left( \frac{1}{P} + \gamma \right) \quad (41)$$

Introduite dans la fonction de transfert (32) cela fait

$$G^* = \frac{\Lambda \left( P \frac{y}{x} + 1 \right)}{x^2 \left[ P^2 + 2\nu P + \frac{1}{x} - \lambda + P \frac{y}{x} \left( P^2 + 2\nu P + 1 - \lambda \right) \right]} \quad (42)$$

Le dénominateur égalé à zéro donne l'équation des pôles

$$\frac{y}{x} P^3 + \left( 2\nu \frac{y}{x} + 1 \right) P^2 + \left[ 2\nu + \frac{y}{x} (1 - \lambda) \right] P + \frac{1}{x} - \lambda = 0 \quad (43)$$

Considérons d'abord le cas sans déphasage  $y = 0$ . Les solutions de (43) sont

$$P_{1,2} = -\nu \pm i \sqrt{\frac{1}{x} - \lambda - \nu^2} \quad (44)$$

Nous obtenons ainsi une première condition de stabilité, valable pour de petits déphasages:  $\frac{1}{x} - \lambda > 0$ , ou bien

-----  
 1ère condition:  $\frac{\lambda a}{\lambda a + 1} > \lambda \quad (45)$

La figure 3 représente cette condition. Les parties hachurées indiquent le domaine stable.

Examinons maintenant l'équation du 3e degré (43) dans le cas  $y/x \ll 1$ . Pour ce faire nous développons les solutions exactes lors de deux racines complexes (formule de Kardan). Nous ne traiterons pas le cas de 3 racines réelles, ni le cas général qui demanderait une analyse de Nyquist. Le résultat du développement est

$$P_{1,2} \cong -\nu + \frac{y}{2x} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \pm i \sqrt{\frac{1}{x} - \lambda - \nu^2} \quad (46)$$

$$P_3 \cong -\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \quad (47)$$

Il en découle deux nouvelles conditions de stabilité:  $\text{Re}(p_1) < 1$  et  $p_3 < 0$ .

$$\text{2e condition: } \gamma \lambda a > -2\nu(\lambda a + 1)^2 \quad (48)$$

$$\text{3e condition: } \left. \begin{array}{l} \lambda a + 1 > (\gamma \lambda a)^{2/3} \\ \lambda a + 1 < (\gamma \lambda a)^{2/3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } \gamma \lambda a > 0 \\ \text{pour } \gamma \lambda a < 0 \end{array} \quad (49)$$

Ces dernières conditions sont rassemblées dans un seul et même graphique, figure 4. Les parties hachurées indiquent le domaine stable.

Les 3 conditions doivent être remplies simultanément. D'après les diagrammes de stabilité, nous apprenons ce qui suit:

Lorsque  $\lambda$  est situé entre 0 et 1 (faible couplage), il existe un grand domaine stable. Le choix du point de fonctionnement n'est pas critique. La part inductive ainsi que la part ohmique de l'impédance doivent être positives.

Lorsque  $\lambda$  est supérieur à l'unité (grand couplage) le seul domaine possible se situe dans la région  $\lambda a < -1$ . Les deux parts de l'impédance doivent être négatives. Nous constatons en outre que le domaine stable n'existe que grâce à la présence d'un amortissement propre au plasma ( $\nu > 0$ ). Si ce dernier est faible, le choix du point de fonctionnement devient très critique.

Lorsque  $\lambda$  est négatif (plasma stable en lui-même) et que les deux parts de l'impédance sont positives, le système est stable, ce qui est évident.

## 6. APPLICATION AU PINCH HELICOIDAL

Nous allons établir la fonction de réponse et calculer la puissance nécessaire à la stabilisation d'un pinch hélicoïdal.

Admettons un couplage relativement faible:  $\lambda = 0,2$ . Pour fixer les idées, choisissons un amortissement de l'ordre du tiers du taux de croissance:  $w^2 = 0,1 \gamma^2$ , ou bien d'après (39)  $\underline{v = 0,141}$ .

La lère condition fixe la limite de zone vers  $\lambda a = 0,25$ , mais nous choisissons avec précaution  $\lambda a = 0,5$ , d'où  $x = 3$ , ce qui place le couplage maximum permis vers 0,33.

