

April 1963

LRP 7-63

UN PROGRAMME DE CALCUL D'ONDES DE CHOC CONVERGENTES DANS  
UN CYLINDRE DE GAZ

F. Troyon

Abstract

This report describes a programme which solves the problem of a converging cylindrical shock wave in a compressible fluid produced by a sudden rise in pressure at the surface of the fluid. The fluid must be originally at rest and uniform. The equations are integrated in a characteristic mesh. The parameters to be fed in are : the adiabatic exponent, time dependence of the pressure at the surface, the initial conditions and the integration step.

This programme was written especially for calculations on magnetic compression of plasmas. The results of one run are shown.

Lausanne

Un programme de calcul d'ondes de choc convergentes dans  
un cylindre de gaz

F. Troyon

Introduction

Ce rapport décrit le programme établi et codé dans notre laboratoire, qui résout le problème d'une onde de choc convergente dans un cylindre de gaz polytropique, lorsque la pression, appliquée à la surface du cylindre, est donnée en fonction du temps. L'état initial est supposé uniforme et la pression doit croître assez vite pour que le choc se développe près de la surface et sur la caractéristique séparant le milieu tranquille initial du milieu en mouvement. Le programme contrôle l'apparition de chocs secondaires, mais ne calcule pas derrière ces chocs.

Equations

Les équations sont celles d'un fluide compressible polytropique, sans dissipation ni conductibilité thermique. Elles s'écrivent en coordonnées de Lagrange :

$$u = \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$(M) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{2r}{r} \frac{\partial p}{\partial h}$$

$$2\varrho r \frac{\partial r}{\partial h} = 1$$

$$F(h) = p \varrho^{-\gamma} \quad c^2 = \frac{p}{\varrho}$$

où la coordonnée de Lagrange est donnée par

$$h = 2 \int_0^r \varrho r dr$$

$\varrho$  est la densité,  $r$  le rayon,  $p$  la pression,  $\ln F$  l'entropie,  $\gamma$  l'exposant adiabatique,  $c$  la vitesse du son.

Les conditions initiales sont

$t = 0, F = p = \rho = c = 1, u = 0$ ; la surface est à  $r = h = 1$ .

Les conditions aux limites sont :

surface (I)  $h = 1, P = Y_0 (1 - e^{-\alpha t})^2$   
 $Y_0, \alpha$  constantes données

choc : conditions de Hugoniot

$$p = M^2(1+\mu) - \mu \quad v = (1-\mu)(M - \frac{1}{M})$$

$$(S) \quad \rho = \frac{M^2}{1-\mu + \mu M^2} \quad \mu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$M$  = nombre de Mach de l'onde de choc.

Le long du choc

$$M = \frac{dr}{dt}$$

La forme de la pression à la surface a été choisie pour nos besoins, mais une autre forme peut facilement être introduite dans le programme puisqu'elle apparaît dans une routine séparée.

Le problème est donc d'intégrer le système (M) avec les conditions aux limites (M) et (S).

### Choix de la méthode d'intégration

Voici une liste des problèmes posés par l'intégration numérique :

- 1) les conditions aux limites sont imposées sur des surfaces déterminées elles-mêmes par le mouvement de toute la masse du gaz,
- 2) le choc ne se développe pas immédiatement,
- 3) la singularité dans les équations pour  $r = 0$ ,
- 4) la stabilité numérique de la méthode choisie.

Discutons ces points l'un après l'autre :

1) La première difficulté est inhérente au problème et ne saurait être évitée si l'on tient à conserver le choc. La méthode de la pseudo-viscosité de Richtmeyer-von Neuman a été utilisée exclusivement semble-t-il jusqu'à maintenant pour traiter les chocs cylindriques. Elle permet de donner un profil au choc et de ramener la condition aux limites du choc au centre ( $r = 0$ ). Cette méthode est certainement élégante, mais pour ce problème elle ne présente aucun avantage. Il n'en serait pas de même si des chocs secondaires apparaissaient dans la masse. Cette méthode serait alors la seule praticable, à moins d'intégrer en tenant compte du vrai processus de dissipation qui donne au choc sa largeur.

