

September 1973

LRP 66/73

STUDIUM DER EIGENSCHWINGUNGEN EINES ZYLINDRISCHEN
PLASMAS MIT DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE 1)

von

K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon,

Centre de Recherches en Physique des Plasmas

EPF, Lausanne

und

J. Rappaz, Département de Mathématiques, EPF, Lausanne

Centre de Recherches en Physique des Plasmas

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

1) Diese Arbeit wurde durch die finanzielle Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds ermöglicht.

STUDIUM DER EIGENSCHWINGUNGEN EINES ZYLINDRISCHEN PLASMAS
MIT DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE ¹⁾

von

K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon
Centre de Recherches en Physique des Plasmas, EPF, Lausanne

und

J. Rappaz, Département de Mathématiques, EPF, Lausanne

1. Einleitung

Vor kurzer Zeit haben Takeda et al. [1] die Methode der finiten Elemente [2] als Handwerkszeug zur Berechnung von magnetohydrodynamischen Instabilitäten vorgeschlagen. Die Autoren vergleichen analytische Resultate von Shafranov [3] mit ihrem numerischen Resultaten. Sie finden gute Uebereinstimmung in der Zuwachsrate der Instabilität. Leider wird die Instabilität selbst, das heisst der instabile Eigenmodus des Plasmas, schlecht wiedergegeben.

Ein solches Resultat kann einen kaum befriedigen. Will man eine magnetohydrodynamische Instabilität, deren Zuwachsrate man kennt und für gefährlich erachtet, verhindern, so muss die dazugehörige Plasmabewegung verlässlich bekannt sein. Es wurde deshalb in dieser Arbeit unternommen, ein einfaches physikalisches System, das analytisch vollständig beschreibbar ist, aber keine Instabilität aufweist, mit der Methode der finiten Elemente zu behandeln. Dabei zeigt sich, dass mit dieser Methode durchaus auch die Plasmabewegung beschrieben werden kann. Das zum Teil merkwürdige Verhalten der numerischen

Lösung für die Plasmabewegung kann allerdings erst nach Parameter- und Konvergenzstudien am gesamten Spektrum von Eigenschwingungen verstanden werden.

2. Vereinfachter linearer Theta-pinch

Das einfache physikalische System besteht aus einem zylindrischen Plasma grosser Länge oder mit periodischen Randbedingungen in longitudinaler Richtung. Es liegt in einem konstanten longitudinalen Magnetfeld B_z , hat konstanten Druck und Dichte und ist unendlich gut leitend ($\sigma = \infty$). Es soll als ein Gas betrachtet werden und Bewegungen ausführen, deren Frequenzen ω weit unterhalb der Ionenzyklotronfrequenz liegen. Im weiteren sei es nicht magnetisch, sondern rein hydrodynamisch eingeschlossen (Normalgeschwindigkeit am Rand $v_n = 0$). Es werden nur Eigenschwingungen der Form

$$\vec{\xi}(r) e^{i(\omega t + m\theta - kz)} \quad (1)$$

gesucht. Hier bedeutet $\vec{\xi}$ die Auslenkung eines Gaselementes aus seiner Gleichgewichtslage und (r, θ, z) sind die Zylinderkoordinaten. Nimmt man $|\vec{\xi}|$ als klein gegen die Systemdimensionen an, so wird die Plasmabewegung durch folgende lineare dimensionslose Gleichungen beschrieben [4]:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 \xi_2 &= -iks^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \\ -\omega^2 \vec{\xi}_1 &= (1+s^2) \vec{\nabla}_1 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) + ik (\vec{\nabla}_1 \xi_2 + ik \vec{\xi}_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hier ist $s = c_s/c_A$ das Verhältnis der Schallgeschwindigkeit zur Alfvengeschwindigkeit. $\vec{\xi}$, r und k sind mit dem Plasmaradius R normalisiert, ω mit c_A/R . \perp bezeichnet die Vektoren, die senkrecht zum longitudinalen Magnetfeld B_z stehen. Die Randbedingung lautet

$$\xi_r(r=1) = 0 \quad (3)$$

Die Lösungen von (2) und (3) zerfallen in drei Klassen. Eine Klasse enthält die inkompressiblen Alfvenschwingungen (Klasse A). Die Inkompressibilität ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$) hat in (2) $\xi_z = 0$ zur Folge und damit $(k^2 - \omega^2)\xi_r = 0$. Der Eigenwert $\omega^2 = k^2$ ist unendlich entartet, da zu jedem ξ_r , das die Randbedingung (3) erfüllt, mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$ ein ξ_θ berechnet werden kann.

Die andern zwei Klassen werden durch Besselfunktionen beschrieben. Die Gleichungen (2) lassen sich unter der Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \neq 0$ schreiben

$$\left. \begin{aligned} \xi_r &= ikb \frac{d\xi_z}{dr} \\ \xi_\theta &= -kb \frac{m}{r} \xi_z \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \xi_z + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \xi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\omega^2 + \omega^2 s^2 - k^2 s^2}{k^2 s^2 (\omega^2 - k^2)} \\ K^2 &= \frac{(\omega^2 - k^2 s^2)(\omega^2 - k^2)}{\omega^2 + \omega^2 s^2 - k^2 s^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) werden von

$$\xi_z = C J_m(Kr) \quad (6)$$

gelöst, das am Ursprung endlich bleibt. Die Randbedingung (3) $J'_m(K) = 0$ stellt die Dispersionsrelation der gesuchten zwei Klassen dar und lautet nach ω^2 aufgelöst

$$\omega_{F,s}^2 = \frac{1}{2} (k^2 + \gamma_{m,\alpha}^2) (1+s^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4s^2}{(1+s^2)^2} \frac{k^2}{k^2 + \gamma_{m,\alpha}^2}} \right] \quad (7)$$

Hier ist $\gamma_{m,\alpha}$ die α . Nullstelle der Funktion J'_m . Das Pluszeichen in (7) gilt für die sogenannten "fast waves" (Klasse F), das Minuszeichen für die "slow waves" (Klasse S). ω_F^2 steigt monoton mit α , das heisst mit der Anzahl Schwingungsknoten der Eigenfunktion (6), wohingegen ω_S^2 monoton sinkt und dem Häufungspunkt $s^2 k^2 / (1 + s^2)$ zustrebt.

