

November 1973

LRP 72/73

STRUKTUR DER GRENZSCHICHT ZWISCHEN EINEM
FELDFREIEN PLASMA UND EINEM MAGNETFELD
IM VAKUUM

von

R. Gruber, E.S. Weibel

C R P P

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

November 1973

LRP 72/73

STRUKTUR DER GRENZSCHICHT ZWISCHEN EINEM
FELDFREIEN PLASMA UND EINEM MAGNETFELD
IM VAKUUM

von

R. Gruber, E.S. Weibel

A b s t r a c t

Self consistent solution of Vlasov's equations describing a plane boundary layer without shear are given. The currents within the layer are due to free and trapped electrons. The ion current is neglected since $m_e \ll m_i$. The free electrons and the ions are assumed Maxwellian at infinity. For the trapped electrons a one parameter family of distribution functions is assumed. Field and density profiles are computed for $E(x)$, $B(x)$, $n_e(x)$, $n_i(x)$ and $j(x)$ for different numbers of trapped electrons. Numerical solutions are obtained by applying the finite difference method to a variational formulation of the problem.

Lausanne

I. Einleitung

Die Struktur einer Grenzschicht, die ein feldfreies Plasma von einem Magnetfeld im Vakuum abtrennt, wurde schon früher untersucht [1 - 11]. Die neuste Arbeit [5] benützt gewisse singuläre Verteilungsfunktionen, die die Existenz von Lösungen ohne gefangene Teilchen erlauben. Nimmt man Maxwellverteilungen im Unendlichen an, existieren Lösungen ohne gefangene Teilchen dann, wenn wir annehmen, dass $m_i = m_e$ [5, 6, 7]. Laval und Pellat [8] zeigten zuerst, dass für $m_i \neq m_e$ und bei der Annahme von Maxwellverteilungen im Unendlichen die Verteilungsfunktion an der Grenze der freien zu den gefangenen Teilchen stetig sein muss. Paskevici et al [11] zeigten später, dass ohne gefangene Teilchen keine Grenzschicht existieren kann. Morse [9] gab eine Lösung des Problems: Ausgehend von einem Plasmaeinschluss durch eine Wand, schaltet er adiabatisch ein B-Feld ein. In diesem Prozess werden bedeutend mehr Teilchen gefangen als für die Existenz einer Grenzschicht nötig sind.

In dieser Arbeit nehmen wir an, dass $m_i \gg m_e$. Bei $x = \infty$ wählen wir Maxwellverteilungen. Eine einparametrische Familie von Verteilungsfunktionen der gefangenen Elektronen erlaubt uns die Struktur der Grenzschicht als Funktion der Anzahl gefangener Elektronen zu untersuchen.

Die numerische Bestimmung der Profile der Grenzschicht stellt Probleme wegen den zwei auftretenden sehr verschiedenen Längeneinheiten, der Debyelänge $\delta = \sqrt{T/en(\infty)}$ und dem Elektronenlarmorradius $R = \sqrt{m_e T/eB(-\infty)}$. Die Poissongleichung für das skalare Potential ist numerisch instabil nach einer Distanz von der Grössenordnung $\delta \ll R$, sodass wir die Profile der Grenzschicht nicht mittels einer direkten Vorwärtsintegration erhalten können. Dies ist auch der Grund weshalb bis jetzt noch keine befriedigenden Profile veröffentlicht wurden, bei denen die Ladungstrennung berücksichtigt wurde. Einige Autoren umschifften dieses Problem, indem sie Ladungsneutralität annahmen: $n_e = n_i$. Dies ist aber nur solange wahr, als die Debyelänge $\delta(x)$ viel kleiner als der lokale Elektronenlarmorradius ist. Nähern wir uns der Vakuumsseite der Grenzschicht gilt die Ladungsneutralität nicht mehr. Sie gibt dort ein falsches asymptotisches Verhalten der Profile [10]. Da ja die Ionen der Grenzschicht hauptsächlich durch das elektrostatische Feld

gehalten werden, wird die Ladungstrennung in der Vakuumsseite der Grenzschicht gross. Die numerische Berechnung der Profile gelang uns nur durch die Anwendung der Methode der finiten Elemente.

II. Physikalisches Modell

1. Anordnung

Wir betrachten ein eindimensionales, stationäres, stossfreies, in positiver x-Richtung unendlich ausgedehntes Plasma im Gleichgewicht (Fig. 1). Alle physikalischen Grössen variieren nur in x-Richtung, sind homogen in y und z. Das Magnetfeld $B(x)$ hat nur eine z-Komponente. Die Ströme $j(x)$ und das Vektorpotential $A(x)$ zeigen in y-Richtung und das elektrische Feld $E(x)$ ist parallel zur x-Achse, also

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \{0, 0, B(x)\} & \vec{E} &= \{E(x), 0, 0\} \\ \vec{A} &= \{0, A(x), 0\} & \vec{j} &= \{0, j(x), 0\}\end{aligned}$$

2. Maxwellgleichungen

Das Vektorpotential und das skalare Potential $\phi(x)$ werden durch die Maxwellgleichungen

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{dB}{dx} = -j = -(j_e + j_i) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{dE}{dx} = -\rho = -(\rho_e + \rho_i) \quad (2)$$

beschrieben. Dabei wählten wir ein natürliches Masssystem, in dem die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ wird.

3. Randbedingungen

Als Randbedingungen wählten wir im Plasma auf Null abfallende Felder und Potentiale,

$$A(\infty) = B(\infty) = \phi(\infty) = E(\infty) = 0 \quad (3)$$

Auf der Vakuumsseite werden wegen der verschwindenden Ladungen und Ströme das B-Feld und das E-Feld konstant. Für eine neutrale Grenzschicht wird zusätzlich noch $E(-\infty) = 0$.