2) Par suite des hypothèses faites, on peut calculer la position du point de rebroussement : on trouve

$$4) \quad r = 1 - \frac{\gamma}{(\gamma+1)\alpha\sqrt{\gamma_0}}$$

Pour une pression  $p(t)$ , la formule sera

$$r = 1 - \frac{2\gamma}{(\gamma+1) \frac{\partial p}{\partial t} / t_0}$$

où  $\frac{\partial p}{\partial t}$  est évalué au point  $t_0$  tel que  $p = 1$ .

Tout ceci est valable si  $|r-1| \ll 1$ , ce qui est toujours le cas dans notre problème.

3) En  $r = 0$ , la température et la pression deviennent infinies derrière le choc. Autour de  $r = 0$  la solution est connue à un facteur près. C'est la solution de similitude. Cependant son domaine de validité n'est pas connu. La méthode de pseudo-viscosité évite ces infinités non-physiques, au prix d'un coefficient non-physique également. En effet, la valeur de la pseudo-viscosité est choisie telle que la largeur du choc soit de l'ordre de quelques fois le pas en  $r$ . Comme on ne peut choisir un pas trop petit, on doit choisir une grande pseudo-viscosité, ce qui ne gêne pas loin du choc, mais est certainement incertain près du centre. Les méthodes qui conservent le choc doivent être interrompues à une valeur finie  $r_0$  et le choc réfléchi à cette distance.

Il est clair que le réseau deviendra de plus en plus dense près du centre.

- 4) Les équations étant du type hyperbolique, il convient de se méfier des instabilités numériques.

Il n'y a pas de théorie générale de la stabilité pour des équations non-linéaires. On admet généralement qu'une méthode stable localement sera stable globalement. Les méthodes qui utilisent les caractéristiques sont stables, mais on verra comment une modification, qui semblait être une amélioration, a donné une catastrophe. Il existe des méthodes implicites qui sont toujours stables localement. Cependant, la méthode la plus sûre est certainement celle du réseau caractéristique.

La méthode choisie finalement est celle du réseau caractéristique pour les raisons suivantes : stabilité, mise en évidence des chocs secondaires s'il y en a, détermination aisée du choc et de la surface, économie de place.

L'argument majeur contre les systèmes en  $r, t$ , c'est l'obligation de garder le même pas  $\Delta t$  pour tout  $r$ . Or, lorsque le choc s'approche du centre  $\Delta t$  devient petit à cause de la singularité et il en résulte un gros gaspillage de temps.

#### Méthode du réseau caractéristique

Les trois directions caractéristiques sont définies par

$$dr = (u + c) dt$$

$$dr = (u - c) dt$$

$$dr = u dt$$

Le réseau caractéristique est formé avec les 2 premières caractéristiques. La 3e équation dit que les lignes fluides sont aussi des caractéristiques. On voit que cette direction caractéristique est toujours comprise entre les deux autres, ce qui assure la stabilité numérique dans tous les cas.

Les équations caractéristiques que l'on utilise pour l'intégration numérique s'écrivent :

1)  $dr = (v+c)dt$        $dh = c_H dt = 2r\sqrt{\rho\sigma'} dt$

(a)  $du + \frac{2dc}{\gamma-1} + \frac{vc}{r} dt - \frac{c}{\gamma(\gamma-1)} d \ln F = 0$

2)  $dr = (v-c)dt$        $dh = -c_H dt = -2r\sqrt{\rho\sigma'} dt$

(β)  $du - \frac{2dc}{\gamma-1} - \frac{vc}{r} dt + \frac{c}{\gamma(\gamma-1)} d \ln F = 0$

3)  $dh = 0$        $dr = v dt$

$d \ln F = 0$       ou       $dF_\alpha dt_\beta + dF_\beta dt_\alpha = 0$

La figure 1) indique l'allure générale de la surface et du choc en coordonnées caractéristiques.