3. Numerische Methode

Sei

$$-\omega^2 \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (8)$$

Die Abkürzung für (2), wo $\vec{\xi}$ die Randbedingung (3) erfüllt. Man beachte, dass (8) reell ist, wenn $\xi_r = i\xi_1$ gesetzt wird. In (8) sind ω^2 und ein "genügend reguläres" nicht identisch verschwindendes $\vec{\xi}$ gesucht. Dieses differentielle Problem 2. Ordnung lässt sich als halb schwaches variationelles formulieren

$$-\omega^2 \int_0^1 \vec{\eta} \cdot \vec{\xi} r dr = a(\vec{\eta}, \vec{\xi}) \quad (9)$$

Hier ist $\vec{\eta}$ eine beliebige "genügend reguläre" Funktion von r , die die Randbedingungen (3) erfüllt. $a(\vec{\eta}, \vec{\xi})$ ist die symmetrische Bilinearform, die durch partielle Integration aus

$$\int_0^1 \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) r dr$$

erhalten wird [4]. Diese Formulierung ist jener bei Takeda et al. [1] äquivalent, wo das Integral der zu (8) gehörigen Lagrangefunktion minimiert wird.

Zur numerischen Behandlung wird (9) gleich wie bei Takeda et al. [1] mit der Methode von Ritz [5] diskretisiert.

$$\vec{u}(r) = \sum_{i=0}^n \vec{x}_i e_i(r) \quad (10)$$

Die Basisfunktionen e_i sind definiert im Intervall $[0, 1]$ und sind gegeben durch Dreiecke

$$e_i(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < r < r_{i-1} & i > 0 \\ \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} & \text{für } r_{i-1} < r < r_i & i > 0 \\ \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} & \text{für } r_i < r < r_{i+1} & i < n \\ 0 & \text{für } r_{i+1} < r < 1 & i < n \end{cases} \quad (11)$$

wo $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1$ gilt. Für die gesamte Arbeit wurden äquidistante Intervalle angenommen. Setzt man nun für $\vec{\eta}$ in (9) der Reihe nach die Basisfunktionen $(1,0,0)e_i$, $(0,1,0)e_i$, $(0,0,1)e_i$ ein und integriert unter Berücksichtigung der Randbedingung (3), so reduziert sich (9) auf ein algebraisches Eigenwertproblem

$$-\omega^2 \sum_{\mu=1}^{3n+3} B_{\nu\mu} x_{\mu} = \sum_{\mu=1}^{3n+3} A_{\nu\mu} x_{\mu} \quad \nu=1, \dots, 3n+3 \quad (12)$$

wo die Indizes ν und μ die Vektorkomponenten und die Raumpunkte i von x_i numerieren. A und B sind symmetrische Matrizen. (12) eignet sich zur Lösung auf dem Computer. Für die vorliegende Arbeit wurde immer das Jacobische Verfahren [6] angewendet, da alle Eigenwerte und -vektoren studiert wurden. Ist man im allgemeinen Fall nur an einem einzelnen Modus interessiert, zum Beispiel an einer Instabilität, so ist eher das Verfahren der Vektoriteration [6] angebracht.

Bis jetzt wurde ein wesentlicher Punkt ausser acht gelassen. Der Operator \vec{F} hat eine Singularität r^{-2} am Ursprung, die ohne eine Umformulierung des Problems nur mit Bastelarbeit numerisch behandelt werden kann. Da die Singularität mit der Zylindergeometrie eingeführt wurde, wird sie durch reguläres Verhalten der Lösungsfunktionen am Ursprung unschädlich gemacht. Ein Vektorfeld $\vec{V}(x,y)$, das mit

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} v_r(r,\theta) \\ v_\theta(r,\theta) \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a_m(r) \\ b_m(r) \end{pmatrix} e^{im\theta} \quad (13)$$

entwickelt wurde, muss

$$\left. \begin{aligned} a_m(0) &= b_m(0) \quad \text{für } |m| \neq 1 \\ a_{\pm 1}(0) \pm ib_{\pm 1}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

befriedigen. In der vorliegenden Arbeit wurde über die Regularität hinaus zusätzlich die Struktur von (2) am Ursprung unter der Bedingung $k^2 \neq \omega^2$ benutzt. Es wurde eine neue Variable $\vec{\xi}$ definiert, deren Komponenten am Ursprung weder Null werden noch divergieren.

$$\begin{pmatrix} \langle v_r \rangle_1 \\ \langle v_r \rangle_2 \\ \langle v_r \rangle_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-|m-1|} & 0 & 0 \\ r^{-|m-1|-2\delta_{m1}} & r^{-|m-1|-2\delta_{m1}} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-|m|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_\theta \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

δ bezeichnet das Kroneckersymbol. Sei U die Transformationsmatrix in (15), so lässt sich (9) schreiben:

$$-\omega^2 \int_0^1 \vec{\eta} \cdot U^{-1T} \cdot U^{-1} \cdot \vec{\xi} r dr = a(U^{-1} \vec{\eta}, U^{-1} \vec{\xi}) \equiv \hat{a}(\vec{\eta}, \vec{\xi}) \quad (16)$$

Der Ansatz (10) wird nun für $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ gemacht. Da (15) unter der Bedingung $k^2 \neq \omega^2$ hergeleitet worden ist, verlangt man damit für die Alfven-Klasse ($k^2 = \omega^2$) bei $m > 1$ zuviel. Die Klasse A braucht nur (14) zu befriedigen. Es wird also nicht erstaunen, wenn die Klasse A für $m > 1$ in (12) schlechter repräsentiert wird als für $m = 0, 1$. Zur Integration von (16) wurden $U^{-1T} \cdot U^{-1}$ und die Koeffizienten der Bilinearform \hat{a} linear zwischen r_i und r_{i+1} approximiert. In einem komplexeren System als (2) kann diese Approximation allerdings schlecht sein. Es muss dann entweder quadratisch approximiert oder (16) mit Simpson [7] integriert werden.

4. Resultate

4.1. Spektrum

Der Parameter s wurde für die gesamte Arbeit mit $6 s^2 = 0.5$ festgelegt. Das ist gleichbedeutend mit $\beta = 0.1$, wenn β das Verhältnis des thermischen Gasdruckes zum magnetischen Druck bedeutet. Es wird im Abschnitt 4.4 erwähnt werden, wie sich die Resultate mit s ändern.