Pour l'avance de phase nous adoptons la valeur de  $\underline{y = 0,2}$ . Le point de fonctionnement est indiqué par une croix dans la figure 4. Avec ces données, les solutions exactes de (43) sont

$$\left. \begin{array}{lll} P_1 = s_1 + i s_2 & P_2 = s_1 - i s_2 & P_3 = -14,955 \\ s_1 = -0,1637 & s_2 = 0,3270 & \end{array} \right\} \quad (50)$$

La fonction de transfert (42) peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{x^2}{\Lambda} G^* = \frac{1}{(p-s_1)^2 + s_2^2} + \frac{P_3 + \frac{x}{y}}{(p-P_3) \left[ (p-s_1)^2 + s_2^2 \right]} \quad (51)$$

Si nous introduisons les valeurs numériques nous voyons que le dernier terme est négligeable. Le terme restant s'écrit

$$\xi(p) = \frac{\Lambda}{x^2} \cdot \frac{F(p)}{(p-s_1)^2 + s_2^2} \quad (52)$$



Le courant est donné par  $J = U_{po} / Z_{po}$ . Avec (3) et (6), il vient

$$J(p) = - \frac{\alpha}{\Lambda} (p^2 + 2\nu p - \lambda) \xi(p) \quad (53)$$

La tension anodique est égale à  $-s \alpha \xi - s L_a J$ , c'est-à-dire

$$U_a(p) = \omega_0 \alpha p \left[ -1 + \frac{L_a}{\Lambda} (p^2 + 2\nu p - \lambda) \right] \xi(p) \quad (54)$$

Il se trouve que  $L_a$  est beaucoup plus grand que  $\Lambda$  dans le cas présent. Il est donc légitime d'écrire

$$U_a(p) \cong \frac{\alpha \omega_0 L_a}{\Lambda} (p^3 + 2\nu p^2 - \lambda p) \xi(p) \quad (54b)$$

Nous devons maintenant tester une forme particulière de la perturbation. Par exemple, une force impulsionnelle  $F(p) = 1$  provoque le mouvement suivant (transformée inverse de (52)):

$$\xi(\tau) = \frac{\Lambda}{\alpha^2 s_2} e^{s_1 \tau} \sin s_2 \tau \quad (55)$$

Selon (53) le courant contient des termes proportionnels à la 1ère et à la 2e dérivée de  $\xi(\tau)$ . La valeur initiale du courant n'est donc pas nulle. Or, l'inductivité  $L_a$  interdit tout saut de courant. Une force impulsionnelle n'est donc pas admissible. La fonction unité  $F(p) = \frac{1}{p}$  n'est pas admissible non plus parce que le terme en  $p^3$  de (54b) divergerait encore. Mais il est possible de former une combinaison linéaire des deux types de perturbations telle que le courant initial soit nul. Faisons  $F(p) = 1 + c/p$ , c'est-à-dire  $F(t)$  égal à une fonction  $\delta$  plus une fonction en marche d'escalier, puis annulons le terme responsable de l'amplitude initiale. Ceci fait, nous trouvons

$$c = -2(s_1 + v) \quad (56)$$

L'amplitude du plasma en coordonnée de Laplace est alors

$$\xi(p) = \frac{\wedge \left[ 1 - 2(s_1 + v)/p \right]}{\varkappa^2 \left[ (p - s_1)^2 + s_2^2 \right]} \quad (57)$$

En coordonnée temps la forme explicite est

$$\xi(\tau) = \frac{\wedge}{\varkappa^2 s_2} \left[ e^{s_1 \tau} \sin s_2 \tau - 2(s_1 + v) \int_0^\tau e^{s_1 \tau} \sin s_2 \tau d\tau \right] \quad (58)$$

Le courant et la tension s'obtiennent à partir de (53) et (54b) en utilisant (57).

Les considérations ci-dessus montrent que le système est sujet à des transitoires violentes. En pratique, il est nécessaire de filtrer dans une certaine mesure la tension anodique, ce qui, en fait, est réalisé automatiquement en raison de la capacité anodique. Mais il est encore plus important d'amortir l'overshoot causé par ladite capacité. Il s'en suit un retard de phase inévitable qui doit être compensé par le terme d'avance de phase introduit précédemment.