4. Verteilungsfunktion

Die stossfreie Boltzmann-Gleichung

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

wird durch jede Verteilungsfunktion f erfüllt, die nur Funktion von Bewegungskonstanten ist.

5. Konstanten der Bewegung

Die Konstanten der Bewegung sind die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + (p_y - qA)^2 + p_z^2 \right] + q\phi = \text{konstant} \quad (5)$$

das y - und das z -Moment

$$\begin{aligned} p_y &= m v_y + qA &= \text{konstant} \\ p_z &= m v_z &= \text{konstant} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Verteilungsfunktion kann in beliebiger Weise von p_z abhängen und ist unabhängig von z . Man kann deshalb die beiden Variablen z und p_z ignorieren.

In (5) und (6) bedeuten m und q die Masse und die Ladung der verschiedenen Teilchensorten.

6. Lösung der Vlasovgleichung

Jede Verteilungsfunktion $f(H, p_y)$ die nur von den beiden Konstanten der Bewegung (5) und (6) abhängt, erfüllt die Vlasovgleichung (4). Diese völlige Freiheit in der Wahl von $f(H, p_y)$ schränken wir durch das Einführen einer beliebig kleinen Anzahl Stöße ein. Dadurch wird $f(H, p_y)$ im Gebiet des feldfreien Plasmas eine Maxwellverteilung.

7. Gefangene Teilchen

Laval und Pellat zeigten in [8], dass man bei der Wahl einer Maxwellverteilung im Gebiet des homogenen Plasmas zur Beschreibung der Grenzschicht gefangene Teilchen einführen muss. Ein Teilchen definieren wir als gefangen, wenn es den Ort $x = \infty$ nicht erreichen kann. Drückt man in (5) p_x durch die Hamiltonfunktion aus

$$p_x = \sqrt{2m(H - q\phi(x)) - (p_y - qA(x))^2} \quad (7)$$

sieht man, dass bei $x = \infty$, wo nach (3) $\phi(\infty) = A(\infty) = 0$, p_x für $2mH < p_y^2$ imaginär wird. Alle Teilchen, deren Konstanten der Bewegung diese Eigenschaft aufweisen, bezeichnet man als gefangen. Die Grenze zwischen gefangenen und freien Teilchen im (H, p_y) Raum ist durch die Parabel $P(\infty) = 2mH - p_y^2 = 0$ (Fig. 2) gegeben. Die dazu verschobene Parabel $P(x) = 2m(H - q\phi(x)) - (p_y - qA(x))^2 = 0$ trennt alle Teilchen, die den Ort x erreichen von denjenigen, die nie bei x beobachtet werden können. Die Variation von x spannt uns durch die entsprechenden $P(x) = 0$ das gesamte Gebiet der gefangenen Teilchen auf.

In Fig. 3 stellen wir die verschiedenen Bahnkurven gefangener und freier Elektronen dar. Bei den freien Teilchen zeigen wir die Bahnen für $v_y > 0$ und $v_y < 0$.

8. Physikalisches Modell

Wir betrachten den Fall $m_i \gg m_e$, die Ionen erleiden keinen Einfluss des Magnetfeldes, sind also alle frei. Sie werden nur durch das Ladungstrennungsfeld $E(\mathbf{x})$ gehalten. Die Elektronen ihrerseits können durch das B-Feld gefangen werden. Die Dicke der Grenzschicht wird durch den Elektronenlarmorradius definiert.

Als Verteilungsfunktion wählen wir

$$\begin{aligned}
 f_i(H_i, p_y) &= \frac{n_0}{\pi m_i T_i} e^{-\frac{H_i}{T_i}} \\
 f_e^F(H_e, p_y) &= \frac{n_0}{\pi m_e T_e} e^{-\frac{H_e}{T_e}} \\
 f_e^T(H_e, p_y) &= \frac{n_0}{\pi m_e T_e} e^{-\frac{p_y^2}{2m_e T_e} + \frac{1}{r} \left(\frac{H_e}{T_e} - \frac{p_y^2}{2m_e T_e} \right)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei messen wir die Temperatur in Energieeinheiten, Boltzmann's $k = 1$. H und p_y der beiden Teilchensorten sind in (5) und (6) definiert. Der Index F ist gesetzt für freie Elektronen, der Index T für gefangene. n_0 bedeutet die mittlere Ionendichte im homogenen Plasma.

Die Verteilungsfunktion der gefangenen Teilchen wurde so gewählt, dass der Übergang von freien zu gefangenen Elektronen im Phasenraum stetig ist (Fig. 2). Wäre dies nicht der Fall, würde eine beliebig kleine Anzahl Stöße die Stetigkeit wieder herbeiführen.

Der Parameter r in f_e^T steuert die Anzahl gefangener Teilchen. $r = 0$ bedeutet, dass keine gefangenen Teilchen vorhanden sind, bei $r = \infty$ sind alle Elektronen gefangen. Dieser Parameter ist in Wirklichkeit durch den in unserem Modell vernachlässigten Kollisionsterm der Vlasovgleichung bestimmt. Die Aufgabe, die wir uns stellen ist, mit Hilfe des kollisionsfreien Modells die zur Beschreibung

der Grenzschicht minimal notwendige Anzahl gefangener Elektronen zu bestimmen.

