

Décembre 1972

LRP 58/72

CENTRE DE RECHERCHES EN PHYSIQUE DES PLASMAS
FINANCÉ PAR LE FONDS NATIONAL SUISSE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LE MECANISME DU PINCH HELICOIDAL STABILISE
PAR RETROACTION

R. Keller

LAUSANNE

LE MECANISME DU PINCH HELICOIDAL STABILISE
PAR RETROACTION

R. Keller

I. Introduction

On considère un pinch hélicoïdal rectiligne, dont les extrémités sont maintenues de façon rigide par les électrodes. Seuls les modes $m = 1$ (kink mode) sont étudiés, dans les approximations suivantes: diamètre du plasma petit, comparé aux longueurs d'ondes et au diamètre de la paroi extérieure, plasma parfaitement conducteur, équations du mouvement linéarisées.

La méthode consiste en une analyse de Fourier de la déformation du plasma, ainsi que de la force de rétroaction projetée dans un référentiel hélicoïdal. Les questions de déphasage et de couplage sont discutées. Le premier mode longitudinal est stabilisable loin au-dessus de la limite de Kruskal-Shafranov, et on verra qu'il existe une structure magnétique permettant la stabilisation simultanée de deux modes.

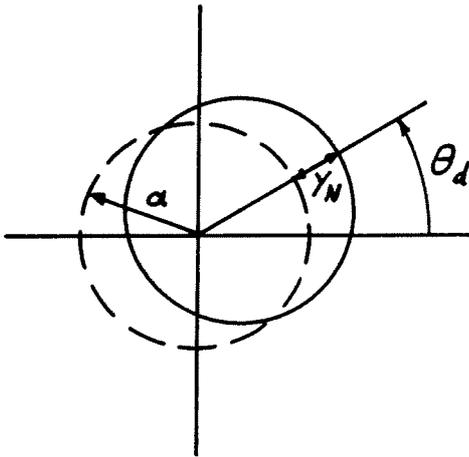
2. Description du plasma

2.1 Définition de la perturbation

L'équilibre d'un pinch hélicoïdal rectiligne devient instable lorsque l'hélicité du champ magnétique dépasse une certaine valeur définie par la condition de Kruskal-Shafranov. Le mode de déformation $m = 1$ (kink mode), que l'on se propose de stabiliser au moyen de conducteurs hélicoïdaux alimentés par rétroaction, peut être analysé sous un point de vue purement mécanique. Dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes, le plasma se déplace comme une colonne incompressible de section circulaire. On admet que les deux extrémités de la colonne sont maintenues de façon rigide par les électrodes. En outre, le plasma est supposé parfaitement conducteur. L'équation du mouvement est linéarisée et l'on ignore l'effet de la paroi extérieure.

La déformation du plasma est décomposable en une somme de modes normaux de la forme

$$r = a + \gamma_N e^{i(m\theta + h_N z - \omega_N t)} \quad (1)$$



Pour $m = 1$ et $|\gamma_N| \ll 1$ cette expression représente simplement un cercle (voir figure ci-contre) de rayon a , déplacé d'une valeur $|\gamma_N|$ dans la direction de l'azimut θ_d défini par

$$\theta_d + h_N z - \omega_N t + \arg(\gamma_N) = 0 \quad (2)$$

Il est donc judicieux, pour le calcul, d'introduire le déplace-

ment de l'axe et de lui attribuer les coordonnées θ_d et z comme suit

$$\xi = |Y_N| e^{i[-\arg(Y_N) - h_N z + \omega_N t]} \quad (3)$$

On remarquera que le signe de l'exposant a changé.

L'expression (3) est appelée mode de base du mouvement de l'axe du plasma.

Le nombre azimutal m est défini positivement ($m = +1$) et le nombre d'onde h_N est négatif. Par conséquent, le plasma forme une hélice de sens droit, tournant d'un seul tenant avec la fréquence angulaire $+\omega_N$.

Soit maintenant un domaine $-\ell/2 < z < \ell/2$ aux limites duquel le plasma est maintenu de façon rigide $r(\pm \ell/2) = a$. Une déformation quelconque sera représentée par une série de Fourier

$$r = a + e^{i(\theta + N_c K z)} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n e^{-i\omega_n t} \sin(n K z + \pi n/2) \quad (4)$$

On se limite à des coefficients Y_n réels, et ω_n est le même pour les deux indices $N = N_c + n$ et $N = N_c - n$, en raison des contraintes aux extrémités. Chaque harmonique d'indice n est constituée d'une somme de deux ondes, dont les vecteurs sont $h_N = (N_c + n)K$ et $(N_c - n)K$. La grandeur N_c représente l'hélicité de la colonne, c'est-à-dire la surface hélicoïdale sur laquelle la perturbation est inscrite. Les conditions aux limites imposent

$$K = -\frac{\pi}{\ell} \quad (5)$$

Chaque composante Fourier de l'expression (4) contient deux modes normaux explicités comme suit

$$r_n = a + \frac{Y_n}{2i} e^{i(\theta + N_c K z + n K z) - i\omega_n t + \frac{i\pi}{2} n} - \frac{Y_n}{2i} e^{i(\theta + N_c K z - n K z) - i\omega_n t - \frac{i\pi}{2} n} \quad (6)$$

La première exponentielle représente une onde progressant avec la vitesse de phase $\omega_n / (N_c + n)K$. La seconde représente l'onde réfléchie à l'extrémité du pinch, sa vitesse de phase est $\omega_n / (N_c - n)K$. Vues d'un référentiel hélicoïdal $\theta = -N_c Kz$ les deux vitesses sont égales et de sens contraire $\pm \omega_n / nK$. Dans le système hélicoïdal considéré, il y a donc réflexion simple aux extrémités du domaine [1].

L'expression (4) ne contient que les modes n tournant dans le sens $+\omega_n$. Le cas général s'obtient par addition d'une expression similaire avec les ω_n négatifs, mais il ne sera pas nécessaire d'en tenir compte.