Les paramètres du pinch hélicoïdal que nous nous proposons de stabiliser sont les suivants:

longueur	$l = 1,4 \text{ m}$
rayon intérieur du blindage de la bobine $\theta$	$r_3 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
rayon du tube de verre	$r_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
rayon moyen de la colonne de plasma	$r_0 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
rayon des conducteurs extérieurs	$r_2 = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$\beta$ moyen	$\beta = 0,1$
nombre de spires	$\nu = 50$
champ magnétique axial	$B_z = 1,5 \text{ Vsec m}^{-2}$
dépassement de la limite de Kruskal	$N = 2$

La densité de spires des conducteurs extérieurs varie sinusoïdalement avec l'azimut (mode  $m = 1$ ) ainsi qu'avec l'axe  $z$  (harmonique  $n = 1$ ). Si  $\nu$  est le nombre de spires à l'endroit du plan médian, le courant de surface équivaut à

$$j = \frac{\nu J}{2 r_2} \cos(\theta - N\pi z/l) \cdot \cos \pi z/l \quad (60)$$

$N$  désigne l'hélicité du bobinage; elle doit être adaptée à l'hélicité du mode. Nous nous plaçons au double de la limite de Kruskal-Shafranov, à savoir  $N=2$ (9). Les valeurs qui suivent sont ramenées à une spire. Nous ferons la transformation pour 50 spires après coup.

L'inductivité de la structure est

$$L_a \approx \frac{\pi}{16} \mu_0 l \left(1 - \frac{r_0^2}{r_2^2}\right) \left(1 - \frac{r_2^2}{r_3^2}\right) = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ Vsec A}^{-1} \quad (61)$$

La constante  $\alpha$  a été calculée dans (9), formule (67) et (35):

$$\alpha = \frac{\pi^2}{2 r_2} r_0^2 B_z N (1-\beta) \left(1 - \frac{r_2^2}{r_3^2}\right) = 1,52 \cdot 10^{-2} \text{ Vsec m}^{-1} \quad (62)$$

La relation de dispersion d'un pinch fixé aux extrémités est donnée par les formules (58) et (37) de la même référence

$$\gamma^2 = \left( \frac{\pi v_A}{l} \right)^2 (2 - \beta) (N^2 - 1) = 0,83 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-2} \quad (63)$$

$v_A$  désigne la vitesse d'Alfvén

$$v_A^2 = \frac{B_z^2}{\mu_0 \rho} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \quad (64)$$

La densité  $\rho$  du plasma est de  $6,25 \cdot 10^{-5} \text{ Kg m}^{-3}$  pour une pression de remplissage de deutérium que nous fixons à 40 mtorr. La capacité apparente du plasma est

$$C_P = \frac{M}{\alpha^2} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ A sec V}^{-1} \quad (65)$$

La self apparente devient

$$-L_P = \frac{1}{\gamma^2 C_P} = 10^{-8} \text{ Vsec A}^{-1} \quad (66)$$

Avec  $\lambda = 0,2$  l'inductivité  $\Lambda$  est

$$\Lambda = 0,2 \cdot 10^{-8} \text{ Vsec A}^{-1} \quad (67)$$

Enfin la fréquence de référence est

$$\omega_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} = 2,04 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1} \quad (68)$$

Nous sommes à même de calculer le courant et la tension relatifs à une spire, d'après (53) et (54b). Pour 50 spires, le vrai courant est 50 fois plus petit et la tension 50 fois plus élevée. Ces dernières grandeurs, ainsi que l'amplitude du plasma sont reportées dans la figure 5. Les grandeurs équivalentes du

circuit sont

$$\begin{aligned}L_a' &= 2500 L_a = 312 \mu\text{H} \\ \Lambda' &= 2500 \Lambda = 5 \mu\text{H} \\ C_p' &= C_p / 2500 = 48 \text{ nF}\end{aligned}$$