III. Mathematische Beschreibung

1. Definition des mathematischen Problems

Das Modell wird von den Maxwellgleichungen (1) und (2), den Anfangsbedingungen (3) und der Lösung (8) der Vlasovgleichung (4) beschrieben. Die Ströme j_k , Ladungen ρ_k und die kinetischen Gasdrücke π_k der drei verschiedenen Teilchensorten können mittels $f(H_k, p_y)$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} j_k &= \frac{q}{m} \int_0^{\infty} dp_x \int_{\gamma} (p_y - qA) f_k(H_k, p_y) dp_y \\ \rho_k &= q \int_0^{\infty} dp_x \int_{\gamma} f_k(H_k, p_y) dp_y \\ \pi_k &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} p_x^2 dp_x \int_{\gamma} f_k(H_k, p_y) dp_y \end{aligned} \tag{9}$$

Das Gebiet γ der einzelnen Teilchensorten k wird durch die Grenzparabel $P(\infty)$ bestimmt. Dabei wird

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \gamma^e \leq +\infty && \text{für Ionen} \\ \frac{e^2 A^2 + 2em_e \phi - p_x^2}{2eA} &\leq \gamma^e \leq +\infty && \text{für freie Elektronen} \\ -\infty &\leq \gamma^e \leq \frac{e^2 A^2 + 2em_e \phi - p_x^2}{2eA} && \text{für gefangene Elektronen} \end{aligned} \tag{10}$$

Mit (9) und (10) sieht man, dass für die Summe über alle Teilchensorten gilt:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A} = j$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial \phi} = -g$$
(11)

Mit den Maxwellgleichungen (1) und (2) und den Beziehungen (11) erhält man aus $\frac{d\pi}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial A} A' + \frac{\partial \pi}{\partial \phi} \phi'$ das Druckintegral

$$\pi + \frac{1}{2} (A')^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 = \text{konstant}$$
(12)

welches besagt, dass die Summe des magnetischen, elektrischen und des Plasmapruckes von x unabhängig ist.

Die Maxwellgleichungen können auch in variationeller Form geschrieben werden.

$$\delta \int \left[\pi - \frac{1}{2} (A')^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 \right] dx = 0$$
(13)

Die Variation in A ergibt bei festen Randwerten die Gleichung (2). Die Lösung (A, ϕ) , die (13) erfüllt, ist im (A, ϕ) Raum ein Sattelpunkt. Die Variation liefert in A ein Minimum, in ϕ ein Maximum.

2. Normierung

Zur Auflösung führen wir dimensionslose Grösse ein:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{n_0}{mT} \varphi, \quad H = Th, \quad \phi = \frac{T_e}{e} u, \quad A = \frac{\sqrt{m_e T_e}}{e} a \\
 p_x &= \sqrt{mT} \xi, \quad p_y = \sqrt{mT} \eta, \quad x = \sqrt{\frac{m_e}{e^2 n_0}} \xi, \quad \delta = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}} \\
 j &= q n_0 \sqrt{\frac{T}{m}} \tilde{j}, \quad \varrho = q n_0 \tilde{\varrho}, \quad \pi = T n_0 \tilde{\pi}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Für nicht spezifizierte Ladungen, Massen und Temperaturen müssen die der Teilchensorte entsprechenden Grössen eingesetzt werden. Die x-Koordinate ist auf den Elektronenlarmorradius normiert. Dabei wurde das Magnetfeld bei $x = -\infty$ aus dem Druckintegral (12) durch die mittlere Ionendichte bei $x = +\infty$ ausgedrückt. Die in die normierten Differentialgleichungen eingehende Grösse δ enthält die Elektronentemperatur in der Form $\delta = v_{th}/c \ll 1$, es werden nur nicht relativistische Teilchen betrachtet. Die Tilden über Strom, Ladung und Druck sind in den nachfolgenden Gleichungen weggelassen.

Die in (8) gewählten Verteilungen werden

$$\begin{aligned}
 \varphi_i &= \frac{1}{\pi} e^{-h_i} && \text{für Ionen} \\
 \varphi_e^F &= \frac{1}{\pi} e^{-h_e} && \text{für freie Elektronen} \\
 \varphi_e^T &= \frac{1}{\pi} e^{-\eta^2/2 + \frac{1}{r}(h_e - \eta^2/2)} && \text{für gefangene Elektronen}
 \end{aligned} \tag{15}$$

mit

$$\begin{aligned}
 h_i &= \frac{1}{2} \left\{ \xi^2 + (\eta - \mu a)^2 \right\} + \tau u \\
 h_e &= \frac{1}{2} \left\{ \xi^2 + (\eta + a)^2 \right\} - u
 \end{aligned} \tag{16}$$

Für die bei der Ionenverteilung eingehenden Grössen $\mu = \sqrt{\frac{T_e m_e}{T_i m_i}} \ll 1$ und $\tau = \frac{T_e}{T_i}$

werden die Werte $\mu = 0$ und $\tau = 1$ eingesetzt. Die Ionen "spüren" das B-Feld nicht, geben keinen Beitrag zur Stromdichte.

Die Maxwellgleichungen transformieren sich in

$$a'' = j_e^F + j_e^T$$

$$u'' = \frac{1}{\delta^2} (g_e^F + g_e^T - g_i)$$
(17)

Das Variationsproblem lautet nun

$$\delta \int \left[\pi - \frac{1}{2} (a')^2 + \frac{\delta^2}{2} (u')^2 \right] dx = 0$$
(18)