Fig. 1 zeigt, wie das Spektrum ω^2 des algebraischen Eigenwertproblem (12) bei steigender Anzahl n von Intervallen (11) gegen das exakte analytische Spektrum (rechts am Rand) konvergiert. Es ist der Fall $m = 1, k = 0,5$ gezeigt. Die Modi wurden anhand der Anzahl Nullstellen identifiziert. Die Auslenkung $\xi_r(r)$ des "fast modes" F_3 hat im Intervall $[0, 1]$ 3 Nullstellen. Diese Identifikation ist ausser bei der Klasse S praktisch immer durchführbar, und zwar bis zu den höchsten Modi. So hat zum Beispiel der mit $n = 16$ gerade noch darstellbare Modus F_{16} 16 nulldurchgänge in ξ_r .

Es ist in Fig. 1 zu beachten, dass die Klasse S im gewählten Darstellungsmaßstab sowohl analytisch wie numerisch als entartet erscheint. Das Spektrum der Klasse S wird weiter unten separat studiert werden. Die Entartung der Alfven-Klasse A wird numerisch nicht wiedergegeben. Die Eigenfrequenzen der

numerischen Modi A_1 , die übrigens Winkel- oder Besselfunktionen ähnlich sind, konvergieren aber gut gegen den analytischen Wert. Der Grund für die Aufhebung der Entartung im numerischen Fall ist in der Wahl der Elemente (11) zu suchen. Das Charakteristikum der entarteten Alfven-Klasse ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$) ist mit (11) nur angenähert darstellbar.

Die Klasse F wird sehr gut wiedergegeben. Man beachte aber, dass sich nahe- liegende Modi gegenseitig stören. Dieses Phänomen wirkt sich nur schwach auf den Eigenwert aus, hingegen sehr stark auf die Eigenfunktion. Lägen ein ω_A^2 und ein ω_F^2 exakt aufeinander, so würde das eine zweifache Entartung bedeuten, und die entsprechenden Modi A und F wären gemischt, weil trotz Entartung zwei zueinander orthogonale Eigenvektoren konstruiert werden.

4.2. Eigenfunktionen der Klasse F

Fig. 2 zeigt die prozentuale Abweichung des numerischen vom analytischen Wert von ξ_r in Funktion des Ortes r für die ersten drei "fast modes". Es sind die Resultate für 2, 4, 8 und 16 Intervalle (11) gezeigt. Auch hier ist gute Konvergenz bei steigendem n feststellbar. Offensichtlich ist der Ursprung $r = 0$ der kritische Punkt. Das zeigt sich noch deutlicher in Fig. 3, wo ξ_r des Modus F_6 in Funktion des Radius mit $n = 16$ dargestellt ist.

Diese Schwierigkeit am Ursprung ist dem Fall $m = 1$ charakteristisch, weil nur hier ξ_r und ξ_θ auf der Achse ungleich Null (14) sein können. Deshalb sind die Resultate für $m \neq 1$ besser. In Tabelle 1 sind die prozentualen Abweichungen vom analytischen Wert für ω^2 (obere Zahl) und $\vec{\xi}$ (untere Zahl der ersten 6 Modi F für $m = 0$ bis 6 angegeben. Als Abweichung von $\vec{\xi}$ wurde immer die Abweichung im grössten Wert von ξ_r oder ξ_θ genommen.

Es ist instruktiv, die Konvergenz der Modi F für $m = 1$ auf der Achse $r = 0$ zu studieren. Fig. 4 zeigt die prozentuale Abweichung vom analytischen Wert von ξ_r auf der Achse in Funktion der Anzahl Intervalle. Es sind die Modi F_1 , F_3 und F_5 dargestellt. Man betrachte zunächst F_1 . Die Spitzen bei $n = 4, 7, 10$

und 14 können im Vergleich mit Fig. 1 erklärt werden: Jedesmal liegt der Eigenwert eines Alfven-Modus in der Nähe von ω_{F1}^2 . Ebenso hat F_3 eine starke Wechselwirkung mit A_{11} bei $n = 10$. Bei F_3 und F_5 zeigt sich noch ein weiteres Phänomen, das übrigens allgemein gilt. Verbindet man in Fig. 1 alle A_{n+1} ($n = 2, \dots, 16$), das heisst die höchsten mit einer gegebenen Anzahl Intervalle n beschreibbaren Alfven-Modi, so entsteht ein Polygon, das man etwa als "Alfven-Geburtslinie" bezeichnen könnte. Ein Modus F_i hat auf der Achse einen Fehler von ungefähr 100 % (Fig. 4), solange die Alfven-Geburtslinie in Fig. 1 den Eigenwert des Modus F_i noch nicht überstiegen hat.

Damit ist nun das Konvergenzverhalten der Klasse F beschrieben. Aus Fig. 1 wird entnommen, dass die Eigenwerte problemlos konvergieren, aus Fig. 4 so- dann, dass die dazugehörigen Eigenfunktionen ebenfalls angegeben werden können, wenn nur darauf geachtet wird, dass beim gegebenen n kein Alfven-Modus in der Nähe liegt, und dass die Alfven-Geburtslinie den gesuchten Mo- dus F_i schon überstiegen hat.

4.3 Klasse S

Es ist noch das Verhalten der Klasse S zu studieren. Die Eigenwertgleichung (12) gibt bei n Intervallen $n + 1$ Modi der Klasse S wieder. Die analytische Lösung (7) ergibt für $S_1 \omega^2 = 1.9326 \cdot 10^{-2}$ und für den Häufungspunkt $\omega^2 = 1.9231 \cdot 10^{-2}$. Die Eigenwerte aller Modi S_i (Fig. 1) sollten also zwischen diesen zwei Grenzen liegen. In der numerischen Lösung wird der Häufungspunkt nie unterschritten ($n = 2, \dots, 16$), hingegen wird die obere Grenze überschritten. Bei $n = 16$ sind der kleinste und der grösste Wert durch $\omega^2 = 1.9233 \cdot 10^{-2}$ und $\omega^2 = 1.9479 \cdot 10^{-2}$ gegeben. Die Eigenfunktionen haben im allgemeinen nichts mit der physikalischen Lösung (6), (4) gemein- sam, da das numerische Eigenwertproblem (12) fast entartet ist. Fig. 5 zeigt die einzigen zwei als physikalische Modi identifizierbaren Eigenfunktionen S_1 und S_2 im Vergleich mit der analytischen Lösung (6). Es ist die Komponente ξ_2 , welche in der Klasse S als einzige wesentlich von Null verschieden ist, dargestellt. Man beachte, dass sich schon für S_2 die Entartung des alge-

braischen System (12) auswirkt. Der fünfte Punkt von links liegt um Hunderte von Prozenten ausserhalb der analytischen Lösung. Die Eigenwerte dieser zwei identifizierbaren Modi haben die richtige Ordnung $\omega_{s1}^2 > \omega_{s2}^2$.