Le passage à la représentation du mouvement de l'axe du plasma s'effectue selon le schéma précédent: On supprime θ et l'on change le signe des exposants, ce qui conduit à

$$\xi_n = \frac{\gamma_n}{2} \left[e^{-i(N_c - n)Kz + \frac{i\pi}{2}(n-1)} + e^{-i(N_c + n)Kz - \frac{i\pi}{2}(n-1)} \right] e^{i\omega_n t} \quad (7)$$

L'ordre des termes a été interverti pour des raisons de convenance. En outre, l'imaginaire i a été transférée dans les exposants, tout en profitant de placer le signe $+$ devant les exponentielles. Les modes de base possèdent de la sorte un coefficient positif (et réel). L'expression ci-dessus, mise sous forme compacte,

$$\xi_n = \gamma_n e^{-iN_c Kz + i\omega_n t} \sin(nKz + \pi n/2) \quad (8)$$

s'appelle un mode propre. Une déformation quelconque de l'axe équivaut à une somme de modes propres

$$\xi = \sum_n \xi_n \quad (9)$$

Il est entendu que nKa doit rester très inférieur à l'unité. Les nombres N_c ne sont pas nécessairement égaux pour tous les modes propres, mais on verra qu'il n'y a qu'un seul N_c en l'absence de rétroaction.

2.2 Relation de dispersion

On se réfère à un traitement rigoureux du problème [2], [3], [4] pour déduire la relation de dispersion adaptée à notre approximation. Les forces de rappel du plasma (forces dues à la déformation du champ causée par le plasma) se calculent comme suit:

En l'absence de déformation, le champ dans l'espace vide extérieur, écrit en coordonnées r, θ, z est

$$B^V = \left(0, \frac{a}{r} B_0, \alpha_v B_0 \right) \quad (10)$$

A l'intérieur du plasma on a

$$B^P = \left(0, 0, \alpha_p B_0 \right) \quad (11)$$

α_v et α_p sont des constantes, et B_0 est le champ azimuthal régnant à la surface du plasma. A ces champs s'ajoutent les perturbations δB^V et δB^P causées par la déformation. Le champ extérieur peut être dérivé d'un potentiel scalaire

$$\phi = L(r) e^{i(\theta + NKz)} \quad (12)$$

(La dépendance du temps est omise). Donc

$$\delta B^v = \left(\frac{\partial L}{\partial r}, \frac{i}{r} L, i N K L \right) e^{i(\theta + N K z)} \quad (13)$$

La solution en géométrie cylindrique est

$$L(r) = C_1 I_1(N K r) + C_2 K_1(N K r) \quad (14)$$

où I_1 et K_1 sont les fonctions de Bessel et de Hankel modifiées. Pour de petits arguments, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde est grande comparée au rayon b du tube, il est légitime de développer ces fonctions et de ne garder que le premier terme. La fonction de Hankel se résume à

$$K_1(N K r) \cong \frac{2}{\pi N K r}$$

Si par surcroît, le rayon du tube est très supérieur au rayon a du plasma, on peut ignorer la fonction de Bessel, car sa contribution est de l'ordre de a^2/b^2 . Cela revient à dire que la paroi est sans effet.

La constante C_2 est déterminée par la condition à la surface du plasma, exigeant que le champ doit être parallèle à celle-ci, c'est-à-dire $(\vec{n} \cdot B)_r = 0$. Pour un mode normal

$$r = a + \gamma_N e^{i(\theta + N K z)} \quad (15)$$

le vecteur perpendiculaire à la surface est donné par

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \text{grad} \left[a + \gamma_N e^{i(\theta + N K z)} - r \right] \\ &= \left(-1, \frac{i \gamma_N}{a} e^{i(\theta + N K z)}, i \gamma_N N K e^{i(\theta + N K z)} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

En annulant les termes de 1er ordre du produit scalaire, la constante devient

$$\frac{2C_2}{\eta} = -i\gamma_N B_0 N K a (1 - Nq) \quad (17)$$

avec

$$q = -\alpha_v K a \quad (18)$$

La perturbation du champ extérieur devient

$$\delta B^v = \frac{\gamma_N B_0 a}{r^2} (1 - Nq) e^{i(\theta + NKz)} (i, 1, NKr) \quad (19)$$

Ainsi l'on obtient la pression magnétique

$$2\mu_0 \delta p^v = (B^v + \delta B^v)^2 - (B^v)^2 \quad (20)$$

A la surface du plasma, c'est-à-dire pour r donné par (15), elle est égale à

$$\delta p^v = \frac{\gamma_N B_0^2 Nq}{a\mu_0} (Nq - 2) e^{i(\theta + NKz)} \quad (21)$$

La partie réelle représente la valeur physique de la pression. Cette dernière est maximale pour $\theta + NKz = 0$, donc la force résultante sera alignée dans la direction

$$\theta_p = -NKz \quad (22)$$

Par intégration selon θ , on trouve la force agissant latéralement sur le plasma

$$F^v = \frac{\eta}{\mu_0} \gamma_N B_0^2 Nq (2 - Nq) e^{-iNKz} \quad (23)$$

comprise par unité de longueur. L'exponentielle exprime la direction de la force.

Le champ intérieur se déduit également d'un potentiel scalaire, dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes ($NKa \ll 1$). Sa valeur est donnée par

$$\mathcal{J}B^P = \text{const. grad} \left[I_1(NKr) e^{i(\theta + NKz)} \right] \quad (24)$$

En procédant de la même manière, le champ intérieur devient

$$\mathcal{J}B^P = \gamma_N B_0 \alpha_p NK e^{i(\theta + NKz)} (i, -1, -NKr) \quad (25)$$

De la condition d'équilibre de pression découle la relation

$$(\alpha_p Ka)^2 \cong (1-\beta)(\alpha_v Ka)^2 \quad (26)$$

valable aux grandes longueurs d'ondes. La variation de pression due à ce champ se trouve être égale à

$$\mathcal{J}P^P = - \frac{\gamma_N B_0^2 (1-\beta)}{\alpha \mu_0} (Nq)^2 e^{i(\theta + NKz)} \quad (27)$$

et la force latérale par unité de longueur

$$F^P = - \frac{\pi}{\mu_0} \gamma_N B_0^2 (1-\beta) (Nq)^2 e^{-iNKz} \quad (28)$$

