Foncteurs de Mackey Projectifs

THÈSE N^{O} 4089 (2008)

PRÉSENTÉE LE 30 MAI 2008

À LA FACULTE SCIENCES DE BASE
CHAIRE DE THÉORIE DES GROUPES
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Muriel NICOLLERAT

diplôme de mathématicien, Université de Lausanne
de nationalité suisse et originaire de Bex (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. K. Hess Bellwald, présidente du jury
Prof. J. Thévenaz, directeur de thèse
Prof. S. Bouc, rapporteur
Prof. M. Geck, rapporteur
Prof. D. Testerman, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2008

Abstract

This work deals with the study of projective Mackey functors. Mackey functors are algebraic structures with operations which behave like induction, restriction and conjugation in group representation theory. These objects have properties which generalize many constructions such as, for example, group cohomology, the Burnside ring or algebraic K-theory of group rings.

In the first part we concentrate on extension groups of degree 1 between simple Mackey functors for a group G. The calculation of these groups is a very important tool in determining the Loewy series of projective Mackey functors. We determine extension groups between simple Mackey functors indexed by normal subgroups of G. We next study the conditions under which it is possible to restrict ourselves to that case, and we give methods for calculating extension groups between simple Mackey functors which are not indexed by normal subgroups. We also study the case of extension groups between simple Mackey functors indexed by the same subgroup. In that case, every extension group can be embedded in an extension group between modules over a group algebra, and we describe the image of this embedding. In particular, we determine every extension group for simple Mackey functors for a p-group and for a group which has a normal p-Sylow subgroup.

Next, we focus on extension groups of higher degree between simple Mackey functors for a group with a p-Sylow subgroup of order p. We calculate explicitly the minimal projective resolution of a simple Mackey functor for the group $C_p \rtimes C_e$, where e divides $p-1$ and C_e acts faithfully on C_p. This allows us to prove that every simple Mackey functor for a group whose order is not divisible by p^2 has a periodic (or finite) minimal projective resolution.

Next, we examine the socle of a projective Mackey functor for a p-group P. We prove that simple subfunctors of a projective functor indexed by a subgroup H of P are indexed by normalizers in H of subgroups of H. In particular, this implies that in the case where P is abelian, every simple subfunctor of our projective functor is indexed by H. We then study the socle of a specific projective Mackey functor, namely the Burnside functor B^P, and we focus on the case where P is abelian. In particular, we calculate it in the case of a cyclic p-group, an abelian p-group of rank 2 and an elementary abelian p-group of rank 3. This enables us to determine the socle of an indecomposable projective Mackey functor indexed by a subgroup of P isomorphic to one of the previous groups.

We end this work by providing an explicit formula for the Cartan coefficients of the Mackey functors for a p-group.

Keywords : Mackey functor, Mackey algebra, group representation, Burnside ring, extension groups.

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des foncteurs de Mackey projectifs. Les foncteurs de Mackey sont des structures algébriques possédant des opérations qui se comportent comme l'induction, la restriction et la conjugaison dans la théorie des représentations des groupes. Ces objets ont des propriétés qui généralisent de nombreuses constructions comme, par exemple, la cohomologie des groupes, l'anneau de Burnside ou la K-théorie algébrique des anneaux de groupes.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples associés à un groupe G. La détermination de ces groupes est en effet un outil très important pour obtenir la série de Loewy des foncteurs projectifs. Nous déterminons les groupes d'extension entre des foncteurs de Mackey simples indexés par des sous-groupes normaux de G. Puis nous étudions à quelles conditions il est possible de se restreindre à ce cas et nous donnons des méthodes pour calculer les groupes d'extensions entre foncteurs simples qui ne sont pas indexés par des sous-groupes normaux. Nous nous intéressons ensuite au cas des groupes d'extension entre foncteurs simples indexés par le même sous-groupe. Dans ce cas, chaque groupe d'extension s'envoie de manière injective dans un groupe d'extension entre modules sur une algèbre de groupe. Nous décrivons alors l'image d'un tel monomorphisme. En particulier, nous déterminons tous les groupes d'extension pour des foncteurs de Mackey simples associés à un p-groupe et à un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow normal.

Nous étudions ensuite les groupes d'extension de degré supérieur entre des foncteurs de Mackey simples, associés à un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p. Nous calculons explicitement les résolutions projectives minimales des foncteurs de Mackey simples associés au groupe $C_p \rtimes C_e$, où e divise $p-1$ et où C_e agit fidèlement sur C_p. Cela nous permet alors de montrer que tous les foncteurs de Mackey simples associés à un groupe dont l'ordre n'est pas multiple de p^2 possède une résolution projective minimale périodique (ou finie).

Nous nous intéressons par la suite au socle des foncteurs de Mackey projectifs, associés à un p-groupe P. Nous prouvons que les sous-foncteurs simples d'un foncteur projectif indexé par un sous-groupe H de P sont eux-même indexés par des normalisateurs dans H de sous-groupes de H. En particulier, ce résultat montre que dans le cas où P est abélien, tous les sous-foncteurs simples de notre foncteur projectif sont indexés par H. Nous nous intéressons alors au socle d'un foncteur de Mackey projectif spécifique, à savoir le foncteur de Burnside B^P, essentiellement dans le cas abélien. En particulier, nous déterminons ce socle dans le cas d'un p-groupe cyclique, un p-groupe abélien de rang 2 et un p-groupe abélien élémentaire de rang 3. Cela nous permet de déterminer le socle d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable indexé par un sous-groupe de P, isomorphe à l'un des groupes précédents.

Nous terminons en donnant une formule explicite pour déterminer les coefficients de Cartan des foncteurs de Mackey associés à un p-groupe.

Mots clés : foncteurs de Mackey, algèbre de Mackey, représentation des groupes, anneau de Burnside, groupes d'extension.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement le Professeur Jacques Thévenaz, autant pour le choix du sujet, que pour son enthousiasme, ses encouragements et sa constante disponibilité malgré un emploi du temps très chargé. Faire des maths avec lui pendant ces quatre dernières années a été un grand plaisir.

J'aimerais également remercier le Professeur Serge Bouc qui a accepté d'expertiser ma thèse et qui, durant ses séjours à Lausanne, a gentiment accepté de discuter de mon travail et m'a proposé diverses voies à explorer. Je le remercie également pour ses nombreuses corrections et propositions d'amélioration de ce travail.

Je tiens encore à remercier les Professeurs Meinolf Geck et Donna Testerman pour avoir accepté d'expertiser mon travail, ainsi que madame la Professeure Kathryn Hess pour avoir accepté de présider ce jury. Un merci tout particulier à Donna pour sa gentillesse et son enthousiasme permanent.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues qui ont rendu ces années de thèse très agréables. En particulier, merci à David pour les nombreux pause-cafés, débats, discussions et gags mathématiques ! Merci également à Soumaïa avec qui j'ai partagé mon bureau pendant ces quatre années. Merci encore à Jean-Marie, Christine (et son chocolat !), Arianna, Paul, Lucile, Caleb et Nicolas. Merci finalement à toutes les personnes que j'ai eu la chance de rencontrer pendant mes études de math à l'université.

Je remercie du fond du coeur mes parents et ma soeur pour m'avoir soutenue et encouragée tout au long de ma vie et de mes études. Je remercie également mes parents pour avoir consacré beaucoup de leur temps à relire de nombreux textes barbares. Un grand merci à Diane, Florence, Marie-Claire et Solenne, des amies sur lesquelles je peux compter depuis si longtemps.

Un merci tout particulier à Marie-Jo et Leslie pour leur amitié très importante dans ma vie. Merci pour ces nombreux moments partagés de voyages, jeux, repas gastronomiques et longues discussions.

J'aimerais finalement adresser un énorme merci à Jérôme, mon futur mari, qui m'a toujours soutenue et encouragée, et qui n'a pas hésité à se plonger dans l'univers ardu des foncteurs de Mackey. Merci d'être toujours là pour moi et de partager ma vie.

Table des matières

Introduction

Le cadre global de ce travail est celui de la théorie des représentations des groupes finis. Une représentation d'un groupe G sur un corps k est un homomorphisme de groupes de G dans $GL(V)$, où V est un k-espace vectoriel de dimension finie, ou, de manière équivalente, une représentation est un kG-module V, de type fini. Le but de cette théorie est d'obtenir des informations sur la structure d'un groupe fini, à partir de ses représentations.

La théorie des représentations a été développée, à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, par Ferdinand Georg Frobenius et, indépendamment, par William Burnside. Ils ont introduit, d'une part, le concept de représentation ρ d'un groupe fini G sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, autrement dit ρ est un homomorphisme de G dans $GL_n(\mathbb{C})$, et d'autre part, le caractère χ associé à cette représentation, qui est défini par $\chi(g) = \mathrm{Trace}(\rho(g))$ pour tout élément g de G. Cette dernière définition généralisait ainsi la notion de caractère d'un groupe fini abélien, déjà connue à cette époque. En particulier, Frobenius a écrit de nombreux articles fondateurs de cette théorie, dont l'un des plus brillants était une analyse détaillée des relations entre les représentations, toujours sur $\mathbb{C}$, d'un groupe G et les représentations d'un sous-groupe H de G. Cet article marque les origines de la théorie des représentations induites, qui associe à une représentation (respectivement à un caractère) d'un sous-groupe H de G, une représentation (respectivement un caractère) de G.

A partir de là, de nombreux résultats ont révélé la puissance et l'utilité de la notion de représentation induite. Par exemple, Emil Artin a démontré, en 1931, que tout caractère de G est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de caractères induits par des caractères de sous-groupes cycliques de G. Un autre résultat analogue est dû à Richard Brauer, qui a prouvé, en 1947, que tout caractère de G est une combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères induits par des caractères de sous-groupes élémentaires de G, où un sous-groupe E est dit élémentaire s'il est produit direct d'un groupe cyclique C d'ordre premier à p par un p-groupe, pour un nombre premier p. Brauer a été, par ailleurs, le fondateur de la théorie des représentations modulaires, c'est-à-dire des représentations sur un corps k dont la caractéristique divise l'ordre de G. En effet, jusqu'alors, la théorie des représentations se faisait sur le corps des complexes, où, par le théorème de Maschke, toute représentations se décompose en somme directe de représentations irréductibles, qui sont elles-mêmes en nombre fini et dont la plupart des propriétés sont décrites à l'aide de leur table de caractères. Dans le cas où la caractéristique de k est divise l'ordre du groupe, l'algèbre kG n'est plus semi-simple et la classification des kG-modules devient beaucoup plus ardue. Brauer s'est alors attaqué à ce problème, dans le but premier d'obtenir des informations sur les tables de caractères dans le cas complexe.

La théorie des représentations induites semblait, comme nous l'avons dit, mener à de nombreuses applications dans différents cadres, c'est ce qui a conduit Tsit-Yuen Lam à introduire une première formulation axiomatique de ces techniques, pour pouvoir utiliser les représentations induites et, en particulier les formules de réciprocité établies par Frobenius, dans plusieurs situations comme, par exemple, pour l'étude de différents groupes de Grothendieck.

Toutefois, des développements plus poussés de cette théorie ont révélé l'importance des théorèmes de Mackey dans l'étude des représentations, et plus particulièrement de la formule de Mackey qui décrit le procédé d'induction de H à G, puis de restriction à J, en termes de restriction de H à $H \cap gJg^{-1}$, suivi d'induction à J, où H et J sont des sous-groupes de G et $g \in G$. Cette formule permet donc de mettre en relation l'induction à G et des constructions concernant uniquement les sous-groupes propres de G. En 1971, James Green a introduit, dans [Gre71], la notion de G-foncteur, qui sera appelé par la suite foncteur de Green, afin d'obtenir "un cadre général pour une partie de la théorie des représentations des groupes finis, celle qui comprend la théorie des vortex des représentations modulaires et la théorie des groupes de défaut d'un bloc". Un G-foncteur A pour un groupe fini G, sur un anneau commutatif R, associe à chaque sous-groupe H de G, une R-algèbre $A(H)$, ainsi que des applications d'induction, notées I_K^H, de $A(K)$ dans $A(H)$, de restriction, notées R_K^H, de $A(H)$ dans $A(K)$, et de conjugaison, notées c_g, de $A(H)$ dans $A(gHg^{-1})$ pour tout sous-groupe K de H et tout élément g de G. De plus, ces applications doivent satisfaire plusieurs conditions, dont des conditions de transitivité, l'axiome de Frobenius, ainsi que l'axiome de Mackey. Lorsque les objets $A(H)$ possèdent seulement une structure de R-module, A est appelé foncteur de Mackey.

Parallèlement à cela, Andreas Dress a introduit, en 1973, dans [Dre73], les notions de foncteurs de Mackey et de foncteurs de Green, à l'aide d'une définition équivalente à celle de Green, mais qui part d'un autre point de vue visant à faire ressortir les similitudes entre la théorie des représentations induites et certains aspects de l'algèbre homologique. Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie, contenant des sommes finies, des produits finis et des produits fibrés. Dress a défini alors un foncteur de Mackey comme un couple de foncteurs $(M_\star, M^\star)$ de $\mathcal{A}$ dans la catégorie $\mathcal{B}$ des R-modules à gauche (où R est un anneau commutatif) qui coïncident sur les objets et tels que $M_\star$ est covariant et transforme les sommes finies de $\mathcal{A}$ en produits finis de $\mathcal{B}$, $M^\star$ est contravariant, et tels que $M_\star$ et $M^\star$ satisfont une condition supplémentaire sur les produits fibrés. Lorsque la catégorie $\mathcal{A}$ est la catégorie des G-ensembles finis, les définitions de Dress et de Green coïncident. En particulier, la condition sur les produits fibrés de la définition de Dress correspond à l'axiome de Mackey dans la définition de Green.

A partir de là, s'est posée la question naturelle de classifier les foncteurs de Mackey simples. La réponse complète à ce problème a été donnée par Jacques Thévenaz et Peter Webb, dans [TW90], en 1989, qui ont démontré que ces foncteurs simples sont paramétrisés par un sous-groupe H de G, pris à conjugaison près, et par un $kN_G(H)/H$-module simple V, pris à isomorphisme près. Les deux mêmes auteurs ont ensuite écrit un article, [TW95], qui décrit la structure des foncteurs de Mackey, et qui est centré plus particulièrement sur les foncteurs de Mackey projectifs, en utilisant une troisième définition de ces foncteurs. Thévenaz et Webb ont en effet introduit une R-algèbre de rang fini, appelée l'algèbre de Mackey. Un foncteur de Mackey devient alors simplement un module sur cette algèbre. Cette définition est très utile, car elle permet d'utiliser les constructions et les résultats standards de la théorie des modules comme, par exemple, l'existence de couvertures projectives, ou le théorème de Krull-Schmidt. De plus, lorsque R est un corps, la paramétrisation des foncteurs de Mackey simples nous donne alors immédiatement une paramétrisation des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables.

L'article de Thévenaz et Webb a également mis en lumière le fait qu'il y a encore beaucoup à découvrir sur la structure des foncteurs de Mackey projectifs. Ce sont donc justement ces foncteurs projectifs, associé à un corps $R = k$, qui vont nous intéresser dans ce travail.

Dans le premier chapitre, nous donnerons les différentes définitions de foncteur de Mackey, ainsi que plusieurs résultats et définitions liés aux représentations des groupes finis, dont nous aurons besoin pour la suite. Nous exposerons également la classification des foncteurs de Mackey simples, obtenue par Thévenaz et Webb, et nous donnerons plusieurs propriétés des foncteurs de Mackey projectifs.

Le deuxième chapitre traite des groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples. La détermination de ces groupes est un outil majeur pour déterminer la série de Loewy d'un foncteur de Mackey projectif. Nous calculerons explicitement ce groupe lorsque les foncteurs simples correspondants sont indexés par des sous-groupes normaux distincts, et nous verrons à quelles conditions il est possible de se restreindre à ce cas. Dans le cas où cette restriction n'est pas possible, nous obtiendrons des informations sur ces groupes à l'aide de foncteurs, appelés foncteurs T, que nous étudierons, dont la définition est analogue à celle des foncteurs simples construits dans la classification, à la différence près que les modules qui les indexent ne sont plus simples. Ces foncteurs T nous permettrons alors d'obtenir des conditions pour lesquelles les groupes d'extension entre foncteurs simples sont triviaux et ils nous permettront également de restreindre les calculs à des sous-groupes propres de notre groupe de départ. La dernière section de ce chapitre sera consacrée au cas, plus délicat, où les foncteurs simples apparaissant dans les groupes d'extension sont indexés par le même sous-groupe. Nous montrerons alors que dans le cas d'un p-groupe, où p est la caractéristique du corps k, ainsi que dans le cas où notre groupe possède un p-sous-groupe de Sylow normal, les groupes d'extension de degré 1 sont isomorphes à des groupes d'extension entre modules sur des algèbres de groupes, du moins dans le cas où p est impair.

La question qui se pose ensuite naturellement est de savoir ce qu'il en est des groupes d'extension de degré supérieur. Cette question est d'autant plus intéressante qu'elle est directement liée au problème de la détermination de résolutions projectives minimales de foncteurs simples. Nous nous intéresserons donc à ce problème, dans le chapitre 3, et nous nous placerons alors dans un cas où la structure des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables a été déterminée explicitement (dans [TW95]), à savoir le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p. Dans un premier temps, nous déterminerons les résolutions projectives minimales des foncteurs simples associés au groupe cyclique d'ordre p. Dans un deuxième temps, nous les utiliserons afin d'obtenir des résolutions projectives de foncteurs simples associés à un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow normal C, lorsque le foncteur simple en question est indexé par C, et à un groupe $G = C_p \rtimes C_e$, où e divise $p-1$, lorsque le foncteur simple en question est indexé par le groupe trivial. Nous survolerons ensuite le cas des extensions entre foncteurs de Mackey cohomologiques, c'est-à-dire satisfaisant la condition que $I_K^H R_K^H$ est égal à la multiplication par l'indice $[H : K]$ pour tous sous-groupes $K \leq H \leq G$. Nous démontrerons que les extensions de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples cohomologiques sont les mêmes que dans le cas standard, puis nous verrons, par des exemples, que ce n'est plus le cas lorsque les foncteurs ne sont pas simples ou pour des extensions de degré supérieur.

Le quatrième chapitre sera consacré à la question du socle des foncteurs de Mackey projectifs. Dans le cas des modules sur l'algèbre de groupe kG, ce problème est inintéressant car le socle des modules projectifs indécomposables est toujours simple, et isomorphe au plus grand quotient simple du module en question. Par contre, ce résultat n'est plus vrai pour les foncteurs de Mackey associés à un groupe dont l'ordre est divisible par p^2. La détermination du socle de ces foncteurs devient alors un problème ardu. Nous nous placerons dans le cas où notre groupe $G = P$ est un p-groupe et nous montrerons que les sous-foncteurs simples d'un foncteur de Mackey projectif $P_{H,k}$, indexé par un sous-groupe H de G, sont eux-mêmes indexés par des normalisateurs dans H de sous-groupes de H. En particulier, il s'ensuit que dans le cas d'un groupe abélien, tous les sous-foncteurs simples de $P_{H,k}$ sont indexés par H. Nous focaliserons alors notre attention sur le cas abélien et nous verrons qu'il suffit de comprendre le cas du foncteur de Burnside, qui correspond, dans le cas d'un p-groupe, au foncteur de Mackey projectif $P_{P,k}$. Les sections suivantes seront consacrées à l'étude du nombre de sous-foncteurs simples, forcément isomorphes à $S_{P,k}$, du foncteur de Burnside, dans le cas abélien. Les résultats obtenus nous permettront de calculer le socle d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable $P_{H,k}$ dans les cas où H est un sous-groupe cyclique, abélien de rang 2 ou abélien élémentaire de rang 3 d'un p-groupe quelconque P.

Le cinquième et dernier chapitre traite des coefficients de Cartan des foncteurs de Mackey, qui donnent la liste des facteurs de composition d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable. De nouveau, nous nous placerons dans le cas d'un p-groupe P, et nous donnerons alors une formule explicite pour déterminer les coefficients de Cartan des foncteurs de Mackey associés à P. Nous terminerons ce chapitre par quelques exemples.

Chapitre I

Rappels

Notations

Tout au long de ce travail, G désignera un groupe fini, R un anneau commutatif et k un corps qui sera supposé algébriquement clos, à partir du deuxième chapitre. Nous noterons $H \leq G$ (respectivement $H < G$, $H \trianglelefteq G$, $H \triangleleft G$) si H est un sous-groupe de G (respectivement un sous-groupe propre, un sous-groupe normal, un sous-groupe normal propre). De même, $K \leq_G H$ (respectivement $K <_G H$) signifie que K est conjugué, par un élément de G, à un sous-groupe de H (respectivement à un sous-groupe propre) et, pour tout $g \in G$, nous poserons ${}^gH = gHg^{-1}$ et $H^g = g^{-1}Hg$. Si H, $K \leq G$, nous noterons $[G/H]$ (respectivement $[H\backslash G]$) un ensemble de représentants des classes à gauche (respectivement à droite) modulo H et $[K\backslash G/H]$ un ensemble de représentants des doubles classes KgH. Nous noterons $\overline{N}_G(H)$ le groupe $N_G(H)/H$, pour tout $H \leq G$, où $N_G(H) = \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\}$ est le normalisateur de H dans G. Si H et K sont des sous-groupes de G, le transporteur de H à K, à savoir $\{g \in G \,|\, {}^gH \leq K\}$, sera noté $T_G(H, K)$. Finalement, si A est un anneau, les A-modules seront, par convention, des modules à gauche et de type fini.

1.1 Foncteurs de Mackey : définitions et exemples

Nous allons commencer par rappeler les différentes définitions des foncteurs de Mackey. Il y a, en effet, quatre définitions équivalentes : l'une en termes d'application qui associe à chaque sous-groupe de G un module, la deuxième en termes de G-ensembles, la troisième comme un foncteur d'une certaine catégorie dans les modules et la quatrième en termes de module sur une certaine algèbre. Cette diversité nous permet donc d'aborder les problèmes liés à ces objets de plusieurs points de vue et, par exemple, d'utiliser la théorie des modules ou celle des G-ensembles selon les besoins.

La première définition est due à Green (voir [Gre71]) :

Définition 1.1.1. *Un foncteur de Mackey, associé à un groupe fini G, sur un anneau commutatif R, est un ensemble de R-modules $\{M(H) \mid H \leq G\}$, pour chaque sous-groupe H de G, munis d'applications R-linéaires*

$$\begin{array}{lll} I_K^H : & M(K) \to M(H) & \textit{(induction)} \\ R_K^H : & M(H) \to M(K) & \textit{(restriction)} \\ c_g : & M(H) \to M({}^gH) & \textit{(conjugaison)} \end{array}$$

pour chaque sous-groupe $K \leq H$ et pour tout $g \in G$, satisfaisant les conditions suivantes :

i) I_H^H, R_H^H, $c_h : M(H) \to M(H)$ *sont égaux à* $\mathrm{id}_{M(H)}$ *pour tout* $H \leq G$ *et tout* $h \in H$,

ii) $R_J^K R_K^H = R_J^H$ *et* $I_K^H I_J^K = I_J^H$ *pour tout* $J \leq K \leq H$,

iii) $c_g c_h = c_{gh}$ *pour tout* g, $h \in G$,

iv) $R_{{}^gK}^{{}^gH} c_g = c_g R_K^H$ *et* $I_{{}^gK}^{{}^gH} c_g = c_g I_K^H$ *pour tout* $K \leq H$ *et tout* $g \in G$,

v) (axiome de Mackey)

$$R_J^H I_K^H = \sum_{x \in [J \backslash H/K]} I_{J \cap {}^xK}^J c_x R_{J^x \cap K}^K$$

pour tout $J, K \leq H$, *où* $[J\backslash H/K]$ *est un ensemble de représentants des doubles classes* JgK.

Les foncteurs de Mackey associés à un groupe fini G forment une catégorie, notée $\mathrm{Mack}_R(G)$, dans laquelle un morphisme f entre des foncteurs de Mackey M et N est une collection de morphismes de R-modules

$$f(H) : M(H) \to N(H)$$

qui commutent avec les applications d'induction, de restriction et de conjugaison.
Un sous-foncteur N d'un foncteur de Mackey M est un ensemble de R-sous-modules $N(H) \subseteq M(H)$, pour tout sous-groupe H de G, qui est stable par induction, restriction et conjugaison.
Si N est un sous-foncteur de M, le foncteur quotient M/N est défini par $(M/N)(H) = M(H)/N(H)$, muni des applications de restriction, transfert et conjugaison induites.