Das Verhalten der Klasse S kann in einem Spezialfall besser verstanden werden. Es wurde der Fall $m = 0$, $k = 5.4$ und $6s^2 = 0.5$ gewählt. $k = 5.4$ hat beim gewählten s zur Folge, dass die Bandbreite in ω^2 etwa achtmal grösser ist als im vorhergehenden Fall. Für $m = 0$ sind dann alle Modi S_i ($i=1, \dots, n+1$) anhand der Nullstellen von ξ_z identifizierbar. Zusätzlich ist bei $m = 0$ noch der Modus S_0 möglich. Er entspricht einer Translation der gesamten Plasmasäule in longitudinaler Richtung. Fig. 6 zeigt die Konvergenzstudie (analog zu Fig. 1) für den erwähnten Spezialfall. Man beachte, dass nicht die Frequenz ω_{si}^2 , sondern die Abweichung vom Häufungspunkt $\omega_{si}^2 - \omega_{s\infty}^2$ aufgetragen ist. Es ist nur die Klasse S dargestellt. Die andern zwei Klassen werden ohne Schwierigkeiten beschrieben, da die Klasse A für $m = 0$ auch im System (12) exakt entartet ist (entkoppelte Gleichungen).

Das eigentümliche Konvergenzverhalten erklärt die schlechten Funktionen, die im vorhergehenden Fall (Fig. 5) gefunden wurden. Die Klasse S hat immer Wechselwirkung mit sich selbst. Werden die zu Fig. 6 gehörenden Funktionen studiert, so stellt man fest, dass erst dann, wenn die Eigenfrequenz des Modus S_i unterhalb derjenigen von S_{i+1} liegt, auch die Komponenten ξ_r und ξ_θ die physikalisch richtige Anzahl Nullstellen besitzen.

4.4 Variation der Parameter

Es bleibt das Verhalten der numerischen Lösung zu studieren, wenn die Parameter s und k verändert werden. Es wurde bei $m = 1$ einenteils bei $k = 0,5$, $s = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ und andernteils bei $6s^2 = 0.5$, $k = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000$ gewählt. Bei der ersten Parameterreihe ändert das Spektrum seinen Charakter nur in der Alfvenklasse. Die Alfven-Modi haben für kleine s die gleichen Werte und das gleiche Verhalten wie in Fig. 1, werden aber für grosse s sehr schlecht beschrieben. So hat A_1 ein $\omega^2 = 31$ anstatt 0.25 bei

$s = 100$ und $n = 16$.

Die zweite Parameterreihe zeigt, dass es sich hier um Diskretisationsfehler handelt. Auch für beliebig kleines k unterschreiten nämlich die Frequenzen ω^2 von A_1 , A_2 und A_3 nie die Werte 0.0030, 0.0340 und 0.0948, obschon der analytische entartete Eigenwert k^2 ist, also gegen Nullstreben sollte. Offensichtlich führt man in der Alfvenklasse mit der Diskretisation einen für einen bestimmten Modus konstanten Fehler ein. Das bestätigt sich, wenn man zu grössern k -Werten geht. Bei $k = 0.1$ sind die drei ersten Alfven-Frequenzen 0.0130, 0.0440 und 0.1048. Werden die oben erwähnten Diskretisationsfehler davon subtrahiert, so wird der richtige Wert 0.01 erhalten.

Die Klasse F wird für alle k gut beschrieben, obschon bei grossen k die relative Differenz in ω^2 zwischen sich folgenden Modi minim wird. Bei $k = 1000$ beträgt sie zwischen F_1 und F_2 $3 \cdot 10^{-5}$. Die Eigenfunktionen der Klasse S, deren Eigenwerte bei grossen k ähnlich kleine relative Differenzen zeigen, werden für steigende k sogar besser beschrieben. So findet man bei $k = 1000$ zehn Eigenwerte und -funktionen in der richtigen Reihenfolge. Im Gegensatz dazu waren es in Fig. 6 nur deren fünf. Bei kleinem k sind Spektrum und Funktionen dem Fall $k = 0.5$ ähnlich.

5. Folgerungen

Es wurde an einem einfachen Modell gezeigt, dass die Methode der finiten Elemente sich eignet, dynamische Probleme der Magnetohydrodynamik vom Typ Eigenwertproblem zu beschreiben. Spektrum und Eigenfunktionen haben gut verständliche Eigenschaften. Sie konvergieren einzeln gegen die exakten analytischen Werte. Allfällige gegebene Wechselwirkungen verschwinden beim Verändern der Intervallzahl, mit der die Diskretisierung stattfindet.

Den Herren Prof. Dr. E.S. Weibel und Prof. Dr. J. Descloux danken wir für wertvolle Diskussionen.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Takeda, Y. Shimomura, M. Ohta, and M. Yoshikawa,
Numerical Analysis of Magnetohydrodynamic Instabilities by the
Finite Element Method, Phys. Fluids, 15, 2193-2201 (1972)

- [2] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Structural and
Continuum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1967

- [3] V.D. Shafranov, Hydromagnetic Stability of a Current-Carrying
Pinch in a Strong Longitudinal Magnetic Field, Sov. Phys. Tech.
Phys., 15, 175-183 (1970)

- [4] G. Schmidt, Physics of High Temperature Plasmas,
Academic Press, New York, 1966

- [5] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics,
Vol. I, Interscience Publ., Inc., New York, 1953

- [6] H.R. Schwarz, Numerik symmetrischer Matrizen, B.G. Teubner,
Stuttgart, 1972

- [7] E. Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik,
B.G. Teubner, Stuttgart, 1961.

Zusammenfassung

Die Eigenschwingungen eines zylindrischen homogenen Plasmas können analytisch untersucht und in drei Klassen eingeteilt werden. Die Eigenwerte der ersten Klasse sind gut getrennt, jene der zweiten haben einen Häufungspunkt, und der Eigenwert der dritten Klasse ist unendlich entartet. Es wird untersucht, wie und unter welchen Bedingungen die Eigenwerte und -funktionen des mit finiten Elementen diskretisierten Problems gegen die wahre Lösung streben.

Abstract

The eigenmodes of a cylindrical homogeneous plasma may be calculated analytically. There are three classes of solutions. The eigenvalues of the first class are well separated, those of the second class have a point of accumulation. The eigenvalue of the third class is infinitely degenerated. The eigenvalues and eigenmodes of the corresponding discrete finite element problem tend towards the true solution. The convergence properties are discussed.

