

STABILITE D'UNE COLONNE DE PLASMA.  
MODELE DES PARTICULES LIBRES.

F. Troyon

Abstract

The stability of a field-free homogeneous column of plasma confined by an axial static field and the sum of an alternating and static  $B_{\theta}$  field is considered. The chosen model is the free-particle model. Conditions for the existence of a positive average restoring force are derived and it is shown that for small deformations the column is stable for high enough frequency.

Stabilité d'une colonne de plasma.

Modèle des particules libres

F. TROYON

I. Introduction

Le problème de la stabilité d'une colonne cylindrique homogène de plasma sans champ à l'intérieur, suffisamment chaude, de façon que le plasma puisse être assimilé à un gaz sans interaction, a déjà été étudié par E. Weibel <sup>1)</sup>. Dans cet article, le courant axial est purement oscillant et la stabilité est prouvée pour les modes de déformation de la surface à longueurs d'onde bornées inférieurement. Le même problème est considéré ici, avec l'addition d'une composante continue au courant alternatif axial. Un nouveau critère de stabilité est donné pour les courtes longueurs d'onde, complétant ainsi la preuve de (1).

La colonne de plasma de rayon  $a$  est entourée d'un tube concentrique de rayon  $b$ , parfaitement conducteur. Le champ magnétique à l'extérieur du plasma est donné en coordonnées cylindriques par

$$\begin{aligned} B_z &= G_0 & F &= F_0 + \sqrt{2} F_1 \cos \omega t \\ B_r &= 0 & & \\ B_\theta &= F \frac{a}{r} & b\omega &\ll 1 \end{aligned} \tag{1}$$

La fréquence est suffisamment basse pour que le courant de déplacement soit négligeable. La pression magnétique à la surface  $p_0$  est donnée par

$$p_0 = \frac{1}{2} (G^2 + F_0^2 + F_1^2) + \sqrt{2} F_0 F_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} F_1^2 \cos 2\omega t \tag{2}$$

On voit que  $p_0$  possède un terme oscillant aux fréquences  $\omega$  et  $2\omega$ . Sous l'effet de cette force la surface exécutera une oscillation aux mêmes fréquences. Nous admettons comme en réf. 1) que ce mouvement est suffisamment petit pour que l'on puisse linéariser les équations. Ce terme oscillant apparaîtra alors comme un terme forçant dans les équations du mouvement de la surface.

Considérons une petite déformation de la surface du plasma  $\delta r$

$$\delta r = \varepsilon(z, \theta, t) \quad \delta r \ll a \quad (3)$$

Introduisons les modes normaux par la double transformée de Fourier

$$\varepsilon(z, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dh e^{ihz + in\theta} \varepsilon_n(h, t) \quad (4)$$

Le problème est linéarisé à partir de maintenant.

La modification de la pression magnétique à la surface pour chaque mode est calculée en 1) :

$$\delta p_n(h, t) = \left[ \frac{y_n(h, a)}{a y_n'(h, a)} (F_n + Gha)^2 - F^2 \right] \frac{\varepsilon_n(h, t)}{a} \quad (5)$$

La dérivée est prise par rapport à  $a$  et

$$y_n(h, a) = \text{const} \left\{ K_{|n|}'(h|b) I_{|n|}(h|a) - I_{|n|}'(h|b) K_{|n|}(h|a) \right\} \quad (6)$$

$K_n$  et  $I_n$  sont les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce.

Introduisons l'impédance acoustique normale du plasma, définie par

$$R_n(h, i\omega) = \frac{-\delta p_n(h, i\omega)}{i\omega \varepsilon_n(h, i\omega)} \quad (7)$$

où  $\delta p_n(h, i\omega)$  et  $\varepsilon_n(h, i\omega)$  sont les transformées de Fourier de  $\delta p_n(h, t)$  et  $\varepsilon_n(h, t)$  respectivement.  $R_n(h, i\omega)$  est analytique dans le demi-plan  $\Im \omega < 0$ . La transformée de Laplace  $R_n(h, s)$  de la fonction de réponse du plasma  $R_n(h, t)$  est donc identique au prolongement analytique de l'impédance acoustique, ce qui justifie l'emploi de la même fonction en (7). Admettant que le système soit en équilibre initialement, on a

$$\delta p_n(h, t) = - \int_0^t R_n(h, t-t') \dot{\varepsilon}_n(h, t') dt' \quad (8)$$

Remplaçant  $\delta p_n(h, t)$  par son expression (5), on a l'équation du mouvement de la surface.