Remarquons de plus que, vu les axiomes *i)* et *iii)* de la définition, si M est un foncteur de Mackey, alors, pour tout $x \in N_G(H)$, les applications c_x définissent une structure de $R[N_G(H)/H]$-module sur $M(H)$. En particulier, $M(1)$ est un RG-module. En fait, la catégorie des RG-modules se plonge dans $\mathrm{Mack}_R(G)$, via le foncteur point fixe (voir l'exemple 2, page 14).

La deuxième définition, donnée par Dress (voir [Dre73]), utilise la notion de G-ensembles :

Définition 1.1.2. *Un foncteur de Mackey pour G sur R est un foncteur bivariant $M = (M_\star, M^\star)$ de la catégorie des G-ensembles finis dans celle des R-modules (autrement dit, $M_\star$ est un foncteur covariant, $M^\star$ est un foncteur contravariant et, pour tout G-ensemble X, $M_\star(X) = M^\star(X)$, qui sera ainsi noté $M(X)$), avec les propriétés suivantes :*

i) *Les applications* $X \xrightarrow{i_X} X \bigsqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y$ *définissent un isomorphisme de $M(X) \oplus M(Y)$ dans $M(X \bigsqcup Y)$ via $M_\star$.*

ii) *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ Z \arrow[r, "d"] & T \end{tikzcd}$$

un produit fibré de G-ensembles finis, alors $M_\star(b)M^\star(a) = M^\star(d)M_\star(c)$.

Ces deux définitions sont équivalentes. En effet, si $\tilde{M}$ est un foncteur de Mackey pour la deuxième définition (Dress), on lui associe le foncteur de Mackey M pour la première définition (Green) en posant $M(H) = \tilde{M}(G/H)$. De plus, si $K \leq H$ et si $\pi_K^H : G/K \to G/H$ est l'application quotient, on prend $I_K^H = \tilde{M}_\star\left(\pi_K^H\right)$, $R_K^H = \tilde{M}^\star\left(\pi_K^H\right)$ et $c_x = \tilde{M}_\star(\gamma_x)$, où l'application $\gamma_x : G/H \to G/{}^xH$ est définie par $\gamma_x(yH) = yx^{-1}({}^xH)$. En particulier, l'axiome sur les produits fibrés est équivalent à l'axiome de Mackey de la première définition.

Réciproquement, si M est un foncteur de Mackey pour la première définition, on lui associe le foncteur $\tilde{M}$ pour la deuxième en posant

$$\tilde{M}(X) = \Big(\bigoplus_{x \in X} M(G_x)\Big)^G$$

où $G_x = \{g \in G \,|\, gx = x\}$ est le stabilisateur de x dans G, et où G permute les composantes de la somme directe via son action sur X, et via les applications $c_{g,G_x} : M(G_x) \to M(G_{gx})$, pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

De plus, si $f : X \to Y$ est une application de G-ensembles, alors pour tout élément $u = (u_x)_{x\in X}$ de $\tilde{M}(X)$, l'élément $M_\star(f)(u)$ de $\tilde{M}(Y)$ est défini par

$$M_\star(f)(u)_y = \sum_{x\in[G_y\backslash f^{-1}(y)]} I_{G_x}^{G_y}(u_x)$$

pour tout $y \in Y$, où $[G_y\backslash f^{-1}(y)]$ est un ensemble de représentants des orbites de $f^{-1}(y)$ sous l'action de G_y, le stabilisateur de y dans G. De manière analogue, si $v = (v_y)_{y\in Y}$ est un élément de $\tilde{M}(Y)$, l'élément $M^\star(f)(v)$ de $\tilde{M}(X)$ est défini par $M^\star(f)(v)_x = R_{G_x}^{G_{f(x)}} v_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

La troisième définition, due à Lindner (voir [Lin76]), décrit un foncteur de Mackey comme un foncteur, au sens usuel, d'une certaine catégorie $\Omega_R(G)$ que nous allons expliciter, dans la catégorie des R-modules. Cette définition est élégante et justifie l'utilisation du terme de foncteur, toutefois nous n'allons pas beaucoup l'utiliser dans ce travail.

Soit $\omega(G)$ la catégorie dont les objets sont les G-ensembles finis et où les morphismes de X dans Y sont les classes d'équivalences de diagrammes de G-ensembles $X \leftarrow V \to Y$. Deux tels diagrammes sont dits équivalents s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\sigma"] & \\ X & & Y \\ & V' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où σ est un isomorphisme de G-ensembles. Soient $X \leftarrow V \to Y$, un morphisme de X dans Y, et $Y \leftarrow W \to Z$, un morphisme de Y dans Z, la composition de ces deux morphismes s'obtient en construisant le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & V \arrow[dl] \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

qui définit un diagramme $X \leftarrow U \to Z$, autrement dit un morphisme de X dans Z. L'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{\omega(G)}(X,Y)$ possède une structure de monoïde, de la manière suivante :

$$(X \overset{\alpha}{\leftarrow} V \overset{\beta}{\to} Y) + (X \overset{\alpha'}{\leftarrow} V' \overset{\beta'}{\to} Y) = (X \overset{\alpha\sqcup\alpha'}{\longleftarrow} V \sqcup V' \overset{\beta\sqcup\beta'}{\longrightarrow} Y)$$

L'élément neutre est l'ensemble vide. Comme la réunion disjointe de G-ensembles est à la fois un produit et un coproduit, la catégorie $\omega(G)$ devient alors une catégorie additive si l'on applique la construction usuelle de Grothendieck à $\mathrm{Hom}_{\omega(G)}(X,Y)$ de sorte à en faire un groupe abélien. La catégorie $\Omega_R(G)$ est alors définie de la manière suivante : ses objets sont les G-ensembles finis et l'ensemble des morphismes de X dans Y est le R-module $\mathrm{Hom}_{\Omega_R(G)}(X,Y) = R\mathrm{Hom}_{\omega(G)}(X,Y)$, obtenu par extension des scalaires à l'anneau R. En particulier, $\Omega_R(G)$ est une catégorie additive.

Nous pouvons alors définir un foncteur de Mackey comme un foncteur R-additif $M : \Omega_R(G) \to R$-mod.

Cette définition est équivalente à la deuxième définition. En effet, si M est un foncteur de $\Omega_R(G)$ dans R-mod, on définit le couple de foncteurs $(M_\star, M^\star)$ de la manière suivante : sur les objets, cela coïncide avec M et si $f : X \to Y$ est un morphisme de G-ensembles, $M_\star(f) = M(X \stackrel{\mathrm{id}}{\leftarrow} X \stackrel{f}{\rightarrow} Y)$ et $M^\star(f) = M(Y \stackrel{f}{\leftarrow} X \stackrel{\mathrm{id}}{\rightarrow} X)$. La condition que le couple $(M_\star, M^\star)$ préserve les coproduits est équivalente à celle qui demande que M soit additif, et l'axiome sur les produits fibrés est inclus dans la définition de la composition des morphismes dans $\omega(G)$.

Finalement, la quatrième définition permet de considérer les foncteurs de Mackey comme des modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre de Mackey, et notée $\mu_R(G)$. Cette définition est particulièrement utile dans la mesure où elle permet d'utiliser les constructions et les résultats standards de la théorie des modules, comme, par exemple, les couvertures projectives (définition 1.2.14) ou le théorème de Krull-Schmidt (théorème 1.2.11).

L'algèbre de Mackey a été introduite par Thévenaz et Webb dans [TW95]. Elle est définie de la manière suivante :

Définition 1.1.3. *L'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$ est la R-algèbre engendrée par les éléments I_K^H, R_K^H et c_g pour tout $K \leq H \leq G$ et $g \in G$, avec les relations suivantes :*

- *pour tout $H \leq G$ et tout $h \in H$, $I_H^H = R_H^H = c_h$ et $\sum_H I_H^H = 1$,*

- *les relations ii) à v) de la première définition,*

- *tous les autres produits sont nuls.*

Un foncteur de Mackey est alors un module sur l'algèbre de Mackey.

Remarque : Cette définition nous permet alors de voir les foncteurs de Mackey comme des modules sur une R-algèbre. Nous utiliserons donc indifféremment la dénomination de foncteur et celle de module pour désigner ces objets.

La quatrième définition de foncteur de Mackey est équivalente à celle de Green. En effet, si M est un foncteur de Mackey pour la première définition, on lui associe le $\mu_R(G)$-module $\tilde{M} = \bigoplus_{H \leq G} M(H)$.
Réciproquement si $\tilde{M}$ est un $\mu_R(G)$-module, on lui associe un foncteur de Mackey pour la première définition en posant $M(H) = I_H^H \tilde{M}$.

Donnons ensuite deux propriétés importantes de cette algèbre. D'une part, le fait que $\mu_R(G)$ est un R-module libre de dimension finie :

Proposition 1.1.4. *L'algèbre $\mu_R(G)$ est un R-module libre, possédant la R-base suivante :*

$$\left\{ I_{{}^gL}^K c_g R_L^H \,|\, H,\ K \leq G,\ g \in [K \backslash G/H],\ L \leq_{(H \cap K^g)} H \cap K^g \right\}.$$

Preuve : voir [TW95], propositions 3.2 et 3.3.

D'autre part, comme pour les algèbres de groupes (voir le théorème 1.3.1), l'algèbre $\mu_k(G)$ est semi-simple si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe :

Théorème 1.1.5. *Si k est un corps de caractéristique première à l'ordre de G, alors $\mu_k(G)$ est une k-algèbre semi-simple.*

Preuve : voir [TW95], théorème 3.5.

Remarquons encore qu'il existe une notion de dualité pour les foncteurs de Mackey sur un corps k. En effet, si $M \in \mathrm{Mack}_k(G)$, le dual de M est le foncteur de Mackey $M^\star$, où $M^\star(H)$ est le k-module dual

$$M^\star(H) = \mathrm{Hom}_k(M(H), k)$$

pour tout sous-groupe H de G, $I_K^H = (R_K^H)^\star$, $R_K^H = (I_K^H)^\star$ et $c_g = (c_{g^{-1}})^\star$, où les termes de droite sont les applications induites sur les espaces duaux à partir des applications de restriction, induction et conjugaison de M.

Cette dualité peut s'interpréter du point de vue de l'algèbre de Mackey : tout d'abord $\mu_k(G)$ possède un anti-automorphisme, noté $x \mapsto \overline{x}$, et défini sur les éléments de la base de $\mu_k(G)$ par

$$\overline{I^K_{^gL} c_g R^H_L} = I^H_L c_{g^{-1}} R^K_{^gL}.$$

Si M est un $\mu_k(G)$-module, on définit alors $M^\star = DM^{\mathrm{op}}$, où DM est égal à $\mathrm{Hom}_k(M, k)$, le k-dual du module M, et où M^{op} est le $\mu_k(G)$-module à droite possédant les mêmes éléments que M, et tel que $mx = \overline{x}m$ pour tout $x \in \mu_k(G)$ et $m \in M$ (pour plus de détails, voir [TW95], chapitre 4).

Nous allons terminer cette section en donnant quelques exemples importants de foncteurs de Mackey, qui seront présentés à l'aide de la première définition.

1) **Le foncteur de Burnside**

Rappelons tout d'abord la définition suivante :

Définition 1.1.6. *L'anneau de Burnside, $B(G)$, associé à un groupe fini G, est le $\mathbb{Z}$-module libre de base les classes d'isomorphisme de G-ensembles finis, quotienté par les relations $[S \sqcup T] = [S] + [T]$, pour tous G-ensembles S et T. La multiplication est définie par $[S][T] = [S \times T]$, puis est étendue par linéarité. En particulier, $B(G)$ est un anneau commutatif, dont l'élément unité est la classe de l'ensemble formé d'un seul point.*

De plus, si $\mathcal{S}$ est un système de représentants des sous-groupes de G, à conjugaison près, alors $B(G) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{S}} \mathbb{Z}\langle G/H\rangle$ où $\mathbb{Z}\langle G/H\rangle$ est le groupe libre de rang 1 ayant comme base la classe du G-ensemble G/H (voir, par exemple, [CR87], corollaire 80.6).

Le foncteur de Burnside, noté B^G, associé au groupe G, est défini par $B^G(H) = R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H)$ pour tout sous-groupe H de G. Le R-module $B^G(H)$ sera souvent noté simplement $B(H)$. De plus, les éléments de la base de $B(H)$, à savoir les classes d'isomorphisme des H/K, où K parcourt les sous-groupes de H à H-conjugaison près, seront généralement notés simplement H/K.

Les applications de restriction, d'induction et de conjugaison proviennent des opérations correspondantes pour les G-ensembles, vu que l'anneau de Burnside possède une base formée par les G-ensembles transitifs. Explicitement, si $K \leq H \leq G$, ces applications sont définies pour les G-ensembles de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}^H_K : & H\text{-ens} & \to & K\text{-ens} \\ & X & \mapsto & X \end{array}$$

(restriction de l'action de H à K). En particulier,

$$\mathrm{Res}^H_K(H/J) = \bigsqcup_{g\in[K\backslash H/J]} K/K \cap {}^gJ$$

pour tout H-ensemble transitif H/J.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ind}^H_K : & K\text{-ens} & \to & H\text{-ens} \\ & X & \mapsto & H \times_K X = H \times X/\sim \end{array}$$

où $(hk, x) \sim (h, kx)$, pour tout $h \in H$, $k \in K$ et $x \in X$. En particulier,

$$\mathrm{Ind}^H_K(K/J) = H/J$$

pour tout K-ensemble transitif K/J.

$$\begin{array}{rccc} c_g : & H\text{-ens} & \to & {}^gH\text{-ens} \\ & X & \mapsto & {}^gX \end{array}$$

où ${}^gX$ est égal à X comme ensemble et où l'action de ${}^gH$ est donnée par ${}^ghx = hx$, pour tout $h \in H$ et tout $x \in X$. En particulier,

$$c_g(H/J) = {}^gH/{}^gJ$$

pour tout H-ensemble transitif H/J.

2) **Les foncteurs point fixe et quotient fixe**

Soit V un RG-module. Le foncteur de Mackey point fixe, FP_V, est défini par

$$FP_V(H) = V^H = \{v \in V \mid hv = v \text{ pour tout } h \in H\}$$

autrement dit, c'est le plus grand sous-module de V sur lequel H agit trivialement.
Si $K \leq H \leq G$, la restriction $R^H_K : V^H \to V^K$ est l'inclusion, l'induction $I^H_K : V^K \to V^H$ est la trace relative, c'est-à-dire $I^H_K(x) = \sum_{h\in[H/K]} hx$, et la conjugaison, c_g, est la multiplication par g.

Le foncteur de Mackey quotient fixe, FQ_V, est défini par

$$FQ_V(H) = V_H = V/\langle v - hv \mid v \in V,\, h \in H\rangle$$

autrement dit, c'est le plus grand quotient de V sur lequel H agit trivialement.

Si $K \leq H \leq G$, l'induction $I_K^H : V^K \to V^H$ est la surjection canonique, la restriction $R_K^H : V^H \to V^K$ est définie par $R_K^H(x) = \sum_{h \in [K \backslash H]} hx$, et la conjugaison, c_g, est la multiplication par g.

Remarquons qu'un homomorphisme $V \to W$ de kG-modules induit des morphismes de foncteurs de Mackey $FP_V \to FP_W$ et $FQ_V \to FQ_W$. Ainsi FP et FQ sont des foncteurs (fidèles) de la catégorie des kG-modules dans la catégorie $\mathrm{Mack}_k(G)$.

3) **Les foncteurs G_0 et K_0**

Le foncteur K_0 fait correspondre à un sous-groupe H de G, le groupe de Grothendieck de la catégorie des RH-modules projectifs. Le foncteur G_0 fait correspondre à H, le groupe de Grothendieck de la catégorie des RH-modules de type fini (pour plus de détails, voir la page 22). Les foncteurs G_0 et K_0 sont alors des foncteurs de Mackey associés à G sur $\mathbb{Z}$, ou sur un anneau R, si l'on étend les scalaires à R.
Dans les deux cas, si $K \leq H$, l'induction I_K^H envoie un module M sur le module $RH \otimes_{RK} M$, la restriction R_K^H est donnée par la restriction de l'action de H à K et la conjugaison fait correspondre au module M, le module conjugué $c_g(M)$ qui est égal à M comme R-module et où l'action de ${}^gH$ est donnée par ${}^ghm = hm$ (voir aussi la définition 1.3.5).

4) **Les foncteurs de cohomologie**

Fixons un $\mathbb{Z}G$-module V. Les foncteurs de cohomologie des groupes, $H^n(H, V)$, qui font correspondre à un sous-groupe H de G le $n^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de G, à coefficients dans V, sont des foncteurs de Mackey pour G sur $\mathbb{Z}$, ou sur un anneau R, si l'on étend les scalaires à R. La restriction correspond à la restriction des foncteurs de cohomologie et l'induction à la corestriction.

Ces foncteurs de cohomologie possèdent en outre la propriété que la composition de la restriction et de la corestriction à un sous-groupe H de G revient à multiplier par l'indice du sous-groupe en question. Cela nous amène à définir un nouveau type de foncteurs de Mackey qui forment une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mack}_R(G)$:

Définition 1.1.7. *Un foncteur de Mackey associé à un groupe G est dit cohomologique si pour tout $K \leq H \leq G$, on a $I_K^H R_K^H = m_{|H:K|}$, où $m_{|H:K|}$ est la multiplication par l'indice de H dans K.*

La catégorie de ces foncteurs cohomologiques est notée $\mathrm{Comack}_R(G)$ et peut être considérée comme la catégorie des modules sur l'algèbre de

Mackey cohomologique, $co\mu_R(G)$, qui est le quotient de $\mu_R(G)$ par l'idéal engendré par les éléments $I_K^H R_K^H - |H : K| I_H^H$, pour tout $H \leq G$.

5) Le dernier exemple que nous allons donner provient de la théorie des nombres. Le but de cet exemple est de montrer que les foncteurs de Mackey apparaissent également en dehors de la théorie des représentations ; nous n'expliciterons donc pas les notions en jeu. Soit L/E une extension galoisienne de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L, E)$ où E est un corps de nombres. Pour tout $H \leq G$, soit $\mathcal{O}_H$ l'anneau des entiers du corps de points fixes L^H. On a alors un foncteur de Mackey M, associé à G sur $\mathbb{Z}$, qui associe à H le groupe de classes d'idéaux, $Cl(\mathcal{O}_H)$ (pour les définitions d'extension galoisienne, corps de nombres, anneau des entiers et groupe de classes d'idéaux, voir [Lan94]).
La restriction est donnée par l'inclusion des points fixes et l'induction est donnée par la norme.

1.2 Modules sur une k-algèbre de dimension finie

La quatrième définition de foncteurs de Mackey nous permet de voir ces objets comme des modules sur une R-algèbre de dimension finie. Par la suite, nous nous concentrerons sur le cas où $R = k$ est un corps. Dans cette optique, nous allons donc rappeler quelques résultats importants de la théorie des modules sur une k-algèbre de dimension finie.

Fixons une algèbre A de dimension finie sur un corps k. Nous allons supposer ici que tous les modules sont des A-modules à gauche et sont de type fini.

Définition 1.2.1. *Le radical de l'algèbre A, noté* $\mathrm{Rad}(A)$*, est l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A.*

Le radical de A est un idéal, qui possède, en particulier, les propriétés importantes suivantes :

Théorème 1.2.2. *Le radical de A est égal à chacun des ensembles suivants :*

i) le plus petit sous-module à gauche M de A, tel que A/M est semi-simple,

ii) le plus grand idéal bilatère nilpotent de A.

Preuve : voir [Thé95], théorème 1.13.

En utilisant, en particulier, les résultats précédents, nous obtenons une méthode pour étudier la structure des modules qui ne sont pas semi-simples, en les décomposant en couches de modules semi-simples :

Proposition 1.2.3. *Soit M un A-module, alors les ensembles suivants sont égaux :*

i) $\mathrm{Rad}(A)M$,

ii) le plus petit sous-module N de M, tel que M/N est semi-simple,

iii) l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M.

Preuve : voir [Thé95], lemme 5.7.

Définition 1.2.4. *Le sous-module de M défini dans la proposition précédente s'appelle le radical de M et il est noté* $\mathrm{Rad}(M)$.

Comme $\mathrm{Rad}(M)$ est aussi un A-module, nous pouvons considérer son radical, qui est noté $\mathrm{Rad}^2(M) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(M))$. On définit ensuite par récurrence $\mathrm{Rad}^n(M) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}^{n-1}(M))$. De plus, comme $\mathrm{Rad}(A)$ est un idéal nilpotent, il existe un entier r minimal tel que $\mathrm{Rad}^r(M) = 0$. Nous obtenons ainsi une suite de modules :

$$M \supseteq \mathrm{Rad}(M) \supseteq \mathrm{Rad}^2(M) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Rad}^r(M) = 0$$

appelée série de Loewy ou série des radicaux, dont les quotients sont des modules semi-simples. Cela nous permet de décomposer le module M en couches de modules semi-simples, où la $n^{\text{ème}}$ couche de la série de Loewy de M est le quotient $\mathrm{Rad}^{n-1}(M)/\mathrm{Rad}^n(M)$, pour $n = 1, \ldots, r$.

Définition 1.2.5. *Le module $M/\mathrm{Rad}(M)$ est appelé la tête de M et il est noté* $\mathrm{Hd}(M)$. *C'est le plus grand quotient semi-simple de M, par définition du radical.*

Il existe une autre manière de décomposer le module M en couches de modules semi-simples, en partant du plus grand sous-module semi-simple de M et en remontant. Nous avons tout d'abord le résultat suivant, analogue à la proposition 1.2.3 :

Proposition 1.2.6. *Soit M un A-module, alors les ensembles suivants sont égaux :*

i) l'ensemble des éléments $m \in M$ tels que $\mathrm{Rad}(A)m = 0$, *ii) le plus grand sous-module semi-simple de M,*

iii) la somme de tous les sous-modules simples de M.

Preuve : voir [Lan83], lemme 3.2, chapitre 1.

Définition 1.2.7. *Le sous-module de M défini dans la proposition précédente s'appelle le socle de M et il est noté* $\mathrm{Soc}(M)$*.*

Comme précédemment, $M/\mathrm{Soc}(M)$ est un A-module, donc il est possible de considérer son socle, et on note $\mathrm{Soc}^2(M)$ le sous-module de M tel que $\mathrm{Soc}^2(M)/\mathrm{Soc}(M)$ est le socle de $M/\mathrm{Soc}(M)$.
Par récurrence, $\mathrm{Soc}^n(M)$ est défini comme étant le sous-module de M tel que $\mathrm{Soc}^n(M)/\mathrm{Soc}^{n-1}(M)$ est le socle de $M/\mathrm{Soc}^{n-1}(M)$. Il existe un entier s minimal tel que $Soc^s(M) = M$ et nous obtenons ainsi la suite de sous-modules suivante :

$$0 \subseteq \mathrm{Soc}(M) \subseteq \mathrm{Soc}^2(M) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Soc}^s(M) = M$$

appelée série des socles, dont les quotients sont des modules semi-simples. La $n^{\text{ème}}$ couche de la série des socles de M est, par définition, le quotient $\mathrm{Soc}^n(M)/\mathrm{Soc}^{n-1}(M)$, pour $n = 1, \ldots, s$.

Il existe des A-modules M dont la série de Loewy et la série des socles coïncident et tels que leurs seuls sous-modules sont exactement ceux qui apparaissent dans la série de Loewy. Ces modules sont dit unisériels et sont justement les modules qui satisfont les propriétés équivalentes de la proposition suivante :

Proposition 1.2.8. *Si M est un A-module, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Le module M possède une unique série de composition.

ii) Les quotients successifs de la série de Loewy de M sont simples.

iii) Les quotients successifs de la série des socles de M sont simples.

Preuve : voir [Alp86], proposition 5, section 4.

Nous allons nous intéresser ensuite aux modules projectifs sur l'algèbre A. Rappelons qu'un module P est dit projectif s'il est facteur direct d'un module libre, ou, de manière équivalente, si pour tout homomorphisme surjectif $f : M \to N$ et tout homomorphisme $g : P \to N$, il existe un homomorphisme $\tilde{g} : P \to M$ tel que $f\tilde{g} = g$.

De manière analogue, un module I est dit injectif si pour tout homomorphisme injectif $f : M \to N$ et tout homomorphisme $g : M \to I$, il existe un homomorphisme $\tilde{g} : N \to I$ tel que $\tilde{g}f = g$.