Bildlegenden

- Fig. 1 Das Spektrum ω^2 der drei Klassen S, A und F in Funktion der Anzahl Intervalle n. Am rechten Rand ist die exakte analytische Lösung angegeben.
- Fig. 2 Prozentuale Abweichung Δ der numerisch gefundenen radialen Plasmabewegung von der analytischen $\Delta = (\xi_r \text{ num.} - \xi_r \text{ anal.}) / |\xi_r \text{ anal. max}|$ in Funktion des Radius. Die ersten drei Modi der Klasse F wurden mit $n = 16$ (—), $n = 8$ (-----), $n = 4$ (-·-·-·-) und $n = 2$ (.....) gerechnet.
- Fig. 3 Analytische (—) und numerische (o) Lösung für ξ_r des Modus F_6 in Funktion des Radius.
- Fig. 4 Konvergenzverhalten der radialen Plasmabewegung auf der Achse. Es ist die prozentuale Abweichung Δ vom analytischen Wert für die Modi F_1 (—), F_3 (-----) und F_5 (.....) in Funktion der Anzahl Intervalle n gezeigt.
- Fig. 5 Analytische (—) und numerische (o) Lösung für die longitudinale Auslenkung ξ_z der Modi S_1 und S_2 in Funktion des Radius.
- Fig. 6 Das Spektrum $\Delta\omega^2 = \omega^2 - s^2 k^2 / (1 + s^2)$ der Klasse S in Funktion der Anzahl Intervalle n. Am rechten Rand ist die exakte analytische Lösung angegeben.

T a b e l l e 1

m =	0	1	2	3	4	5	6
F ₁	- .1	- .1	- .1	- .4	- .7	-1.0	-1.2
	.0	1.8	.7	.6	3.6	4.6	6.6
F ₂	.6	- .5	.3	- .3	- .6	- .9	-1.2
	.1	7.5	4.0	1.0	2.6	1.1	3.1
F ₃	1.9	- .3	1.2	.6	.2	- .1	- .4
	1.2	18.5	8.3	.1	4.7	5.9	2.9
F ₄	3.9	.4	2.7	2.1	1.7	1.3	.9
	1.1	10.6	5.2	.8	5.9	.3	9.7
F ₅	6.5	3.3	5.0	4.2	3.7	3.2	2.6
	6.2	145.8	9.4	7.5	7.9	26.6	13.6
F ₆	9.8	17.2	7.2	7.6	6.1	5.5	4.6
	16.3	100.1	56.1	16.5	13.0	22.0	11.7

Prozentuale Abweichung der numerisch berechneten Werte für ω^2 (obere Zahl) und ξ_{\max} (untere Zahl) von der analytischen. Es sind die Resultate für die ersten 6 Modi F_i mit den untersten 7 azimuthalen Wellenzahlen m angegeben.