Nous allons montrer qu'il existe des conditions telles que cette équation admette des solutions stables pour tout  $n$  et  $h$ . Le terme forçant pour  $n = 0$ ,  $h = 0$  n'intervient pas dans la question de la stabilité et sera donc ignoré pour le moment.

Le problème mathématique de la stabilité des équations du type (8) est traité dans une publication séparée (réf. 2). Il suffit donc de montrer que les fonctions  $R_n(h, t)$  et  $\delta p_n(h, t)$  satisfont aux conditions suffisantes énoncées dans 2) pour que l'on soit assuré de l'existence d'une fréquence  $\omega$  au-dessus de laquelle tous les modes sont stables

Ces conditions seront précisées dans les sections II et III au fur et à mesure qu'elles seront montrées être satisfaites. La section IV contient une discussion de l'influence du terme forçant et une tentative d'extraire les facteurs importants qui interviennent dans la démonstration.

## II. Propriétés de la force de rappel magnétique

Remplaçant dans (5)  $F$  par son expression donnée pour  $\delta p_n(h, t)$

$$\delta p_n(h, t) = \frac{\varepsilon_n(h, t)}{a} \left\{ X_n(h) + A_n(h) \cos \omega t + B_n(h) \cos 2\omega t \right\}$$

$$X_n(h) = (F_0^2 + F_1^2) (f_n(h) - 1) + G_0^2 g_n(h) \pm 2 F_0 G_0 \sqrt{g_n(h) f_n(h)} \quad (9)$$

$$A_n(h) = 2\sqrt{2} F_1 \left\{ F_0 (f_n(h) - 1) \pm G_0 \sqrt{g_n(h) f_n(h)} \right\}$$

$$B_n(h) = F_1^2 (f_n(h) - 1)$$

$$f_n(h) = \frac{-n^2 y_n(h, a)}{a y_n'(h, a)}$$

$$g_n(h) = \frac{-ah^2 y_n(h, a)}{y_n'(h, a)}$$

Les signes dans  $X_n(h)$  et  $A_n(h)$  sont les mêmes que le signe de  $nh$ .  $X_n(h)$  est la force moyenne de rappel. La première condition à assurer est

$$X_n(h) > 0 \quad (10)$$

$X_n(h)$  peut être récrit

$$X_n(h) = (G_0 \sqrt{g_n(h)} \pm F_0 \sqrt{f_n(h)})^2 + F_1^2 (f_n(h) - 1) - F_0^2 \quad (11)$$

Pour  $n = 0$ , la condition s'écrit

$$\frac{F_1^2 + F_0^2}{G_0^2} < g_0(0) \quad (12)$$

Pour  $|n| \geq 1$  montrons d'abord que  $X_n(h)$  atteint son minimum pour  $n = 1$ .  
Le long d'une ligne  $\frac{n}{ah} = N = \text{constante}$ , on a

$$X_n(h) = f_n(h) \left\{ F_1^2 + \left( \frac{G_0}{N} \pm F_0 \right)^2 \right\} - F_1^2 - F_0^2 \quad (13)$$