Définition 1.2.9. *Soit A une k-algèbre de dimension finie. L'algèbre A est dite auto-injective si tout A-module de type fini est projectif si et seulement s'il est injectif.*

Remarquons au passage que, si $A = kG$ est l'algèbre d'un groupe fini G, alors A satisfait cette propriété :

Proposition 1.2.10. *Soient G un groupe fini. L'algèbre kG est auto-injective.*

Preuve : voir [Alp86], théorème 4, section 6.

Les modules projectifs se décomposent, de manière essentiellement unique, en modules projectifs indécomposables, vu le théorème ci-dessous ; et ce sont donc ces modules projectifs indécomposables qui vont nous intéresser :

Théorème 1.2.11. *(Krull-Schmidt)*
Soit A une k-algèbre de dimension finie et M un A-module de type fini.

i) Il existe une décomposition $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ de M en somme directe finie de A-modules indécomposables.

ii) Pour toute décomposition en somme directe finie de A-modules indécomposables $M = \bigoplus_{j \in J} M'_j$, il existe une bijection $\sigma : I \to J$ et un automorphisme A-linéaire ϕ de M tel que $\phi(M_i) = M'_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in I$.

Preuve : voir [Lan83], théorème 5.2, chapitre 1.

L'ensemble $\mathrm{Proj}(A)$ des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs indécomposables est en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Irr}(A)$ des classes d'isomorphisme de A-modules simples. Avant d'énoncer le résultat précis, rappelons la définition suivante :

Définition 1.2.12. *Un idempotent d'un anneau A est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$.*
Deux idempotents e et f sont dits orthogonaux si $ef = 0$ et $fe = 0$. Ils sont dits conjugués s'il existe $u \in A$, inversible, tel que $f = ueu^{-1}$. Un idempotent e est dit primitif si $e \neq 0$ et si chaque fois que $e = f + g$ où f et g sont des idempotents orthogonaux, alors soit $f = 0$, soit $g = 0$.

Proposition 1.2.13. *Soit A une k-algèbre de dimension finie.*

i) Un A-module projectif est indécomposable si et seulement s'il est isomorphe à Ae pour un idempotent primitif e de A.

ii) Deux A-modules projectifs indécomposables Ae et Af sont isomorphes si et seulement si les idempotents primitifs e et f sont conjugués dans A.

iii) La correspondance de ii) induit une bijection entre $\mathrm{Proj}(A)$*, l'ensemble des A-modules projectifs indécomposables de type fini, et l'ensemble des classes de conjugaison d'idempotents primitifs de A.*

iv) Un A-module projectif indécomposable Ae possède un unique sous-module maximal, qui est $\mathrm{Rad}(A)e$*, et, par suite, un unique quotient simple* $Ae/\mathrm{Rad}(A)e$*.*
De plus, $Ae \cong Af$ si et seulement si $Ae/\mathrm{Rad}(A)e \cong Af/\mathrm{Rad}(A)f$.

v) La correspondance de iv) induit une bijection entre $\mathrm{Proj}(A)$ *et* $\mathrm{Irr}(A)$*, l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples. De plus, si k est algébriquement clos, dans une décomposition du A-module A en somme directe de sous-modules indécomposables, chaque classe d'isomorphisme de modules projectifs indécomposables apparaît autant de fois que la dimension du simple qui lui correspond.*

Preuve : voir [Lan83], lemme 1.2, théorème 3.12 et 3.14 et corollaire 3.15, chapitre 1.

La bijection entre $\mathrm{Irr}(A)$ et $\mathrm{Proj}(A)$ associe à un A-module simple S, un module projectif indécomposable P, tel que S est un quotient de P. Cette notion se généralise à un module quelconque. Plus précisément, nous avons la définition suivante :

Définition 1.2.14. *Un homorphisme de A-modules $f : M' \to M$ est dit essentiel si $f(M') = M$ et si $f(M'') \neq M$ pour tout sous-module propre M'' de M. Une couverture projective d'un A-module M est une paire (P, f) où P est un A-module projectif et $f : P \to M$ est un homomorphisme essentiel de A-modules. Une couverture projective du module M sera souvent notée P_M.*

La première question qui se pose est de savoir si une couverture projective d'un module existe toujours et si elle est unique. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.2.15. *Soit A une k-algèbre.*

i) Tout A-module M de type fini possède une couverture projective de type fini, qui est unique à isomorphisme près.

ii) Si P_i est une couverture projective de M_i, pour $i =, 1 \ldots, n$, alors $\bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ est une couverture projective de $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

iii) Si P est un A-module projectif et si E est le plus grand quotient semi-simple de P, alors P est une couverture projective de E.

Preuve : voir [Ser78], proposition 41.

Remarques :

i) Vu la proposition précédente, tout module possède une unique couverture projective, ce qui nous permet désormais de parler de la couverture projective d'un module.

ii) Si (P, f) est la couverture projective d'un module simple S, alors P est un module projectif indécomposable et S est son unique quotient simple, par la proposition précédente et la proposition 1.2.13. De plus, si $g : P \to N$ est un homomorphisme surjectif, alors N possède un unique quotient simple, qui est S. En effet, si T est un quotient simple de N, alors il existe un homomorphisme surjectif $h : N \to T$, et la composition hg permet de voir T comme un quotient simple de P. Comme l'unique quotient simple de P est S, il s'ensuit que $T = S$.

iii) La couverture projective d'un A-module M est égale à la couverture projective du A-module $M/\mathrm{Rad}(M)$. En effet, si (P, f) est la couverture projective du module $M/\mathrm{Rad}(M)$, alors il existe un homomorphisme $\varphi : P \to M$ tel que $p \circ \varphi = f$ où p est la surjection de M sur $M/\mathrm{Rad}(M)$. Par conséquent, $\varphi(P) + \mathrm{Rad}(M) = M$ donc $\varphi(P) = M$ par le lemme de Nakayama ; autrement dit φ est surjective. D'autre part, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Par suite, si Q est un sous-module de P tel que $\varphi(Q) = M$, alors $P = Q + \mathrm{Ker}(\varphi) = Q + \mathrm{Rad}(P)$, donc $P = Q$ de nouveau par le lemme de Nakayama. Il s'ensuit que P est la couverture projective de M. Ainsi, pour déterminer la couverture projective d'un module, il suffit de calculer la tête de M, $\mathrm{Hd}(M)$, puis de prendre la couverture projective de $\mathrm{Hd}(M)$.

Comme A est une k-algèbre de dimension finie, tout A-module M de type fini possède une série de composition, autrement dit une suite de sous-modules :

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

telle que chaque quotient successif M_i/M_{i-1} est un A-module simple. Ces quotients simples sont appelés les facteurs de composition du module M et ils sont indépendants du choix de la série de composition, vu le théorème suivant :

Théorème 1.2.16. *(Jordan-Hölder)*
Supposons que le module M possède deux séries de composition. Le nombre de facteurs dans chaque série est alors le même. De plus, il est possible de définir une bijection de l'un des ensembles de facteurs sur l'autre telle que les facteurs correspondants sont isomorphes.

Preuve : voir [CR81], théorème 3.11.

En particulier, le nombre de facteurs de composition de M qui sont isomorphes à un module simple S donné est indépendant du choix de la série de composition de M. Ce nombre est appelé la multiplicité de S comme facteur de composition de M.

Vu la proposition 1.2.13, les classes d'isomorphisme de modules projectifs indécomposables sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de modules simples. Plus précisément cette proposition nous dit qu'à P, un A-module projectif indécomposable, correspond le A-module $P/\mathrm{Rad}(P)$, qui est l'unique quotient simple de P. Donc, par la proposition 1.2.15, iii), P est la couverture projective de $P/\mathrm{Rad}(P)$. Autrement dit, un module simple S correspond à sa couverture projective P_S, via la bijection précédente.

Définition 1.2.17. *Si $[S]$, $[T] \in \mathrm{Irr}(A)$ sont des classes d'isomorphisme de A-modules simples, l'entier de Cartan $c_{S,T}$ est, par définition, la multiplicité du module S comme facteur de composition du module projectif P_T. La matrice carrée $(c_{S,T})$ s'appelle la matrice de Cartan de A.*

La matrice de Cartan peut s'interpréter comme la matrice d'une application linéaire entre deux groupes de Grothendieck. En effet, appelons $K_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules projectifs. Plus précisément, $K_0(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme $[M]$ de A-modules projectifs, puis quotienté par la relation suivante : $[M] = [M'] + [M'']$ s'il existe une suite exacte courte : $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. En étendant les scalaires au corps k, on fait de $K_0(A)$ un k-espace vectoriel. Celui-ci possède alors une k-base formée des classes d'isomorphisme des A-modules projectifs indécomposables.

Appelons ensuite $G_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des kG-modules de type fini, autrement dit $G_0(A)$ s'obtient par une construction analogue à celle de $K_0(A)$, en partant des A-modules de type fini. Vu comme k-espace vectoriel, via l'extension des scalaires à k, $G_0(A)$ possède une k-base formée des classes d'isomorphisme des A-modules simples.

Comme nous l'avons vu, la bijection donnée dans la proposition 1.2.13 fait correspondre à $[S]$, où S est un module simple, la classe $[P_S]$, où P_S est la couverture projective du module S. Par conséquent, nous pouvons ordonner les bases de $K_0(A)$ et de $G_0(A)$, afin d'obtenir deux bases, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, de même cardinalité, telles que le $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathcal{B}$ soit la couverture projective du $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathcal{B}'$.

L'homomorphisme de Cartan $c : K_0(A) \to G_0(A)$ associe à chaque A-module projectif P sa classe dans $G_0(A)$, qui est alors la somme des classes de ses facteurs de composition. Si l'on exprime c en fonction des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, nous obtenons alors la matrice de Cartan, définie ci-dessus, dont les coefficients donnent les multiplicités des facteurs de composition des modules projectifs indécomposables.

La matrice de Cartan donne donc la liste des facteurs de composition d'un A-module projectif indécomposable. Toutefois, cela ne suffit pas pour connaître la structure du module en question : il faut encore savoir comment ces facteurs de composition s'organisent les uns par rapport aux autres. Par exemple, si un A-module M possède deux facteurs de composition S et T, alors il peut soit être semi-simple, autrement dit $M = S \oplus T$, soit posséder un unique sous-module simple, disons S, et un unique quotient simple T. Pour déterminer la structure d'un module, nous allons utiliser les groupes d'extension entre modules simples. Rappelons donc de quoi il s'agit.

Définition 1.2.18. *Une résolution projective d'un module M est une suite exacte*

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

dans laquelle chaque P_i est un module projectif.

Théorème 1.2.19. *Tout module M possède une résolution projective.*

Preuve : voir [Rot79], théorème 3.8.

Soient L un A-module et

$$\cdots \to P_2 \overset{\varphi_2}{\to} P_1 \overset{\varphi_1}{\to} P_0 \overset{\varphi_0}{\to} M \to 0$$

une résolution projective d'un A-module M. En appliquant alors le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\_, L)$ au complexe $P_\star : \cdots \to P_2 \overset{\varphi_2}{\to} P_1 \overset{\varphi_1}{\to} P_0 \to 0$, nous obtenons le complexe de groupes additifs suivant :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, L) \overset{\varphi_1^\star}{\to} \mathrm{Hom}_A(P_1, L) \overset{\varphi_2^\star}{\to} \mathrm{Hom}_A(P_2, L) \to \dots$$

où $\varphi_j^\star(f) = f\varphi_j$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(P_{j-1}, L)$ et tout j. En particulier, par exactitude de la résolution projective, nous obtenons $\mathrm{Im}(\varphi_j^\star) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_{j+1}^\star)$ pour tout $j \geq 1$. Nous pouvons donc définir le groupe d'extension de degré n de L par M (appelé aussi le $n^{\text{ème}}$ groupe d'extension de L par M) :

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, L) = \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}^\star)/\mathrm{Im}(\varphi_n^\star)$$

pour tout $n \geq 1$, et $\mathrm{Ext}_A^0(M, L) = \mathrm{Hom}_A(M, L)$.

Remarquons que dans le cas où l'algèbre A est commutative, les A-modules deviennent des (A, A)-bimodules et donc chaque groupe $\mathrm{Hom}_A(\_, \_)$ est équipé d'une structure de A-module. Par conséquent, les groupes $\mathrm{Ext}_A^n(M, L)$ héritent d'une structure de A-module. Plus généralement, pour une k-algèbre A non nécessairement commutative, les groupes $\mathrm{Ext}_A^n(M, L)$ possèdent une structure de $Z(A)$-module (où $Z(A)$ est le centre de l'algèbre A) et donc, en particulier, ce sont des k-espaces vectoriels.

Un outil très utile pour calculer les groupes d'extension sont les suites exactes longues induites à partir d'une suite exacte courte donnée entre modules. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.20. *Soient $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules et N un A-module. Il existe alors deux suites exactes longues :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M') \to \mathrm{Hom}_A(N, M) \to \mathrm{Hom}_A(N, M'') \to$$

$$\mathrm{Ext}_A^1(N, M') \to \mathrm{Ext}_A^1(N, M) \to \mathrm{Ext}_A^1(N, M'') \to \mathrm{Ext}_A^2(N, M') \to \dots$$

et

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N) \to$$

$$\mathrm{Ext}_A^1(M'', N) \to \mathrm{Ext}_A^1(M, N) \to \mathrm{Ext}_A^1(M', N) \to \mathrm{Ext}_A^2(M'', N) \to \dots$$

Preuve : voir [Rot79], théorèmes 7.3 et 7.5.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au groupe d'extension de degré 1, dont les éléments peuvent être interprétés comme des suites exactes courtes entre modules. En fait, plus généralement, les groupes d'extension de degré n peuvent être interprétés comme des suites exactes de longueur $n + 1$. Commençons par la définition suivante :

Définition 1.2.21. *Soient M et L des A-modules. Une extension de degré n de M par L est une suite exacte de A-modules*

$$\xi : 0 \to L \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to M \to 0.$$

Une extension de degré 1 est appelée simplement une extension.
Soient ξ et ξ', deux extensions de degré n de M par L ; on dit que ξ est en relation avec ξ', s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "id_L"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"'] & 0 \\
\xi' : 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & E'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puis, on complète cette relation en une relation d'équivalence en prenant sa clôture symétrique et transitive. L'ensemble des classes d'équivalence d'extension de degré n de M par L est noté $E^n(M,L)$. Si $n=1$, $E^1(M,L)$ est simplement noté $E(M,L)$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 1.2.22. *L'ensemble $E^n(M,L)$ est en bijection avec le groupe $\mathrm{Ext}^n_A(M,L)$. En particulier, $E(M,L) = E^1(M,L)$ possède une structure de groupe, dont l'élément neutre est constitué des extensions scindées de M par L.*

Preuve : voir [Ben91], section 2.6.

Nous allons nous intéresser, dans le cadre des foncteurs de Mackey, aux groupes d'extension entre foncteurs simples, car cela va nous permettre de déterminer la deuxième couche de la série de Loewy d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable P, c'est-à-dire $\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P)$:

Proposition 1.2.23. *Soient A une k-algèbre, S, S' des A-modules simples et P la couverture projective de S. Alors*

$$\mathrm{Ext}^1_A(S,S') \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P), S').$$

Preuve : voir [Ben91], proposition 2.4.3.

Pour comprendre pourquoi ce résultat nous permet de connaître la seconde couche de la série de Loewy d'un foncteur projectif indécomposable, à partir des groupes d'extension entre foncteurs simples, rappelons le lemme classique suivant :

Lemme 1.2.24. *(Schur)*
Soient k un corps, A une k-algèbre de dimension finie et S, S' des A-modules simples. Alors :

i) $\mathrm{Hom}_A(S, S') = 0$ *si* S *et* S' *ne sont pas isomorphes.*

ii) $\mathrm{End}_A(S)$ *est une algèbre à division. En particulier, si* k *est algébriquement clos, alors* $\mathrm{End}_A(S) \cong k$.

Preuve : voir [Thé95], lemme 1.8.

Si P est la couverture projective d'un A-module simple S, où A est une k-algèbre de dimension finie et k est un corps algébriquement clos, la dimension sur k de $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P), S')$ est donc égale au nombre de fois où le module simple S' apparaît comme facteur direct du module semi-simple $\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P)$. Il nous suffira donc de connaître la dimension, comme k-espace vectoriel, des $\mathrm{Ext}^1_A(S, S')$ pour tout A-module simple S', pour connaître le module $\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P)$.

Nous allons, dans la section suivante, nous concentrer sur le cas des algèbres de groupe, kG, pour un groupe fini G. Ces algèbres sont en particulier des k-algèbres de dimension finie, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats de cette section.

1.3 Les algèbres de groupe

Dans cette section, nous allons donner quelques résultats spécifiques aux algèbres de groupe. Tout d'abord, le théorème qui suit nous donne un critère pour déterminer quand l'algèbre kG, pour un groupe fini G, est semi-simple :

Théorème 1.3.1. *(Maschke)*
L'algèbre kG *est semi-simple si et seulement si la caractéristique de* k *est nulle ou qu'elle est égale à un nombre premier* p *qui ne divise pas l'ordre du groupe* G.

Preuve : voir [Alp86], théorème 1, section 3.

Pour le reste de cette section, fixons un corps k de caractéristique p. Le résultat suivant nous permet de déterminer le nombre de kG-modules simples :

Théorème 1.3.2. *Le nombre de* kG*-modules simples est égal au nombre de classes de conjugaison de* G *d'éléments d'ordre non divisible par la caractéristique de* k.

Preuve : voir [Alp86], théorème 2, section 3.

Pour tout groupe fini G, il existe un kG-module simple canonique, qui est le kG-module trivial k. Ce module est un k-espace vectoriel de dimension 1, muni de l'action triviale de G, autrement dit, $g \cdot \lambda = \lambda$, pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in k$. Vu le résultat précédent, ce module est même le seul module simple dans le cas des p-groupes :

Proposition 1.3.3. *Si $G = P$ est un p-groupe, alors le module trivial k est le seul kP-module simple. De plus, kP est le seul kP-module projectif indécomposable et c'est la couverture projective du module trivial k.*

Preuve : voir [Thé95], proposition 21.1.

Vu la proposition 1.2.13, v), si k est un corps algébriquement clos, alors dans une décomposition du kG-module kG en somme de sous-modules indécomposables, chaque classe d'isomorphisme de kG-modules projectifs indécomposables apparaît autant de fois que la dimension du kG-module simple correspondant. Ce résultat donne déjà des conditions sur la dimension des modules projectifs indécomposables, si l'on connaît la dimension de tous les kG-modules simples. La proposition qui suit, associée au résultat précédent, nous donne alors des conditions supplémentaires sur la dimension de ces modules et permet, dans certains cas, de déterminer explicitement ces dimensions :

Proposition 1.3.4. *Si un p-sous-groupe de Sylow P d'un groupe G est d'ordre p^a, alors tout kG-module projectif est de dimension divisible par p^a.*

Preuve : voir [Alp86], corollaire 7, section 5.

Rappelons les notions de module restreint, induit et conjugué, qui permettent de passer d'un module pour un groupe, à un module pour un sous-groupe, un groupe plus grand, ou un groupe conjugué, respectivement :

Définition 1.3.5. *Soit G un groupe et $H \leq G$.*

i) Soit V un kG-module. Le module V restreint de G à H, noté $Res_H^G(V)$ est le module V vu comme kH-module par restriction de l'action de kG à kH.

ii) Soit U un kH-module. Le module U induit de H à G, noté $Ind_H^G(U)$, est le kG-module $kG \otimes_{kH} U$, où l'action de kG est donnée par

$$g(x \otimes u) = gx \otimes u$$

pour tout $g \in G$, $x \in kG$ et $u \in U$.

iii) *Soit M un kH-module. Si $g \in G$, le module conjugué, noté ${}^gM$ ou $c_g(M)$, est le $k{}^gH$-module dont la structure de k-espace vectoriel est la même que celle de M, et l'action d'un élément $ghg^{-1} \in {}^gH$ est donnée par l'action de h pour l'ancienne structure de M.*

Les modules restreints, induits et conjugués satisfont, entre autres, les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.6. *Soient $H, J \leq G$, V un kH-module et U un kG-module. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) *si V est projectif, le kG-module $Ind_H^G(V)$ est projectif.*

ii) $U \otimes_k \mathrm{Ind}_H^G(V) \cong \mathrm{Ind}_H^G\left(\mathrm{Res}_H^G(U) \otimes_k V\right)$.

iii) *(Théorème de réciprocité de Frobenius)*

$$\mathrm{Hom}_{kG}\left(\mathrm{Ind}_H^G(V), U\right) \cong \mathrm{Hom}_{kH}\left(V, \mathrm{Res}_H^G(U)\right),$$
$$\mathrm{Hom}_{kG}\left(U, \mathrm{Ind}_H^G(V)\right) \cong \mathrm{Hom}_{kH}\left(\mathrm{Res}_H^G(U), V\right).$$

iv) *(Théorème de Mackey)*

$$\mathrm{Res}_L^G(\mathrm{Ind}_H^G(V)) \cong \bigoplus_{s \in [L\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{L \cap {}^sH}^L\left(\mathrm{Res}_{L \cap {}^sH}^{{}^sH}(c_s(V))\right).$$

Preuve : voir [Alp86], lemme 5, lemme 6 et lemme 7, section 8.

Théorème 1.3.7. *(Clifford)*
Si U est un kG-module semi-simple et N est un sous-groupe normal de G alors $Res_N^G(U)$ est semi-simple.

Preuve : voir [Alp86], théorème 4, section 3.

Remarque : Dans le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe N normal, alors N doit agir trivialement sur tout kG-module simple. En effet, vu le théorème précédent, si V est un kG-module simple, $\mathrm{Res}_N^G(V)$ doit être semi-simple. Or, par la proposition 1.3.3, le seul kN-module simple est le module trivial, par conséquent, $\mathrm{Res}_N^G(V)$ doit être une somme de copies du module trivial. Donc l'action de N sur V est triviale.

1.4 Foncteurs de Mackey simples

Nous allons donc pouvoir appliquer les résultats des sections précédentes aux foncteurs de Mackey et, dans cette optique, nous allons supposer désormais que $R = k$ est un corps.

Un foncteur de Mackey M est dit simple si ses seuls sous-foncteurs sont M et 0. Cela correspond à un module simple sur l'algèbre $\mu_k(G)$. Dans [TW90], Thévenaz et Webb ont classifié les foncteurs de Mackey simples. Cette classification est très importante pour l'étude des foncteurs de Mackey projectifs. En effet, vu la section 1.2, les $\mu_k(G)$-modules projectifs indécomposables sont en bijection avec les $\mu_k(G)$-modules simples. De plus, pour étudier ces foncteurs de Mackey projectifs, il faut comprendre quels sont leurs facteurs de composition (qui sont des foncteurs simples), et comment ils s'organisent les uns par rapport aux autres.

Nous allons donc donner ici la classification des foncteurs de Mackey simples ainsi que plusieurs constructions indispensables à leur compréhension :

Proposition 1.4.1. *Soient S un foncteur de Mackey simple pour un groupe G et H un sous-groupe minimal de G tel que $S(H) \neq 0$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) la classe de conjugaison de H est l'unique classe de conjugaison de sous-groupes minimaux K tels que $S(K) \neq 0$,

ii) le $k\overline{N}_G(H)$-module $S(H)$ est simple.

Preuve : voir [TW90], proposition 2.3.

Soit Ω l'ensemble des couples (H, V) où H est un sous-groupe de G et V est un $k\overline{N}_G(H)$-module simple, à isomorphisme près. Le groupe G agit par conjugaison sur Ω. Notons alors Ω/G l'ensemble des orbites. Vu la proposition précédente, l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \{\text{foncteurs de Mackey simples pour } G\} & \to & \Omega/G \\ & S & \mapsto & (H, S(H)) \end{array}$$

où H est un sous-groupe minimal de S tel que $S(H) \neq 0$, est bien définie.

De plus, cette application permet de classifier les foncteurs de Mackey simples ; autrement dit :

Théorème 1.4.2. *L'application Φ est une bijection.*

Preuve : voir [TW90], théorème 8.3.

Pour déterminer les foncteurs de Mackey simples, il nous faut donc comprendre l'inverse de l'application Φ : à chaque couple (H, V) correspond un foncteur de Mackey simple, noté $S_{H,V}$, que nous voulons décrire. Dans ce but, nous avons besoin de plusieurs constructions présentées ci-après.