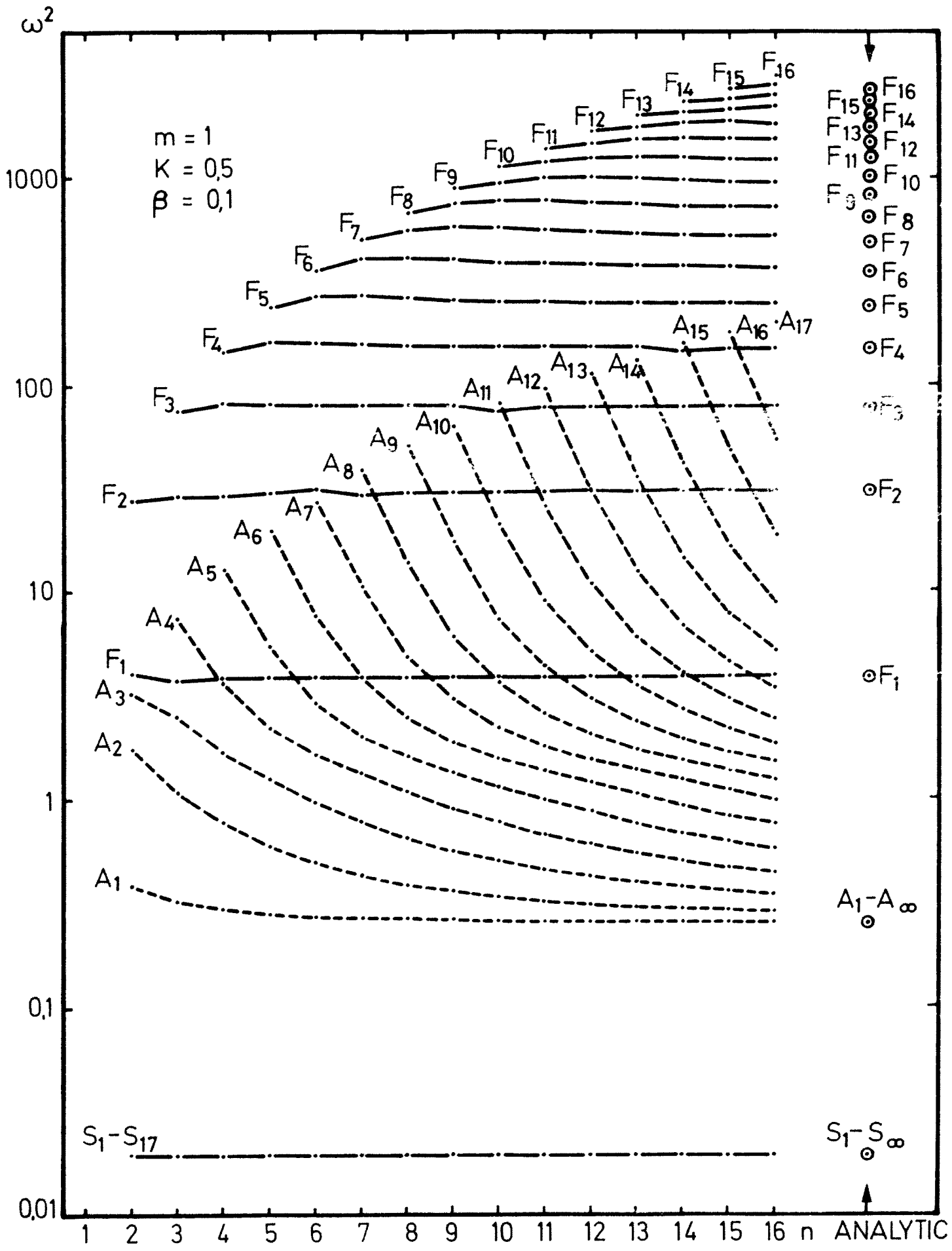


FIGURE 1

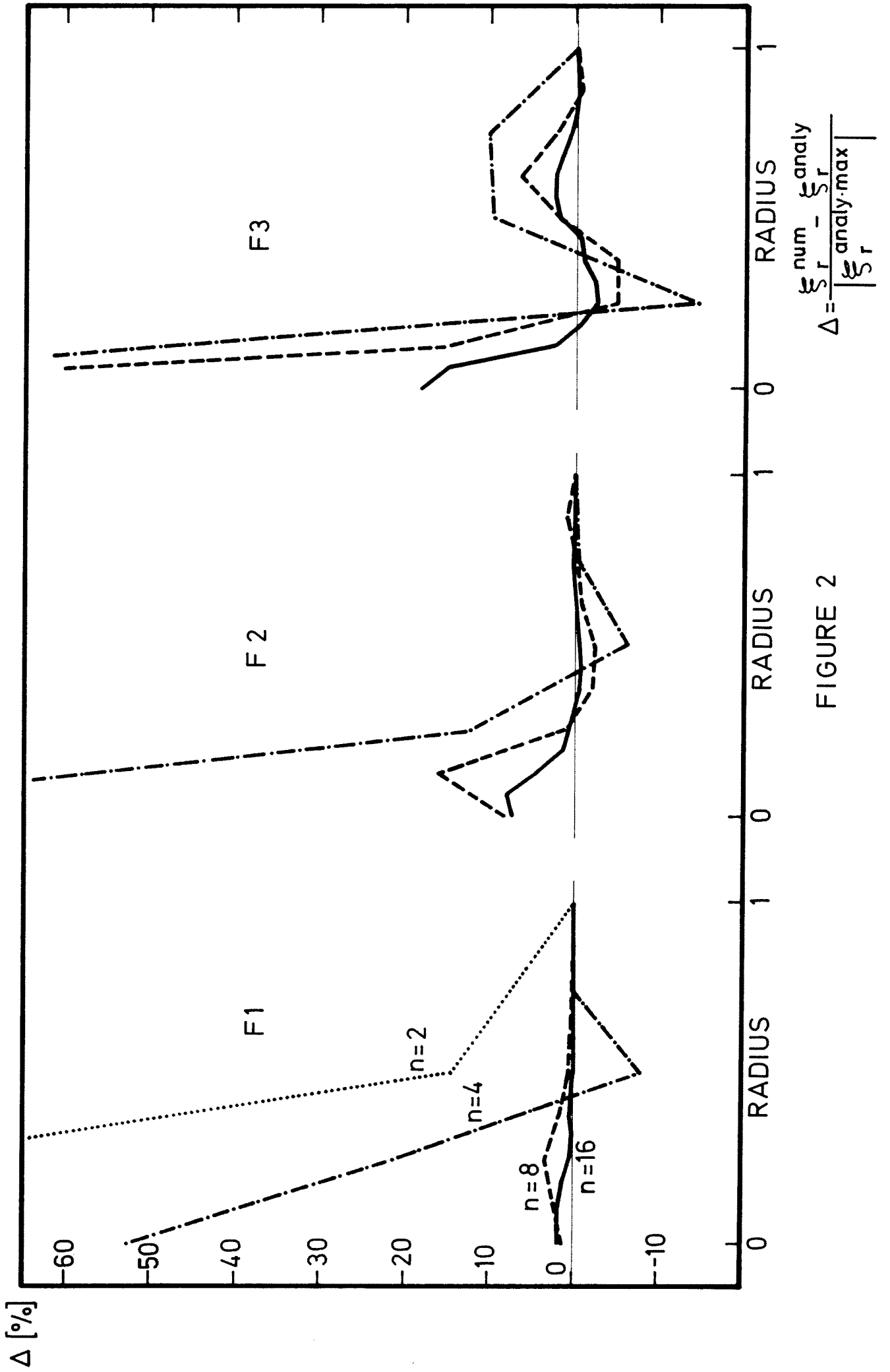


FIGURE 2