Mit den Integralen

$$L_\sigma = \int_0^\infty \sqrt{z} e^{-\frac{1}{2}(z-\lambda)^2} \frac{1-E(z-\sigma)}{E'(z-\sigma)} dz$$

$$K_n = \int_0^\infty z^{n/2} e^{-\frac{1}{2}(z-\lambda)^2} dz$$

$$E(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$$
(19)

und den Größen

$$\lambda = \frac{u}{a} - \frac{a}{2}, \quad \alpha = \frac{u}{a} + \frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{u}{a} - \frac{a}{2} - \frac{a}{r}$$

erhält man einfache Darstellungen für (9):

$$j_i = 0 \quad g_i = e^{-u} \quad \pi_i = e^{-u}$$

$$j_e^F = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} (k_3 - \lambda k_1) \quad j_e^T = -j_e^F + \frac{a\sqrt{2a}}{\pi} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(k_1 - \frac{a}{r} L_\beta\right)$$

$$g_e^F = e^{-u} - \frac{\sqrt{2a}}{\pi} (k_1 + a L_\alpha) \quad g_e^T = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} \left(k_1 - \frac{a}{r} L_\beta\right)$$

$$\pi_e^F = \frac{a\sqrt{2a}}{\pi} L_\alpha \quad \pi_e^T = \frac{a\sqrt{2a}}{\pi} L_\beta$$
(20)

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (17) ein

$$a'' = \frac{a\sqrt{2a'}}{\pi} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(K_1 - \frac{a}{r} L_\beta\right) \quad (21)$$

$$u'' = \frac{1}{\delta^2} \left[e^u - e^{-u} - \frac{a\sqrt{2a'}}{\pi} \left(L_\alpha + \frac{1}{r} L_\beta\right) \right]$$

sieht man, dass alle Beiträge, die mit \sqrt{a} gehen wegfallen.

IV. Auflösung

1. Asymptotisches Verhalten für $\xi \rightarrow +\infty$

Im Gebiet des homogenen Plasmas fallen a und u mit wachsendem ξ gegen Null ab. Entwickelt man die rechte Seite der Gleichungen (21) nach kleinen α , β und λ , macht zur Auflösung der dadurch entstandenen Differentialgleichungen einen Potenzreihenansatz in $\frac{1}{\xi}$, so erhält man als Lösung

$$a = \sum_{i=2}^{\infty} a_i (\xi - \xi_0)^{-2i}$$

$$u = \delta^2 (\xi - \xi_0)^{-2} \sum_{i=2}^{\infty} b_i (\xi - \xi_0)^{-2i} \quad (22)$$

Je die ersten Glieder der Reihe sind positiv und haben die Werte

$$a_2 = 100 \sqrt{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) / \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2$$

$$b_2 = \frac{5\sqrt{2}}{3} a_2 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

ξ_0 bedeutet eine Integrationskonstante, die im folgenden $\xi_0 = 0$ gesetzt wurde.

2. Asymptotisches Verhalten für $\xi \rightarrow -\infty$

Im Vakuumgebiet werden wegen den dort verschwindenden Ströme und Ladungen $a'' = u'' = 0$. Dies gibt uns linear ansteigende Potentiale und Konstante Felder. Für ein ladungsneutrales Plasma muss das elektrische Feld auf beiden Seiten der Grenzschicht verschwinden. Der aus der Differentialgleichung $u'' = \frac{1}{\delta^2} e^{-u}$ resultierende asymptotische Abfall des E-Feldes geht mit

$$u' \approx \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-u/2} \quad (23)$$

3. Asymptotisches Verhalten in r

$r \Rightarrow 0$: Entwickeln wir die Gleichungen (21) nach kleinen r, erhalten wir die Maxwellgleichungen ohne gefangene Elektronen, also

$$\begin{aligned} a'' &= j_e^F + o(r) \\ u'' &= \frac{1}{\delta^2} (\rho_e^F - \rho_i) + o(r) \end{aligned} \quad (24)$$

Wie schon Laval und Pellat [8] zeigten, existiert, ausser bei speziell gewählten Verteilungsfunktionen [5], keine stationäre Grenzschicht ohne gefangene Teilchen. Es ist uns ein besonderes Anliegen, die minimal notwendige Anzahl gefangener Elektronen zu bestimmen.

$r \Rightarrow \infty$: Bei diesem Fall sind fast alle Elektronen gefangen. Die charakteristische Breite der Grenzschicht wird dann durch den Ionenlarmorradius definiert. Der von uns betrachtete Fall $m_i \gg m_e$ mit Vernachlässigung der gefangenen Ionen hat keine Gültigkeit mehr. Wir müssten hier auch gefangene Ionen einführen. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den Bereich von r, bei dem die Ionen fast ausschliesslich vom Ladungstrennungsfeld gehalten werden.

4. Versuch der Auflösung mittels Vorwärtsintegration

Es ist naheliegend, das Problem (21) mittels einer Vorwärtsintegration aufzulösen, also zum Beispiel mit der numerisch stabilen Methode nach Runge-Kutta zu versuchen. Eine kurze Ueberlegung zeigt jedoch, dass dies nicht möglich ist.

Die Struktur der u Gleichung erlaubt eine logarithmische Singularität in u an einem beliebigen x Wert. Dies kann man an der Modellgleichung $y'' = \text{Sh}(y)$ erkennen, welche der U Gleichung ähnlich ist.

Versuchen wir also $y'' = \text{Sh}(y)$ mit den Bedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ zu lösen, unter der Annahme, dass die Randbedingung für $y'(0)$ einen kleinen Fehler ϵ enthält : $y'(0) = \epsilon \neq 0$. Anstatt der exakten Lösung $y(x) = 0$ erhält man eine wachsende Lösung $y(x) = -2 \ln \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{8}{\epsilon} - x \right) \right]$ mit einem logarithmischen Pol bei $x = \ln \frac{8}{\epsilon}$. Man kommt also mit der Integration nicht viel weiter als einige Einheiten in x. Die Einheit in x ist aber die Debyelänge, welche viel kleiner ist als die gesuchte Grenzschichtdicke. Deshalb ist das Problem mittels einer Vorwärtsintegration nicht lösbar. Im folgenden zeigen wir, wie wir numerische Lösungen des Variationsproblem (18) gewinnen, und zwar mit der Methode der finiten Elemente.