Induction

Soit $H \leq G$. Le foncteur d'induction, $\uparrow_H^G$, permet de passer de la catégorie des foncteurs de Mackey associés à H à celle des foncteurs de Mackey associés à G. Précisément,

$$\uparrow_H^G\, : \mathrm{Mack}_k(H) \to \mathrm{Mack}_k(G)$$

est défini de la manière suivante : si $M \in \mathrm{Mack}_k(H)$ et si $K \leq G$, alors $M \uparrow_H^G (K) = \displaystyle\bigoplus_{g \in [K\backslash G/H]} M(H \cap K^g)$. En l'occurrence, la définition de Dress de foncteur de Mackey permet d'exprimer l'induction de manière très naturelle par $M \uparrow_H^G (X) = M\left(\mathrm{Res}_H^G(X)\right)$, pour tout G-ensemble X ; autrement dit, $M \uparrow_H^G$ est obtenu en composant le foncteur M : H-ens $\to$ R-mod et le foncteur de restriction Res_H^G : G-ens $\to$ H-ens. Rappelons que ce dernier foncteur est défini dans l'exemple traitant de l'anneau de Burnside, à la page 13.

Les applications d'induction, de restriction et de conjugaison intrinsèques au foncteur $M \uparrow_H^G$ sont alors données, pour $L \leq K$, $x \in M \uparrow_H^G (K)$ et $y \in M \uparrow_H^G (L)$, par :

$$\begin{array}{llcl}
I_L^K : & \displaystyle\bigoplus_{x \in [L\backslash G/H]} M(H \cap L^x) & \to & \displaystyle\bigoplus_{g \in [K\backslash G/H]} M(H \cap K^g) \\
& (y_x)_{x \in [L\backslash G/H]} & \mapsto & \Big(\displaystyle\sum_{u \in [L\backslash K/K \cap {}^gH]} I_{H \cap L^{ug}}^{H \cap K^{ug}}(y_{ug})\Big)_{g \in [K\backslash G/H]} \\
R_L^K : & \displaystyle\bigoplus_{g \in [K\backslash G/H]} M(H \cap K^g) & \to & \displaystyle\bigoplus_{x \in [L\backslash G/H]} M(H \cap L^x) \\
& (y_g)_{g \in [K\backslash G/H]} & \mapsto & \left(R_{H \cap L^x}^{H \cap K^x}(y_x)\right)_{x \in [L\backslash G/H]} \\
c_s : & \displaystyle\bigoplus_{g \in [K\backslash G/H]} M(H \cap K^g) & \to & \displaystyle\bigoplus_{\tilde{g} \in [{}^sK\backslash G/H]} M(H \cap ({}^sK)^{\tilde{g}}) \\
& (y_g)_{g \in [K\backslash G/H]} & \mapsto & \left(y_{s^{-1}\tilde{g}}\right)_{\tilde{g} \in [{}^sK\backslash G/H]}
\end{array}$$

(voir [TW90], proposition 4.3).

Remarque : Pour que les formules ci-dessus aient un sens, il faut donner les représentants des doubles classes que nous avons choisis.
Si $[K\backslash G/H] = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, alors on prend

$$[L\backslash G/H] = \{\beta_j\alpha_i \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s\}$$

où les β_j sont des représentants des classes à droite de K modulo L.
Avec ces choix, si $u \in [L\backslash K]$ et $g \in [K\backslash G/H]$, alors $ug \in [L\backslash G/H]$, donc l'induction est bien définie. De même, si $x \in [L\backslash G/H]$, alors $x = \beta_j\alpha_i$ avec $\beta_j \in K$, donc x correspond à l'unique élément α_i de $[K\backslash G/H]$, ce qui nous permet de bien définir la restriction ci-dessus. Nous pouvons ensuite choisir $[{}^sK\backslash G/H] = \{s\alpha_1, \ldots, s\alpha_n\}$ et par conséquent, si $\tilde{g} \in [{}^sK\backslash G/H]$, alors $s^{-1}\tilde{g} \in [K\backslash G/H]$, donc la conjugaison est bien définie. Remarquons finalement que la formule de la conjugaison ci-dessus est donnée à l'aide de ces représentants des doubles classes. Donc si s normalise K, il faut garder ces deux systèmes de représentants distincts, même si ${}^sK\backslash G/H = K\backslash G/H$.

Restriction

Soit $H \leq G$. De manière analogue à l'induction, le foncteur de restriction, $\downarrow_H^G$, permet de passer de la catégorie des foncteurs de Mackey associés à G à celle des foncteurs de Mackey associés à H. Précisément,

$$\downarrow_H^G \,:\, \mathrm{Mack}_k(G) \to \mathrm{Mack}_k(H)$$

est défini de la manière suivante : si $M \in \mathrm{Mack}_k(G)$ et si $K \leq H$, alors $M\downarrow_H^G(K) = M(K)$. De nouveau, la définition de Dress permet d'exprimer la restriction de manière très naturelle par $M\downarrow_H^G(X) = M\left(\mathrm{Ind}_H^G(X)\right)$, pour tout G-ensemble X ; autrement dit, $M\downarrow_H^G$ est obtenu en composant le foncteur $M : G\text{-ens} \to R\text{-mod}$ et le foncteur d'induction $\mathrm{Ind}_H^G : H\text{-ens} \to G\text{-ens}$. L'induction entre G-ensembles est également définie dans l'exemple traitant de l'anneau de Burnside, à la page 13.

Cette fois, les applications d'induction, de restriction et de conjugaison intrinsèques au foncteur $M\downarrow_H^G$ sont les mêmes que celles du foncteur M.

Les foncteurs d'induction et de restriction entre catégories de foncteurs de Mackey sont liés par des conditions d'adjonction :

Proposition 1.4.3. *Le foncteur d'induction est l'adjoint à gauche et à droite du foncteur de restriction. En particulier, ces deux foncteurs sont exacts.*

Preuve : voir [TW90], proposition 4.2 pour les propriétés d'adjonction et [Rot79], théorème 2.13, pour l'exactitude.

Remarquons que dans la catégorie des G-ensembles, le foncteur d'induction est l'adjoint à gauche, mais pas à droite du foncteur de restriction.

Conjugaison

Soient $g \in G$ et $H \leq G$. Il existe naturellement un foncteur de conjugaison de la catégorie $\mathrm{Mack}_k(H)$ dans $\mathrm{Mack}_k({}^gH)$, défini pour $M \in \mathrm{Mack}_k(H)$ et $K \leq H$, par ${}^gM(K) = M(K^g)$. Les applications d'induction, de restriction et de conjugaison s'obtiennent en conjuguant les applications de M correspondantes.

Pour finir, il existe des constructions qui permettent de passer des foncteurs de Mackey définis pour le groupe quotient G/N, où N est un sous-groupe normal de G, à ceux définis pour le groupe G, et vice-versa.

Inflation

Soient $N \trianglelefteq G$ et M un foncteur de Mackey pour le groupe G/N. Le foncteur d'inflation de $\mathrm{Mack}_k(G/N)$ dans $\mathrm{Mack}_k(G)$ est défini, pour $K \leq G$, par

$$\mathrm{Inf}_{G/N}^{G} M(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \not\leq K, \\ M(K/N) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, le foncteur d'inflation peut s'exprimer, à l'aide de la définition de Dress, de la manière suivante : $\mathrm{Inf}_{G/N}^{G} M(X) = M\left(X^N\right)$, pour tout G-ensemble X, où X^N désigne les points N-fixes de X.

Le foncteur d'inflation possède un adjoint à gauche, noté $^+$, et un adjoint à droite, noté $^-$, qui sont définis, pour $L \in \mathrm{Mack}_k(G)$ et $K/N \leq G/N$, par

$$L^+(K/N) = L(K) / \sum_{\substack{J \leq K \\ J \not\geq N}} I_J^K(L(J))$$

$$L^-(K/N) = \bigcap_{\substack{J \leq K \\ J \not\geq N}} \mathrm{Ker}(R_J^K).$$

Proposition 1.4.4. *Le foncteur* $^+$ *est l'adjoint à gauche et le foncteur* $^-$ *est l'adjoint à droite de* $\mathrm{Inf}_{G/N}^{G}$*. En particulier, le foncteur d'inflation est exact.*

Preuve : voir [TW90], proposition 5.1 pour les propriétés d'adjonction et [Rot79], théorème 2.13, pour l'exactitude.

Avant d'aller plus loin, nous allons donner deux résultats sur des questions d'adjonction liées en particulier aux foncteurs de Mackey point fixe et quotient fixe (définis à la page 14) vus comme foncteurs de la catégorie des kG-modules dans $\mathrm{Mack}_k(G)$:

Proposition 1.4.5. *Soit E le foncteur d'évaluation de* $\mathrm{Mack}_k(G)$ *dans la catégorie des kG-modules, qui envoie un foncteur de Mackey M sur son évaluation en* 1*,* $M(1)$*. L'adjoint à droite de E est FP, le foncteur point fixe, et son adjoint à gauche est FQ, le foncteur quotient fixe.*

Preuve : voir [TW90], proposition 6.1.

Proposition 1.4.6. *Soient M un foncteur de Mackey associé à un groupe G, H un sous-groupe de G et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. Si* $M(K) = 0$ *pour tout sous-groupe propre K de H, alors il existe une bijection :*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\left(M, \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right)\uparrow_{N_G(H)}^{G}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\overline{N}_G(H)}(M(H), V)$$

donnée par l'évaluation en H.
De plus, si $\sigma : M(H) \to V$*, alors* $\varphi^{-1}(\sigma) = (\overline{\sigma}(K))_{K\leq G}$*, où* $\overline{\sigma}(K) = 0$ *si K ne contient pas de conjugué de H et sinon,* $\overline{\sigma}(K)(a) = \left(\sigma(c_x R_{H^x}^{K}(a))\right)_{x\in T}$*, où* $T = [N_G(H)\backslash T_G(H,K)/K]$ *et* $a \in M(K)$*.*

Preuve : Vu les propositions 1.4.3, 1.4.4 et 1.4.5, nous obtenons les bijections suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\left(M, \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right)\uparrow_{N_G(H)}^{G}\right)\\
&\qquad\cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_G(H))}\left(M\downarrow_{N_G(H)}^{G}, \mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right)\\
&\qquad\cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(\overline{N}_G(H))}\left(\left(M\downarrow_{N_G(H)}^{G}\right)^+, FP_V\right)\\
&\qquad\cong \mathrm{Hom}_{k(\overline{N}_G(H))}\left(\left(M\downarrow_{N_G(H)}^{G}\right)^+(1), V\right).
\end{aligned}$$

Or $\left(M \downarrow^{G}_{N_G(H)}\right)^{+}(1) = M(H)/\sum_{J<H} I^{H}_{J}(M(J)) = M(H)$ vu l'hypothèse sur M.
Finalement, pour déterminer l'application φ^{-1}, il suffit de suivre les preuves des propositions ci-dessus, où les adjonctions sont construites explicitement (voir [TW90]).

□

Nous pouvons à présent définir le foncteur de Mackey simple $S_{H,V}$, où $H \leq G$ et où V est un $k\overline{N}_G(H)$-module simple.

Tout d'abord, si V est un kG-module simple, nous pouvons définir le foncteur de Mackey simple suivant :

Définition 1.4.7. *Soit V un kG-module simple, le foncteur simple $S_{1,V}$, noté également $S^{G}_{1,V}$, associé à G, est le sous-foncteur du foncteur point fixe FP_V défini par $S_{1,V}(K) = I^{K}_{1}(V)$; autrement dit, c'est l'image de la trace relative de V dans V^K qui est définie par $I^{K}_{1}(v) = \sum\limits_{x\in K} xv$.*

Pour montrer que le foncteur $S_{1,V}$ est simple, il suffit de vérifier qu'il est l'unique sous-foncteur minimal de FP_V. Pour cela, considérons $0 \neq M$, un sous-foncteur de FP_V. Il existe alors $K \leq G$, tel que $M(K) \neq 0$, et comme la restriction $R^{K}_{1} : V^K \to V$ est une inclusion, il s'ensuit que $M(1)$ est un sous-kG-module non nul du module V. Par simplicité de V, $M(1) = V$ et, par conséquent, pour tout $J \leq G$, $M(J) \supseteq I^{J}_{1}(M(1)) = I^{J}_{1}(V) = S_{1,V}(J)$, donc $S_{1,V}$ est un sous-foncteur de M.

Pour chaque kG-module simple V, il existe un foncteur de Mackey simple $S_{1,V}$, dont le sous-groupe minimal H, tel que $S_{1,V}(H) \neq 0$, est le sous-groupe trivial $H = 1$. Nous pouvons à présent utiliser les constructions précédentes, et plus précisément l'inflation et l'induction, pour obtenir de nouveaux foncteurs de Mackey possédant un tel sous-groupe minimal H non trivial.

Définition 1.4.8. *Soit V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple, le foncteur $S_{H,V}$, noté également $S^{G}_{H,V}$, associé à G, est défini par*

$$S_{H,V} = \left(\mathrm{Inf}^{N_G(H)}_{\overline{N}_G(H)}\ S^{\overline{N}_G(H)}_{1,V}\right) \uparrow^{G}_{N_G(H)} .$$

Remarquons que cette construction a du sens, car, comme V est un $k\overline{N}_G(H)$-module simple, $S_{1,V}^{\overline{N}_G(H)}$ est un foncteur de Mackey simple associé au groupe $\overline{N}_G(H)$, vu ce qui précède ; puis, l'inflation et l'induction permettent d'en faire un foncteur de Mackey associé au groupe G. De plus, vu le lemme 1.4.11, c'est un foncteur simple.

Définition 1.4.9. *Soient M un foncteur de Mackey associé à un groupe G et χ un ensemble de sous-groupes de G. Soit $E(H)$ un sous-ensemble de $M(H)$, pour tout $H \in \chi$. Le sous-foncteur de M engendré par E, noté $\langle E\rangle$, est égal à l'intersection de tous les sous-foncteurs N de M tels que $E(H) \subseteq N(H)$ pour tout $H \in \chi$. On définit de plus $I_\chi M = \langle M(J) \mid J \in \chi\rangle$. C'est donc le sous-foncteur de M engendré par ses valeurs en les éléments de χ.*

Ces foncteurs engendrés peuvent être décrits explicitement à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 1.4.10. *Soit M un foncteur de Mackey pour G. Soit χ un ensemble de sous-groupes de G, fermé par conjugaison et tel que si $H \leq K$ et que $K \in \chi$, alors $H \in \chi$. Pour tout $X \in \chi$, fixons un R-sous-module $E(X)$ de $M(X)$, de sorte que $I_Y^X(E(Y)) \subseteq E(X)$, que $R_X^Y(E(X)) \subseteq E(Y)$ et que $c_g(E(X)) \subseteq E({}^gX)$ pour tout $Y \leq X \in \chi$ et tout $g \in G$. Pour chaque sous-groupe H de G, on a alors*

$$\langle E\rangle(H) = \sum_{X\in\chi,\, X\leq H} I_X^H(E(X)).$$

Preuve : voir [TW95], proposition 2.4.

Les $S_{H,V}$ sont bien des foncteurs de Mackey simples, par le lemme suivant :

Lemme 1.4.11. *Soient H un sous-groupe d'un groupe fini G et V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple. Le foncteur*

$$M = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$$

possède alors un unique sous-foncteur minimal, engendré par $M(H) = V$. De plus, ce sous-foncteur minimal est isomorphe à $S_{H,V}$.

Preuve : voir [TW90], lemme 8.1.

De plus, les $S_{H,V}$ correspondent à l'image réciproque par Φ des paires (H, V) (voir page 29 pour la définition de Φ et voir [TW90], théorème 8.3 pour le résultat). En particulier, de par sa définition, $S_{H,V}(K)$ est nul à moins que $H \leq_G K$. De plus, en utilisant les propriétés des constructions précédentes, nous obtenons

$$S_{H,V}(H) = \bigoplus_{g\in[H\backslash G/N_G(H)]} \mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} S_{1,V}(N_G(H)\cap H^g) = S_{1,V}(1) = V.$$

Dans le cas où $G = P$ est un p-groupe et où le corps k est de caractéristique p, les $S_{H,V}$ deviennent particulièrement simples, au premier sens du terme. Tout d'abord, comme le module trivial k est le seul $k\overline{N}_P(H)$-module simple pour tout $H \leq P$ (voir la proposition 1.3.3), ces foncteurs ne sont indexés que par les sous-groupes H de P et de plus, ils s'annulent presque partout. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.4.12. *Soit H un sous-groupe d'un p-groupe P. Si J est un sous-groupe de P, alors*

$$S_{H,k}(J) = \begin{cases} k & \textit{si } J =_G H, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : C'est une conséquence directe du lemme 15.1 de [TW95].

Remarque : Le résultat précédent nous permet, en particulier, de déterminer plus facilement les facteurs de composition d'un foncteur de Mackey M associé à un p-groupe P. En effet, dans ce cas, le nombre de facteurs de composition de M isomorphes à $S_{H,k}$, pour $H \leq P$, est égal à la dimension sur k de $M(H)$. Pour démontrer cela, considérons la classe $[M]$ de M dans $G_0(\mathrm{Mack}_k(P))$ (voir la définition 1.2.17 et ce qui suit). Alors

$$[M] = \sum_{S \text{ simple}} \lambda_S[S] = \sum_{J\leq P} \lambda_J[S_{J,k}]$$

est la somme de ses facteurs de composition. Par conséquent, si $H \leq P$, $[M(H)] = \sum_{J\leq P} \lambda_J[S_{J,k}(H)] = \lambda_H \cdot [k]$, vu la proposition précédente.

1.5 Foncteurs de Mackey projectifs

Dans ce travail, nous allons étudier certaines propriétés des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables. Comme ces foncteurs s'identifient à des sous-modules de l'algèbre de Mackey, qui est une k-algèbre de dimension finie, ce sont des $\mu_k(G)$-modules de type fini. Nous pouvons donc appliquer les

résultats de la section 1.2, qui nous disent, en particulier, que les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables sont en bijection avec les foncteurs de Mackey simples.
Plus précisément, à $S_{H,V}$, un foncteur simple, correspond (à isomorphisme près) un unique module projectif indécomposable, noté $P_{H,V}$ ou $P^G_{H,V}$, qui est la couverture projective de $S_{H,V}$. En particulier, $P_{H,V}$ possède un unique sous-foncteur maximal $\mathrm{Rad}(P_{H,V})$ et $P_{H,V}/\mathrm{Rad}(P_{H,V})$ est isomorphe à $S_{H,V}$.

Le premier exemple de foncteur de Mackey projectif est le $\mu_k(G)$-module régulier, autrement dit $\mu_k(G)$. Ce module n'est évidemment pas indécomposable. En particulier, par définition de l'algèbre de Mackey, on a la relation $\displaystyle\sum_{H\leq_G G} I^H_H = 1$ dans $\mu_k(G)$, qui exprime l'élément unité comme somme d'idempotents deux à deux orthogonaux. Cela nous donne donc la décomposition suivante :

$$\mu_k(G) = \bigoplus_{H\leq_G G} \mu_k(G)\cdot I^H_H$$

où les $\mu_k(G)\cdot I^H_H$ sont donc des $\mu_k(G)$-modules projectifs. En fait, ces foncteurs de Mackey projectifs sont isomorphes à des induits du foncteur de Mackey de Burnside. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.5.1. *Soit H un sous-groupe de G. Le foncteur de Mackey $\mu_k(G)\cdot I^H_H$ est isomorphe à $B^H\uparrow^G_H$.*

Preuve : voir [TW95], théorème 8.3.

Or, en général, ces foncteurs de Burnside ne sont pas indécomposables. En fait, ils se décomposent en somme de projectifs indécomposables de la manière suivante :

Théorème 1.5.2. *Supposons que le corps k est algébriquement clos. La multiplicité de $P_{H,V}$ comme facteur de $B^K\uparrow^G_K$ est égale à $\dim_k(S_{H,V}(K))$; autrement dit,*

$$B^K\uparrow^G_K \cong \bigoplus_{(H,V)} \dim_k(S_{H,V}(K))\cdot P_{H,V}.$$

où la somme est prise sur les couples (H,V) où H parcourt les sous-groupes de G à conjugaison près et V les $k\overline{N}_G(H)$-modules simples à isomorphisme près.

Preuve : voir [TW95], théorème 8.6.

Dans le cas particulier où $G = P$ est un p-groupe et que k est un corps de caractéristique p, la proposition 1.4.12 nous dit que

$$S_{H,k}(K) = \begin{cases} k & \text{si } K =_G H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons donc que $P_{H,k} \cong B^H \uparrow_H^G$ et, en particulier $P_{G,k} \cong B^G$, autrement dit, les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables sont exactement des induits du foncteur de Burnside dans ce cas.

Pour un groupe quelconque, il n'y a pas de telle description des foncteurs de Mackey projectifs. Toutefois, si P est un foncteur de Mackey projectif indécomposable, tel que $P(1) = M \neq 0$, alors Bouc a montré que, pour tout sous-groupe H de G,

$$P(H) \cong \Big(\bigoplus_{Q \in s_p(G)} \overline{M}(Q) \Big)_G$$

où $s_p(G)$ est l'ensemble des p-sous-groupes de G, où l'indice G dénote les coinvariants par G (voir la page 14) et où $\overline{M}$ est le quotient de Brauer du foncteur M, défini par

$$\overline{M}(Q) = M(Q) / \sum_{L < Q} I_L^Q(M(L))$$

(voir [Bou98], proposition 5.3). Cet isomorphisme est de plus compatible avec les transferts et les conjugaisons, toutefois il reste le problème de décrire les restrictions, via cet isomorphisme. Par ailleurs, l'évaluation d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable en le sous-groupe trivial a été décrite par Thévenaz et Webb de la manière suivante :

Théorème 1.5.3. *Soit $P_{H,V}$ un foncteur de Mackey projectif indécomposable.*

i) Si H n'est pas un p-groupe, alors $P_{H,V}(1) = 0$.

ii) Si H est un p-groupe, alors $P_{H,V}(1)$ est un facteur non nul indécomposable de $k \uparrow_H^G$. En particulier, dans le cas où G est un p-groupe, alors $P_{H,k}(1) = kP/H$.

Preuve : voir [TW95], théorème 12.7.

Donnons ensuite un résultat qui caractérise les foncteurs de Mackey projectifs indexés par le groupe trivial :

Théorème 1.5.4. *Soit V un kG-module simple. La couverture projective et l'enveloppe injective du foncteur de Mackey $S_{1,V}$ coïncident, et sont toutes les deux isomorphes à FP_{P_V} et FQ_{P_V}, où P_V est la couverture projective de V comme kG-module. En particulier, $P_{1,V}$ possède un socle simple isomorphe à son unique quotient simple, $S_{1,V}$.*

Preuve : voir [TW95], théorème 13.3.

Comme nous l'avons vu dans la proposition 1.3.6, l'induction de H à G d'un kH-module projectif P est un kG-module projectif. Cette propriété est également vérifiée dans le cas des foncteurs de Mackey, vu le résultat suivant :

Proposition 1.5.5. *Soit P un foncteur de Mackey projectif, associé à un sous-groupe H de G. Alors le foncteur induit $P\uparrow_H^G$ est projectif.*

Preuve : Nous allons montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\left(P\uparrow_H^G, \_\right)$ est exact. Pour cela, considérons la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0$$

de foncteurs de Mackey associés à G. Il faut montrer que la suite

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P\uparrow_H^G, M_1\right) &\xrightarrow{\alpha_\star} \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P\uparrow_H^G, M_2\right)\\ &\xrightarrow{\beta_\star} \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P\uparrow_H^G, M_3\right) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

est exacte, où $\alpha_\star(f) = \alpha f$, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P\uparrow_H^G, M_1\right)$ et où $\beta_\star(g) = \beta g$, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P\uparrow_H^G, M_2\right)$.

Par la proposition 1.4.3, le foncteur de restriction de G à H est exact. Par conséquent, la suite

$$0 \longrightarrow M_1\downarrow_H^G \xrightarrow{\alpha\downarrow_H^G} M_2\downarrow_H^G \xrightarrow{\beta\downarrow_H^G} M_3\downarrow_H^G \longrightarrow 0$$

est exacte. Du fait que P est projectif, nous obtenons alors la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_1\downarrow_H^G\right) &\xrightarrow{(\alpha\downarrow_H^G)_\star} \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_2\downarrow_H^G\right)\\ &\xrightarrow{(\beta\downarrow_H^G)_\star} \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_3\downarrow_H^G\right) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

De plus, comme les foncteurs d'induction et de restriction sont adjoints (voir la proposition 1.4.3), il existe une bijection

$$\varphi_i \;:\; \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_i\downarrow_H^G\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\left(P\uparrow_H^G, M_i\right)$$

pour $i = 1, 2, 3$.
Il suffit finalement de vérifier que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_1 \downarrow_H^G\right)$, et pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}\left(P, M_2 \downarrow_H^G\right)$,

$$\varphi_2 \circ \left(\alpha \downarrow_H^G\right)_\star \circ \varphi_1(f) = \alpha \circ f \quad \text{ et } \quad \varphi_3 \circ \left(\beta \downarrow_H^G\right)_\star \circ \varphi_2(g) = \beta \circ g$$

ce qui se fait à l'aide de la preuve de la proposition 4.2 de [TW95] (qui construit explicitement les adjonctions entre $\uparrow_H^G$ et $\downarrow_H^G$).