Or le long d'une ligne  $N = \text{constante}$ ,  $f_n(h)$  est une fonction monotoni-  
quement croissante de  $n$ . La preuve en est donnée en Appendice. On  
a donc

$$X_n(h) \geq X_1\left(\frac{h}{n}\right) \quad (14)$$

Une condition nécessaire pour que  $X_1(h) > 0$  est

$$\frac{F_0^2}{F_1^2} < f_1\left(\frac{F_0}{aG_0}\right) - 1 \quad (15)$$

Cette condition nécessaire étant satisfaite, la condition suivante  
est suffisante

$$\frac{|F_1| + |F_0|}{|G_0|} < ah_m \quad (16)$$

$h_m$  étant défini par

$$f_1(h_m) = \frac{F_0^2 + F_1^2}{F_1^2} \quad (17)$$

Les conditions suffisantes (12), (15) et (16) peuvent être exprimées

de la façon suivante :

$$\frac{F_0^2 + F_1^2}{F_1^2} < f_1 \left( \frac{|F_1| + |F_0|}{a|G_0|} \right) \quad (18)$$

$$\frac{F_0^2 + F_1^2}{G_0^2} < g_0(0) \quad (19)$$

Ces conditions peuvent être représentées graphiquement (fig. 1).

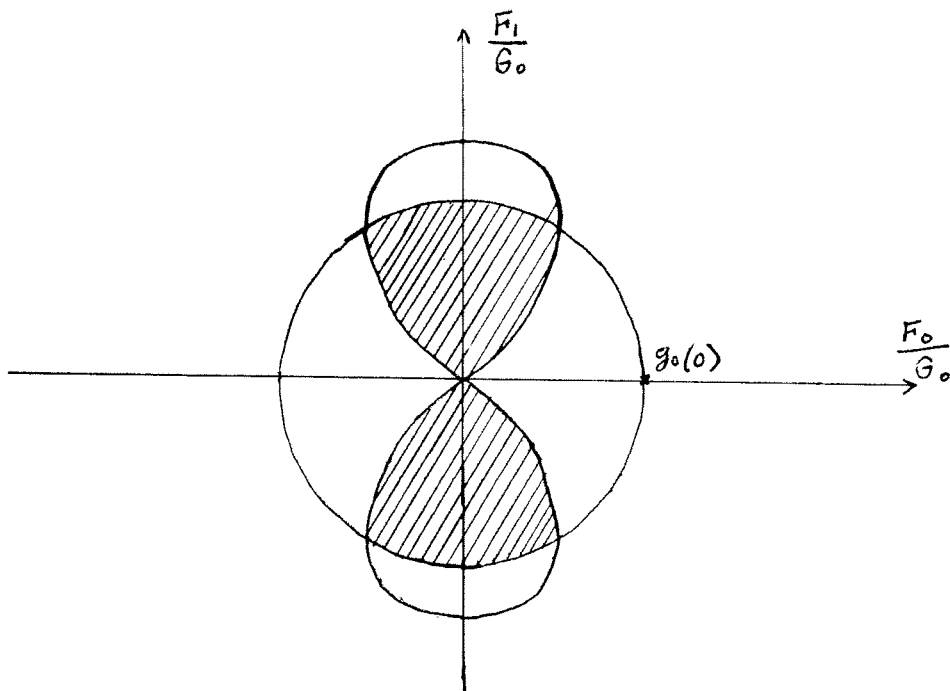


Figure 1

Le cercle représente la courbe limite pour la condition (19) et la "lemniscate" celle de la condition (18). La région où  $X_n(h) > 0$  certainement, est hachurée. Les grandeurs respectives du cercle et de la lemniscate sont représentées correctement pour  $\frac{b}{a} < 10$ . Pour  $\frac{b}{a}$  plus grand il n'est pas connu s'il en est de même.

De leurs définitions (9) et du théorème de l'Appendice on voit que  $X_n(h)$ ,  $A_n(h)$  et  $B_n(h)$  croissent indéfiniment lorsque  $n \rightarrow \infty$  le long de toute ligne  $n/h = \text{constante}$ . Ceci se révèle gênant car on a également pour certaines valeurs de  $n/h$

$$\frac{|A_n| + |B_n|}{X_n} > 1 \quad \text{lorsque } h, n \rightarrow \infty \quad (20)$$

Cependant il sera possible d'utiliser une autre propriété, évidente sur la formule (5) de la force de rappel magnétique :

$$\frac{\delta p_n(h, t)}{\varepsilon_n(h, t)} > - \frac{(|F_0| + \sqrt{2}|F_1|)^2}{a} \quad (21)$$

Cette inégalité montre que lorsque la force de rappel magnétique est déstabilisante, elle est bornée uniformément en  $h$  et  $n$ .