Finalement, la somme des forces de rappel s'écrit

$$F_N = - \frac{\pi}{\mu_0} B_0^2 Nq \left[(2-\beta) Nq - 2 \right] \gamma_N e^{-iNKz + i\omega_N t} \quad (29)$$

où l'on a réintroduit la dépendance du temps. La force F_N est donc proportionnelle au mode de base

$$\xi_N = \gamma_N e^{-iNkz + i\omega_N t} \quad (30)$$

Cela implique que la force de rappel est parallèle à l'élongation du mode considéré. En vertu du principe d'orthogonalité, la force totale sera la somme des forces causées par tous les modes de base, soit

$$F = - \sum A(N) \xi_N \quad (31)$$

$A(N)$ est une fonction quadratique du nombre d'onde:

$$A(N) = \frac{\pi}{\mu_0} B_0^2 Nq \left[(2-\beta)Nq - 2 \right] \quad (32)$$

Appliquée à un seul mode propre, la formule (31) devient:

$$F_N = -\frac{\gamma_N}{2} \left[A(N_c - n) e^{-i(N_c - n)Kz + \frac{i\pi}{2}(n-1)} + A(N_c + n) e^{-i(N_c + n)Kz - \frac{i\pi}{2}(n-1)} \right] e^{i\omega_n t} \quad (33)$$

L'expression entre crochets représente la somme vectorielle de deux forces. Le point important de notre développement réside en ce que la somme des forces doit être orientée dans la même direction que l'azimut du déplacement. Si tel n'était pas le cas, il y aurait apparition d'une force transversale, qui ne pourrait être mise en équilibre avec la force centrifuge du mouvement tournant exprimé par (8). Il faudrait alors que d'autres modes non compris dans (8) apparaissent. L'état stationnaire n'est possible que dans la condition suivante

$$A(N_c - n) = A(N_c + n) \quad (34)$$

Cela revient à dire que la force projetée dans le système d'hélicité N_c (c'est-à-dire F_N divisé par $\exp(-iN_c Kz + i\omega_n t)$) est réelle.

De la condition (34) on déduit la valeur de N_c particulière à cette situation, que l'on appellera hélicité d'équilibre

$$N_c = \frac{1}{(2-\beta)g} \quad (35)$$

Elle est indépendante de l'indice n grâce au fait que A est une fonction quadratique de N . On a dès lors avantage à introduire une nouvelle grandeur

$$g = \frac{\pi B_0^2 q}{\mu_0 N_c} \quad (36)$$

En utilisant la vitesse dite d'Alfvén $v_A^2 = B^2/\mu_0 \rho$ et la masse linéaire $M = \pi a^2 \rho$ la signification de g ressort comme suit

$$g/M = v_A^2 K^2 (2-\beta) \quad (37)$$

La grandeur $A(N)$ prend maintenant la forme

$$A(N) = (N^2 - 2NN_c)g \quad (38)$$

d'où

$$A(N_c \pm n) = (n^2 - N_c^2)g \quad (39)$$

Finalement, la force de rappel projetée dans le système N_c devient

$$\begin{aligned} F_N e^{iN_c Kz - i\omega_n t} &\equiv (F)_n \sin(nKz + \pi n/2) \\ &= -\gamma_n g (n^2 - N_c^2) \sin(nKz + \pi n/2) \end{aligned} \quad (40)$$

Par la même occasion on a introduit le coefficient de Fourier $(F)_n$ de la force.

La force d'inertie due au mouvement de l'axe du pinch est une force centripète parallèle à l'élongation, donc réelle dans le référentiel N_c

$$(F_i)_n \sin(nKz + \pi n/2) = M\omega_n^2 \gamma_n \sin(nKz + \pi n/2) \quad (41)$$

Dans l'état stationnaire, cette force de d'Alembert est en équilibre avec la force de rappel

$$(F_i)_n + (F)_n = 0 \quad (42)$$

De cette équation d'équilibre, on tire la fréquence angulaire du mode en question

$$\omega_n^2 = \frac{g}{M}(n^2 - N_c^2) \quad (43)$$

L'égalité obtenue est une relation de dispersion. Il y a stabilité lorsque $N_c^2 < n^2$. En particulier, pour le mode fondamental $n = 1$ la condition requise est

$$(2 - \beta) q > 1 \quad (44)$$

Cette dernière expression représente la condition de Kruskal-Shafranov appliquée à un pinch fixé aux extrémités.

D'après la définition de q , formule (18), l'hélicité du champ magnétique régnant à la surface du plasma est égale à $1/q$. A la limite de stabilité et pour $\beta = 1$, on remarque que la colonne de plasma s'oriente parallèlement au champ.

3. Analyse de Fourier de la déformation et des forces

3.1 Hélicité hors d'équilibre

La force de rétroaction modifiera la valeur de l'hélicité d'équilibre. Il y a donc intérêt à examiner le comportement d'un plasma dont la torsion est légèrement différente de N_c . Soit une hélicité imposée

$$N = N_c + \mu \quad (45)$$

au temps $t = 0$. L'addition de μ a comme effet d'incliner l'axe du plasma en le faisant tourner dans un plan perpendiculaire au rayon. Soit un cas plus général, formé par la superposition d'une déformation perpendiculaire à la précédente, exprimée par un facteur $\exp(-\epsilon Kz)$. La perturbation initiale est alors

$$\xi = \gamma_s e^{-iN_c x} e^{-(\epsilon + i\mu)x} \sin(sx + \pi s/2) \quad (46)$$

avec $x = Kz$ et $|\epsilon + i\mu| \ll 1$

Pour effectuer l'analyse de Fourier dans le système hélicoïdal N_c on divise au préalable la perturbation par $\exp(-iN_c x)$. Les composantes de Fourier sont dès lors égales à

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \xi e^{+iN_c x} \sin(nx + \pi n/2) dx \cong \gamma_s c(\epsilon + i\mu) \quad (47)$$

Le développement s'écrit:

$$f = e^{-iN_c x} \left[y_s \sin(sx + \pi s/2) + \sum_{n \neq s} y_s c(\varepsilon + i\mu) \sin(nx + \pi n/2) \right] \quad (48)$$

dont les coefficients c valent

$$c = \frac{8ns}{\pi(n^2 - s^2)^2} \quad (49)$$

La somme ne contient que des termes

$$s + n \quad \text{impair .}$$

L'expression (48) contient donc un terme principal $\sin(sx + \pi s/2)$ (par exemple $\cos x$ pour $s = 1$), et des harmoniques dont les amplitudes constituent des vecteurs $y_s c(\varepsilon + i\mu)$. Ces derniers possèdent tous le même azimut au temps $t = 0$. Il s'agit de vérifier si ces vecteurs peuvent tourner indépendamment, et dans l'affirmative, de déterminer leurs fréquences de rotation. Cela expliquera après coup la raison d'être de la combinaison $\varepsilon + i\mu$.