La constante  $\alpha$  est à multiplier par le nombre de spires

$$\alpha' = 50 \alpha = 0,76 \text{ Vsec m}^{-1}$$

## 7. CONCLUSION

Le résultat de ce travail permet de dimensionner les amplificateurs de puissance destinés à stabiliser un pinch hélicoïdal au-dessus de la limite de Kruskal-Shafranov. Deux amplificateurs sont nécessaires pour stabiliser les deux degrés de liberté d'un mode. Dans la figure 5 nous indiquons en pointillé le saut de tension initial arrondi par l'effet de la capacité anodique. En pratique, l'amplificateur ne peut pas être enclenché instantanément, au contraire, les valeurs de régime sont atteintes progressivement. De ce fait, la première crête de tension n'atteindra pas la hauteur de la seconde. Les valeurs extrêmes sont :  
( $U_a$ ) max = 15,9 kV et ( $J$ ) max = 139 A. La puissance nominale de l'amplificateur est déterminée par le produit de ces dernières grandeurs, soit 2,2 MW. L'amplitude maximale du plasma est de 3 mm dans l'exemple considéré. La puissance nominale est donc de 0,25 MW par mm<sup>2</sup>. Tous les paramètres dépendent du taux de croissance de l'instabilité, calculé à partir de l'approximation de la MHD pour un plasma de profil rectangulaire. On sait que les taux de croissance lors d'un profil diffus sont beaucoup plus faibles. La puissance nécessaire à la stabilisation sera certainement bien inférieure à la valeur que nous venons d'obtenir.

REFERENCES

- 1) J.R. Melcher. Feedback stabilization of hydromagnetic continua: review and prospects. Feedback and Dynamic Control of Plasmas, AIP Conf. Proc. Princeton p. 38 (1970)
- 2) J.F. Clarke and R.A. Dory. Feedback control of Kruskal-Shafranov modes. AIP Conf. Proc. Princeton p. 68 (1970)
- 3) H.P. Furth and P.H. Rutherford. Feedback control problems in Tokamaks. AIP Conf. Proc. Princeton p. 74 (1970)
- 4) F.L. Ribe. Feedback stabilization of a high- $\beta$ , sharp bounded plasma column with helical fields. AIP Conf. Proc. Princeton p. 80 (1970)
- 5) F.L. Ribe and M.N. Rosenbluth. Feedback stabilization of a high- $\beta$ , sharp-bounded plasma column with helical fields. Physics of Fluids 13, 2572 (1970)
- 6) P.K.C. Wang. Feedback stabilization of highly conducting plasmas. Phys. Rev. Letters 24, 362 (1970)
- 7) P.L. Mondino. The analysis and design of a simple quadratic feedback system for controlling a MHD instability. UPe - 70/07 (1970), Univ. Padova
- 8) K.I. Thomassen. Feedback stabilization in plasmas. Nuclear Fusion 11, 175 (1971)
- 9) R. Keller. Le mécanisme du pinch hélicoïdal stabilisé par rétroaction LRP 58/72 (1972) Lausanne
- 10) Yu.P. Ladikov and Yu. I. Samoilenko. Magnetic feedback stabilization in a Tokamak. Soviet Phys.-Techn. Phys. 17, 1644 (1973)

REFERENCES (suite)

- 11) R.S. Lowder, K.I. Thomassen. Model of kink modes and their feedback stabilization. Phys. Fluids 16, 1497 (1973)
- 12) R.F. Gribble, S.C. Burnett, C.R. Harder. Feedback stabilization on an  $l = 1$  theta-pinch plasma column. Proc. 2d. Topical Conf. on Pulsed High-Beta Plasmas, Garching IPP 1/127 (1972)
- 13) L.I. Artemenkov, P.I. Koslov, P.I. Melikhov, V.S. Srishev. Experiments on the T0-1 Tokamak having an automatic system for controlling the equilibrium. 6th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics Moscow, p. 153 (1973)
- 14) J. Junker, A.A. Newton and H.A.B. Bodin. Study of magnetic forces for feedback stabilization of high beta plasma. 4th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Rome p. 155 (1970)
- 15) R.J.J. van Heijningen, D.J. Maris, C. Bobeldijk and P.C.T. van der Laan. Coil systems for measuring rotational asymmetries in the self-magnetic field of a discharge. Plasma Physics 14, 205 (1972)
- 16) R.E. King, D.C. Robinson and A.J.L. Verhage. The application of Fourier analysis of the azimuthal field distribution to a study of equilibria and instabilities in a toroidal pinch discharge. CLM-P 302 (1972) Culham. J. Phys. D: Appl. Phys. 5, 2015 (1972).