En résumé, nous avons montré qu'il existe des conditions telles que  $X_n(h)$  soit positif pour tout  $n$  et  $h$  et que la force de rappel satisfait à l'inégalité (21). Nous passons maintenant à l'examen des propriétés utiles de l'impédance du plasma.

### III. Propriétés de l'impédance normale du plasma

Pour la fonction de réponse du plasma dans le modèle des particules libres avec distribution maxwellienne, E. Weibel <sup>1)</sup> a trouvé

$$R_n(h, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p_0}{v} \delta(t) + 4 \delta_{nh} \frac{p_0}{a} Y(t) + \frac{p_0}{a} Q_n(h, \frac{vt}{a})$$

$$v = \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}} \quad \delta_{nh} = \begin{cases} 0 & n \text{ ou } h \neq 0 \\ 1 & n = h = 0 \end{cases}$$

$$Q_n(h, \xi) = \frac{2^5}{\pi} \xi^{-6} \exp\left(-\frac{a^2 h^2 \xi^2}{2}\right) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{n\lambda} \lambda^5. \quad (22)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \cos^8 \alpha \cos(2n\lambda\alpha) \exp(-2\lambda^2 \cos^2 \alpha / \xi^2) - 2 \delta_{nh}$$

où  $m_i$  est la masse des ions. Le terme de réponse retardée des électrons a été négligé. Une autre forme utile pour  $Q_n(h, \xi)$  est obtenue en effectuant l'intégrale

$$Q_n(h, \xi) = \frac{2}{\xi^6} e^{-\frac{a^2 h^2 \xi^2}{2}} \cdot \frac{d^4}{d(\lambda/\xi)^4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2/\xi^2}}{\lambda^3} I_{n\lambda}(\frac{\lambda^2}{\xi^2}) - 2\delta_{nh} \quad (23)$$

que l'on peut réécrire en utilisant une représentation intégrale <sup>3)</sup>.

$$Q_n(h, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{a^2 h^2 \xi^2}{2}} \xi^3 \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{t^2 \xi^2}{8}} P(\frac{t^2 \xi^2}{8}) \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{J_{2n\lambda}(\lambda t)}{\lambda^3} \right\} - 2\delta_{nh} \quad (24)$$

$$P(x) = x^4 - 14x^3 + \frac{105}{2}x^2 - \frac{105}{2}x + \frac{105}{16}$$

On voit que le comportement de  $Q_n(h, \xi)$  pour  $\xi \rightarrow \infty$  dépend de  $h$ .  
 Pour  $h \neq 0$ ,  $Q_n(h, \xi)$  décroît comme une gaussienne. Introduisant la transformée de Laplace  $R_n(h, s)$  :

$$R_n(h, s) = \int_0^{\infty} R_n(h, t) e^{-st} dt \quad (25)$$

on en déduit que  $R_n(h, s)$  est une fonction entière de  $s$  pour  $h \neq 0$ .

Pour  $h = 0$ ,  $n \neq 0$ , le comportement pour  $\xi \rightarrow \infty$  dépend du comportement de l'intégrant de (24) pour  $t$  petit. Dans un domaine fini autour de  $t = 0$ , la série en  $\lambda$ , qui est une série de Kapteyn, est analytique et peut donc être développée en série de puissances de  $t$ . L'intégration donnera une série de puissances de  $1/\xi$  qui est aussi convergente autour de  $\xi = \infty$ . Ayant établi ainsi la régularité autour de  $\xi = \infty$ , on peut utiliser l'expression (23) pour trouver le terme dominant. On trouve

$$Q_n(0, \xi) \sim \begin{cases} \xi^{-6} & n = 1, 2, 3, 4 \\ \xi^{2(1-n)} & n > 4 \end{cases} \quad (26)$$

Pour  $n = 0$ , la série en (24) est une série de Schömlich et on ne peut pas développer en puissances de  $t$ . Il est montré en réf. <sup>1)</sup> que  $Q_0(0, \xi) \rightarrow 0$  pour  $\xi \rightarrow \infty$ .