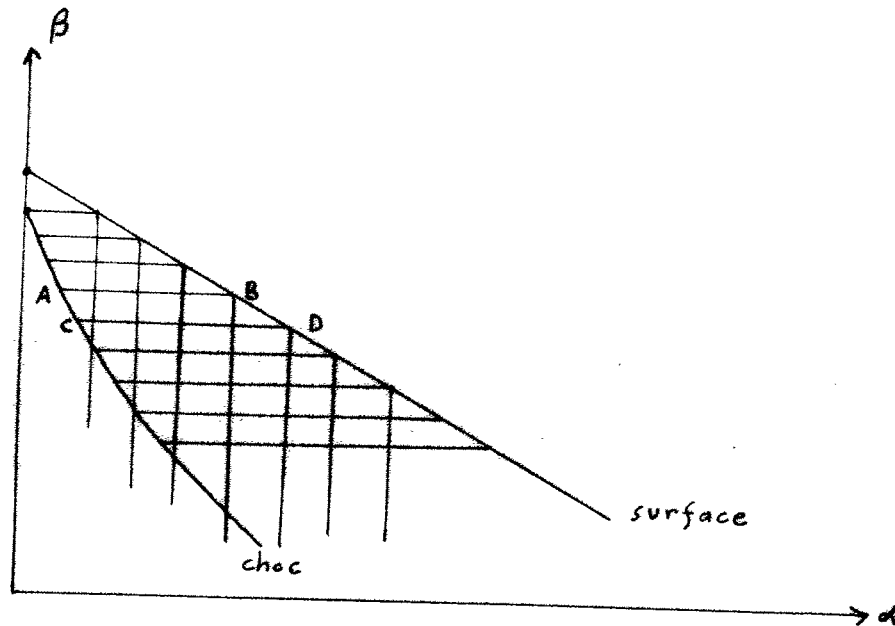


Figure 1

La surface passe par des nodes du réseau. La méthode choisie pour raison d'économie d'instructions de machine consiste à progresser de haut en bas ligne par ligne. Le processus peut être décomposé en trois opérations fondamentales :

- a) Progrès dans la masse
- b) Progrès à la surface
- c) Progrès sur le choc.

A chaque point du réseau nous avons les grandeurs  $t, r, h, u, c, \ln F$ .

La méthode consiste à remplacer les équations par des équations aux différences, soit

$$1) \quad \Delta r = (\tilde{v} + \tilde{c}) \Delta t$$

α)

$$\Delta v + \frac{2 \Delta c}{\gamma - 1} + \frac{\tilde{v} \tilde{c}}{F} \Delta t - \frac{\tilde{c}}{\gamma(\gamma - 1)} \Delta \ln F = 0$$

2)

$$\Delta r = (\tilde{v} - \tilde{c}) \Delta t$$

β)

$$\Delta v - \frac{2 \Delta c}{\gamma - 1} - \frac{\tilde{v} \tilde{c}}{F} \Delta t + \frac{\tilde{c}}{\gamma(\gamma - 1)} \Delta \ln F = 0$$

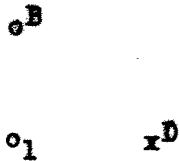
3)

$$\Delta r = \tilde{u} \Delta t \quad \Delta_2 \ln F \Delta_\beta t + \Delta_\beta \ln F \Delta_2 t = 0$$

Le  $\sim$  indique la valeur moyenne sur l'intervalle.

a) Se rapportant à la figure 1), la connaissance des points sur AB, du point C et le système 1), 2), 3), déterminent tous les points sur CD sauf D.

b) Pour déterminer D on utilise le triangle



En D on connaît déjà  $\ln F$  et  $h$ . BD satisfait  $\Delta r = \tilde{u} \Delta t$  puisque la surface est une caractéristique de type 3).

En ajoutant le système 1) et l'équation I (condition aux limites), on a un système qui détermine le point D.

c) La détermination du point C est plus délicate. Le choix de l'intervalle AC détermine le pas pour toute la ligne CD. Fig. 2 représente la partie utile du réseau autour de C.

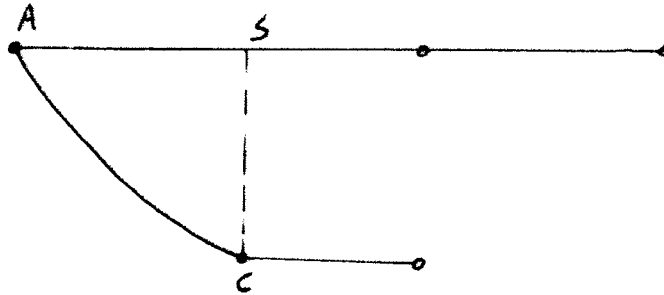


Figure 2

Au lieu de choisir le point C on choisit S. Les valeurs en S sont calculées par interpolation linéaire entre ses deux voisins. C est calculé à partir de A et S par simple "pas en avant", c'est-à-dire par le système

$$r_c - r_A = M_A (t_c - t_A)$$

$$r_c - r_s = (c_s + u_s)(t_c - t_s)$$

$t_c$  est comparé avec la valeur désirée et S est corrigé en conséquence. On a donc un cycle d'itération.