3.2 Analyse des forces

De même que la déformation, la force de rappel est composée d'un spectre de Fourier. Il s'agit d'équilibrer les termes avec ceux de la force d'inertie. Soit de nouveau la perturbation (46) mise sous une forme adéquate

$$f = \frac{y_s}{2} \left[e^{-i(N_c + \mu - i\varepsilon - s)x + \frac{i\pi}{2}(s-1)} + e^{-i(N_c + \mu - i\varepsilon + s)x - \frac{i\pi}{2}(s-1)} \right] \quad (50)$$

La formule (31) est applicable ici grâce au fait que la relation de dispersion est encore valable pour les nombres d'ondes complexes. La variable de la fonction A(N) prend les deux valeurs ($N_c + \mu - i\varepsilon \mp s$), ce qui donne, d'après (38)

$$A(N_c + \mu - i\varepsilon \mp s) \cong g \left[s^2 - N_c^2 \mp 2\mu s \pm 2i\varepsilon s \right] \quad (51)$$

La force se calcule aisément, en faisant usage de (31)

$$F \cong -\frac{g\gamma_s}{2} e^{-iN_c x} \left\{ (s^2 - N_c^2) \left[e^{-i(\mu - i\varepsilon - s)x + \frac{i\pi}{2}(s-1)} + e^{-i(\mu - i\varepsilon + s)x - \frac{i\pi}{2}(s-1)} \right] - 2s(\mu - i\varepsilon) \left[e^{-i(\mu - i\varepsilon - s)x + \frac{i\pi}{2}(s-1)} - e^{-i(\mu - i\varepsilon + s)x - \frac{i\pi}{2}(s-1)} \right] \right\} \quad (52)$$

L'analyse de Fourier de ceci, dans le système N_c , est de la forme

$$\sum_j (F)_j = (F)_s \sin(sx + \pi s/2) + \sum_{n \neq s} (F)_n \sin(nx + \pi n/2) \quad (53)$$

Le terme principal s devient

$$(F)_s = -g\gamma_s (s^2 - N_c^2) \quad (54)$$

Le calcul des autres termes conduit au résultat

$$(F)_n = -g\gamma_s c (n^2 - N_c^2) (\varepsilon + i\mu) \quad \text{pour } s+n \text{ impair} \quad (55)$$

On retrouve les mêmes coefficients (49). Il n'y a pas de termes $s + n$ pair dans notre approximation. Les composantes Fourier des forces, que l'on vient d'obtenir, possèdent une phase nulle à l'instant $t = 0$. Il est évident que ces forces doivent tourner synchrones avec les modes propres.

Si par anticipation l'on admet que les harmoniques de (48) tournent, leurs forces d'inertie seront

$$(F_i)_s = M \omega_s^2 y_s \quad \text{et} \quad (F_i)_n = M \omega_n^2 y_s c (\varepsilon + i\mu) \quad (56)$$

L'équilibre prescrit par (42) est réalisé lorsque les fréquences valent

$$\omega_s^2 = \frac{g}{M} (s^2 - N_c^2) \quad (57)$$

$$\omega_n^2 = \frac{g}{M} (n^2 - N_c^2) \quad (58)$$

On constate que le résultat est identique à celui obtenu précédemment, formule (43), si les modes existant à l'instant $t = 0$ tournent effectivement à la fréquence voulue. Le développement (48) doit donc être doté des facteurs temporels:

$$\xi = e^{-iN_c x} \left[y_s e^{i\omega_s t} \sin(sx + \pi s/2) + \sum_{n \neq s} y_n e^{i\omega_n t} \sin(nx + \pi n/2) \right] \quad (59)$$

avec

$$y_n = y_s c (\varepsilon + i\mu)$$

La transformée inverse de cette expression ne reproduit évidemment plus la perturbation initiale (46) multipliée par $e^{i\omega_s t}$, sauf pour $t = 0$.

On en tire la conclusion suivante: Une perturbation d'hélicité hors d'équilibre $N_c + \mu$ ne peut pas tourner d'un seul tenant. Sa modification au cours du temps est le résultat d'une superposition de modes propres possédant tous l'hélicité d'équilibre N_c .

Il convient d'examiner maintenant le mouvement d'une colonne de plasma que l'on maintiendrait artificiellement sous une forme hélicoïdale différente de l'hélicité d'équilibre N_c , en lui afférant une certaine rigidité. Soit $N_c + \mu_c$ la torsion imposée. La force de rappel est alors

$$F = -\frac{\gamma_s}{2} e^{-i(N_c + \mu_c)x} \left[A(N_c + \mu_c - s) e^{isx + \frac{i\pi}{2}(s-1)} + A(N_c + \mu_c + s) e^{-isx - \frac{i\pi}{2}(s-1)} \right] \quad (60)$$

Après avoir projeté cette force dans le système $N_c + \mu_c$, ce qui revient à chasser l'exponentielle mise en évidence, on procède à l'analyse de Fourier. Le terme principal s'avère être égal à

$$(F)_s = -g\gamma_s (s^2 - N_c^2 + \mu_c^2) \quad (61)$$

La fréquence propre

$$\omega_s^2 = \frac{g}{M} (s^2 - N_c^2 + \mu_c^2) \quad (62)$$

est plus grande qu'auparavant, en raison de la contrainte fictive. En relâchant lentement cette dernière, c'est-à-dire en faisant tendre μ_c vers zéro, le système mécanique évolue de façon adiabatique. Son énergie reste par conséquent proportionnelle à la fréquence ω_s . Une fois le système abandonné à lui-même, il aura atteint la valeur minimale de l'énergie, conformément à (62). Le système se stabilise donc à l'endroit de l'hélicité d'équilibre N_c . Comme l'indice s n'a pas été spécifié, chaque mode tend vers son hélicité d'équilibre.