5. Näherungslösung für ein kaltes Plasma

Als erste Näherung umschiffen wir die beschriebene Singularität indem wir vorerst das Problem für ein kaltes Plasma, also für $\delta = 0$ lösen. Bei einem kalten Plasma gilt im ganzen Gebiet

$$s(a(x), u(x)) = 0 \quad (25)$$

Diese Gleichung liefert uns für ein gewisses Vektorpotential a ein skalares Potential u(a). Die "brave" Differentialgleichung für a in (21) wird mit der Methode nach Runge-Kutta integriert. Das nach jedem Extrapolationsschritt resultierende a ergibt aus (25) wiederum das dazugehörige u. Mit (25) erhalten wir

auch für $\delta \neq 0$ eine gute approximative Lösung für $a(x)$, weil ja $\delta \ll 1$. $u(x)$ wird für $\delta \neq 0$ in der Grenzschicht wegen grossen u'' nicht mehr durch (25) bestimmt. Für die Auflösung des Variationsproblem (18) notwendige gute Näherungslösung müssen wir u in der Grenzschicht heuristisch wählen und u' auf der Vakuumsseite entsprechend (23) abfallen lassen.

6. Auflösung des Variationsproblem

Das Variationsproblem (18) lösen wir mit Hilfe finiter Elemente. Das Integrationsintervall $[\xi_0, \xi_N]$ teilen wir in eine gewisse Anzahl N Teilintervalle ein. Als Basisfunktionen $g_i(\xi)$ wählen wir lineare Elemente, die in einem Gitterpunkt ξ_i den Wert 1 annehmen, linear nach den Nachbarspunkten ξ_{i+1} respektive ξ_{i-1} auf Null abfallen und ausserhalb derselben verschwinden (Fig. 4). Die beiden Potentiale $a(\xi)$ und $u(\xi)$ werden durch eine gute Näherungslösung (a_0, u_0) und einer linearen Kombination aller dieser Elemente als lineare Funktionen zwischen zwei Gitterpunkten dargestellt.

$$a(\xi) = a_0(\xi) + \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(\xi) = a_0 + \partial a$$

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \sum_{i=1}^N \beta_i g_i(\xi) = u_0 + \partial u$$
(26)

Dieser Prozess ist iterativ. Mit den gefundenen Korrekturen $\alpha_i, \beta_i \ll 1$ finden wir eine neue bessere Näherungslösung $(a_0 + \partial a, u_0 + \partial u)$. Der kinetische Druck $\pi(a, u)$ in (18) entwickeln wir bis zur zweiten Ordnung nach ∂a und ∂u :

$$\pi(a, u) \cong \pi_0 + \frac{\partial \pi_0}{\partial a} \partial a + \frac{\partial \pi_0}{\partial u} \partial u + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial a^2} (\partial a)^2 + 2 \frac{\partial^2 \pi_0}{\partial a \partial u} \partial a \partial u + \frac{\partial^2 \pi_0}{\partial u^2} (\partial u)^2 \right]$$
(27)

Dabei bedeutet $\pi_0 = \pi(a_0, u_0)$ der kinetische Druck für die Näherungslösung (a_0, u_0) . Ersetzen wir ∂a und ∂u durch die in (26) eingeführten Summen über die finiten Elemente und setzen in (18) ein, so erhalten wir

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_N} \left\{ \left[-j_0 q_i(\xi) - a'_0 q'_i \right] \alpha_i + \left[s_0 q_i(\xi) + s^2 u'_0 q'_i \right] \beta_i + \frac{\partial s_0}{\partial a} q_k q_j \alpha_k \beta_j - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial j_0}{\partial a} q_k q_j + q'_k q'_j \right] \alpha_k \alpha_j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial s_0}{\partial u} q_k q_j + s^2 q'_k q'_j \right] \beta_k \beta_j \right\} d\xi \quad (28)$$

Wir summieren über alle zwei mal vorkommende Indizes jedes Summanden in (28). Alle α_i und β_i nicht enthaltenden Beiträge verschwinden bei der Variation.

Die Lösung des Variationsproblem (28) erhalten wir dann, wenn die Variation von I nach den α_i und β_i verschwindet, falls also

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial I}{\partial \beta_i} = 0 \quad (29)$$

Dies liefert uns ein lineares symmetrisches Gleichungssystem für die Korrekturen α_j und β_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0 &= \alpha_j \int \left[-\frac{\partial j_0}{\partial a} q_i q_j - q'_i q'_j \right] d\xi + \beta_j \int \frac{\partial s_0}{\partial a} q_i q_j d\xi - \int \left[j_0 q_i + a'_0 q'_i \right] d\xi \\ \frac{\partial I}{\partial \beta_i} = 0 &= \alpha_j \int \frac{\partial s_0}{\partial a} q_i q_j d\xi + \beta_j \int \left[\frac{\partial s_0}{\partial u} q_i q_j + s^2 q'_i q'_j \right] d\xi + \int \left[s_0 q_i + s^2 u'_0 q'_i \right] d\xi \end{aligned} \quad (30)$$

Der iterative Prozess (26) konvergiert nach $\alpha_j = \beta_j = 0$. Dann nämlich werden die Maxwellgleichungen (17), die durch die α_j und β_j nicht enthaltenden Integrale von (30) in allen Gitterpunkten erfüllt.

7. Randprobleme

Damit wir das Variationsproblem (28) auf die beschriebene Art lösen können, muss die Variation nach a und u am Rand verschwinden, das heisst

$$\partial a(\xi_0) = \partial u(\xi_0) = \partial a(\xi_N) = \partial u(\xi_N) = 0 \quad (31)$$

Wir spannen unser Intervall an den Rändern ξ_0 und ξ_N ein. Auf der Plasmaseite, bei ξ_N bestimmen wir die Randwerte für die Potentiale mittels der Entwicklung (22) nach kleinen a und u . Im Vakuum, bei ξ_0 variieren wir a derart, dass wir $\frac{da}{d\xi}(\xi_N)$ der Entwicklung (22) im Plasma erfüllen. u richten wir so ein, dass das E-Feld im Vakuum entsprechend (23) nach Null abfällt.