De (22), (25) et (26), on déduit les propriétés suivantes :

- a)  $R_n(h, s)$  analytique dans le demi-plan  $\text{Re } s \geq 0$
  - b)  $\text{Re } R_n(h, s) > 0$  pour  $\text{Re } s \geq 0$  (cf. réf. <sup>1)</sup>)
- (27)



- c)  $R_n(h, s) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0}{U}$  pour  $s \rightarrow \rho$  dans  $\text{Re } s > 0$  et sur l'axe imaginaire.
- d)  $\mathcal{Y}_m R_n(h, iy)$  borné dans le voisinage de  $y = 0$
- e)  $Q_n(h, \xi)$  est à variation bornée, uniformément pour tout  $n$  et  $h$ .

Le terme en  $\delta_{nh}$  est absorbé dans  $X_n(h)$ . Comme ce terme est positif, il n'entraîne aucune modification des propriétés mentionnées en section II. Les propriétés (27) sont les seules requises dans la démonstration de la stabilité en réf. <sup>2)</sup>.

#### IV. Critères de stabilité et discussion

L'équation complète s'écrit

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0}{U} \delta_{nh} + X_n(h) + A_n(h) \cos \omega t + B_n(h) \cos 2\omega t \right\} \frac{\varepsilon_n(h, t)}{a} + \int_0^t R_n(h, t-t') \dot{\varepsilon}_n(h, t') dt' = 0 \quad (28)$$

Introduisons les notations

$$g(s) = \frac{1}{X_n(h) + \delta_{nh} + s R_n(h, s)} \quad (29)$$

et  $V[Q_n(h, \xi)]$  pour désigner la variation totale de la fonction  $Q_n(h, \xi)$  comme fonction de  $\xi$ .

Les propriétés (10) et (27 a-d) sont suffisantes (réf. <sup>2)</sup>) pour qu'il existe une fréquence  $\omega$  au-dessus de laquelle toutes les solutions de (28) sont stables. Le critère est

$$\left[ |A_n(h)| + |B_n(h)| \right]^2 |g(s) g(s+i\omega)| < a^2 \quad \omega \geq \omega \quad (30)$$

Lorsque  $n$  et  $h$  tendent vers l'infini, ce critère devient inapplicable en raison de (20).

Cependant il est également montré en réf. <sup>2)</sup> que les propriétés additionnelles (21) et (27 e) permettent d'établir un autre critère pour

la fréquence stabilisatrice  $\omega$ . Il s'écrit

$$\frac{V[Q_n(h, \xi)] \exp \left\{ \frac{(|F_0| + \sqrt{2}) |F_1|}{\Omega^* p_0} \right\}}{1 - \exp \left\{ - \frac{X_n(h)}{p_0 \Omega^*} \right\}} < \Omega^* \quad (31)$$

$$\Omega^* = \frac{a \Omega}{\sqrt{2\pi} \pi v}$$

Ce critère ne peut être satisfait que lorsque

$$V[Q_n(h, \xi)] < \frac{X_n(h)}{p_0} \quad (32)$$

Or pour  $n, h \rightarrow \infty$   $V[Q_n(h, \xi)] \rightarrow 0$  et  $X_n(h) \rightarrow \infty$ . Cette condition finit donc toujours par être satisfaite. Utilisant (30) et (31) on peut donc trouver une fréquence  $\omega$  valable pour tout  $n$  et  $h$ . Ceci est le résultat cherché.

Le terme forçant dans l'équation du mode (00) ne produit qu'un mouvement périodique de la surface. Il ne peut pas produire d'instabilité, vu que les critères suffisants utilisés assurent l'intégrabilité du module de la résolvante (cf. réf. 2)).