4. Rétroaction

Notre méthode consiste à projeter la force de rétroaction dans un système hélicoïdal adéquat, et d'effectuer l'analyse de Fourier. Puis on examine le comportement des différents termes.

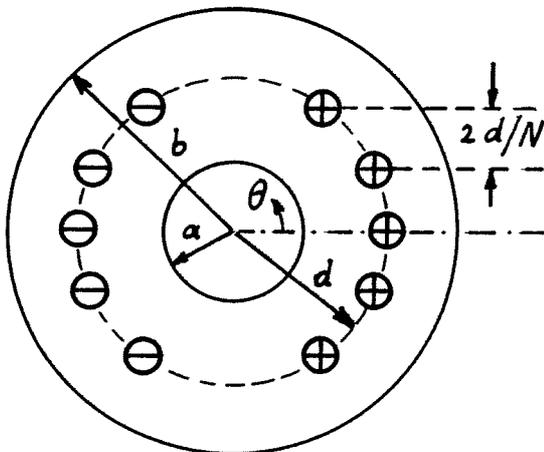
4.1 La force extérieure

Le champ de rétroaction est créé au moyen d'une couche de courant dont l'intensité varie sinusoidalement dans le sens azimutal, et possédant un profil axial. Elle est de la forme

$$j = j_s e^{i(\theta - \varphi + N_f x - \omega_s t)} f(x) \quad (63)$$

Soit N_f son hélicité. L'angle φ désigne l'azimut mesuré entre le maximum du courant et la phase du dispositif de détection. j_s est proportionnel au signal de détection supposé être amplifié linéairement et sans retard de phase.

La couche de courant peut être approximée par le système de conducteurs indiqué dans la figure ci-contre. Avec N spires parcourues par un courant J , l'intensité équivaut environ à



$$j_s \approx \frac{NJ}{2d}$$

Le profil est réalisable par exemple au moyen de spires de longueurs appropriées, ou bien en faisant varier d , ou encore en superposant deux bobinages d'hélicités différentes. Avec

un dispositif semblable décalé de 90° , on assure le contrôle du mouvement pour les deux degrés de liberté.

Le calcul du champ et des forces se fait selon la même méthode utilisée pour déterminer le champ propre au plasma. Le champ dû à la couche de courant prend la valeur suivante à la surface du plasma:

$$B_f \cong -\mu_0 j_s (1-d^2/b^2) F(x) [0, 1, N_f Ka] e^{i(\theta - \varphi + N_f x - \omega_s t)} \quad (64)$$

Il engendre une pression

$$P_f = -B_0 j_s (1-d^2/b^2) (1-qN_f) F(x) e^{i(\theta - \varphi + N_f x - \omega_s t)} \quad (65)$$

et la force latérale de rétroaction devient:

$$F_f = -G_s y_s F(x) e^{i(\varphi - N_f x + \omega_s t)} \quad (66)$$

La force ne dépend pas de la déformation au premier ordre, celle-ci n'engendre que des termes non linéaires qui sont négligeables si $a^2 \ll d^2$ et $N_f Ka \ll 1$. On admet en outre que la présence d'un mode n'entraîne pas de variation du courant j_s . Pour une rétroaction linéaire, il y a proportionnalité entre F_f et y_s , soit

$$\pi a B_0 j_s (1-d^2/b^2) (1-qN_f) = -G_s y_s \quad (67)$$

G_s exprime le gain de l'amplificateur, défini positivement. Cette grandeur vient d'être introduite dans l'expression (66).

On détermine à nouveau les composantes de Fourier de F_f , et on les porte dans l'équation d'équilibre

$$(F_i)_n + (F)_n + (F_f)_n = 0 \quad (68)$$

Par la suite, on considère deux profils particuliers: le profil sinusoïdal

$$f(x) = \sin(sx + \pi s/2) \quad (69)$$

et un profil test

$$f(x) = f_0 e^{-(x/2\gamma)^2} \sin(sx + \pi s/2) \quad (70)$$

La gaussienne a comme effet de localiser la force de rétroaction dans la région médiane du pinch.

4.2 Rétroaction parfaite

Soit $\varphi = 0$ et $N_f = N_c$. Le défaut de phase est nul et l'hélicité des conducteurs coïncide avec celle du plasma en l'absence de rétroaction. D'après (66), la force projetée dans le système N_c est simplement

$$F_f = -G_s \gamma_s \sin(sx + \pi s/2) \quad (71)$$

L'analyse de Fourier ne produit qu'un seul terme $n = s$

$$(F_f)_s = -G_s \gamma_s \quad (72)$$

L'équation d'équilibre (68) conduit à une fréquence modifiée, donnée par

$$M\omega_s^2 = G_s - g(N_c^2 - s^2) \quad (73)$$

L'amplification minimale pour un régime stable est donc égale à

$$G_{0s} = g(N_c^2 - s^2) \quad (74)$$

Les modes satellites $n \neq s$ ne sont pas affectés par la force de rétroaction.