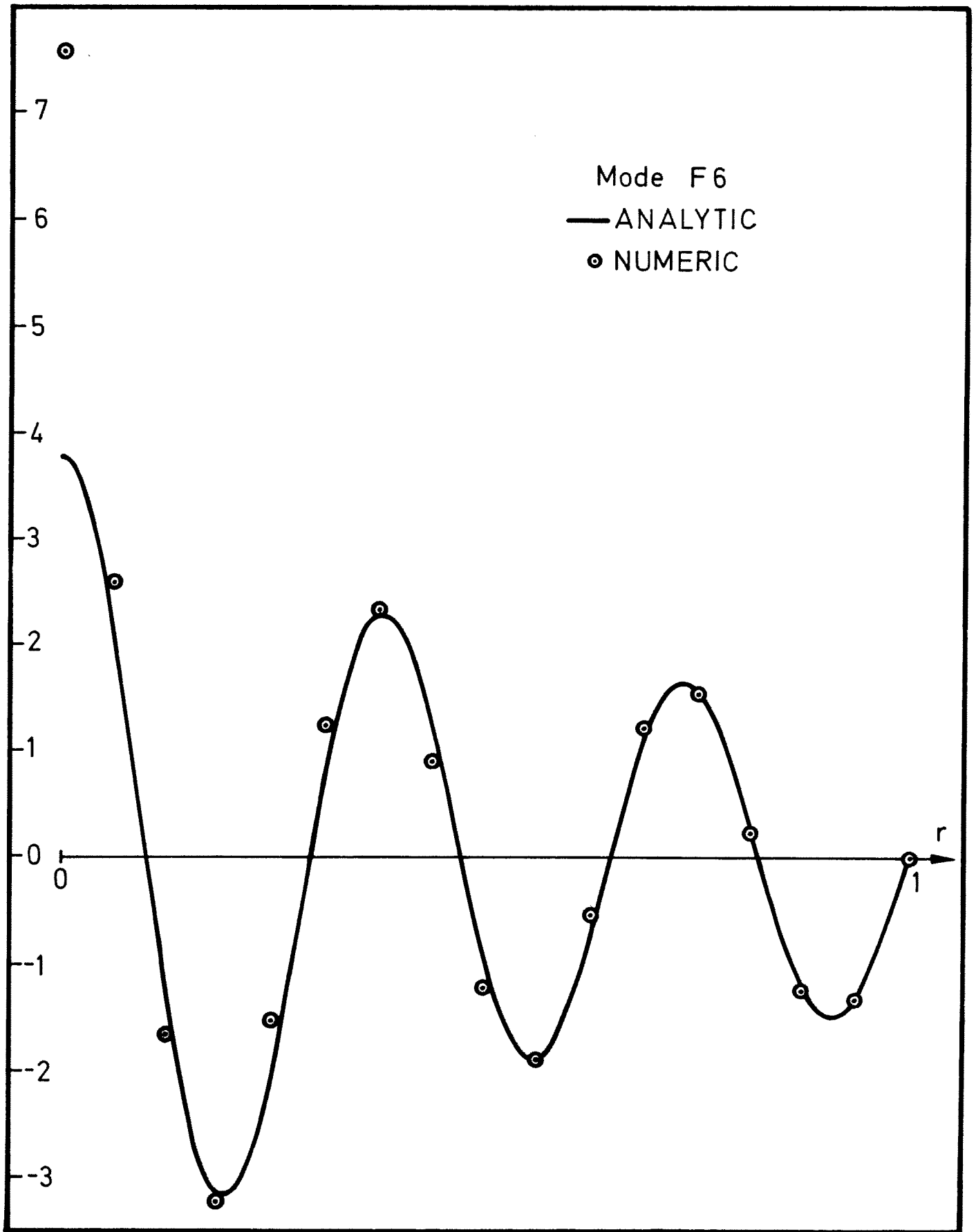


FIGURE 3

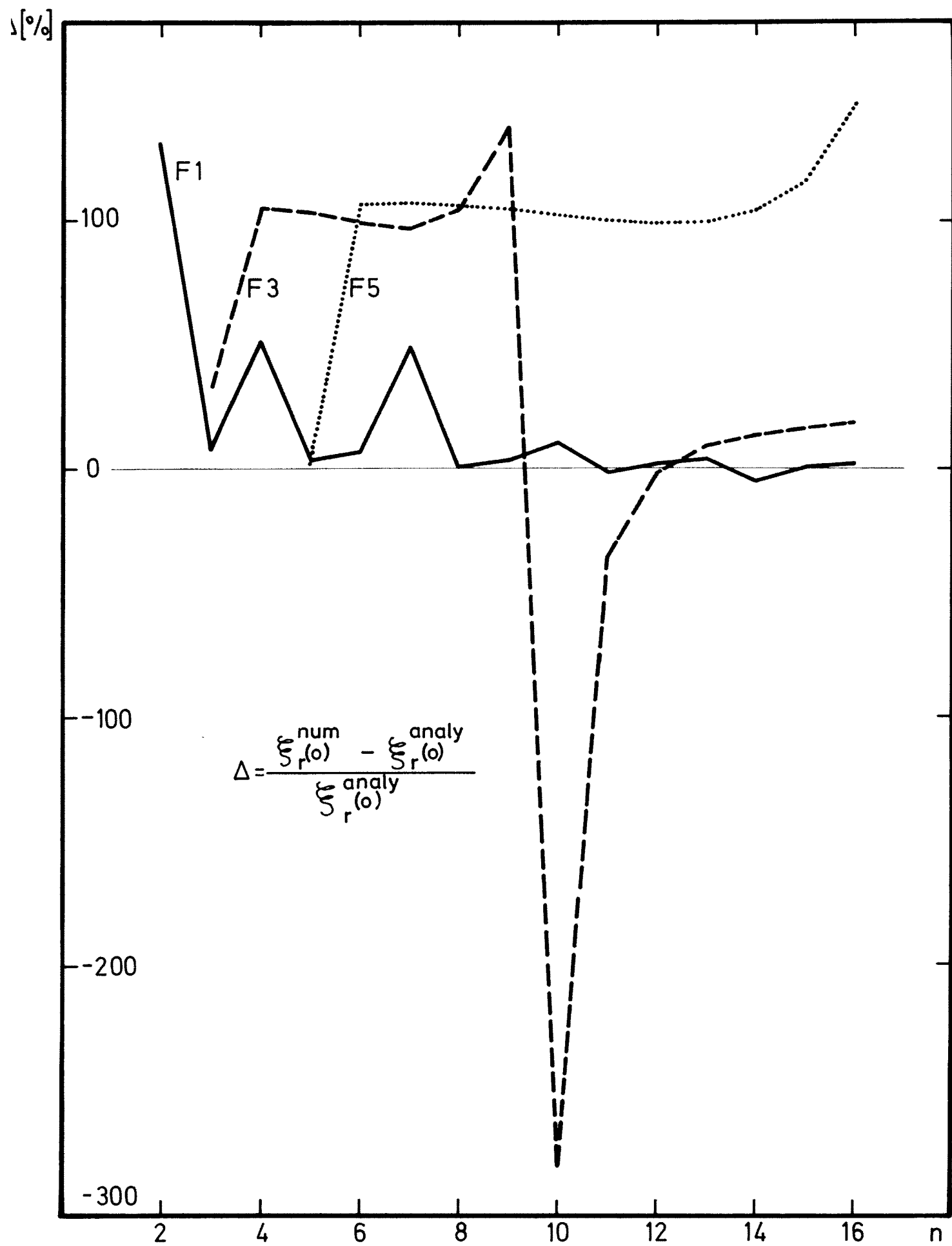


FIGURE 4