8. Probleme der Genauigkeit

Die Gesamtladung in (21)

$$s(a, u) = e^u - e^{-u} - \frac{a\sqrt{2a}}{\pi} \left(L_\alpha + \frac{1}{r} L_\beta \right) \quad (32)$$

hat die Grössenordnung δ^2 , das heisst die Glieder auf der rechten Seite, die einzeln die Grössenordnung 1 aufweisen, zerstören sich bis auf δ^2 , das wir 10^{-4} wählen.

Es ist notwendig, die Integrale L_α und L_β bedeutend genauer als nur auf 4 Dezimalen zu kennen. Noch schwerwiegender ist der Verlust an Genauigkeit im Gebiet grossen ξ , wo nur Terme übrigbleiben, die entsprechend der Entwicklung (22) nach kleinen u mit $\delta^2 \xi^{-2}$ gehen.

V. Resultate

1. Strukturen

In Figs. 5 zeigen wir die Strukturen der Grenzschicht für $r = 0.75$ und $r = 3$ bei $\delta = 0.01$, was einer Plasmatemperatur $kT = \delta^2 m_e c^2$ von etwa 70 eV entspricht. Das homogene Magnetfeld B_0 im Vakuum wird bei der Annahme einer Plasmadichte bei $\xi = \infty$ von $n_0 = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ entsprechend dem Druckintegral $B_0 = \delta a'(-\infty) \sqrt{\frac{m_e n_0}{\epsilon_0}}$

etwa 700 Gauss. Die Breite der Grenzschicht beträgt etwa 6 Elektronenlarmarradii. In den Darstellungen der Potentiale und der Felder ist zu beachten, dass das Magnetfeld tiefer ins Plasma eindringt als das elektrische Feld. Bei der Aufzeichnung der Ladungen ist der Ueberschuss von positiver Gesamtladung im Vakuum zu beachten. Dies kommt davon, dass die Ionen tiefer ins Vakuum eindringen können, die Ionen werden nur durch das elektrische Feld im Plasma gehalten.

2. Minimale Anzahl notwendiger gefangener Elektronen

Das Ziel dieser Arbeit was es unter anderem die zur Beschreibung einer stationären Grenzschicht notwendige Anzahl gefangener Elektronen zu bestimmen.

Untersucht man das Variationsproblem (25) so sieht man, dass I bei der Variation von a ein Minimum und ein Maximum bei der Variation von u ist. Die Lösung wird durch den Sattelpunkt $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial u} = 0$ bestimmt. Senkt man die Anzahl r der gefangenen Teilchen, so bemerkt man, dass die Variationsmatrix (30) singular werden kann, der Sattelpunkt verschwindet. Dabei wird $\frac{\partial I}{\partial a} = 0$ nicht mehr erfüllt. Das die nächste Umgebung des Sattelpunktes beschreibende Paraboloid entartet zu einem geneigten parabolischen Tal. Dieser Grenzfall, der für eine mit $r = 0.75$ bestimmte Verteilungsfunktion der gefangenen Elektronen beschrieben wird, gibt uns die für unser Modell minimal notwendige Anzahl gefangener Teilchen.

Diese Arbeit wurde durch die finanzielle Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

Referenzen

- 1) M.N. Rosenbluth, Magnetohydrodynamics, Landshoff ed, Stanford University Press, Calif. 1957
- 2) E.S. Weibel, Phys. Fluids 2, 52 (1959)
- 3) A.I. Morozov, L.S. Solovev, JETP 13, 927 (1961)
- 4) K. Husimi, N. Yajima (Nagoya University, Japan), T. Tsuzuki (Osaka University, Japan), On the structure of a fresh plasma surface
- 5) A. Sestero, Phys. Fluids 8, 739 (1965)
- 6) H. Grad, Phys. Fluids 4, 1366 (1961)
- 7) G. Schmidt, D. Finkelstein, Phys. Rev. 126, 1611 (1962)
- 8) G. Laval, R. Pellat, Journal de Mécanique 2, 67 (1963)
- 9) R.L. Morse, Phys. Fluids 8, 308 (1965)
- 10) A. Sestero, Phys. Fluids 7, 44 (1964) el static problem (transition $n \neq 0$)
- 11) W. Paskievici, A. Sestero, H. Weitzner, Report NYO 9193 (1962) Courant Instr. Math. Sci., New York Univ.

Bildlegende

- Fig. 1 Geometrische Anordnung
- Fig. 2 Aufspaltung des (H, p_y) Raumes in das Gebiet der freien und der gefangenen Elektronen (oben). Die gestrichelte Linie (- - -) stellt die Umhüllende für die gefangenen Teilchen dar. Die Wahl der Verteilungsfunktionen für die freien und der gefangenen Elektronen wird unten für ein gewisses H (Schnitt mittels -·-·-) und zwei verschiedenen r dargestellt.
- Fig. 3 Teilchenbahnen für freie Elektronen (oben) mit positiven resp. negativen y -Geschwindigkeiten und unten für gefangene Elektronen.
- Fig. 4 Lineare finite Elemente, die am Gitterpunkt den Wert 1 annehmen und linear auf Null zu den Nachbarspunkten abfallen.
- Fig. 5 Profile der Potentiale, der Felder, der Ladungen und der Ströme für $\delta = 10^{-2}$ und $r = 0.75$ resp. $r = 3$.