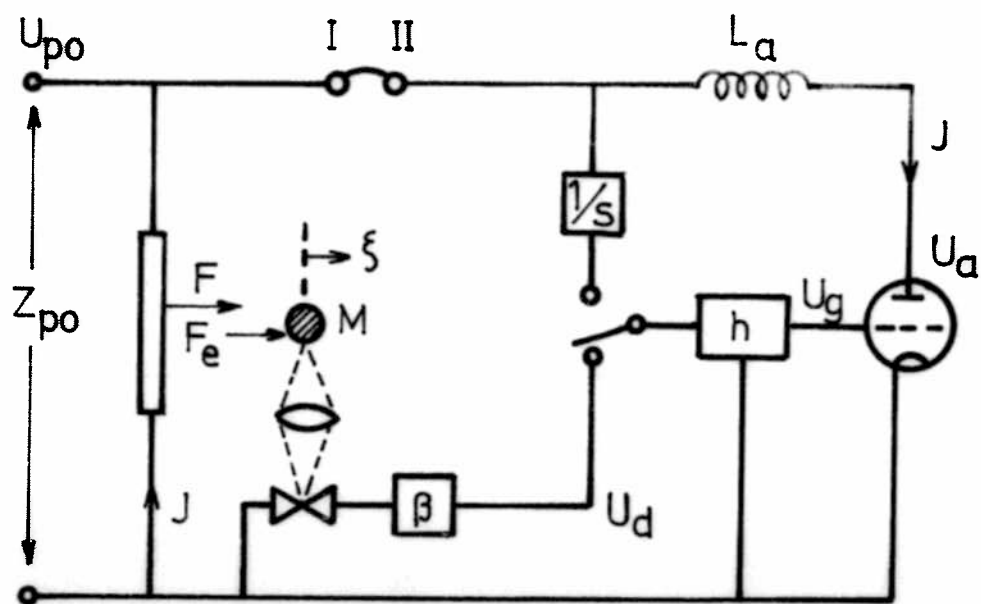


Fig. 1 Schéma de la boucle de rétroaction avec détection optique

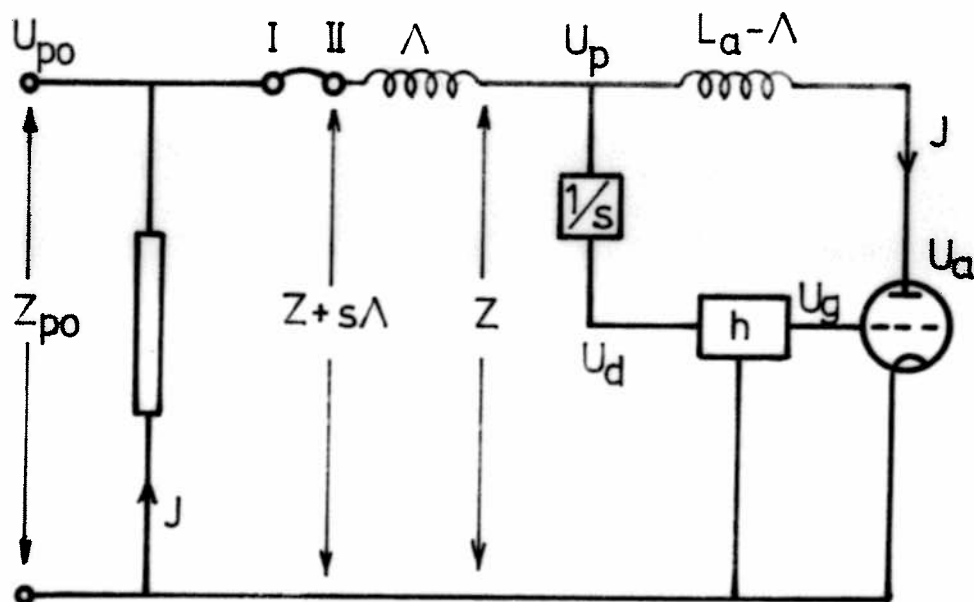


Fig. 2 Schéma de la boucle de rétroaction