□

1.6 Foncteurs Δ

Un des moyens pour comprendre la structure d'un module est de le décomposer en couches de modules simples, autrement dit de déterminer ses facteurs de composition. Cette méthode peut en particulier s'appliquer aux foncteurs de Mackey projectifs indécomposables qui nous intéressent. Toutefois cette décomposition s'avère souvent assez difficile.
Dans [Web01], Webb introduit des foncteurs de Mackey, appelés foncteurs Δ, qui ont la propriété que tout foncteur de Mackey projectif possède une filtration, c'est-à-dire une suite de sous-modules emboîtés, dont les quotients sont des foncteurs Δ, paramétrisés, entre autres, par des modules de p-permutation (voir la définition 1.6.4). De plus, cette filtration peut être construite explicitement. Notre problème peut ainsi se séparer en deux parties : premièrement comprendre la structure des foncteurs projectifs en termes de foncteurs Δ, puis comprendre la structure de ces foncteurs Δ.

Définition 1.6.1. *Soit G un groupe, H un sous-groupe et U un $k\overline{N}_G(H)$-module. Le foncteur de Mackey Δ, associé à H et à U, est défini par*

$$\Delta_{H,U} = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FQ_U\right) \uparrow_{N_G(H)}^G .$$

Remarque : Ces foncteurs Δ peuvent être décrits à l'aide de la définition de Dress, donc en termes de G-ensembles, de la manière suivante : si X est un G-ensemble, alors

$$\Delta_{H,U}(X) = k\left(X^H\right) \otimes_{k\overline{N}_G(H)} U.$$

En effet, en utilisant le fait que pour tout foncteur de Mackey M associé à G, $M \uparrow_H^G (X) = M\left(\mathrm{Res}_H^G(X)\right)$ (voir la page 30) et que pour tout foncteur de Mackey N associé à G/N, où N est un sous-groupe normal de G,

$\mathrm{Inf}_{G/N}^{G} N(X) = N\left(X^N\right)$ (voir la page 32), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta_{H,U}(X) &= \mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FQ_U\left(\mathrm{Res}_{N_G(H)}^{G}(X)\right) = FQ_U(X^H)\\ &= k\left(X^H\right)\otimes_{k\overline{N}_G(H)} U.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'induction, nous pouvons calculer explicitement les évaluations de ce foncteur en les sous-groupes de G :

Proposition 1.6.2. *L'évaluation du foncteur $\Delta_{H,U}$ en un sous-groupe K de G est égale à*

$$\Delta_{H,U}(K) = \bigoplus_{g\in[K\backslash T_G(H,K)/N_G(H)]} FQ_U(N_{K^g}(H))$$

où $T_G(H,K) = \{g \in G \,|\, {}^gH \leq K\}$ est le transporteur de H à K. En particulier $\Delta_{H,U}(H) = U$ et $\Delta_{H,U}(K)$ est nul à moins que K ne contienne un conjugué de H.

Preuve : voir [Web01], proposition 3.1.

Les foncteurs Δ sont, en particulier, stables par induction ; autrement dit, nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.6.3. *Soient $H \leq K \leq G$ et U un $k\overline{N}_J(H)$-module, alors*

$$\Delta_{H,U}^{J}\uparrow_J^G \cong \Delta^G_{H,\mathrm{Ind}_{N_J(H)}^{N_G(H)}(U)}.$$

Preuve : voir [Web01], lemme 4.1.

Définition 1.6.4. *Un kG-module M est un module de permutation s'il possède une k-base invariante par l'action du groupe G. Un kG-module M est un module de p-permutation si $\mathrm{Res}_Q^G(M)$ est un module de permutation pour tout p-sous-groupe Q de G.*

Remarquons que dans le cas où $G = P$ est un p-groupe, la notion de module de permutation et celle de module de p-permutation coïncident. De plus, dans ce cas, les kP-modules de permutation indécomposables sont exactement les kP/H pour $H \leq P$ (voir [Bou00], théorème 3.5.7).

Nous pouvons à présent définir $\mathcal{D}$, la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Mack}_k(G)$ des foncteurs de Mackey dont les objets sont les foncteurs possédant une filtration finie

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

telle que, pour tout i, le facteur M_i/M_{i-1} est isomorphe à Δ_{H_i,U_i} pour un sous-groupe H_i et un $k\overline{N}_P(H_i)$-module de p-permutation U_i. Les objets de cette catégorie seront appelés des foncteurs de Mackey possédant une Δ-filtration. Un des résultats qui motive l'étude de cette catégorie est le suivant :

Théorème 1.6.5. *Soit M un foncteur de Mackey projectif de type fini, pour un groupe G, sur un corps k de caractéristique p. Alors M est un objet de $\mathcal{D}$.*

Preuve : voir [Web01], théorème 7.1.

Il est possible de déterminer explicitement une Δ-filtration d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable, $P_{H,k}$, associé à un p-groupe P. Mais avant de décrire cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.6.6. *Soient $1 = H_1, H_2, \ldots, H_r = G$ les sous-groupes de G, à conjugaison près, ordonnés de sorte que si H_i est conjugué à un sous-groupe de H_j, alors $i \leq j$. La filtration ascendante de M est, par définition, la filtration*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_r = M$$

où $M_i = I_{\{H_1,\ldots,H_i\}}M$ (voir la définition 1.4.9) pour tout $i = 1, \ldots, r$. Cette filtration a du sens, car si $\chi \subseteq \chi'$, alors $I_\chi M \subseteq I_{\chi'}M$.

L'intérêt de la notion de filtration ascendante provient du fait que, par la proposition 6.1 de [Web01], si M est un objet de $\mathcal{D}$, les facteurs de cette filtration de M sont isomorphes à $\Delta_{J,\overline{M}(J)}$ où J parcourt les sous-groupes de H, à conjugaison près et où $\overline{M}$ est le quotient de Brauer du foncteur M (voir la définition à la page 38).

Revenons à présent au cas du foncteur $P_{H,k}$. Par le théorème 1.5.2 et la remarque qui le suit, le foncteur $P_{H,k}$ est isomorphe à un induit du foncteur de Burnside : $P_{H,k} \cong B^H \uparrow_H^G$ (pour la définition du foncteur de Burnside, voir l'exemple 1, à la page 13). Or $\overline{B}(J) = k\langle J/J\rangle \cong k$ étant donné que $B(J) = \bigoplus_{K \leq_J J} k\langle J/K\rangle$ et que si $K < J$, alors $J/K = I_K^J(K/K)$ qui est nul dans $\overline{B}(J)$. Par conséquent, le foncteur B^H possède une filtration ascendante dont les facteurs sont isomorphes à $\Delta^H_{J,k}$ où J parcourt les sous-groupes de H, à H-conjugaison près. Vu que le foncteur d'induction est exact (voir la proposition 1.4.3), il suffit alors d'induire cette filtration de H à G, pour obtenir une filtration de $P_{H,k}$ dont les facteurs sont isomorphes à $\Delta^H_{J,k} \uparrow^G_H$, pour $J \leq_H H$. Finalement, par le lemme 1.6.3, pour tout $J \leq H$,

$$\Delta^H_{J,k} \uparrow^G_H \cong \Delta^G_{J, \mathrm{Ind}^{N_G(J)}_{N_H(J)}(k)}.$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Corollaire 1.6.7. *Soient H un sous-groupe d'un p-groupe P et $H_1 = 1$, H_2,…,H_r les sous-groupes de H, à H-conjugaison près, ordonnés de sorte que si H_i est conjugué à un sous-groupe de H_j, alors $i \leq j$. Le foncteur de Mackey $P_{H,k}$ possède alors une Δ-filtration*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_r = P_{H,k}$$

dont les facteurs sont égaux à

$$M_i/M_{i-1} = \Delta^H_{H_i,k} \uparrow^P_H \cong \Delta^P_{H_i,kN_P(H_i)/N_H(H_i)}$$

pour $i = 1, \ldots, r$.

1.7 Blocs de foncteurs de Mackey

Nous allons terminer ces rappels, en donnant une description d'une décomposition de l'algèbre de Mackey en somme directe d'algèbres, ce qui nous permet d'obtenir une partition de l'ensemble des foncteurs de Mackey. Plus précisément, cette décomposition est obtenue à l'aide des idempotents primitifs centraux de $\mu_k(G)$ (voir la définition 1.2.12) et provient d'une théorie plus générale : la théorie des blocs, dont nous allons maintenant rappeler quelques idées.

Proposition 1.7.1. *Soit A une k-algèbre commutative de dimension finie. Alors les idempotents primitifs de A forment un ensemble fini $\{c_1, \ldots, c_n\}$, qui satisfait les conditions $c_1 + \cdots + c_n = 1$ et $c_ic_j = 0$ si $i \neq j$.*

Preuve : voir [CR87], proposition 56.5.

Vu la proposition précédente appliquée au centre d'une k-algèbre A, les idempotents centraux d'une algèbre A de dimension finie sur un corps k, forment un ensemble fini $\{c_1, \ldots, c_n\}$. De plus, ils induisent une décomposition de A en une somme directe $A = Ac_1 \oplus \cdots \oplus Ac_n$, où chaque $B_i = Ac_i$ est un idéal bilatère indécomposable, tel que c_i est un élément unité. Les idéaux B_i sont appelés les idéaux de blocs (ou simplement blocs) de l'algèbre A et les idempotents centraux c_i sont appelés les blocs de A.

Si M est un A-module, alors M se décompose en $M = c_1M \oplus \cdots \oplus c_nM$, et, en particulier, si M est indécomposable, alors il existe un unique i tel que $c_iM = M$ et $c_jM = 0$ si $j \neq i$. On dit alors que le module indécomposable M appartient à l'idéal de bloc $B_i = Ac_i$ ou au bloc c_i. Plus généralement, si M est un module quelconque, on dit qu'il appartient au bloc c_i si c'est le cas de tous ses facteurs indécomposables. Ainsi, les modules simples et les modules projectifs indécomposables sont séparés en blocs. En particulier, si un module appartient à un certain bloc, c'est aussi le cas de tous ses facteurs de composition. Réciproquement si chaque facteur de composition d'un A-module M appartient à un idéal de bloc B_i, alors l'élément unité de B_i induit l'identité sur chaque facteur et l'élément unité de B_j, pour $j \neq i$, annule chaque facteur. Par conséquent M doit appartenir à B_i. Il s'ensuit que pour déterminer les blocs d'une algèbre A, il suffit de déterminer quand deux A-modules simples appartiennent au même bloc.

En particulier, si M est un A-module indécomposable et que l'un de ses facteurs de composition appartient à un bloc c_i, alors M doit lui-même appartenir au bloc c_i.

Par ailleurs, la décomposition en blocs d'une algèbre A nous donne des informations sur les groupes d'extension entre A-modules, vu les deux résultats suivants :

Proposition 1.7.2. *Soient M et N des A-modules indécomposables. S'il existe une extension non triviale de N par M, alors M et N appartiennent au même bloc de A.*

Preuve : Soit $0 \to M \to E \to N \to 0$ une suite exacte courte non scindée. Supposons que M appartienne au bloc b_i de A et N au bloc b_j de A, alors le module E possède certains facteurs de composition dans b_i et les autres dans b_j. Si $i \neq j$, alors, vu les remarques précédentes, $E = b_iE \oplus b_jE = M \oplus N$ car $b_iM = M$, $b_jM = 0$, $b_iN = 0$ et $b_jN = N$, donc la suite ci-dessus est scindée, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent $i = j$, ainsi M et N appartiennent au même bloc.

□

Proposition 1.7.3. *Soient A une k-algèbre de dimension finie et S, T des A-modules simples. Si S et T n'appartiennent pas au même bloc de A, alors* $\mathrm{Ext}^n_A(T,S)=0$ *pour tout $n \geq 0$.*

Preuve : Nous allons montrer, par récurrence sur n, le résultat un peu plus général suivant : si un A-module M appartient à un bloc B et que $\mathrm{Ext}^n_A(M,S) \neq 0$, alors S appartient au bloc B.

Supposons que $\mathrm{Ext}^1_A(M,S) \neq 0$, alors il existe une suite exacte courte $0 \to S \to N \to M \to 0$, non scindée. Le module N se décompose en somme directe de modules indécomposables, $N = \bigoplus_i N_i$, et il existe un indice j tel que S est isomorphe, par projection sur N_j, à un sous-module S' de N_j. De plus, S' doit être un sous-module propre de N_j car la suite exacte ci-dessus n'est pas scindée, donc N_j est indécomposable et possède au moins deux facteurs de composition dont l'un est aussi un facteur de composition de M, donc N_j appartient au bloc B. Par conséquent, S doit aussi appartenir au bloc B.

Supposons ensuite que $\mathrm{Ext}^n_A(M,S) \neq 0$, pour $n > 1$. Soit P_M la couverture projective du module M et K_M le noyau de la surjection de P_M sur M. La suite exacte courte $0 \to K_M \to P_M \to M \to 0$ induit alors, vu le théorème 1.2.20, la suite exacte suivante :

$$0 = \mathrm{Ext}^{n-1}_A(P_M,S) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_A(K_M,S) \to \mathrm{Ext}^n_A(M,S) \to \mathrm{Ext}^n_A(P_M,S) = 0$$

où les deux termes extrémaux sont nuls vu que P_M est projectif. Par suite, $\mathrm{Ext}^n_A(M,S) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_A(K_M,S)$, donc il suffit de montrer que K_M appartient au bloc B, puis d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Posons $M = \bigoplus_i M_i$, où les M_i sont des modules indécomposables. Par la proposition 1.2.15, $P_M = \bigoplus_i P_{M_i}$. Posons π_i la surjection de P_{M_i} sur M_i, pour tout i. Comme P_{M_i} est la couverture projective de M_i, l'image par π_i de tous les facteurs directs de P_{M_i} est non nulle, pour tout i, donc chacun de ces facteurs directs indécomposables doit appartenir au bloc B. Il s'ensuit que P_{M_i} appartient à B, pour tout i, donc P_M aussi. Comme K_M est un sous-module de P_M, K_M appartient également à B, d'où le résultat.

$\square$

Revenons au cas de l'algèbre de Mackey. Le foncteur de Mackey de Burnside, B^G (voir la page 13), agit comme un anneau d'endomorphismes sur chaque foncteur de Mackey associé à G. Explicitement, si M est un foncteur de Mackey et Z un G-ensemble, alors l'action de Z sur M est définie comme la transformation naturelle :

$$M(X) \xrightarrow{M^\star(\mathrm{pr}_2)} M(Z \times X) \xrightarrow{M_\star(\mathrm{pr}_2)} M(X)$$

où M est vu comme foncteur de Mackey pour la deuxième définition, X est un G-ensemble quelconque et $\mathrm{pr}_2 : Z \times X \to X$ est la projection sur le second facteur. En fait, B^G agit via des éléments de l'algèbre de Mackey, et comme leur action commute avec les opérations d'induction, de restriction et de conjugaison, ses éléments doivent être centraux (pour plus de détail, voir [TW95], section 9). En résumé, nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.7.4. *Dans $B(G)$, chaque expression, $1 = \sum_i e_i$ de l'identité comme somme d'idempotents orthogonaux donne lieu à une décomposition $M = \sum_i e_i M$ de tout foncteur de Mackey M. De plus, chaque idempotent de $B(G)$ correspond à un idempotent central de l'algèbre de Mackey $\mu_k(G)$, ce qui permet de décomposer cette dernière en somme directe de sous-anneaux.*

Preuve : voir [TW95], propositions 9.1 et 9.2.

Il suffit donc de connaître les idempotents primitifs de l'anneau de Burnside pour obtenir une décomposition de l'algèbre de Mackey. Toutefois, ces idempotents ne sont en général plus primitifs dans l'algèbre de Mackey, de sorte que nous obtenons une décomposition en union de blocs, plutôt qu'en blocs.
Les idempotents primitifs de l'anneau de Burnside ont été étudiés par Dress, mais avant de les donner, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.7.5. *Un groupe J est dit p-parfait s'il ne possède pas de sous-groupe propre normal N tel que J/N est un p-groupe. Notons $O^p(J)$ le plus petit sous-groupe normal de J tel que $J/O^p(J)$ est un p-groupe. Nous obtenons alors que J est p-parfait si et seulement si $O^p(J) = J$.*

Théorème 1.7.6. *Soit R un anneau dans lequel tous les diviseurs premiers de l'ordre de G sont inversibles, à l'exception de p. Dans l'anneau de Burnside $B(G)$ sur R, nous avons alors*

$$1 = \sum_{\substack{J \leq_G G \\ J \text{ est } p\text{-parfait}}} f_J$$

où les f_J sont des idempotents primitifs orthogonaux, en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes p-parfaits de G.

Preuve : voir [TW95], théorème 9.3 ou [Yos83], théorème 3.1.

Si J est un sous-groupe p-parfait de G et k est un corps de caractéristique p, on note $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mack}_k(G)$ dont les objets sont les foncteurs de Mackey M tels que $f_J M = M$. On peut déterminer explicitement les foncteurs de Mackey simples appartenant à $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ pour un sous-groupe p-parfait J fixé. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.7.7. *Soient $S_{K,W} \in \mathrm{Mack}_k(G)$ un foncteur de Mackey simple et J un sous-groupe de G p-parfait. Alors $f_J S_{K,W} = 0$ à moins que J et $O^p(K)$ ne soient conjugués et, dans ce cas, $f_J S_{K,W} = S_{K,W}$. Les foncteurs de Mackey simples de $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ sont donc précisément les $S_{K,W}$ avec $J = O^p(K)$. Un foncteur de Mackey arbitraire appartient à $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ si et seulement si c'est aussi le cas de tous ses facteurs de composition.*

Preuve : voir [TW95], proposition 9.6.

En particulier, le groupe trivial 1 est toujours un sous-groupe p-parfait de G, ce qui nous permet de considérer la catégorie $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$. Etant donné la proposition précédente, les foncteurs simples de $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$ sont précisément les foncteurs $S_{H,V}$ avec $O^p(H) = 1$, ce qui revient à dire que H est un p-groupe. Le théorème suivant nous permet alors de réduire l'étude des foncteurs de Mackey arbitraires aux foncteurs de Mackey dont les facteurs de composition sont indexés par des p-groupes :

Théorème 1.7.8. *Soit J un sous-groupe p-parfait de G, alors les catégories $\mathrm{Mack}_k(\overline{N}_G(J), 1)$ et $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ sont équivalentes.*

Preuve : voir [TW95], théorème 10.1.

Nous pouvons à présent décrire la décomposition en blocs de l'algèbre de Mackey. Pour cela, il suffit de décrire la répartition des foncteurs simples dans ces blocs, au vu des résultats précédents. Comme les idempotents primitifs de l'anneau de Burnside donnent une décomposition de l'algèbre de Mackey en union de blocs pour chaque sous-groupe p-parfait J, il suffit de déterminer les blocs dans chaque catégorie $\mathrm{Mack}_k(G, J)$, et par le théorème précédent, il est suffisant de comprendre le cas $J = 1$.

Soient P un p-sous-groupe de G, $Z(kG)$ le centre de kG, $C_G(P)$ le centralisateur de P dans G et $Z(kC_G(P))^{N_G(P)}$ l'ensemble des éléments de $Z(kC_G(P))$ fixes sous l'action par conjugaison de $N_G(P)$. Considérons l'application $\sigma : kG \to kC_G(P)$ définie par

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C_G(P), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour les éléments $x \in G$, puis étendue à kG par linéarité. En particulier, σ est un morphisme de $kN_G(P)$-modules.

La restriction de σ au centre de kG est un homomorphisme d'anneaux que l'on appelle le morphisme de Brauer :

$$\mathrm{Br}_P : Z(kG) \longrightarrow Z(kC_G(P))^{N_G(P)}.$$

L'image de Br_P est bien dans le centre de $kC_G(P)$, et comme les éléments du centre de kG sont les éléments de kG fixes par l'action de G par conjugaison, les éléments de $\mathrm{Br}_P(Z(kG))$ sont également fixés par l'action de $N_G(P)$ par conjugaison. Par ailleurs, si e est un bloc de l'algèbre $kN_G(P)$, alors $e \in Z(kC_G(P))^{N_G(P)}$, et dans cette algèbre, e est égal à une somme d'idempotents primitifs conjugués (pour plus de détail, voir [AB79], section 2). Par conséquent, il existe un unique bloc b de kG tel que $\mathrm{Br}_P(b) \cdot e = e$, et cet unique bloc est noté $b = e^G$.

Si P est un p-sous-groupe de G, alors tout $k\overline{N}_G(P)$-module simple V peut être vu comme $kN_G(P)$-module, donc il appartient à un bloc e de $kN_G(P)$. Il est ainsi possible d'associer à chaque foncteur de Mackey simple $S_{P,V}$ un bloc e de $kN_G(P)$.

Théorème 1.7.9. *Soient $S_{P,Q}$ et $S_{Q,W}$ deux foncteurs de Mackey simples, où P et Q sont des p-sous-groupes de G. Soit e le bloc de $N_G(P)$ auquel appartient V et f le bloc de $N_G(Q)$ auquel appartient W. Alors les foncteurs $S_{P,Q}$ et $S_{Q,W}$ appartiennent au même bloc de l'algèbre de Mackey si et seulement si les blocs de kG correspondants, e^G et f^G, sont égaux. Ainsi les blocs de $\mathrm{Mack}_k(G,1)$ sont en bijection avec les blocs de kG, via l'application qui envoie le bloc contenant $S_{P,V}$ sur le bloc e^G de kG.*

Preuve : voir [TW95], théorème 17.1.

Remarque : Dans le cas où les sous-groupes P et Q sont normaux dans G, alors les foncteurs simples $S_{P,V}$ et $S_{Q,W}$ appartiennent au même bloc de l'algèbre de Mackey si et seulement si les modules V et W, vus comme kG-modules, appartiennent au même bloc de kG.

Chapitre II

Groupes d'extension de degré 1

Un des points principaux pour comprendre la structure d'un foncteur de Mackey projectif est de déterminer sa série de Loewy, autrement dit de le décomposer en couches. Par exemple, si $P_{H,V}$ est un foncteur de Mackey projectif indécomposable, son plus grand quotient semi-simple est $S_{H,V}$, par définition ; en d'autres termes, $P_{H,V}/\mathrm{Rad}(P_{H,V}) \cong S_{H,V}$. Que peut-on alors dire du plus grand quotient semi-simple de $\mathrm{Rad}(P_{H,V})$, autrement dit de la deuxième couche de la série de Loewy de $P_{H,V}$? La réponse à cette question est donnée par les groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples, comme nous l'avons vu dans la section 1.2. C'est donc la détermination de ces groupes d'extension qui vont nous intéresser dans ce chapitre.

Plus précisément, rappelons que si A est une algèbre sur un corps k algébriquement clos, S, S' sont des A-modules simples et P est la couverture projective de S, alors, par la proposition 1.2.23,

$$\mathrm{Ext}^1_A(S, S') \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Rad}(P)/\mathrm{Rad}^2(P), S').$$

Par conséquent, le nombre de fois où le module S' apparaît dans la deuxième couche de la série de Loewy de P est égal à la dimension de $\mathrm{Ext}^1_A(S, S')$ comme k-espace vectoriel (pour plus de détails, voir la remarque qui suit le lemme 1.2.24).
Nous allons donc, dans ce chapitre, nous intéresser aux groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples, et plus précisément, à leur dimension comme k-espaces vectoriels.
En particulier, afin d'obtenir certaines propriétés de ces groupes, nous allons introduire et étudier, dans la section 2.3, des foncteurs de Mackey, appelés

foncteurs T, dont la définition est analogue à celle des foncteurs simples $S_{H,V}$, à la différence près que le module V n'est pas forcément simple.

2.1 Le cas des foncteurs simples indexés par des sous-groupes normaux

Fixons un groupe fini G et un corps k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$. Soient Q et H des sous-groupes de G, V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module simple. Nous désirons étudier

$$\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V}) := \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S_{Q,W}, S_{H,V}).$$

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où les groupes Q et H sont normaux dans G.