4.3 Rétroaction avec défaut de phase

Soit $\varphi \neq 0$ et $N_f = N_c$. Dans le cas d'un déphasage entre le point d'action et de détection, il y a transfert d'énergie de l'amplificateur au plasma. L'amplitude varie selon un taux de croissance γ_s que l'on exprime par une fréquence complexe:

$$\Omega_s = \omega_s - i\gamma_s \quad (75)$$

L'expression de la force d'inertie $(Fi)_s = M\Omega_s^2 y_s$ reste valable pour Ω complexe. La composante de Fourier de la force de rétroaction (72) est encore à multiplier par $\exp(i\varphi)$. Ainsi le résultat (73) se modifie comme suit

$$M\Omega_s^2 = G_s e^{i\varphi} - g(N_c^2 - s^2) \quad (76)$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} M(\omega_s^2 - \gamma_s^2) &= G_s \cos \varphi - g(N_c^2 - s^2) \\ 2M\omega_s \gamma_s &= -G_s \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Pour $|\varphi| \ll 1$ le taux de croissance est donné par

$$\frac{\gamma_s}{\omega_s} \approx - \frac{\varphi}{2(1 - G_{os}/G_s)} \quad (78)$$

γ_s et ω_s sont de signe contraire si φ est positif, donc le taux de croissance est plus grand que zéro si le mode tourne dans le sens négatif. Pour φ négatif, l'amplitude augmente si le mode tourne dans le sens positif. Le système considéré jusqu'à présent est donc instable pour $\varphi \neq 0$.

On peut y remédier en corrigeant la fonction de transfert de l'amplificateur.

Il est en effet toujours possible, au moyen d'un amplificateur opérationnel, de multiplier G_s par un facteur d'avance de phase symbolisé par $(1 + \tau p)$, où p désigne la variable de Laplace, et τ une constante de temps. On peut interpréter (76) comme étant une équation du mouvement si l'on substitue $\Omega_s^2 y_s$ par $-d^2 y_s / dt^2$. L'équation caractéristique est alors:

$$Mp^2 - g(N_c^2 - s^2) + G_s(1 + \tau p)e^{i\varphi} = 0 \quad (79)$$

Le taux de croissance $\gamma_s = \text{Re}(p)$ devient, dans l'approximation $|\varphi| \ll 1$

$$\gamma_s \approx \frac{G_s}{2M} \left(\left| \frac{\varphi}{\omega_s} \right| - \tau \right) \quad (80)$$

La condition nécessaire de stabilité est donc

$$|\omega_s| \tau > |\varphi| \quad (81)$$

4.4 Stabilité de la rétroaction

Il existe des conditions dans lesquelles le système peut devenir instable vis-à-vis d'un changement spontané de l'hélicité. Soit μ_s la variation de la torsion d'un mode s définie comme suit

$$N = N_c + \mu_s \quad (82)$$

De plus, on admet un écart d'hélicité entre les conducteurs et N_c

$$\Delta N = N_f - N_c \quad (83)$$

On suppose $\varphi = 0$. La force de rétroaction (66) projetée dans le système N devient:

$$F_f e^{iNx} = -G_s \gamma_s e^{i(\mu_s - \Delta N)x} \sin(sx + \pi s/2) \quad (84)$$

L'analyse de Fourier conduit au terme principal suivant

$$(F_f)_s = -G_s \gamma_s \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\mu_s - \Delta N)}{\frac{\pi}{2} (\mu_s - \Delta N) \left[1 - \left(\frac{\mu_s - \Delta N}{2s} \right)^2 \right]} \quad (85)$$

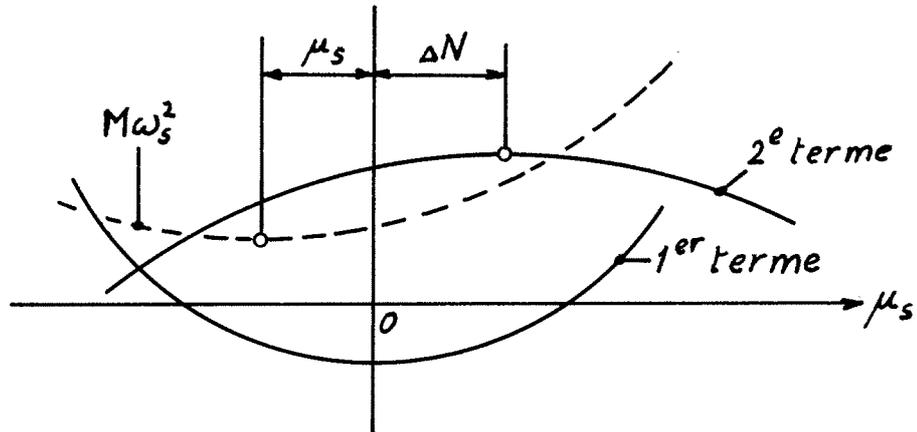
dont l'approximation pour de petits écarts est

$$(F_f)_s \cong -G_s \gamma_s \left[1 - \ell_s (\mu_s - \Delta N)^2 \right] \quad \text{avec} \quad \ell_s = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{4s^2} \quad (86)$$

Ce terme, ainsi que la force de rappel déjà calculée, formule (61), sont à reporter dans l'équation d'équilibre (68). On en déduit une fréquence modifiée

$$M\omega_s^2 = g(s^2 - N_c^2 + \mu_s^2) + G_s \left[1 - \ell_s (\mu_s - \Delta N)^2 \right] \quad (87)$$

La figure ci-dessous représente cette dernière égalité.



Pour l'étude de la stabilité on peut faire le raisonnement suivant: La force de rétroaction est du type harmonique, il est donc possible de faire dériver formellement cette force d'un potentiel. Cela permet de considérer l'ensemble plasma-amplificateur (idéalisé) comme un système fermé. En supposant une variation lente du paramètre μ_s , le mode en question change de façon adiabatique, auquel cas la fréquence reste proportionnelle à l'énergie. Si le paramètre varie dans le sens d'une diminution d'énergie, le surplus se retrouve dans d'autres modes. En fait ce sont les couplages de modes qui permettent le passage de l'énergie. Dans le cas d'un minimum, le surplus est limité, et par conséquent le système est stable,

à condition toute fois que le minimum de ω_s^2 reste positif. La condition de stabilité stipule donc $d^2 \omega_s^2 / d^2 \mu_s > 0$, ce qui équivaut à

$$(N_c^2 - s^2) l_s G_s / G_{os} < 1 \quad (88)$$

Dans ce cas, la position d'équilibre est donnée par

$$\mu_s = (N_c^2 - s^2) l_s (\mu_s - \Delta N) G_s / G_{os} \quad (89)$$

On remarque que μ_s et ΔN sont de signe contraire, ce qui est plausible en raison de l'action répulsive des conducteurs.