avec détection magnétique



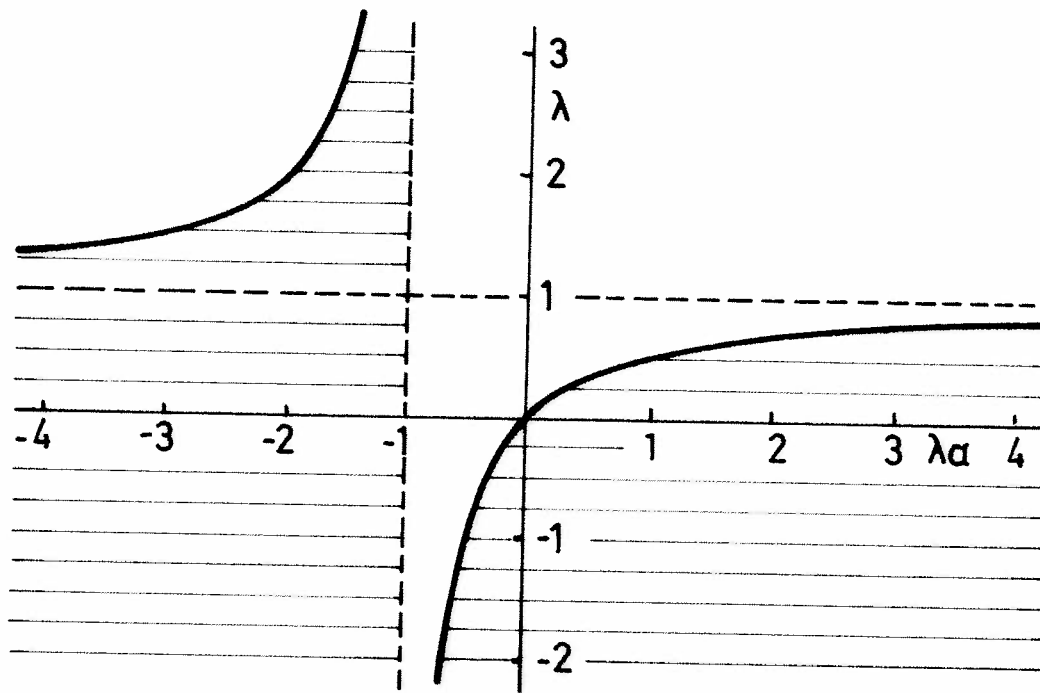


Fig. 3      Domaine de stabilité défini par le couplage

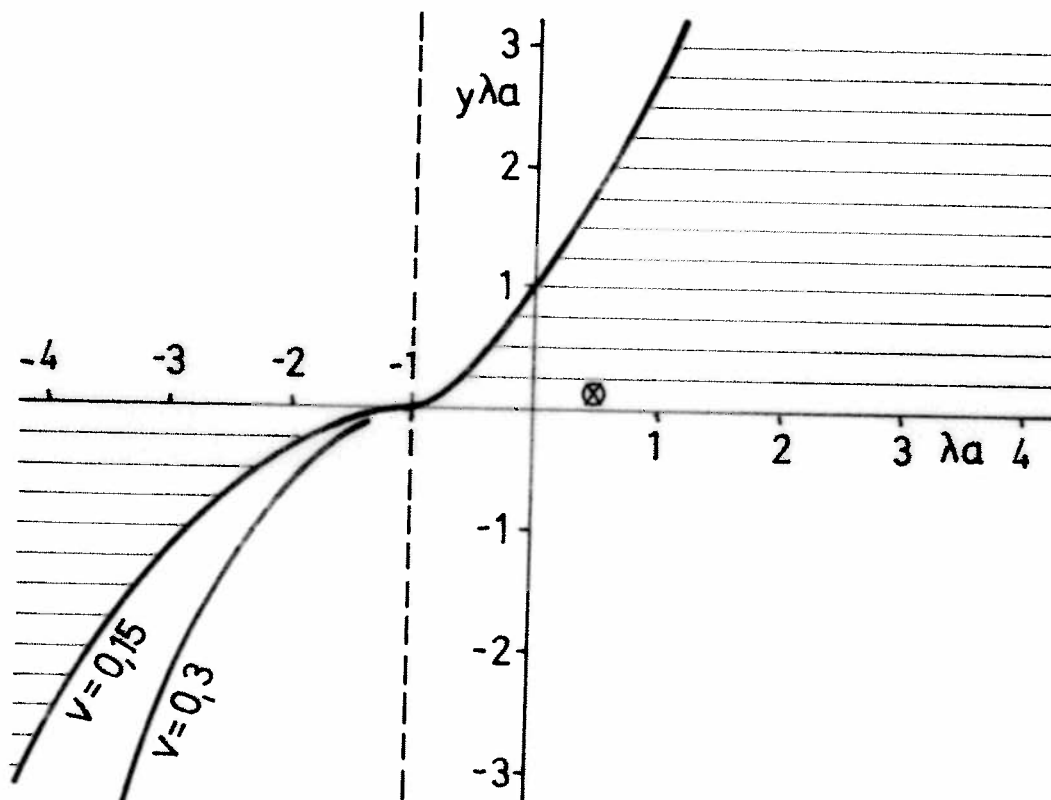