Revenant aux propriétés de la force de rappel magnétique et de l'impédance acoustique, on peut essayer d'en dégager l'interprétation physique.  $X_n(h) > 0$  assure que la force moyenne de rappel magnétique est opposée au déplacement. Le fait que la force magnétique instantanée soit bornée lorsqu'elle est déstabilisante, (21), n'est pas toujours nécessaire et peut-être même pas toujours suffisante. Son utilité dans ce cas-ci est liée au comportement asymptotique de l'impédance acoustique à haute fréquence (27 c) qui devient constante et purement résistive. L'analyticité de  $R_n(h, s)$  signifie que le gaz est stable vis-à-vis de perturbations dans la masse du gaz.

$\text{Re } R(h, s) > 0$ , (27 b), signifie que le plasma est dissipatif pour toutes les fréquences. La condition (27 d) n'est pas nécessaire dans tous les cas. Elle n'a pour but que d'assurer que  $g(s)$  soit borné à l'origine. On pourrait prendre ceci comme condition.

En conclusion, les conditions utilisées, à part (27 c), peuvent être considérées comme indépendantes du modèle particulier utilisé. La

condition (27 c), elle, ne se retrouve pas dans le modèle acoustique par exemple. Or le critère (31) dépend de cette propriété.

Toutes les tentatives d'éviter l'utilisation de la propriété (27 c) en la remplaçant par la condition que  $R_n(h, s) \rightarrow s^\alpha$  avec  $2 > \alpha \geq 0$ , ont échoué.

Afin de voir si les conclusions subsistent avec un autre modèle, les calculs seront répétés en utilisant pour le plasma le modèle acoustique avec viscosité.

### Références

- 1) E.S. Weibel : Phys. Fluids, 3, 946 (1960)
- 2) F. Troyon : Sur la stabilité d'un système linéaire passif dont un élément change périodiquement - LRP 11-63
- 3) G.N. Watson : Treatise on the theory of Bessel Functions (p. 394).

Appendice

Un théorème sur  $g_n(h)$  et  $f_n(h)$

Ce théorème est une modification triviale du théorème 3 de l'appendice en réf. 1).

Théorème

$g_n(h)$  est une fonction monotoniquement croissante de  $|n|$  ( $|h|$ ) le long d'une ligne  $\frac{n}{h} = \text{constante}$ . Il en est donc de même de  $f_n(h)$ .

Considérons les deux fonctions  $y_n(h,r)$  et  $Y_N(H,r)$  qui satisfont aux équations

$$\frac{d}{dr} (r y_n'(h,r)) - (h^2 r + \frac{n^2}{r}) y_n(h,r) = 0 \quad A(1)$$

$$\frac{d}{dr} (r Y_N'(H,r)) - (H^2 r + \frac{N^2}{r}) Y_N(H,r) = 0 \quad A(2)$$

et aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} y_n(h,b) &= Y_N(H,b) = 1 \\ y_n'(h,b) &= Y_N'(H,b) = 0 \end{aligned} \quad A(3)$$

Ce choix des conditions revient à fixer la constante dans (6).

Multiplions A(1) par  $H^2 Y_N(H,r)$  et A(2) par  $h^2 y_n(h,r)$  et soustrayons

$$\frac{d}{dr} r [H^2 Y y' - h^2 Y' y] - r (H^2 - h^2) Y' y' - \frac{1}{r} (H^2 n^2 - N^2 h^2) y Y = 0 \quad A(4)$$

Intégrant entre  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 -a[H^2 Y(a) y'(a) - h^2 Y'(a) y(a)] &= (H^2 - h^2) \int_a^b r Y' y' dr + \\
 &+ (H^2 n^2 - h^2 N^2) \int_a^b \frac{Y y}{r} dr
 \end{aligned}
 \tag{A(5)}$$

Si  $\frac{H}{N} = \frac{h}{n}$  on a

$$-H^2 Y(a) y'(a) + h^2 Y'(a) y(a) = (H^2 - h^2) \int_a^b r Y' y' dr > 0 \text{ si } H^2 > h^2
 \tag{A(6)}$$

Divisant par  $y'(a) Y'(a)$  qui est positif, on obtient

$$g_N(H) > g_n(h) \text{ si } H^2 > h^2, \frac{H}{N} = \frac{h}{n}$$

ce qui prouve le théorème.