Comme la marge de gain G_s / G_{os} est supérieure à l'unité, par définition, la condition (88) est équivalente à $N_c < 2,7$ pour le 1er mode. Ou bien, si l'on se place à la limite de stabilité $N_c = 2$ du 2e mode, l'amplification G_s doit rester inférieure à $2,06 G_{os}$.

Avec l'emploi du profil test mentionné plus haut, formule (70), la condition s'avère moins restrictive. Le calcul de la composante de Fourier conduit à une nouvelle expression de (86)

$$(F_f)_s \cong -G_s \gamma_s \left[1 - \gamma^2 (\mu_s - \Delta N)^2 \right] \quad (90)$$

(cette formule n'est pas applicable pour γ supérieur à 0,4 environ). La condition de stabilité devient en lieu et place de (88)

$$(N_c^2 - s^2) \gamma^2 G_s / G_{os} < 1 \quad (91)$$

Le gain admissible est maintenant limité vers de plus grandes valeurs. Pour $\gamma = 1/4$ par exemple, la limite est atteinte vers $5,3 G_{os}$. Ainsi le danger de "flambage" se trouve fortement réduit.

Il convient de mentionner ici, un phénomène tendant à affaiblir la stabilité [6]. Dans la définition du gain, formule (67), le facteur $1 - q N_f$ est en fait égal à $1 - N_f / (2 - \beta) N$. Si N varie, la force de rétroaction peut diminuer, et au point $N_f / N = 2 - \beta$, correspondant au mode d'interchange, la force de rétroaction disparaît complètement. L'étude de ce mécanisme reste en suspens.

4.5 Action simultanée sur deux modes

Pour un profil sinusoïdal et aligné selon la torsion d'équilibre N_c , les composantes de Fourier autres que la fondamentale sont nulles. Ce n'est plus le cas dès que les hélicités changent. La rétroaction d'un mode s perturbe un autre mode n lorsque la torsion de ce dernier s'écarte de l'équilibre. Soit μ_n cet écart. D'après (84), la force de rétroaction du premier mode s , projetée dans le système $N_c + \mu_n$ devient

$$- G_s \gamma_s e^{i(\mu_n - \Delta N_s) x} \sin(sx + \pi s/2) \quad (92)$$

où ΔN_s se réfère à la première structure magnétique. Le terme n de l'analyse de Fourier s'avère être égal à

$$(F_f)_n \cong i G_s \gamma_s c (\mu_n - \Delta N_s) \quad (93)$$

pour $s + n$ impair. On ne considérera que le cas $s = 1$ et $n = 2$. Le mode n , dont la fréquence propre est ω_n , se trouve perturbé par la force (93) répondant à la fréquence ω_s . En langage mathématique, on aura une équation différentielle

$$M \frac{d^2 \gamma_n}{dt^2} + M \omega_n^2 \gamma_n - i c G_s (\mu_n - \Delta N_s) \gamma_s = 0 \quad (94)$$

dont les variables sont de nouveau affectés du facteur temporel $\exp(i \omega t)$.

D'une façon réciproque, l'application d'une force de rétroaction au mode n conduit à un terme de Fourier d'indice s qui équivaut à:

$$(F_f)_s \cong i G_n y_n c (\mu_s - \Delta N_n) \quad (95)$$

G_n est le gain du deuxième amplificateur, et μ_s la variation d'hélicité du s mode. Les grandeurs ΔN_s et ΔN_n représentent l'écart de torsion (83) des deux bobinages par rapport à N_c .

L'équation différentielle analogue devient

$$M \frac{d^2 y_s}{dt^2} + M \omega_s^2 y_s^2 - i c G_n (\mu_s - \Delta N_n) y_n = 0 \quad (96)$$

La fréquence ω_n est encore à préciser; en pensant à (87) il vient:

$$M \omega_n^2 = g(n^2 - N_c^2 + \mu_n^2) + G_n [1 - \ell_n (\mu_n - \Delta N_n)^2] \quad (97)$$

(94) et (96) sont des équations différentielles simultanées, avec termes de couplage. Leur solution générale consiste en une superposition de deux états stationnaires, dont l'un est décrit par les fonctions

$$y_{si} = a_i e^{i \omega_i t} \quad y_{ni} = b_i e^{i \omega_i t} \quad (98)$$

et l'autre par

$$y_{sk} = a_k e^{i \omega_k t} \quad y_{nk} = b_k e^{i \omega_k t} \quad (99)$$

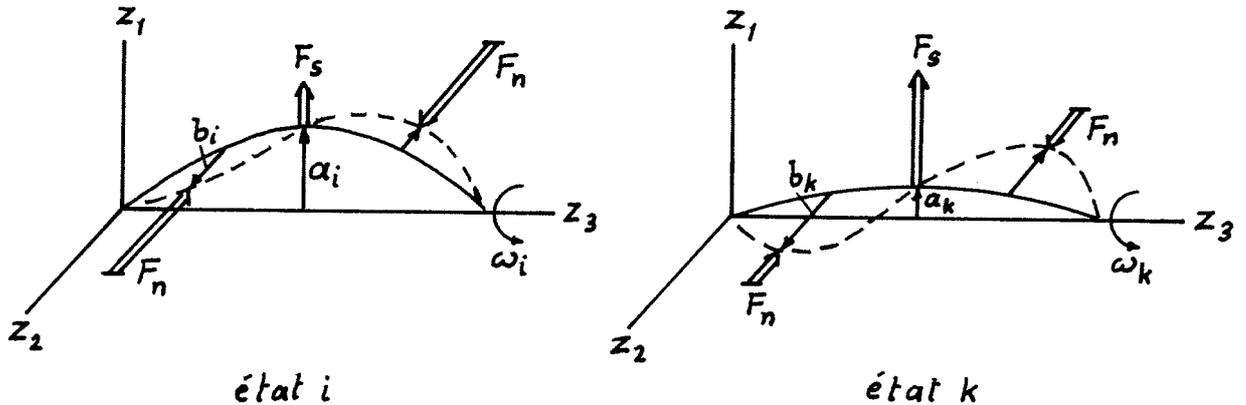
avec les nouvelles fréquences

$$2M(\omega_i^2)^2 = M(\omega_s^2 + \omega_n^2) \pm \sqrt{M^2(\omega_s^2 - \omega_n^2)^2 - 4c^2 G_s G_n \mu_s \mu_n} \quad (100)$$