Fig. 4      Domaine de stabilité pour l'admittance

En abscisse:    partie inductive  
 En ordonnée:    partie résistive

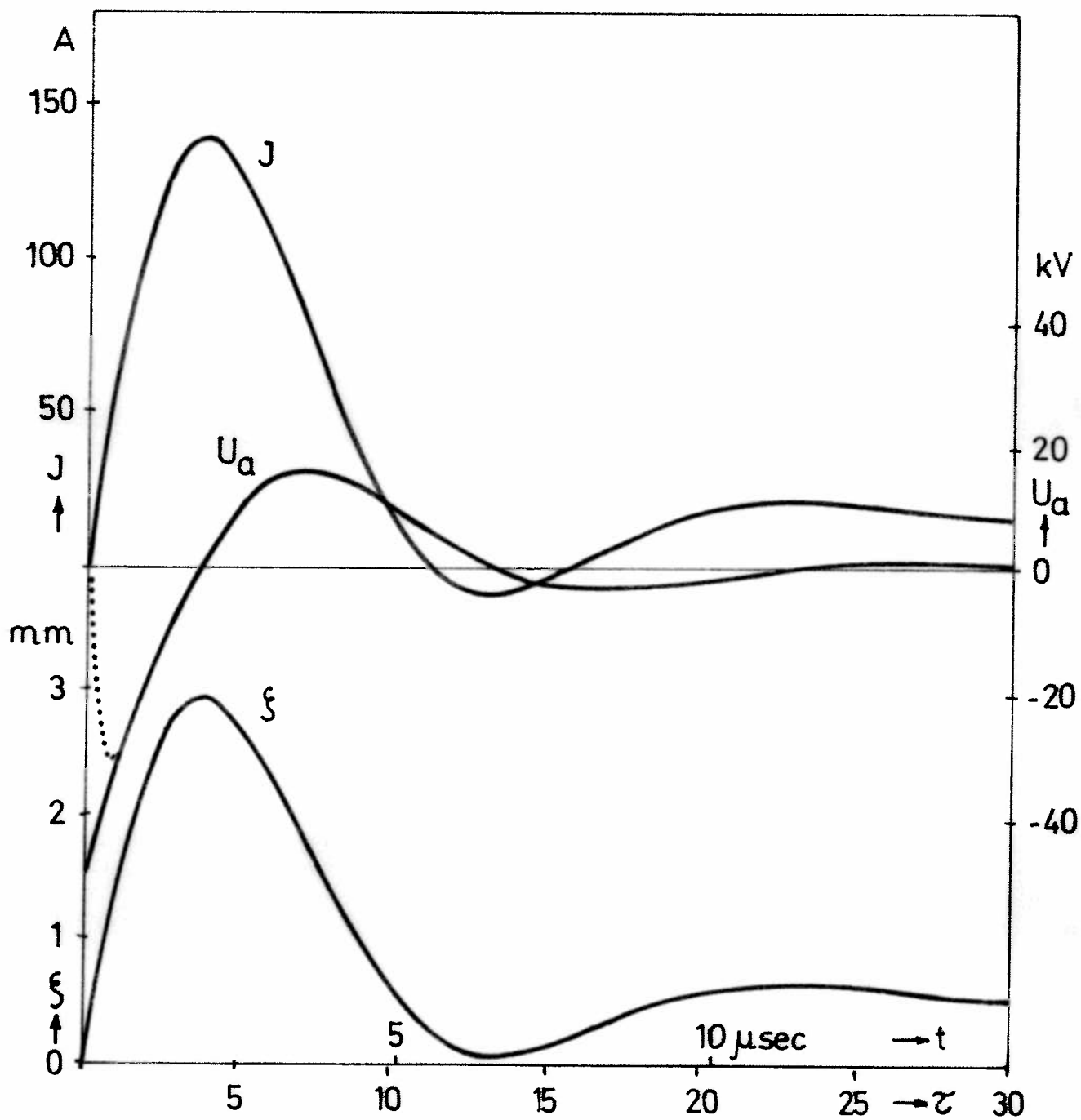


Fig. 5

Courbes de réponse en régime stable