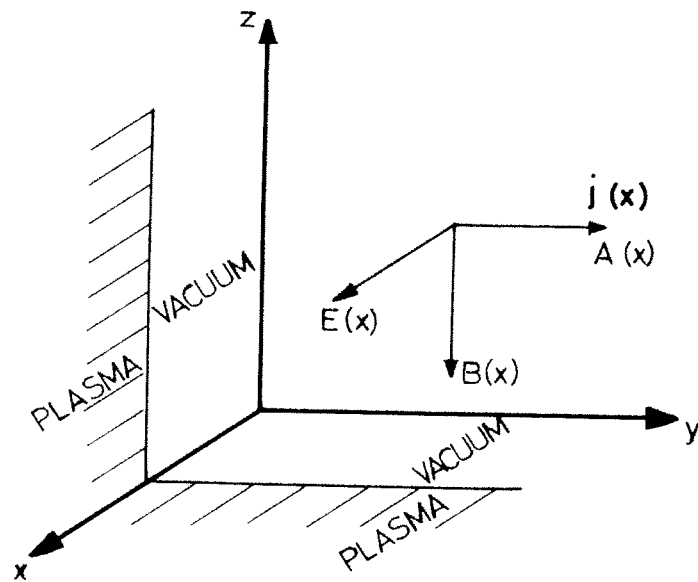
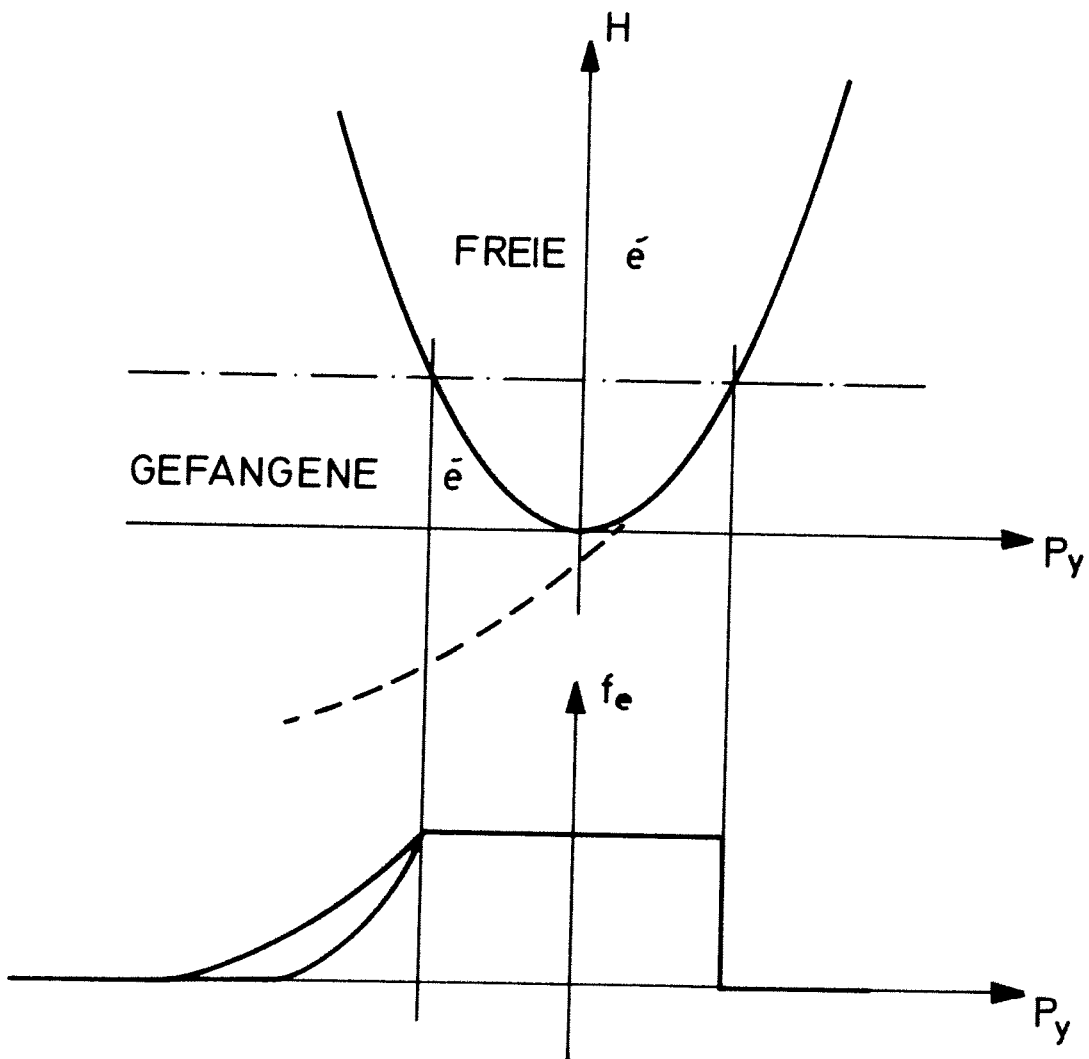