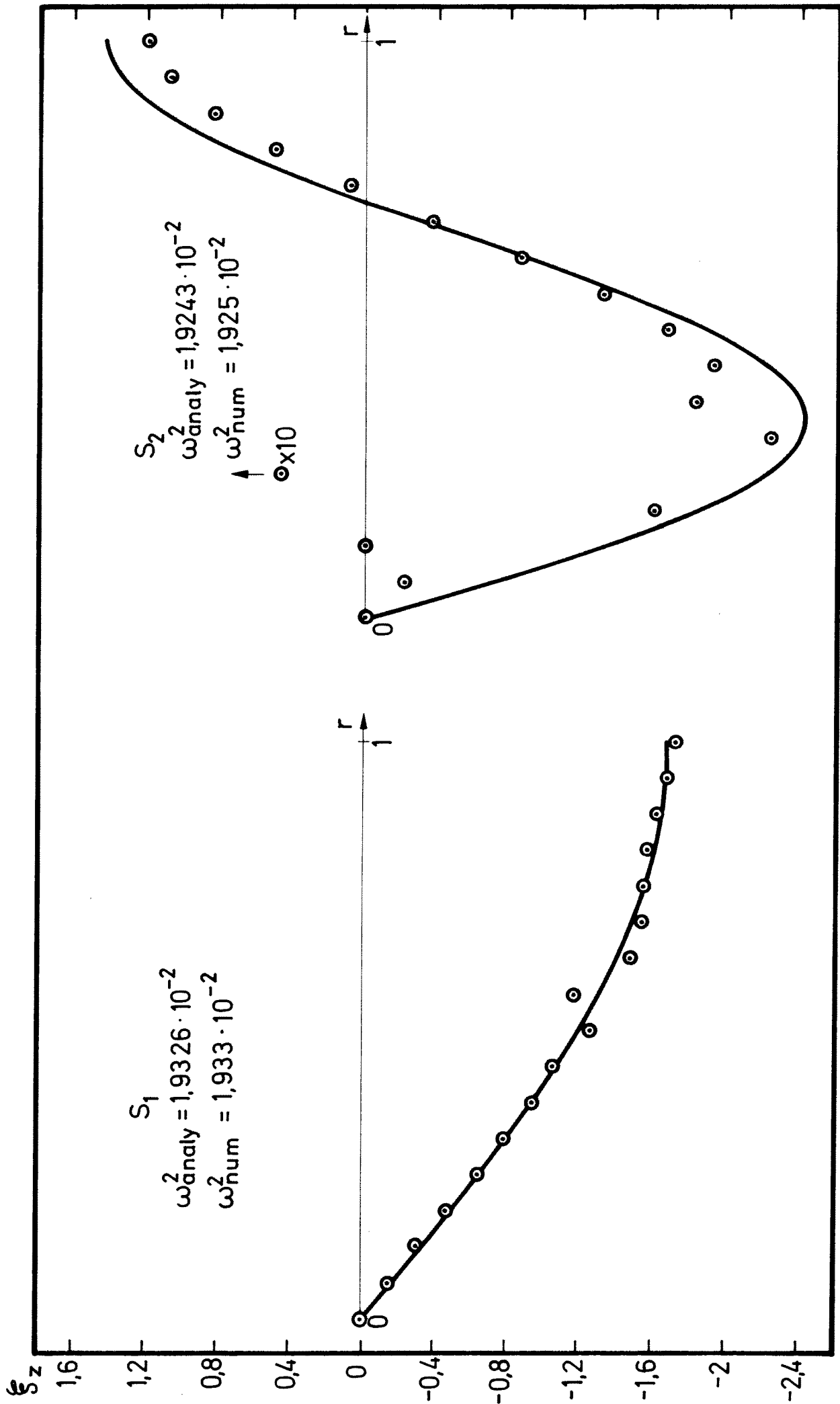


FIGURE 5

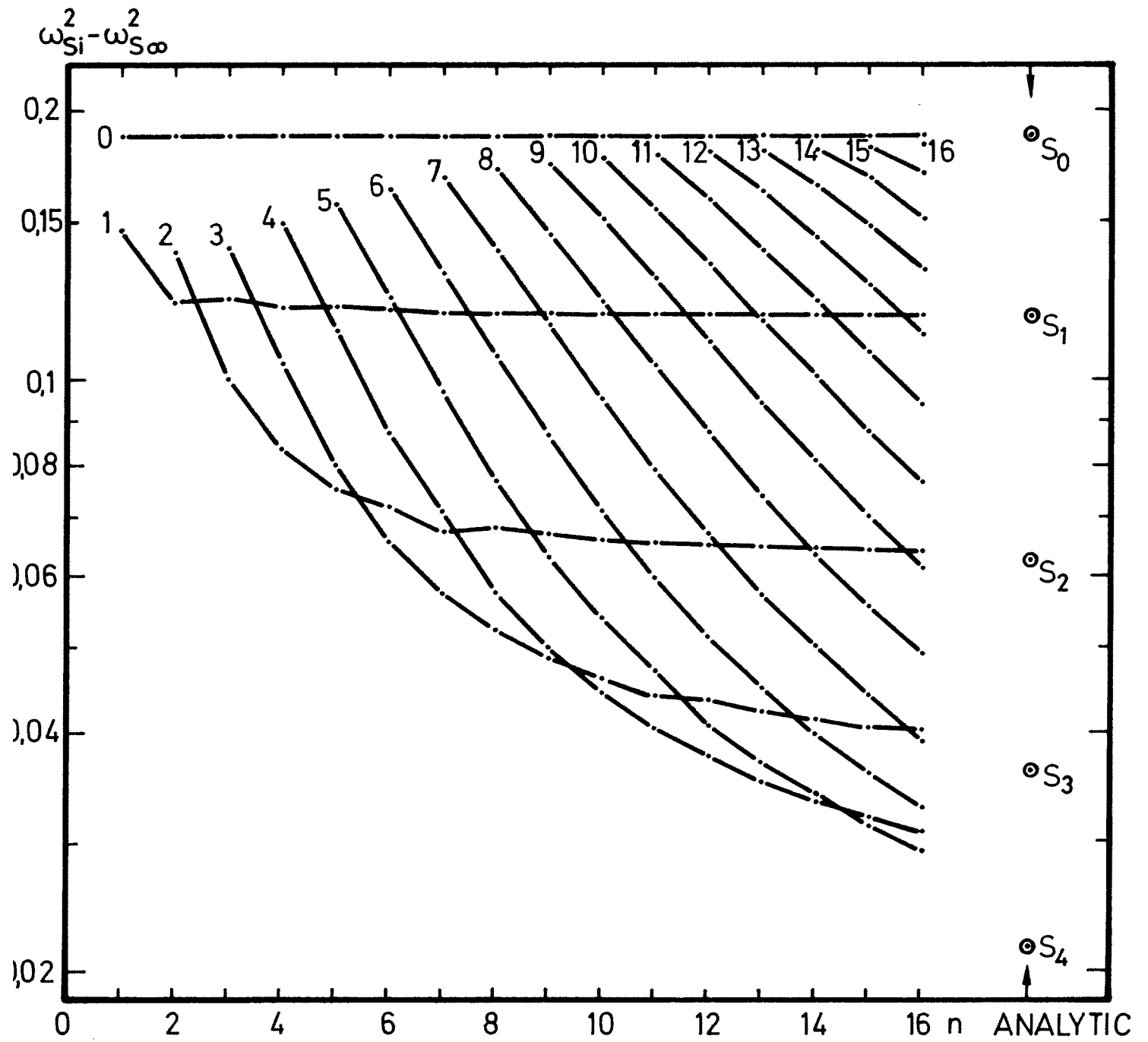


FIGURE 6