Comme nous allons le voir dans le théorème 2.1.4, le groupe $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ est trivial si Q (respectivement H) n'est pas conjugué à un sous-groupe de H (respectivement Q). Il y aura donc essentiellement deux cas à traiter : celui où l'un des groupes est contenu strictement dans l'autre, à conjugaison près, et celui où les deux groupes sont égaux. Dans le premier cas, nous allons déterminer explicitement ce groupe d'extension ; c'est l'objet du résultat principal de cette section :

Théorème 2.1.1. *Soient H, $Q \trianglelefteq G$ avec $H \neq Q$. Le k-espace vectoriel $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ est isomorphe à*

$$\begin{cases} k & \text{si } H < Q,\ [Q:H] = p,\ V^{Q/H} = V \text{ et } V \cong W \text{ (comme } kG/Q\text{-module)} \\ k & \text{si } Q < H,\ [H:Q] = p,\ W^{H/Q} = W \text{ et } W \cong V \text{ (comme } kG/H\text{-module)} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $V^{Q/H}$ est l'ensemble des éléments de V fixes par l'action de Q/H, et de même, $W^{H/Q}$ est l'ensemble des éléments de W fixes par l'action de H/Q.

Avant de démontrer cela, remarquons qu'il suffit de traiter le cas où l'un des deux sous-groupes est strictement inclus dans l'autre. C'est une conséquence du résultat suivant :

Lemme 2.1.2. *Soient A une k-algèbre de dimension finie et M, N des A-modules à gauche. Alors*

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{A^{op}}(N^\star, M^\star)$$

pour tout $i \geq 0$, où $M^\star = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ et A^{op} est l'algèbre opposée de A ; autrement dit, A^{op} est isomorphe à A comme k-espace vectoriel, via un isomorphisme φ qui satisfait $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$, pour tout $x, y \in A$.

Preuve : Pour i fixé, il suffit de considérer les extensions de degré i (voir la proposition 1.2.22). En effet, à chaque extension de degré i

$$\xi : 0 \to N \to E_{i-1} \to \cdots \to E_0 \to M \to 0$$

correspond l'extension de degré i

$$\xi^\star : 0 \to M^\star \to E_0^\star \to \cdots \to E_{i-1}^\star \to N^\star \to 0.$$

De plus, si ξ' est une autre extension de degré i, alors ξ est équivalente à ξ' si et seulement si $\xi^\star$ est équivalente à $(\xi')^\star$.

□

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant sur les extensions entre foncteurs de Mackey :

Corollaire 2.1.3. *Soient $S_{H,V}$ et $S_{Q,W}$ deux foncteurs de Mackey simples, alors*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mu_k(G)}(S_{Q,W}, S_{H,V}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mu_k(G)}(S_{H,V^\star}, S_{Q,W^\star})$$

pour tout $i \geq 0$.

Preuve : Par la proposition 4.1 de [TW95], le foncteur $S^\star_{J,U}$ est isomorphe à $S_{J,U^\star}$. De plus, l'algèbre $\mu_k(G)$ possède un anti-automorphisme, donné par

$$I^K_{{}^gL} c_g R^H_L \mapsto I^H_L c_{g^{-1}} R^K_{{}^gL}$$

(voir la page 13, et [TW95], chapitre 4), et par conséquent, elle est isomorphe à son algèbre opposée. Le lemme 2.1.2 nous permet alors de conclure.

□

Ainsi, pour démontrer le théorème 2.1.1, il nous suffira de traiter le cas où $H < Q$.

La preuve du théorème 2.1.1 s'appuie en particulier sur le résultat suivant de Thévenaz et Webb :

Théorème 2.1.4. *Soient $S_{H,V}$, $S_{K,W}$ des foncteurs de Mackey simples sur un corps k algébriquement clos.*

i) *Le groupe* $\mathrm{Ext}(S_{H,V}, S_{K,W})$ *est trivial à moins que* $H \leq_G K$ *ou que* $K \leq_G H$.

ii) *Si* $H = K$, *la dimension de* $\mathrm{Ext}(S_{H,V}, S_{H,W})$ *est égale à la multiplicité de* $S_{H,V}$ *dans la seconde couche de la série des socles du foncteur* $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(K)}^{N_G(K)} FP_{P_W}\right) \uparrow_{N_G(H)}^{G}$ *où* P_W *est la couverture projective du module* W. *De plus, l'évaluation en* H *induit un morphisme*

$$\eta_H : \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,V}, S_{H,W}) \to \mathrm{Ext}_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$$

qui est injectif.

iii) *Si* $K <_G H$, *alors la dimension de* $\mathrm{Ext}(S_{H,V}, S_{K,W})$ *est égale à la multiplicité de* $S_{H,V}$ *dans la seconde couche de la série des socles de* $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_W\right) \uparrow_{N_G(H)}^{G}$.

iv) *Si* $H <_G K$, *alors la dimension de* $\mathrm{Ext}(S_{H,V}, S_{K,W})$ *est égale à la multiplicité de* $S_{K,W}$ *dans la seconde couche de la série des socles de* $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(K)}^{N_G(K)} FQ_V\right) \uparrow_{N_G(K)}^{G}$.

Preuve : Voir [TW95], théorème 14.3.

Preuve du théorème 2.1.1 : Supposons que $H < Q$. Par le théorème 2.1.4, iii), la dimension sur k de $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ est égale à la multiplicité de $S_{Q,W}$ dans la deuxième couche de la série des socles du foncteur $M = \mathrm{Inf}_{G/H}^{G} FP_V$.

Vu le lemme 1.4.11, le socle de M est égal à $S \cong S_{H,V}$, le sous-foncteur de M engendré par $S(H) = V = M(H)$. De plus, comme H est un sous-groupe normal, ce sous-foncteur est égal à $\mathrm{Inf}_{G/H}^{G} S_{1,V}^{G/H}$, et

$$S_{1,V}^{G/H}(K/H) = I_{H/H}^{K/H}(V) \cong I_H^K(V)$$

pour tout sous-groupe K/H de G/H. Par conséquent, si K est un sous-groupe de G contenant H, nous avons $S(K) = I_H^K(V)$.

Il reste donc à déterminer la multiplicité de $S_{Q,W}$ dans le socle du foncteur $M/\mathrm{Soc}(M) = M/S$, ou, de manière équivalente, dans

$$\mathrm{Soc}^2(M)/\mathrm{Soc}(M) = \mathrm{Soc}(M/\mathrm{Soc}(M))$$

qui est la deuxième couche de la série des socles de M. Pour cela, nous allons tout d'abord montrer que M/S possède un sous-foncteur isomorphe à $S_{Q,W}$ seulement si $[Q : H] = p$, $V^{Q/H} = V$ et $W = V$. Puis, nous verrons que, sous les trois conditions précédentes, il existe un unique sous-foncteur de M/S isomorphe à $S_{Q,W}$.

Il nous faut donc déterminer sous quelles conditions il existe un sous-foncteur simple T de M/S, isomorphe à $S_{Q,W}$. Tout d'abord, $W = T(Q)$ est un sous-module de $M(Q)/S(Q) = V^{Q/H}/I_H^Q(V)$ et $V^{Q/H}$ possède une structure de kG/H-module vu que Q est un sous-groupe normal. Il s'ensuit que $V^{Q/H}$ est un sous-kG/H-module de V. Nous en déduisons ainsi, par simplicité de V, qu'il y a deux cas possibles : soit $V^{Q/H} = 0$, soit $V^{Q/H} = V$.

Dans le premier cas, il n'y a pas de tel sous-foncteur T dans M/S. Nous pouvons donc supposer que $V^{Q/H} = V$, autrement dit, que Q/H agit trivialement sur V et, par suite, si $x \in V$, $I_H^Q(x) = [Q : H] \cdot x$. Par conséquent, si p ne divise pas $[Q : H]$, alors $(M/S)(Q) = V/V = 0$ et de nouveau, il n'y a pas de sous-foncteur isomorphe à $S_{Q,W}$ dans M/S.

Supposons donc que $V^{Q/H} = V$ et que p divise $[Q : H]$. Comme Q agit trivialement sur le module V, ce dernier possède naturellement une structure de kG/Q-module simple. Comme $W \subseteq (M/S)(Q) = V$, la seule possibilité est que $W = V$. Supposons ensuite qu'il existe un sous-groupe J tel que $H < J < Q$ et $p \,|\, [J : H]$. Alors, d'une part $R_J^Q(T(Q)) = V$, car l'application de restriction est une inclusion. En effet, comme $S(J) = 0 = S(Q)$, l'application R_J^Q du foncteur T provient de celle de $M = \mathrm{Inf}_{G/H}^G FP_V$ qui est une inclusion par définition du foncteur point fixe. Mais, d'autre part, $R_J^Q(T(Q)) \subseteq T(J) = 0$, vu que T est un sous-foncteur et que l'évaluation de T en les sous-groupes propres de Q est nulle. Il n'est donc pas possible, dans ce cas, qu'il existe un tel sous-foncteur T ; autrement dit, il faut que $[Q : H] = p$.

En résumé, nous pouvons supposer que $[Q : H] = p$, $V^{Q/H} = V$ et $W = V$, car sinon la multiplicité de $S_{Q,W}$ dans M/S est nulle. Sous ces conditions, $(M/S)(Q) = V$. Soit N le sous-foncteur de M/S engendré par $N(Q) = V$ (voir la définition 1.4.9). Nous allons alors montrer que N est un sous-foncteur de $\mathrm{Inf}_{G/Q}^G FP_V$. Dans ce but, remarquons que si $J < Q$, alors soit $J = H$ et dans ce cas, $(M/S)(J) = V/V = 0$, soit $J \neq H$ et dans ce cas, $M(J) = 0$ donc, $(M/S)(J) = 0$. Par conséquent $N(J) = 0$ si $J < Q$. Par ailleurs, vu la définition de N, le module $N(J)$ est également nul si le sous-groupe J ne contient pas Q. En effet, il suffit d'appliquer la proposition 1.4.10, en prenant pour χ l'ensemble des sous-groupes de Q.
Si $Q < K$, alors

$$S(K) = I_H^K(V) = I_Q^K(I_H^Q(V)) = 0$$

et, par suite, $(M/S)(K) = M(K)$, donc $N(K)$ est un sous-module de

$$M(K) = V^{K/H} = V^{K/Q} = \mathrm{Inf}_{G/Q}^{G} FP_V(K)$$

vu que Q agit trivialement sur V. De plus, les applications d'induction, de restriction et de conjugaison de M/S, associées à des sous-groupes contenant Q, sont les mêmes que celle du foncteur $\mathrm{Inf}_{G/Q}^{G} FP_V$ (en utilisant la définition de l'inflation et le fait que le foncteur S s'annule en les sous-groupes contenant Q). Il s'ensuit que N s'identifie au sous-foncteur de $\mathrm{Inf}_{G/Q}^{G} FP_V$ engendré par $N(Q) = V$; il est donc isomorphe à $S_{Q,V}$ par définition. Par conséquent, si T est un sous-foncteur simple de M/S, isomorphe à $S_{Q,W}$, alors N doit être un sous-foncteur de T, non nul, vu que $T(Q) = V$ et que N est le plus petit sous-foncteur de M/S dont la valeur en Q vaut V. Or, comme T est simple, il s'ensuit que $T = N$; autrement dit, il y a exactement une copie de $S_{Q,W}$ dans la deuxième couche de la série des socles de M. Cela revient ainsi à dire que, dans ce cas, $\dim_k(\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})) = 1$.

Supposons ensuite que $Q < H$, alors

$$\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V}) \cong \mathrm{Ext}(S_{H,V^\star}, S_{Q,W^\star})$$

qui est égal à k si $[H : Q] = p$, $(W^\star)^{H/Q} = W^\star$ et $W^\star \cong V^\star$, en utilisant ce qui précède. Or $(W^\star)^{H/Q} = W^\star$ si et seulement si $W^{H/Q} = W$ et, de même, $W^\star \cong V^\star$ si et seulement si $V \cong W$.

Finalement, si $Q \not< H$ et $H \not< Q$, le groupe $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ est trivial vu le théorème 2.1.4, et étant donné l'hypothèse que $H \neq Q$.

□

Remarques :

i) L'hypothèse de normalité des sous-groupes H et Q est capitale dans la preuve précédente. D'une part, parce que le foncteur M dont on doit calculer la deuxième couche de la série des socles n'a pas d'induction, donc il est beaucoup plus facile à expliciter. D'autre part, parce que les points H-fixes ou Q-fixes d'un kG-module V possèdent également une structure de kG-module, donc si, par exemple, V est simple, les points H-fixes de V seront égaux à V ou à 0.

ii) Le théorème que nous venons de démontrer nous dit que si Q, $H \trianglelefteq G$, avec $H < Q$, $[Q : H] = p$, $V^{Q/H} = V$ et $V \cong W$, alors il n'y a qu'une seule extension non triviale de $S_{Q,W}$ par $S_{H,V}$, à multiplication scalaire près. De plus si $0 \to S_{H,V} \to N \to S_{Q,W} \to 0$ est une telle extension, alors $\mathrm{Soc}(N) = S_{H,V}$, $N(J) = 0$ si J est un sous-groupe propre de H et $N(H) = V$. Cette extension satisfait exactement les hypothèses du lemme 14.1 de [TW95], qui implique que N s'identifie à un sous-foncteur de $M = \mathrm{Inf}_{G/H}^{G} FP_V$.

Par exemple, si $G = C_p$, est le groupe cyclique d'ordre p, $H = 1$, $Q = C_p$ et $V = W = k$, N est un sous-foncteur de FP_k qui ne possède que deux facteurs de composition, donc $N = FP_k$. Plus généralement, si G est un groupe quelconque, avec $H \trianglelefteq G$, $H < Q$, $[Q : H] = p$, et $V = k$, nous obtenons que N est le sous-foncteur de M, tel que $N(J) = 0$, à moins que $J = H$ ou Q, ou que J possède H ou Q comme p-sous-groupe de Sylow, auxquels cas, $N(J) = k$.

Le cas des groupes d'extension, $\mathrm{Ext}(S_{H,V}, S_{H,W})$, entre foncteurs simples indexés par le même sous-groupe H de G dépend énormément de la structure des modules V et W. Il est donc plus difficile dans ce cas de les calculer explicitement. Nous en donnerons toutefois une caractérisation dans la section 2.5.

2.2 Conditions pour se restreindre au cas normal

Dans la section précédente, nous avons déterminé les groupes d'extension entre foncteurs simples indexés par des sous-groupes normaux distincts. La question qui se pose alors naturellement est de savoir s'il est possible de généraliser ce résultat au cas où les sous-groupes en question sont quelconques.
Nous allons voir que cette généralisation est possible si la restriction de certains foncteurs de Mackey simples est semi-simple. Or, en général, la restriction de foncteurs simples est égale à une somme directe de foncteurs, que l'on notera $T_{H,V}$, définis de manière analogue aux foncteurs simples, à la différence près que les modules qui les indexent ne sont plus nécessairement simples.

Les conditions pour pouvoir généraliser les résultats de la section précédente sont liées à la semi-simplicité des restrictions de foncteurs de Mackey simples. La proposition suivante donne une condition suffisante pour que cette restriction soit effectivement semi-simple. Nous verrons par la suite (proposition 2.3.12) que cette condition est également nécessaire.

Proposition 2.2.1. *Soient H, $L \leq G$ et V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple. Si $H \not\leq_G L$, alors $S_{H,V} \downarrow_L^G = 0$.*

Si $H \leq_G L$ et si pour tout $g \in I = [L\backslash T_G(H,L)/N_G(H)]$, le module $c_g(V)$ restreint à $\overline{N}_L({}^gH)$ est semi-simple (voir la définition 1.3.5), alors $S_{H,V}\downarrow_L^G$ est semi-simple.
Plus précisément, si $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_L({}^gH)}(c_g(V)) = \bigoplus_i V_{g,i}$ est une décomposition de $c_g(V)$ en somme de $k\overline{N}_L({}^gH)$-modules simples, pour tout $g \in I$, alors

$$S_{H,V}\downarrow_L^G = \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i S^L_{{}^gH,V_{g,i}}.$$

Preuve : Remarquons que, vu la formule de Mackey,

$$S^G_{H,V}\downarrow_L^G = S^{N_G(H)}_{H,V}\uparrow^G_{N_G(H)}\downarrow_L^G = \bigoplus_{g\in I}\left(\left(c_g\left(S^{N_G(H)}_{H,V}\right)\right)\downarrow^{N_G({}^gH)}_{N_L({}^gH)}\right)\uparrow^L_{N_L({}^gH)}.$$

D'une part, si $K \leq N_G({}^gH)$, alors soit ${}^gH$ n'est pas dans K et

$$c_g\left(S^{N_G(H)}_{H,V}\right)(K) = 0 = S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}(K),$$

soit ${}^gH \leq K$ et

$$\begin{aligned} c_g\left(S^{N_G(H)}_{H,V}\right)(K) &= S^{N_G(H)}_{H,V}(K^g) = I_1^{K^g/H}(V) \\ &= I_1^{K/{}^gH}(c_g(V)) = S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}(K)\,; \end{aligned}$$

autrement dit, $c_g\left(S^{N_G(H)}_{H,V}\right) = S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}$.
D'autre part, si $g \in I$, alors $S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}\downarrow^{N_G({}^gH)}_{N_L({}^gH)} = \bigoplus_i S^{N_{L^g}(H)}_{{}^gH,V_{g,i}}$. En effet, soit $K \leq N_L({}^gH)$, tel que ${}^gH \leq K$ (car sinon l'évaluation en K est nulle), alors

$$\begin{aligned} S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}\downarrow^{N_G({}^gH)}_{N_L({}^gH)}(K) &= S^{N_G({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}(K) = I^K_{{}^gH}(c_g(V)) = I^K_{{}^gH}\Big(\bigoplus_i V_{g,i}\Big) \\ &= \bigoplus_i I^K_{{}^gH}(V_{g,i}) = \bigoplus_i S^{N_L({}^gH)}_{{}^gH,V_{g,i}}(K), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que les $V_{g,i}$ sont des $k\overline{N}_L({}^gH)$-modules simples.
Par conséquent, nous obtenons

$$S^G_{H,V}\downarrow_L^G = \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i S^{N_L({}^gH)}_{{}^gH,V_{g,i}}\uparrow^L_{N_L({}^gH)} = \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i S^L_{{}^gH,V_{g,i}}.$$

□

Sous des conditions analogues à celles de la proposition précédente, il est donc possible de restreindre le calcul d'un groupe d'extension entre foncteurs simples à celui d'un groupe d'extension entre foncteurs simples indexés par des sous-groupes normaux :

Proposition 2.2.2. *Soient H, Q des sous-groupes d'un groupe G, V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module simple.*
Posons $I = [N_G(Q)\backslash T_G(H, N_G(Q))/N_G(H)]$ et pour tout $g \in I$, posons $N = N_G(Q)$ et $M_g = N_G({}^gH) \cap N$. Supposons de plus que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) pour tout $g \in I$, $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_N({}^gH)}(c_g(V)) = \bigoplus_i V_{g,i}$ où les $V_{g,i}$ sont des modules simples sur l'algèbre $k\overline{N}_N({}^gH)$,

ii) pour tout $g \in I$, $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G(Q)}_{\overline{N}_{M_g}(Q)}(W) = \bigoplus_j W_{g,j}$ où les $W_{g,j}$ sont des modules simples sur l'algèbre $k\overline{N}_{M_g}(Q)$.

Le calcul des groupes d'extension entre foncteurs simples se restreint alors au cas où ces foncteurs sont indexés par des sous-groupes normaux. Plus précisément, nous avons :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{Q,W}, S^G_{H,V}\big) = \bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ Q \le N_G({}^gH)}} \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(S^{M_g}_{Q,W_{g,j}}, S^{M_g}_{{}^gH,V_{g,i}}\Big).$$

Dans le but de démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soient A, B des anneaux et $\mathcal{F} : A\text{-mod} \rightleftarrows B\text{-mod} : \mathcal{G}$ des foncteurs additifs, tels que $\mathcal{F}$ est l'adjoint à gauche de $\mathcal{G}$, que $\mathcal{F}$ est exact et qu'il préserve les projectifs. Pour tout A-module M et pour tout B-module N, on a alors*

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, \mathcal{G}N) \cong \mathrm{Ext}^i_B(\mathcal{F}M, N)$$

pour tout $i \geq 0$.

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est l'adjoint à gauche et à droite de $\mathcal{G}$, alors ces deux foncteurs sont exacts (voir [Rot79], théorème 2.14), et $\mathcal{F}$ préserve les projectifs (voir [Wei94], proposition 2.3.10) ; ainsi, les conditions du lemme sont remplies.

Preuve : Vu nos hypothèses

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_A(M, \mathcal{G}N) &\cong H^i(\mathrm{Hom}_A(P_M, \mathcal{G}N)) \cong H^i(\mathrm{Hom}_B(\mathcal{F}P_M, N)) \\ &\cong H^i(\mathrm{Hom}_B(P_{\mathcal{F}M}, N)) \cong \mathrm{Ext}^i_B(\mathcal{F}M, N)\end{aligned}$$

pour tout $i \geq 0$, où P_M (respectivement $P_{\mathcal{F}M}$) est une résolution projective de M (respectivement de $\mathcal{F}M$).

$\square$

Preuve de la proposition 2.2.2 : Rappelons que

$$S^G_{Q,W} = \left(\mathrm{Inf}^N_{\overline{N}_G(Q)}\left(S^{\overline{N}_G(Q)}_{1,V}\right)\right)\uparrow^G_N$$

où $N = N_G(Q)$, et, par conséquent, $S^G_{Q,W} = S^N_{Q,W}\uparrow^G_N$. En utilisant les propriétés d'adjonction entre les restrictions et les inductions de la proposition 1.4.3 et la proposition 2.2.1, nous obtenons alors que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{Q,W}, S^G_{H,V}\big) &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^N_{Q,W}\uparrow^G_N, S^G_{H,V}\big)\\
&\cong \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(S^N_{Q,W}, S^G_{H,V}\downarrow^G_N\big)\\
&\cong \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i \ \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(S^N_{Q,W}, S^N_{{}^gH,V_{g,i}}\big)\\
&\cong \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i \ \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(S^N_{Q,W}, S^{M_g}_{{}^gH,V_{g,i}}\uparrow^N_{M_g}\big)\\
&\cong \bigoplus_{g\in I}\bigoplus_i \ \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\big(S^N_{Q,W}\downarrow^N_{M_g}, S^{M_g}_{{}^gH,V_{g,i}}\big)\\
&\cong \bigoplus_{\substack{g\in I \text{ tels que}\\ Q\leq N_G({}^gH)}}\ \bigoplus_{i,j}\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(S^{M_g}_{Q,W_{g,j}}, S^{M_g}_{{}^gH,V_{g,i}}\Big).
\end{aligned}$$

Posons $L = [M_g\backslash T_N(Q,M_g)/N_N(Q)]$. Le dernier isomorphisme provient alors du fait que $L = \{1\}$ si $Q \leq N_G({}^gH)$ et $L = \emptyset$ sinon. Par conséquent, comme la restriction de W à $\overline{N}_{M_g}(Q)$ est semi-simple, pour tout $g \in I$, la proposition 2.2.1 nous dit que

$$S^N_{Q,W}\downarrow^N_{M_g} = \bigoplus_{h\in L}\bigoplus_j S^{M_g}_{{}^hQ,W_{g,j}}$$

qui est égal à $\bigoplus_j S^{M_g}_{Q,W_{g,j}}$ si $Q \leq N_G({}^gH)$ et qui est nul dans le cas contraire.

$\square$

Le théorème 2.1.1 et la proposition 2.2.2 nous donnent alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 2.2.4. *Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 2.2.2 et si $H \neq_G Q$, le k-espace vectoriel* $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{Q,W}, S^G_{H,V}\big)$ *est égal à*

$$\begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ {}^gH < Q \leq N_G({}^gH)}} \; \bigoplus_{\substack{i,\, j \text{ tels que } V_{g,i} \cong W_{g,j} \\ \text{et } FP_{V_{g,i}}(Q/{}^gH) = V_{g,i}}} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xH < Q \text{ et } [Q : {}^xH] = p, \\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ Q < {}^gH}} \; \bigoplus_{\substack{i,\, j \text{ tels que } V_{g,i} \cong W_{g,j} \\ \text{et } FP_{W_{g,j}}({}^gH/Q) = W_{g,j}}} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } Q < {}^xH \text{ et } [{}^xH : Q] = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Comme les hypothèses de la proposition 2.2.2 sont satisfaites, nous avons

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{Q,W}, S^G_{H,V}\big) = \bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ Q \leq N_G({}^gH)}} \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(S^{M_g}_{Q,W_{g,j}}, S^{M_g}_{{}^gH,V_{g,i}}\Big).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.1.1 à chacun des termes de cette double somme, vu que les sous-groupes Q et ${}^gH$ sont normaux dans M_g, pour tout g.