Fig. 1



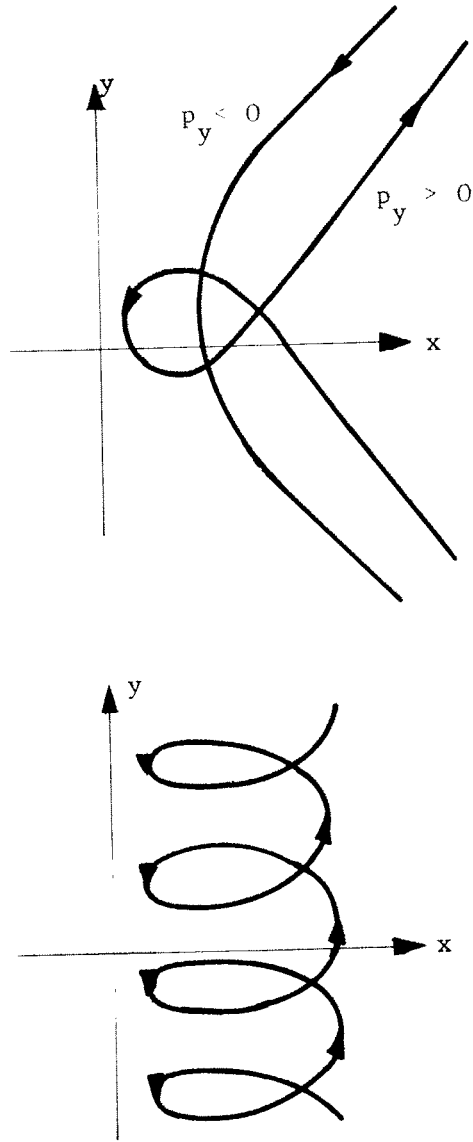


Fig. 3

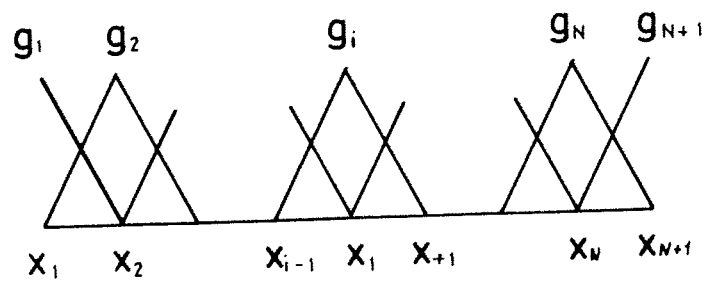


Fig. 4

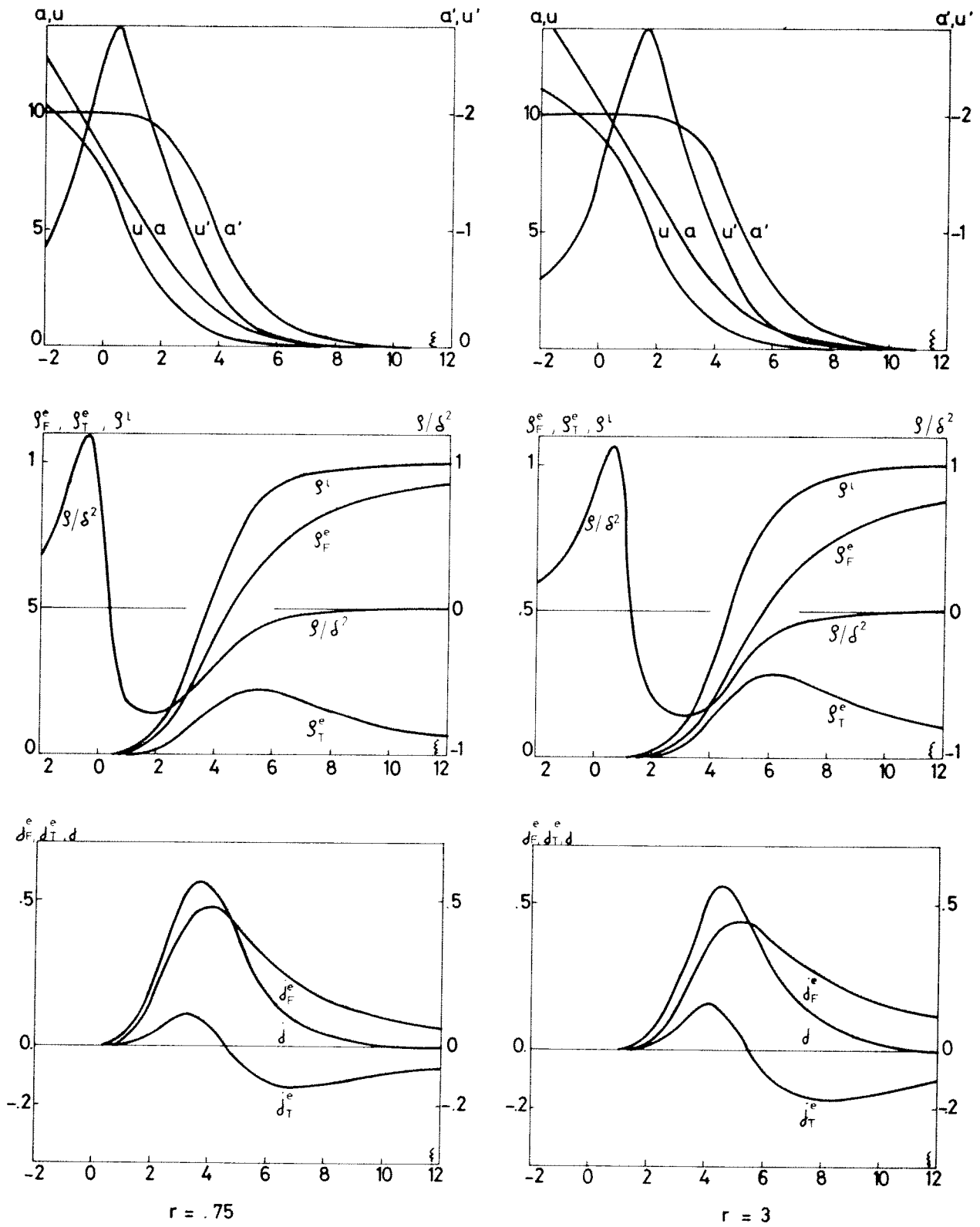


Fig. 5