Le triangle ASC est alors résolu en utilisant le système 1) le long de SC, les équations d'Hugoniot en C et l'équation aux différences

$$\Delta r = \tilde{M} \Delta t$$

le long de AC.

Revenons à la détermination de  $\Delta t = t_c - t_A$

Nous avons deux "échelles" de temps : le temps de montée de la pression et le temps extrapolé pour que le choc atteigne le centre. Le pas est choisi comme une fraction fixe  $\beta$  du plus petit de ces 2 nombres, soit

$$t = \beta \min \left( \frac{1}{\alpha}, \frac{r}{|M|} \right)$$

Le pas le long des caractéristiques doit également être contrôlé. En s'approchant du centre il conviendra d'ajouter des points. Deux critères sont utilisés pour la division du pas :

$$1^\circ) \Delta r > \beta r \quad \text{ou}$$

$$2^\circ) \Delta h_{MF} > 3 \beta$$



Le premier critère est le même que le long du choc. Le deuxième a été introduit après de nombreux autres essais. L'équation aux différences 3) n'est qu'une approximation d'ordre un, alors que les systèmes 1) et 2) sont d'ordre deux. Pour éviter une accumulation d'erreurs sur  $\ln F$  plus grande que sur les autres grandeurs,  $\Delta \ln F$  est choisi de l'ordre de  $\beta$ .

Le programme requiert un grand nombre d'interpolations. Dans sa version actuelle elles sont toutes linéaires. Dans les premières versions un effort avait été fait pour que les interpolations soient aussi précises que la résolution des équations. Pour cela toutes les interpolations étaient quadratiques. Il en est résulté des divergences de calcul dont l'explication est simple. Par exemple,  $\ln F$  est une fonction continue de  $h$ , mais à dérivée 3e discontinue. Elle a la forme

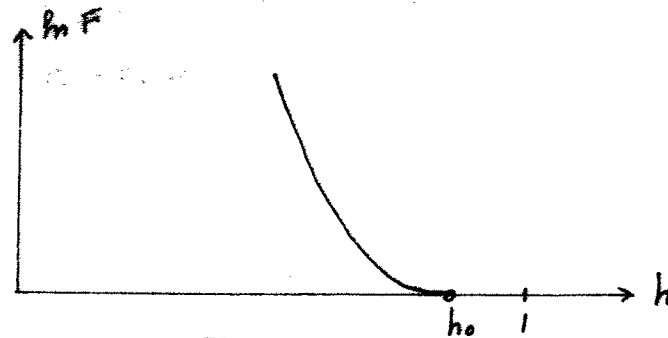


Figure 3

$h_0$  représente le début du choc. La croissance est cubique au début. Or une interpolation linéaire aux environs de  $h_0$  tendra à "adoucir" la courbe, alors qu'une interpolation quadratique donnera une large pointe négative qui conduira à des erreurs énormes, cause des divergences. On peut donc dire que l'interpolation linéaire est stabilisatrice alors que l'interpolation quadratique peut être source d'instabilité dans une méthode stable par ailleurs.

Le contrôle des erreurs est fait de la façon suivante : on connaît  $h$  à la surface et sur le choc. Or, le long d'une caractéristique  $\beta$  on a

$$dh = c_H dt \quad \text{avec}$$

$$c_H = 2 r c^{1/\mu} F^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

Le programme intègre  $h$  par la méthode du trapèze le long de chaque caractéristique à partir du choc et compare la valeur obtenue à la surface avec la valeur connue  $h = 1$ . Ce test est particulièrement

sensible aux erreurs vu la dépendance de  $c_H$  sur  $c$  et  $\ln F$ . En effet  $\mu^{-1} \geq 3$  et  $F = e^{\ln F}$ , deux circonstances qui amplifient les erreurs.

Il y a deux paramètres qui agissent sur l'erreur :  $\beta$  et  $\epsilon$ .  $\epsilon$  est la précision de tous les calculs d'itération effectués dans le programme.  $\beta$  est le paramètre important qui fixe l'erreur de troncation de la méthode. Il n'y a aucun intérêt à choisir  $\epsilon$  beaucoup plus petit que l'erreur de troncation. Pratiquement on choisit  $\epsilon \sim \beta^3$ .