□

Le résultat précédent nous permet de calculer les groupes d'extension entre foncteurs simples, associés à un groupe G, dans deux cas particuliers : tout d'abord, dans le cas où les modules correspondants aux foncteurs simples en question sont triviaux ; ensuite, dans le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe de Sylow normal. Commençons par le premier cas :

Théorème 2.2.5. *Soient Q et H des sous-groupes non conjugués d'un groupe G. Le k-espace vectoriel* $\mathrm{Ext}(S_{Q,k}, S_{H,k})$ *est alors égal à*

$$\begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{g \in J} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xH < Q \text{ et } [Q : {}^xH] = p, \\ \displaystyle\bigoplus_{g \in J'} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xQ < H \text{ et } [H : {}^xQ] = p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où J (respectivement J') est l'ensemble des éléments g appartenant à l'ensemble $[N_G(Q)\backslash T_G(H, N_G(Q))/N_G(H)]$, tels que ${}^gH < Q \leq N_G({}^gH)$ (respectivement tels que $Q < {}^gH$).

Preuve : Comme la restriction du module k à n'importe quel sous-groupe de G reste le module trivial, les conditions de la proposition 2.2.2 sont donc satisfaites, ce qui nous permet de conclure à l'aide de la proposition 2.2.4.

$\square$

Remarquons que le résultat précédent s'applique directement dans le cas d'un p-groupe P, car le seul kP-module simple est le module trivial k (voir la proposition 1.3.3) ; autrement dit, ce résultat permet de calculer explicitement tous les groupes d'extension entre foncteurs simples, associés à P, indexés par des sous-groupes non conjugués :

Corollaire 2.2.6. *Soient Q et H des sous-groupes non conjugués d'un p-groupe P. Le k-espace vectoriel $\mathrm{Ext}(S_{Q,k}, S_{H,k})$ est alors égal à*

$$\begin{cases} \bigoplus_{g\in J} k & \text{si } H \text{ est un sous-groupe maximal de } Q, \\ \bigoplus_{g\in J'} k & \text{si } Q \text{ est un sous-groupe maximal de } H, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où J (respectivement J') est l'ensemble des éléments g appartenant à l'ensemble $[N_P(Q)\backslash T_P(H, N_P(Q))/N_P(H)]$, tels que ${}^gH < Q \leq N_P({}^gH)$ (respectivement tels que $Q < {}^gH$).

Preuve : Cela découle directement du théorème 2.2.5, en utilisant le fait que dans un p-groupe, un sous-groupe J est maximal dans K si et seulement s'il est d'indice p et, si c'est le cas, alors J est normal dans K (voir [Rot95], théorèmes 4.6 et 4.8 ou la proposition 4.2.5).

$\square$

Traitons ensuite le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe de Sylow normal :

Théorème 2.2.7. *Soit G un groupe qui possède un p-sous-groupe de Sylow P normal. Soient Q et H des sous-groupes non conjugués de G, V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module simple.*
Posons $I = [N_G(Q)\backslash T_G(H, N_G(Q))/N_G(H)]$, $N = N_G(Q)$ et, pour tout $g \in I$, $M_g = N_G({}^gH) \cap N$. Pour tout $g \in I$, les modules $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_N({}^gH)}(c_g(V))$ (respectivement $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G(Q)}_{\overline{N}_{M_g}(Q)}(c_g(W))$) se décomposent alors en somme directe

de sous-modules simples $V_{g,i}$ (respectivement $W_{g,j}$), comme dans la proposition 2.2.2. De plus, le k-espace vectoriel $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ *est égal à*

$$\begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ {}^gH < Q \leq N_G({}^gH)}} \quad \bigoplus_{\substack{i,\, j \text{ tels que } V_{g,i} \cong W_{g,j} \\ \text{et } FP_{V_{g,i}}(Q/{}^gH) = V_{g,i}}} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xH < Q \text{ et } [Q : {}^xH] = p, \\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{g \in I \text{ tels que} \\ Q < {}^gH}} \quad \bigoplus_{\substack{i,\, j \text{ tels que } V_{g,i} \cong W_{g,j} \\ \text{et } FP_{W_{g,j}}({}^gH/Q) = W_{g,j}}} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } Q < {}^xH \text{ et } [{}^xH : Q] = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Vu la proposition 2.2.2, il est suffisant de vérifier que les modules $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_N({}^gH)}(c_g(V))$ et $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G(Q)}_{\overline{N}_{M_g}(Q)}(c_g(W))$ se décomposent en somme directe de sous-modules simples, pour tout $g \in I$. Montrons plus généralement que si U est un kG-module simple, où G est un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow P normal, alors la restriction de U à n'importe quel sous-groupe de G est semi-simple. Fixons donc un sous-groupe J de G. Par le théorème de Clifford (théorème 1.3.7), la restriction de U à P est semi-simple. Comme le seul kP-module simple est le module trivial, nous en déduisons que le sous-groupe P agit trivialement sur U. Par conséquent, la restriction de V au sous-groupe PJ possède une structure de kPJ/P-module. Comme l'ordre de PJ/P est premier à p, le module U, vu comme kPJ/P-module, est semi-simple, par le théorème de Maschke (théorème 1.3.1). Finalement, comme $PJ/P \cong J/J \cap P$ et que $J \cap P$ agit trivialement sur V, le module U, restreint à J donc à $J/J \cap P$, est semi-simple.

Il nous suffit donc de montrer que les groupes $N_G({}^gH)/{}^gH$ et $N_G(Q)/Q$ possèdent un p-sous-groupe de Sylow normal, et d'appliquer le résultat précédent aux modules $c_g(V)$ et $c_g(W)$, pour tout $g \in I$. Comme P est normal dans G, il s'ensuit que le groupe $(P \cap N_G({}^gH)){}^gH/{}^gH$ (respectivement $(P \cap N_G(Q))Q/Q$) est un p-sous-groupe de Sylow normal de $N_G({}^gH)/{}^gH$, pour tout $g \in I$ (respectivement $N_G(Q)/Q$), ce qui achève la preuve du théorème.

□

Si les conditions sur la semi-simplicité des modules ne sont pas remplies, la restriction de foncteurs simples est égale à une somme de foncteurs T et de même, les groupes d'extension entre foncteurs simples sont isomorphes à des groupes d'extension entre foncteurs T. Nous allons donc définir et étudier ces objets afin d'obtenir des informations sur les groupes d'extension et, plus généralement, sur les foncteurs simples. Ce sont par ailleurs des foncteurs de Mackey intéressants en soi de par leur définition naturelle, analogue à celle des foncteurs simples. Ce sont donc ces foncteurs T qui font l'objet des sections suivantes.

2.3 Propriétés des foncteurs T

Définition 2.3.1. *Soit H un sous-groupe de G et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. Le foncteur de Mackey $T_{H,V}$ est le sous-foncteur du foncteur*

$$M = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$$

engendré par $T_{H,V}(H) = M(H) = V$ (voir la définition 1.4.9).

Commençons par donner une caractérisation de ce foncteur. Pour cela, rappelons que si V un kG-module et si $K \leq H \leq G$, la trace relative est l'application $I_K^H : V^K \to V^H$ définie par $I_K^H(v) = \sum_{h \in [H/K]} h \cdot v$. La trace relative correspond à l'induction pour le foncteur de Mackey FP_V.

Lemme 2.3.2. *Soit V un $k\overline{N}_G(H)$-module, où $H \leq G$. Soit T_V le sous-foncteur de FP_V, associé au groupe $\overline{N}_G(H)$, défini par $T_V(J) = I_1^J(V)$. Le foncteur $T_{H,V}$ est alors isomorphe à $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} T_V\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$.*

Preuve : Posons $N = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} T_V\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$. Comme les foncteurs d'induction et d'inflation sont exacts (propositions 1.4.3 et 1.4.4), N est un sous-foncteur de $M = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$. Il suffit donc de montrer que N est engendré par sa valeur en H.
Remarquons tout d'abord que, pour tout $K \leq G$, $N(K) = \bigoplus_{x \in J} T_V\left(\overline{N}_{K^x}(H)\right)$ où x parcourt l'ensemble $J = [K \backslash T_G(H,K)/N_G(H)]$. En particulier, si $g \in J$, alors $N({}^gH) = \bigoplus_{x \in \{g\}} V = V$.

Soient $K \leq G$, $g \in J$ et $y \in N({}^gH)$. En utilisant les rappels de la page 30 sur l'induction d'un foncteur de Mackey induit, nous obtenons que l'image de y par l'application

$$I_{{}^gH}^K : N({}^gH) \to N(K)$$

est donnée par

$$I_{{}^gH}^K(y)_x = \sum_{u \in [{}^gH \backslash K / K \cap {}^xN_G(H)]} I_{N_G(H) \cap ({}^gH)^{ux}}^{N_G(H) \cap K^{ux}}(y_{ux}) = \begin{cases} I_H^{N_{K^g}(H)}(y) & \text{si } g = x, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $y_{ux} = 0$ à moins que $ux = g$ et, dans ce cas, $gx^{-1} = u \in K$, donc $x = g$ dans J.

Par conséquent, l'image de l'application $I^K_{{}^gH}$ se trouve dans le facteur correspondant à $x = g$ et elle est égale à l'image de l'application $I_H^{N_{K^g}(H)}$. Donc $I^K_{{}^gH}$ envoie $N({}^gH)$ surjectivement sur $T_V(\overline{N}_{K^g}(H))$ et, par suite, l'application $\sum_{g\in T_G(H,K)} I^K_{{}^gH}$ est surjective sur $N(K)$, autrement dit, le foncteur N est engendré par sa valeur en H.

□

Les foncteurs $T_{H,V}$ peuvent être définis à l'aide de la définition de Dress, c'est-à-dire en termes de G-ensembles, de la manière suivante :

Proposition 2.3.3. *Soient V un $k\overline{N}_G(H)$-module, où $H \leq G$, et X un G-ensemble. Alors*

$$T_{H,V}(X) = I_1^{\overline{N}_G(H)}\left(\mathrm{Hom}_k\left(k\left(X^H\right), V\right)\right)$$

où $I_1^{\overline{N}_G(H)}$ désigne la trace relative.

Preuve : Supposons tout d'abord que $H = 1$. Nous devons alors montrer que $T_{1,V}(X) = I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(k(X), V)\right)$. Il suffit de démontrer cela pour un G-ensemble transitif, disons $X = G/J$; autrement dit, nous devons prouver que

$$I_1^J(V) \cong I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right).$$

Or $I_1^J(V) \subseteq V^J$ et $I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right) \subseteq \left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right)^G$. De plus, en utilisant le théorème de réciprocité de Frobenius (voir la proposition 1.3.6), nous obtenons un isomorphisme

$$\varphi : V^J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kJ}(k, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kG}(kG/J, V) \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right)^G.$$

En particulier, si $x = \sum_{j\in J} jv \in I_1^J(V)$ avec $v \in V$, alors $\varphi(x)$ est l'application kG-linéaire qui envoie $u = 1 \cdot J$ sur x.
Montrons ensuite que $\varphi(x)$ appartient à $I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right.$. Dans ce but, définissons l'application k-linéaire $f : kG/J \to V$ par $f(gJ) = \begin{cases} x & \text{si } g \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Nous avons alors

$$\begin{aligned} I_1^G(f)(u) &= \sum_{g\in G} g^{-1} f(gu) = \sum_{j\in J}\sum_{t\in[G/J]} j^{-1}t^{-1}f(tju) \\ &= \sum_{j\in J} j^{-1}\Big(\sum_{t\in[G/J]} t^{-1}f(tJ)\Big) = \sum_{j\in J} j^{-1}v = x. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\varphi(x) = I_1^G(f)$, et ainsi $\varphi(I_1^J(V)) \subseteq I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right)$.

De plus, si $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_k(kG/J, V)$, alors

$$\begin{aligned} I_1^G(\tilde{f}(u)) &= \sum_{g\in G} g^{-1}\tilde{f}(gu) = \sum_{j\in J}\sum_{t\in[G/J]} j^{-1}t^{-1}\tilde{f}(tjJ) \\ &= \sum_{j\in J} j^{-1}\Big(\sum_{t\in[G/J]} t^{-1}\tilde{f}(tJ)\Big) = \varphi\Big(\sum_{t\in[G/J]} t^{-1}\tilde{f}(tJ)\Big). \end{aligned}$$

Donc φ induit un isomorphisme de $I_1^J(V)$ sur $I_1^G\left(\mathrm{Hom}_k(kG/J, V)\right)$.

En utilisant le résultat précédent, nous obtenons ainsi, pour tout G-ensemble X,

$$\begin{aligned} T_{H,V}(X) &= \mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)}\left(T_{1,V}\left(\mathrm{Res}^G_{N_G(H)}(X)\right)\right) = T_{1,V}\left(\left(\mathrm{Res}^G_{N_G(H)}(X)\right)^H\right) \\ &= I_1^{\overline{N}_G(H)}\left(\mathrm{Hom}_k\left(k\left((\mathrm{Res}^G_{N_G(H)}(X))^H\right), V\right)\right) \\ &= I_1^{\overline{N}_G(H)}\left(\mathrm{Hom}_k\left(k\left(X^H\right), V\right)\right). \end{aligned}$$

□

Les foncteurs $T_{H,V}$ possèdent des propriétés qui, de manière analogue aux foncteurs simples (voir [TW90], théorème 3.1), les caractérisent entièrement :

Proposition 2.3.4. *Soit M un foncteur de Mackey pour G et H un sous-groupe minimal tel que $M(H) \neq 0$. Appelons χ l'ensemble des sous-groupes J de G tels qu'il existe $g \in G$ avec ${}^gJ \leq H$. Alors $M \cong T_{H,V}$ où $V = M(H)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $\mathrm{Im}(I_\chi) = M$, *où* $\mathrm{Im}(I_\chi)$ *est le sous-foncteur de* M *défini par*

$$\mathrm{Im}(I_\chi)(K) = \sum_{X\,\in\,\chi,\ X\,\leq\,K} \mathrm{Im}(I_X^K),$$

b) $\mathrm{Ker}(R_\chi) = 0$, *où* $\mathrm{Ker}(R_\chi)$ *est le sous-foncteur de* M *défini par*

$$\mathrm{Ker}(R_\chi)(K) = \bigcap_{X\,\in\,\chi,\ X\,\leq\,K} \mathrm{Ker}(R_X^K).$$

Remarque : La proposition 2.4 de [TW95] nous dit précisément que le foncteur $I_\chi M$ défini dans l'énoncé de la proposition correspond au foncteur engendré par les valeurs de M en les éléments de χ défini dans la définition 1.4.9.

Preuve : Si $M = T_{H,V}$, alors H est un sous-groupe minimal de M, par définition de $T_{H,V}$. De plus, comme dans la preuve du lemme précédent, si $H \leq_G K$, l'application $\displaystyle\sum_{g \in T_G(H,K)} I_{^gH}^K$ se surjecte sur $M(K)$, donc

$$\mathrm{Im}(I_\chi)(K) = \sum_{X \in \chi,\ X \leq K} \mathrm{Im}(I_X^K) = \sum_{g \in T_G(H,K)} \mathrm{Im}(I_{^gH}^K) = T_{H,V}(K).$$

Par ailleurs, si H n'est pas conjugué à un sous-groupe de K, nous avons alors $\mathrm{Im}(I_\chi)(K) = 0 = T_{H,V}(K)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(I_\chi) = T_{H,V}$. De même,

$$\mathrm{Ker}(R_\chi)(K) = \bigcap_{X \in \chi,\ X \leq K} \mathrm{Ker}(R_X^K) = \bigcap_{g \in T_G(H,K)} \mathrm{Ker}(R_{^gH}^K).$$

Soit $g \in T_G(H,K)$ fixé. L'application

$$R_{^gH}^K : T_{H,V}(K) = \bigoplus_{x \in [K \backslash T_G(H,K)/N_G(H)]} I_H^{N_{K^x}(H)}(V) \to T_{H,V}(^gH) = \bigoplus_{y \in \{g\}} V$$

est alors donnée par $R_{^gH}^K(y)_g = R_{N_G(H) \cap {^gH}}^{N_G(H) \cap K}(y_g) = y_g$, car les restrictions d'un foncteur de points fixes sont des inclusions. Donc si $y \in \mathrm{Ker}(R_\chi)(K)$, alors $y_g = 0$ pour tout $g \in T_G(H,K)$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(R_\chi) = 0$.

Réciproquement supposons que M est un foncteur de Mackey satisfaisant aux propriétés ci-dessus. Rappelons que, vu la proposition 1.4.6 et comme H est un sous-groupe minimal de M tel que $M(H) \neq 0$, il existe une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\Big(M, (\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V) \uparrow_{N_G(H)}^G\Big) \to \mathrm{Hom}_{k\overline{N}_G(H)}(V,V).$$

En particulier, à id_V correspond l'application $\varphi = (\varphi(K))_K$ où $\varphi(K) = 0$ si $H \not\leq_G K$ et, si $H \leq_G K$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi(K): & M(K) & \to & \bigoplus_{g \in I_K} FP_V(\overline{N}_{K^g}(H)) \\ & a & \mapsto & \big(c_g R_{^gH}^K(a)\big)_{g \in I_K} \end{array}$$

où $I_K = [K \backslash T_G(H,K)/N_G(H)]$.
Par suite, si $a \in \mathrm{Ker}(\varphi(K))$, alors $a \in \displaystyle\bigcap_{g \in T_G(H,K)} \mathrm{Ker}(R_{^gH}^K) = \mathrm{Ker}(R_\chi)(K)$ qui est trivial ; autrement dit, φ est injective. Ainsi M s'identifie à un sous-foncteur de $(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V) \uparrow_{N_G(H)}^G$ et, comme $M = \mathrm{Im}(I_\chi)$, M est engendré par sa valeur en H, donc $M \cong T_{H,M(H)}$.

□

Vu ce qui précède, les foncteurs T sont engendrés par leur valeur en H. Il est ainsi possible de montrer qu'un morphisme de foncteurs de Mackey entre foncteurs T indexés par H est entièrement déterminé par sa valeur en H :

Lemme 2.3.5. *Soient H un sous-groupe de G, V et W des $k\overline{N}_G(H)$-modules. Si $\varphi, \psi : T_{H,V} \to T_{H,W}$ sont des morphismes de foncteurs de Mackey tels que $\varphi(H) = \psi(H)$, alors $\varphi = \psi$.*

Preuve : Pour tout $g \in G$,

$$\varphi({}^gH) = c_g\varphi(H)c_{g^{-1}} = c_g\psi(H)c_{g^{-1}} = \psi({}^gH),$$

donc les évaluations de φ et ψ en les conjugués de H coïncident. Si J est un sous-groupe de G tel que $H \not\leq_G J$, alors $\varphi(J) = 0 = \psi(J)$. Fixons donc $H \leq_G J$. Vu la proposition 2.3.4, l'application

$$\sum_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH} : \sum_{g\in T_G(H,J)} T_{H,V}({}^gH) \to T_{H,V}(J)$$

est surjective. Donc, si $x \in T_{H,V}(J)$, il existe des éléments $y_g \in T_{H,V}({}^gH)$ tels que $\sum\limits_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH}(y_g) = x$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\varphi(J)(x) = \varphi(J)\Big(\sum_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH}(y_g)\Big) &= \sum_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH}(\varphi({}^gH)(y_g)) = \\ = \sum_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH}(\psi({}^gH)(y_g)) &= \psi(J)\Big(\sum_{g\in T_G(H,J)} I^J_{{}^gH}(y_g)\Big) = \psi(J)(x)\end{aligned}$$

Donc $\varphi(J) = \psi(J)$.

$\square$

Remarquons ensuite que l'application de restriction associée à un foncteur T est injective :

Lemme 2.3.6. *Soient $H \leq_G L \leq K$ des sous-groupes de G et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. L'application de restriction $R^K_L : T_{H,V}(K) \to T_{H,V}(L)$ est injective.*

Preuve : Comme $T_{H,V} = \left(\mathrm{Inf}^{N_G(H)}_{\overline{N}_G(H)} T_V\right) \uparrow^G_{N_G(H)}$, l'application de restriction R^L_K associée au foncteur $T_{H,V}$ est définie par :

$$\begin{array}{rccc} R_L^K : & \bigoplus_{g\in I} T_{1,V}(N_G(H)\cap K^g) & \to & \bigoplus_{x\in J} T_{1,V}(N_G(H)\cap L^x) \\ & y=(y_g)_{g\in I} & \mapsto & \left(R^{N_G(H)\,\cap\, K^x}_{N_G(H)\,\cap\, L^x}(y_x)\right)_{x\in J} \end{array}$$

où $I = [K\backslash T_G(H,K)/N_G(H)]$ et où $J = [L\backslash T_G(H,L)/N_G(H)]$ (voir les formules données à la page 30).
Par conséquent, si $R_L^K(y) = 0$, alors $R^{N_G(H)\,\cap\, K^x}_{N_G(H)\,\cap\, L^x}(y_x) = 0$ pour tout $x \in J$. Or les applications de restriction associées au foncteur $T_{1,V}$ proviennent de celles du foncteur point fixe et sont par conséquent injectives. Il s'ensuit que $y_x = 0$ pour tout $x \in I$ et donc $y = 0$.

□

Si H est un sous-groupe fixé de G, on peut associer à chaque $k\overline{N}_G(H)$-module V le foncteur de Mackey $T_{H,V}$. En fait, cette correspondance est fonctorielle et elle préserve les injections et les surjections, vu le résultat suivant :

Proposition 2.3.7. *Soit H un sous-groupe de G. Il existe un foncteur $\mathcal{T}_H$ de la catégorie des $k\overline{N}_G(H)$-modules dans la catégorie des foncteurs de Mackey, qui associe à un module V le foncteur de Mackey $T_{H,V}$. De plus $\mathcal{T}_H$ est un foncteur pleinement fidèle, qui préserve les injections et les surjections.*

Preuve : Soit $f : V \to W$ un homomorphisme de $k\overline{N}_G(H)$-modules. Le morphisme de foncteurs de Mackey $\mathcal{T}_H(f) : T_{H,V} \to T_{H,W}$ est alors défini de la manière suivante : si $H \leq_G J$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_H(f)(J) : T_{H,V}(J) = \bigoplus_{g\in I} I_H^{N_{J^g}(H)}(V) & \to & T_{H,W}(J) = \bigoplus_{g\in I} I_H^{N_{J^g}(H)}(W) \\ y=(y_g)_{g\in I} & \mapsto & (f(y_g))_{g\in I} \end{array}$$

où $I = [J\backslash T_G(H,J)/N_G(H)]$. Le fait que $\mathcal{T}_H(f)$ est un morphisme de foncteurs de Mackey se déduit de la $k\overline{N}_G(H)$-linéarité de f.

Montrons ensuite que $\mathcal{T}_H$ est pleinement fidèle. D'une part, si $\mathcal{T}_H(f)$ est nul, alors $f = \mathcal{T}_H(f)(H) = 0$. D'autre part, si $\psi : T_{H,V} \to T_{H,W}$ est un morphisme de foncteurs de Mackey, alors $\psi = \mathcal{T}_H(\psi(H))$. En effet, vu le lemme 2.3.5, il suffit de vérifier que les évaluations en H de ces deux morphismes coïncident ; or $\mathcal{T}_H(\psi(H))(H) = \psi(H)$, par définition du foncteur $\mathcal{T}_H$. Finalement, le fait que le foncteur $\mathcal{T}_H$ préserve les injections et les surjections découle directement de sa définition.

□

Vu le lemme 2.3.2, les foncteurs $T_{H,V}$ sont très semblables aux foncteurs $S_{H,V}$. Plus précisement, ces foncteurs sont simples exactement quand le module V est simple, autrement dit, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.3.8. *Soient $H \leq G$ et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. Le foncteur $T_{H,V}$ est simple si et seulement si le $k\overline{N}_G(H)$-module V est simple.*

Preuve : Si le module V est simple, alors la définition du foncteur $T_{H,V}$ coïncide avec celle du foncteur simple $S_{H,V}$, donc $T_{H,V}$ est simple.
Réciproquement, si le module V possède un sous-module U propre, non trivial, la proposition 2.3.7 nous dit que $T_{H,U}$ est un sous-foncteur propre non trivial de $T_{H,V}$. Par conséquent, $T_{H,V}$ n'est pas simple.