Les amplitudes correspondent entre elles par les relations

$$b_i = ia_i M \frac{\omega_i^2 - \omega_s^2}{c G_n \mu_s} \quad b_k = ia_k M \frac{\omega_k^2 - \omega_s^2}{c G_n \mu_s} \quad (102)$$

La présence des ΔN ne modifiant pas essentiellement le comportement du système, on les a laissés de côté. Les forces de couplage sont représentées dans la figure ci-dessous, pour μ_s et μ_n positifs, et $\omega_s^2 > \omega_n^2$. Pour faciliter le dessin, on a choisi une hélicité N_c nulle.



Selon les mêmes raisons exposées plus haut, il y a stabilité lorsque les surfaces représentées par ω_i^2 et ω_k^2 dans l'espace μ_s, μ_n possèdent un creux. On va montrer que tel n'est pas le cas, les deux surfaces possèdent un col, donc le système n'est malheureusement pas stable. En procédant au changement de variables

$$u \mu_s = p \cos \alpha \quad \text{et} \quad v \mu_n = p \sin \alpha \quad (103)$$

l'expression des fréquences prend la forme

$$2 \left(\omega_k \right)^2 = D_s + D_n + p^2 \pm \sqrt{\left(D_s - D_n + p^2 \cos 2\alpha \right)^2 - \frac{2c^2}{uv} G_s G_n p^2 \sin 2\alpha} \quad (104)$$

avec $D_s = g(s^2 - N_c^2) + G_s$ $D_n = g(n^2 - N_c^2) + G_n$

$$u^2 = g - l_s G_s \quad \quad v^2 = g - l_n G_n$$

Le critère de stabilité $d^2 \omega^2 / dp^2 > 0$ devient (au voisinage de $p = 0$)

$$1 \pm \left[\cos 2\alpha - \frac{c^2 G_s G_n}{uv (D_s - D_n)} \sin 2\alpha \right] > 0 \quad (105)$$

On voit aisément qu'il existe toujours une direction α pour laquelle l'inégalité ci-dessus n'est pas satisfaite.

4.6 Moyens de stabiliser deux modes

Rétroaction non linéaire [7] . Il importe en premier lieu d'atténuer la cause d'instabilité. Le facteur placé devant $\sin 2\alpha$ en est responsable. On peut le faire diminuer en passant du profil sinusoïdal à un profil plus ramassé, défini par (70). Le coefficient c^2 devient 3 fois plus petit, pour un γ de 1/4 par exemple. En outre, les grandeurs l_s et l_n sont à remplacer par γ^2 , ce qui rend les facteurs u et v plus avantageux.

Par le choix d'une dépendance plus forte que linéaire des forces suivant leurs variables, les amplitudes a_i et b_i (de même que a_k

et b_k) ont tendance à plafonner vers des valeurs égales. Au vu des relations (102), les grandeurs μ_s et μ_n deviennent alors dépendantes l'une de l'autre. L'angle α ne pourra plus prendre n'importe quelle valeur, et l'inégalité (105) sera peut-être satisfaite. Mais notre raisonnement vient d'être fait sur la base de formules provenant d'une théorie linéaire, et toute conclusion valable exige un calcul rigoureux.

Emploi d'une détection de l'hélicité. On peut imaginer un système de détection capable de fournir un signal proportionnel au produit de y_s et du décalage d'hélicité μ_s . Si l'amplificateur n réagit partiellement à ce signal, il produira une force additionnelle se manifestant sous forme d'un terme supplémentaire dans l'équation (94). Par un choix convenable des coefficients, l'équation s'écrira

$$M \frac{d^2 y_n}{dt^2} + M \omega_n^2 y_n - ic G_s (\mu_n + \mu_s) y_s = 0 \quad (106)$$

A l'aide d'une action symétrique sur l'autre mode, on peut s'arranger à ce que l'équation (96) prenne la forme

$$M \frac{d^2 y_s}{dt^2} + M \omega_s^2 y_s - ic G_n (\mu_s - \mu_n) y_n = 0 \quad (107)$$

Le signe des termes est valable pour $\omega_s^2 > \omega_n^2$, et ne dépend pas du sens de rotation. La solution du système d'équations est semblable à la précédente (104), sauf que $\sin 2\alpha$ doit être remplacé par $2 \cos 2\alpha$. La même substitution est à effectuer dans (105), et il se trouve maintenant que l'inégalité est satisfaite pour n'importe quel angle pourvu que

$$\frac{c^2 G_s G_n}{uv |D_s - D_n|} < 1 \quad \text{et } D_s > D_n \quad (108)$$

La stabilisation simultanée de deux modes est en principe possible, mais la condition ci-dessus devient très restrictive lors d'un dépassement de la limite de Kruskal supérieur à 2,5, ainsi que le montre un calcul numérique.

Ce travail a été financé par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

R é f é r e n c e s

1. F. Troyon. Communication privée.
2. R.J. Tayler. The influence of an axial magnetic field on the stability of a constricted gas discharge. Proc. Phys. Soc. (London) B 70, (1957), p. 1049.
3. B.B. Kadomtsev. Hydromagnetic stability of a plasma. Reviews of Plasma Physics, M.A. Leontovich, Vol. 2, p. 153, (1966).
4. P.K.C. Wang. Feedback stabilization of highly conducting plasmas. Physical Rev. Lett. 24, 362, (1970).
5. R. Wilhelm and H. Zwicker. Experimental investigations on a toroidal screw pinch. Z. Physik 240, 295, (1970).
6. F.L. Ribe and M.N. Rosenbluth. Feedback stabilization of a high- β , sharp-boundaried plasma column with helical fields. Phys. Fluids 13, 2572, (1970).