### Organigramme

La figure 4 représente l'organigramme de principe : ce programme a été écrit en code simple pour ZEBRA, un ordinateur électronique à tambour magnétique.

### Résultats

Le programme a été essayé pour

$$\alpha : 1 - 10$$

$$Y_0 : 100 - 2000$$

$\beta$  a été choisi de .05 à 0.1. Le temps de calcul dépend beaucoup des valeurs des paramètres, mais se chiffre toujours en heures (5 -10).

Les résultats détaillés sont donnés dans un rapport séparé, mais les fig. 5 et 6 représentent les résultats pour des valeurs moyennes des paramètres.

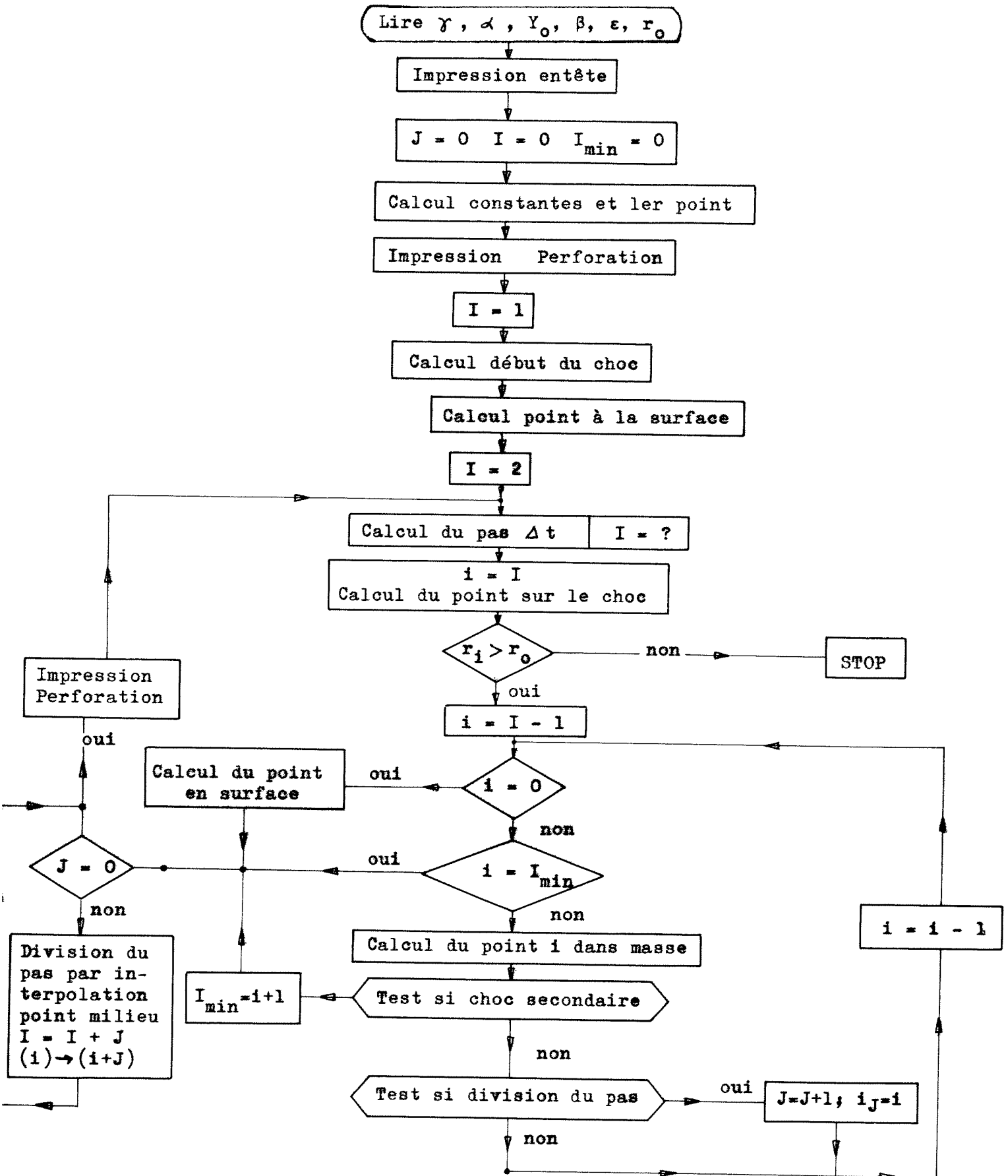


Figure 4

Trajectoires de la surface et du choc

Fig. 5

$\gamma_0 = 500 \quad \alpha = 3$

$r_0 = .03 \quad \beta = .07$

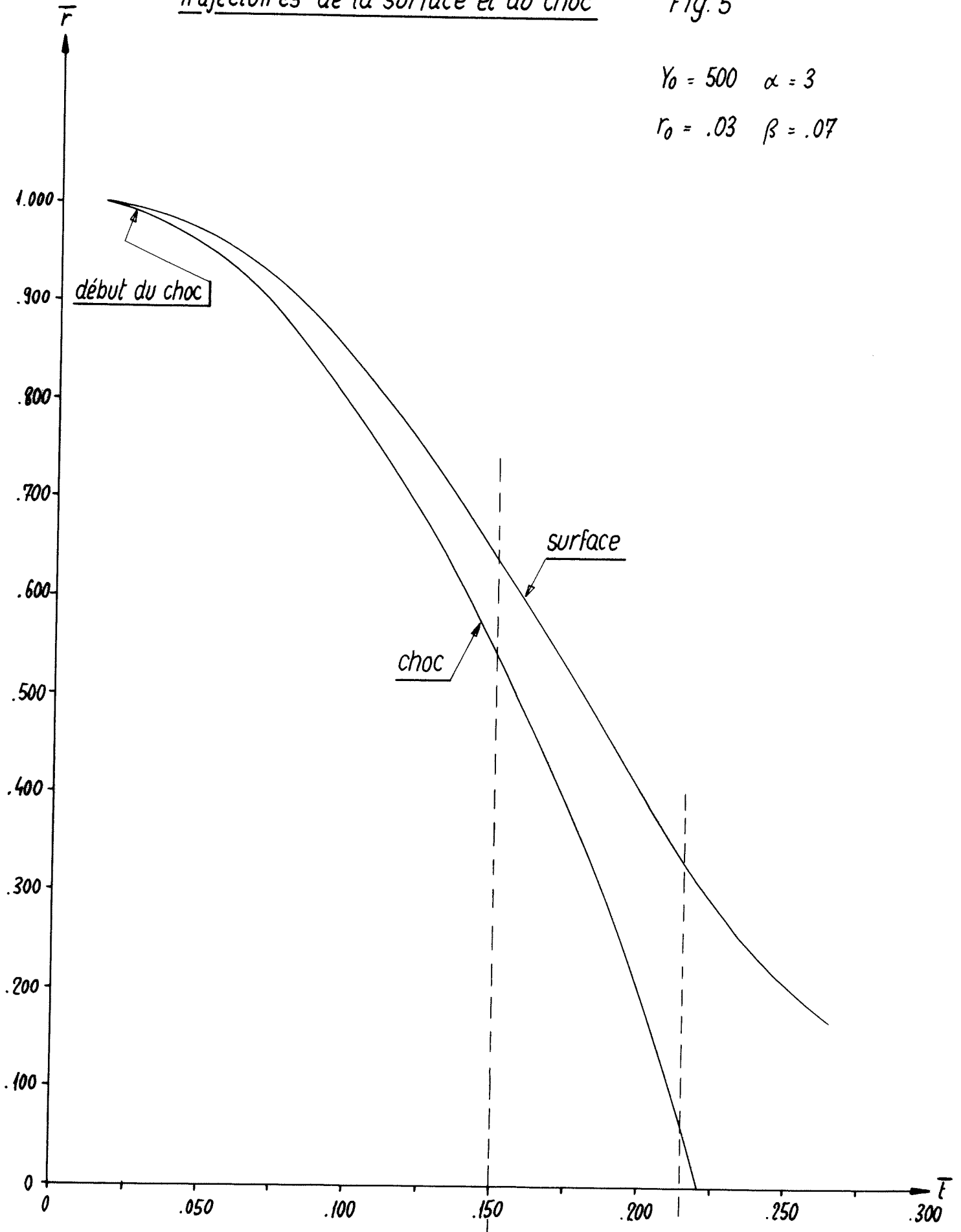


Fig. 6 Distribution de la densité, température et vitesse du fluide