$\square$

Remarquons par ailleurs qu'il en va de même pour leur indécomposabilité :

Proposition 2.3.9. *Soient $H \leq G$ et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. Le foncteur $T_{H,V}$ est indécomposable si et seulement si le module V est indécomposable. Plus précisément, $V = U \oplus W$ si et seulement si $T_{H,V} = T_{H,U} \oplus T_{H,W}$.*

Preuve : Supposons que V est indécomposable. Si $T_{H,V} = M_1 \oplus M_2$, alors l'évaluation en H donne $V = M_1(H) \oplus M_2(H)$ et, vu l'hypothèse, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $V = M_1(H)$. Mais comme le foncteur $T_{H,V}$ est engendré par sa valeur en H, il s'ensuit que $T_{H,V} = M_1$ et $M_2 = 0$, par conséquent $T_{H,V}$ est indécomposable.
Réciproquement, supposons que $V = U \oplus W$ avec U et W non nuls. La proposition 2.3.7 nous dit alors que $T_{H,V} = T_{H,U} \oplus T_{H,W}$. En particulier, le foncteur $T_{H,V}$ n'est pas indécomposable.

$\square$

Etant donné que les foncteurs $T_{H,V}$ ne sont pas simples si V n'est pas un $k\overline{N}_G(H)$-module simple, il est naturel de s'intéresser à leurs facteurs de composition et, plus particulièrement, à leur socle et à leur tête (c'est-à-dire à leur plus grand sous-module semi-simple et à leur plus grand quotient semi-simple) :

Proposition 2.3.10. *Soient $H \leq G$ et V un $k\overline{N}_G(H)$-module, dont le socle est égal à $\mathrm{Soc}(V) = \bigoplus_i V_i$, où les V_i sont des $k\overline{N}_G(H)$-modules simples, pour tout i, et la tête à $\mathrm{Hd}(V) = \bigoplus_j W_j$, où les W_j sont des $k\overline{N}_G(H)$-modules* *simples, pour tout j. Le socle du foncteur $T_{H,V}$ est alors égal à $\bigoplus_i S_{H,V_i}$ et sa tête à $\bigoplus_j S_{H,W_j}$.*

Preuve : Commençons par déterminer le socle de $T_{H,V}$. Comme $\mathrm{Soc}(V)$ est un sous-$k\overline{N}_G(H)$-module de V, le sous-foncteur M de $T_{H,V}$ engendré par $M(H) = \mathrm{Soc}(V)$ est un sous-foncteur de $(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_V) \uparrow_{N_G(H)}^G$. Donc $M \cong T_{H,\,\mathrm{Soc}(V)}$, par définition des foncteurs T. Par la proposition 2.3.9, $T_{H,\,\mathrm{Soc}(V)} \cong \bigoplus_i S_{H,V_i}$, donc c'est un sous-foncteur semi-simple de $T_{H,V}$. Montrons que c'est le socle de $T_{H,V}$.

Soit $S \cong S_{K,U}$ un sous-foncteur simple de $T_{H,V}$. Comme $S(K) = U \neq 0$, il s'ensuit que $H \leq_G K$. Soit $g \in G$ tel que ${}^gH \leq K$. Comme les restrictions sont injectives (voir le lemme 2.3.6), $R_{{}^gH}^K(S(K)) \neq 0$, donc $S({}^gH) \neq 0$, ce qui implique $H =_G K$, par minimalité de K. Donc $S \cong S_{H,U}$ où U est un sous-module simple de V ; autrement dit, $U \subseteq \mathrm{Soc}(V)$. Ainsi S est un sous-foncteur de $T_{H,\,\mathrm{Soc}(V)}$.

Intéressons-nous ensuite à la tête de $T_{H,V}$. Comme $\mathrm{Hd}(V)$ est un $k\overline{N}_G(H)$-module quotient de V, il existe un homomorphisme $\varphi : V \to \mathrm{Hd}(V)$ surjectif. Par conséquent, la proposition 2.3.7 nous dit qu'il existe un homomorphisme surjectif de $T_{H,V}$ sur $T_{H,\,\mathrm{Hd}(V)}$; autrement dit $T_{H,\,\mathrm{Hd}(V)}$ est quotient semi-simple du foncteur $T_{H,V}$. Montrons que c'est la tête de $T_{H,V}$.

Supposons que $S_{K,U}$ est un quotient simple de $T_{H,V}$. Il existe donc un homomorphisme non nul $T_{H,V} \to S_{K,U}$. En particulier, il existe une application non nulle

$$T_{H,V} \to M = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(K)}^{N_G(K)} FP_U\right) \uparrow_{N_G(K)}^G$$

dont l'image est contenue dans le socle de M, qui est justement égal à $S_{K,U}$, vu le lemme 1.4.11. Par la proposition 1.4.6, cela implique l'existence d'une application non nulle $\alpha : T_{H,V}^+(1) = T_{H,V}^+(K/K) \to U$. Or

$$T_{H,V}^+(1) = T_{H,V}(K) \Big/ \Big(\sum_{J \leq K, J \ngeq K} I_J^K(V) \Big) = \begin{cases} V & \text{si } K =_G H, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vu que si $T_{H,V}(K) \neq 0$, alors $H \leq_G K$ et que si $H <_G K$, alors $T_{H,V}(K)$ est induit à partir de H, donc le quotient ci-dessus est nul. Par conséquent, $K =_G H$; on peut ainsi supposer que $K = H$, sans perte de généralité. Donc il existe un homomorphisme φ de $k\overline{N}_G(H)$-modules, non nul, de V dans U ; autrement dit, U est un quotient de $\mathrm{Hd}(V)$. Ainsi S est un quotient de $T_{H,\,\mathrm{Hd}(V)}$.

$\square$

Nous avons pu déterminer les extensions entre foncteurs de Mackey simples, indexés par des sous-groupes normaux (non conjugués). Or, a priori, le cas général ne peut pas se restreindre à ce cas, vu que la restriction de foncteurs de Mackey simples n'est pas semi-simple en général. C'est ce problème, entre autres, qui nous a conduit à introduire les foncteurs T, qui eux possèdent la propriété d'être stables par restriction.

Explicitement, nous avons le résultat suivant (dont la preuve est analogue à celle de la proposition 2.2.1) :

Proposition 2.3.11. *Soient H, $L \leq G$ et V un $k\overline{N}_G(H)$-module. Alors*

$$T^G_{H,V} \downarrow^G_L = \bigoplus_{g\in I} T^L_{{}^gH,c_g(V)}$$

où $I = [L\backslash T_G(H,L)/N_G(H)]$.

Preuve : Par le lemme 2.3.2, $T_{H,V} = \left(\mathrm{Inf}^{N_G(H)}_{\overline{N}_G(H)} T_{1,V}\right) \uparrow^G_{N_G(H)}$, donc, en utilisant la formule de Mackey, nous obtenons

$$T^G_{H,V} \downarrow^G_L = T^{N_G(H)}_{H,V} \uparrow^G_{N_G(H)}\downarrow^G_L = \bigoplus_{g\in I} \left(c_g\left(T^{N_G(H)}_{H,V} \downarrow^{N_G(H)}_{N_{L^g}(H)}\right)\right) \uparrow^L_{N_L({}^gH)} .$$

De plus, si $K \leq N_{L^g}(H)$, alors

$$T^{N_G(H)}_{H,V} \downarrow^{N_G(H)}_{N_{L^g}(H)} (K) = T^{N_G(H)}_{H,V}(K) = T^{N_{L^g}(H)}_{H,V}(K)$$

donc $T^{N_G(H)}_{H,V} \downarrow^{N_G(H)}_{N_{L^g}(H)}= T^{N_{L^g}(H)}_{H,V}$. Remarquons au passage que cette propriété n'est pas vérifiée pour les foncteurs de Mackey simples, car, en général, le module V vu comme $\overline{N}_{L^g}(H)$-module n'est plus simple.

De même, si $K \leq N_L({}^gH)$, alors

$$\begin{aligned} c_g\big(T^{N_{L^g}(H)}_{H,V}\big)(K) &= T^{N_{L^g}(H)}_{H,V}(K^g) = I_1^{K^g/H}(V) \\ &= I_1^{K/{}^gH}(c_g(V)) = T^{N_L({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}(K), \end{aligned}$$

autrement dit, $c_g\big(T^{N_{L^g}(H)}_{H,V}\big) = T^{N_L({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}$.

Par conséquent, nous obtenons

$$T^G_{H,V}\downarrow^G_L = \bigoplus_{g\in I} T^{N_L({}^gH)}_{{}^gH,c_g(V)}\uparrow^L_{N_L({}^gH)} = \bigoplus_{g\in I} T^L_{{}^gH,c_g(V)}$$

où la dernière égalité provient de la définition du foncteur $T^L_{{}^gH,c_g(V)}$, pour $g \in I$.

$\square$

Remarque : La proposition précédente peut également être démontrée en utilisant la définition des foncteurs $T_{H,V}$ en termes de G-ensembles (voir la proposition 2.3.3).

Cette proposition nous permet en particulier de déterminer exactement quand la restriction d'un foncteur de Mackey simple est semi-simple. Explicitement, nous avons le résultat suivant, qui complète la proposition 2.2.1 :

Proposition 2.3.12. *Soient H, $L \leq G$, avec $H \leq_G L$, et V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple. Le foncteur de Mackey $S^G_{H,V}\downarrow^G_L$ est semi-simple si et seulement si les modules* $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_L({}^gH)}(c_g(V))$ *sont semi-simples pour tout g appartenant à $I = [L\backslash T_G(H,L)/N_G(H)]$.*

Preuve : Si les modules $\mathrm{Res}^{\overline{N}_G({}^gH)}_{\overline{N}_L({}^gH)}(c_g(V))$ sont semi-simples pour tout élément $g \in I$, alors le foncteur de Mackey $S^G_{H,V}\downarrow^G_L$ est semi-simple (voir la proposition 2.2.1). Supposons donc que $S^G_{H,V}\downarrow^G_L = \bigoplus_i S_{H_i,V_i}$ est une somme directe de foncteurs simples. En particulier, les V_i sont des $k\overline{N}_L(H_i)$-modules simples. Or vu la proposition 2.3.11, $S^G_{H,V}\downarrow^G_L = \bigoplus_{g\in I} T^L_{{}^gH,c_g(V)}$. Par le théorème de Krull-Schmidt (théorème 1.2.11), il s'ensuit que pour tout $g \in I$, il existe des indices i_g tels que $T^L_{{}^gH,c_g(V)} = \bigoplus_{i_g} S_{H_{i_g},V_{i_g}}$. Comme la proposition 2.3.10 nous dit que le socle du foncteur $T^L_{{}^gH,c_g(V)}$ ne contient que des foncteurs de Mackey simples indexés par le sous-groupe ${}^gH$, nous en déduisons que $H_{i_g} = {}^gH$ pour tout indice i_g. En évaluant ces expressions en ${}^gH$, nous obtenons alors que $c_g(V) = \bigoplus_{i_g} V_{i_g}$ pour tout $g \in I$, donc les modules $c_g(V)$ sont des $k\overline{N}_L({}^gH)$-modules semi-simples.

$\square$

Remarques :

i) Comme nous l'avions vu dans la proposition 2.2.1, si $H \not\leq_G L$, alors $S_{H,V}^G \downarrow_L^G = 0$. Par ailleurs, dans cette même proposition, nous avions donné explicitement la décomposition de $S_{H,V}^G \downarrow_L^G$ en somme de foncteurs simples lorsqu'il est semi-simple.

ii) La restriction d'un module semi-simple à un sous-groupe normal est semi-simple (voir le théorème de Clifford, 1.3.7), donc, en particulier, le foncteur $S_{H,V}^G \downarrow_L^G$ est semi-simple si $N_L({}^gH) \trianglelefteq N_G({}^gH)$ pour tout $g \in I$.

Remarquons finalement que les foncteurs T sont également stables par induction :

Proposition 2.3.13. *Soient $H \leq J \leq G$ et V un $k\overline{N}_J(H)$-module. Alors*

$$T_{H,V}^J \uparrow_J^G = T_{H,\,\mathrm{Ind}_{\overline{N}_J(H)}^{\overline{N}_G(H)}(V)}^G.$$

Preuve : Commençons par montrer que pour tout sous-groupe L d'un groupe M et pour tout kM-module A et tout kL-module B, on a

$$I_1^M\left(\mathrm{Hom}_k(A, \mathrm{Ind}_L^M(B))\right) \cong I_1^L\left(\mathrm{Hom}_k(A, B)\right)$$

où I_1^M et I_1^L désignent les traces relatives de 1 à M et L, respectivement. Comme $\mathrm{Hom}_k(A, B) \cong A^\star \otimes_k B$ (voir [Ben91], section 3.1) et que

$$A^\star \otimes_k \mathrm{Ind}_L^M(B) \cong \mathrm{Ind}_L^M(\mathrm{Res}_M^L(A^\star) \otimes_k B)$$

(voir la proposition 1.3.6), il suffit de démontrer que $I_1^M(\mathrm{Ind}_L^M(U)) \cong I_1^L(U)$ pour tout kL-module U. Fixons donc U un kL-module et définissons

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & I_1^L(U) & \to & I_1^M(\mathrm{Ind}_L^M(U)) \\ & x = I_1^L(u) & \mapsto & I_L^M(x) = I_1^M(1 \otimes u) \end{array}$$

L'application φ est surjective, car si $s \otimes u \in \mathrm{Ind}_L^M(U) = \bigoplus_{t \in [M/L]} t \otimes U$, avec $s \in [M/S]$ et $u \in U$, alors

$$I_1^M(s \otimes u) = I_1^M(1 \otimes u) = \varphi(I_1^L(u)).$$

De plus, remarquons que

$$I_1^M(1 \otimes u) = \sum_{m \in M} m \otimes u = \sum_{s \in [M/L]} \sum_{l \in L} s \otimes lu = \sum_{s \in [M/L]} s \otimes (I_1^L(u)).$$

Par conséquent, φ est également injective.

Nous allons utiliser la définition des foncteurs T en termes de G-ensembles (voir la proposition 2.3.3). Soit X un G-ensemble. En utilisant le résultat précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} T_{H,V}\uparrow_J^G(X) &= T_{H,V}^J\left(\mathrm{Res}_J^G(X)\right) = I_1^{\overline{N}_J(H)}\left(\mathrm{Hom}_k(k(X^H),V)\right) \\ &= I_1^{\overline{N}_G(H)}\left(\mathrm{Hom}_k\left(k(X^H),\mathrm{Ind}_{\overline{N}_J(H)}^{\overline{N}_G(H)}(V)\right)\right) \\ &= T^G_{H,\mathrm{Ind}_{\overline{N}_J(H)}^{\overline{N}_G(H)}(V)}(X). \end{aligned}$$

□

Remarques :

i) La proposition précédente peut également être démontrée en utilisant des évaluations en des sous-groupes de G, mais la preuve devient alors plus technique.

ii) Le résultat précédent nous dit en particulier que $S_{H,V}^J\uparrow_J^G$ est isomorphe à $T^G_{H,\mathrm{Ind}_{\overline{N}_J(H)}^{\overline{N}_G(H)}(V)}$ et par conséquent, l'induction d'un foncteur simple $S_{H,V}$ sera semi-simple si le module induit $\mathrm{Ind}_{\overline{N}_J(H)}^{\overline{N}_G(H)}(V)$ est semi-simple.

2.4 Groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs T et entre foncteurs simples

Dans cette section, nous allons faire le lien entre les groupes d'extension entre foncteurs T et ceux entre foncteurs simples. Bien que nous ne donnerons pas de formule explicite pour calculer ces groupes d'extension, nous allons voir quelques conditions qui rendent ces groupes triviaux, ou qui permettent de se restreindre à des sous-groupes propres de notre groupe de départ. Nous donnerons également deux exemples de calculs de ces groupes d'extension, l'un avec le groupe C_{p^2} et l'autre avec le groupe $\mathcal{S}_4$.

Tout d'abord, la proposition 2.3.11 sur la restriction des foncteurs T permet de restreindre le calcul des groupes d'extension au cas où les foncteurs T sont indexés par des sous-groupes normaux (la preuve est analogue à celle de la proposition 2.2.2) :

Proposition 2.4.1. *Soient H, $Q \leq G$, V un $k\overline{N}_G(H)$-module et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module. Posons $J = [N_G(Q)\backslash T_G(H, N_G(Q))/N_G(H)]$ et pour tout $g \in J$, posons $N = N_G(Q)$ et $M_g = N_G({}^gH) \cap N$. Alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(T^G_{Q,W}, T^G_{H,V}\big) \cong \bigoplus_{\substack{g \in J \text{ tels que} \\ Q \leq N_G({}^gH)}} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(T^{M_g}_{Q,W}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\Big).$$

Autrement dit, le calcul des groupes d'extension entre foncteurs T se restreint au cas où ces foncteurs sont indexés par des sous-groupes normaux. De même

$$\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}\big(T^G_{Q,W}, T^G_{H,V}\big) \cong \bigoplus_{\substack{g \in J \text{ tels que} \\ Q \leq N_G({}^gH)}} \mathrm{Hom}_{\mu_k(M_g)}\Big(T^{M_g}_{Q,W}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\Big).$$

Preuve : Nous n'allons établir que l'isomorphisme entre les groupes d'extension, car l'isomorphisme entre les groupes d'homomorphisme est complètement analogue. En utilisant les propriétés d'adjonction entre les restrictions et les inductions de la proposition 1.4.3, la proposition 2.3.11 et le lemme 2.2.3, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(T^G_{Q,W}, T^G_{H,V}\big) &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(T^N_{Q,W}\uparrow^G_N, T^G_{H,V}\big) \\
&\cong \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(T^N_{Q,W}, T^G_{H,V}\downarrow^G_N\big) \\
&\cong \bigoplus_{g\in J} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(T^N_{Q,W}, T^N_{{}^gH,c_g(V)}\big) \\
&\cong \bigoplus_{g\in J} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N)}\big(T^N_{Q,W}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\uparrow^N_{M_g}\big) \\
&\cong \bigoplus_{g\in J} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\big(T^N_{Q,W}\downarrow^N_{M_g}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\big) \\
&\cong \bigoplus_{\substack{g \in J \text{ tels que} \\ Q \leq N_G({}^gH)}} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(T^{M_g}_{Q,W}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\Big)
\end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme provient du fait que $T^N_{Q,W}\downarrow^N_{M_g} = \bigoplus_{h\in I} T^{M_g}_{{}^hQ,c_h(W)}$ avec $I = [M_g\backslash T_N(Q, M_g)/N_N(Q)]$, donc $I = \{1\}$ si $Q \leq N_G({}^gH)$ et $I = \emptyset$ sinon.

□

En particulier, si, dans la proposition précédente, nous prenons des modules V et W qui sont simples, alors nous voyons qu'un groupe d'extension entre foncteurs simples quelconques s'exprime comme somme directe de groupes

d'extension entre foncteurs T indexés par des sous-groupes normaux.
De plus, toujours en appliquant cette proposition au cas des extensions entre foncteurs simples, nous obtenons directement le résultat suivant :

Corollaire 2.4.2. *Soient H, $Q \leq G$, V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module simple. Le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{Q,W}, S^G_{H,V}\big)$ est trivial à moins que $H \leq_G N_G(Q)$ et $Q \leq_G N_G(H)$.*
En particulier, si H est un sous-groupe propre de G qui n'est pas normal, alors $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{G,W}, S^G_{H,V}\big) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\big(S^G_{H,V}, S^G_{G,V}\big) = 0$.

Vu ce qui précède, nous allons donc nous intéresser aux groupes d'extension entre foncteurs T. Pour commencer, nous avons le résultat suivant, analogue au cas des foncteurs simples :

Théorème 2.4.3. *Soient H et Q des sous-groupes de G, V un $k\overline{N}_G(H)$-module et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module. Le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ est trivial, à moins que $H \leq_G Q$ ou que $Q \leq_G H$.*

Preuve : Supposons que $H \nleq_G Q$ et que $Q \nleq_G H$ et montrons que le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ est trivial. Nous pouvons de plus supposer que les sous-groupes H et Q sont normaux dans G, vu la proposition 2.4.1.

Soit $\mathcal{E} : 0 \to T_{H,V} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T_{Q,W} \to 0$ une extension de foncteurs de Mackey. Soit $U = \mathrm{Soc}(V) = \bigoplus_j V_j$, où les V_j sont des modules simples, et $P_U = \bigoplus_j P_{V_j}$ la couverture projective du module U. Remarquons que $M(J) = 0$ si $J < H$. En effet, si $J < H$, $T_{H,V}(J) = 0$ et $T_{Q,W}(J) = 0$ car sinon $Q \leq J < H$ ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, par la proposition 1.4.6, il y a une bijection :

$$\mathrm{Hom}\Big(M, \mathrm{Inf}^G_{G/H} FP_{P_U}\Big) \cong \mathrm{Hom}(M(H), P_U)$$

donnée par l'évaluation en H.

L'application $i(H)|_{V_j} : V_j \to M(H)$ est injective. Comme P_U est un module injectif (voir la proposition 1.2.10), il existe des applications

$$\varphi^j_H : M(H) \to P_{V_j}$$

telles que $\varphi^j_H \circ i(H) = f_j$ où f_j est l'inclusion de V_j dans P_{V_j}.

Posons $N = \mathrm{Inf}^G_{G/H} FP_{P_U}$, et soit $\varphi : M \to N$, l'application correspondant à $\varphi_H = \bigoplus_j \varphi^j_H : M(H) \to P_U$ via la bijection précédente. Montrons alors les deux résultats suivants :

i) l'application $p|_{\mathrm{Ker}(\varphi)} : \mathrm{Ker}(\varphi) \to T_{Q,W}$ est surjective,

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap i(T_{H,V}) = 0$.

Commençons par le point i). Comme $H \not\leq Q$, le module $T_{H,V}(Q)$ est nul et, par suite, l'application $p(Q) : M(Q) \to T_{Q,W}(Q) = W$ est un isomorphisme. De plus, $M(Q)/\mathrm{Ker}(\varphi)(Q)$ s'injecte dans $N(Q)$ qui est nul car Q ne contient pas de conjugué de H, donc $M(Q) = \mathrm{Ker}(\varphi)(Q)$. Nous obtenons ainsi, pour $Q \leq J \leq G$,

$$T_{Q,W}(J) = I_Q^J(W) = I_Q^J(P(Q)(M(Q))) = p(J)(I_Q^J(M(Q)))$$

et comme $I_Q^J(M(Q)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)(J)$, le point i) est démontré.

Pour le point ii), il suffit de vérifier que φ est injective sur le socle de $i(T_{H,V})$. Rappelons tout d'abord que le socle de $T_{H,V}$ est égal à $\bigoplus_j S_{H,V_j}$, par la proposition 2.3.10. Nous en déduisons donc que, pour tout j, $\varphi|_{i(S_{H,V_j})} \neq 0$ car

$$\varphi_H^j i(H)(S_{H,V_j}(H)) = \varphi_H^j i(H)(V_j) = f_j(V_j)$$

qui est non nul, vu que f_j est l'inclusion canonique de V_j dans P_{V_j} ; ainsi $\varphi_H|_{i(H)(S_{H,V_j}(H))} = \bigoplus_j \varphi_H^j|_{i(H)(S_{H,V_j}(H))} \neq 0$. Par conséquent, pour tout j, l'application φ est non nulle sur $i(S_{H,V_j})$, et donc injective par simplicité de S_{H,V_j}, ce qui démontre le point ii).

Les deux résultats précédents nous disent donc que l'application $\tilde{p} = p|_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sur $T_{Q,W}$. En particulier, la suite exacte $0 \to T_{H,V} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T_{Q,W} \to 0$ est scindée via l'application $\tilde{p}^{-1}$, autrement dit l'extension $\mathcal{E}$ est triviale.

□

Il est possible d'affiner ce résultat, aussi bien dans le cas des extensions entre foncteurs simples que dans celui entre foncteurs T, en utilisant la décomposition de l'algèbre de Mackey en blocs, ou en union de blocs, décrite dans la section 1.7 :

Proposition 2.4.4. *Soient H, $Q \leq G$, V un $k\overline{N}_G(H)$-module et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module. S'il existe $g \in G$ tel que ${}^gH \leq Q$ (respectivement tel que ${}^gQ \leq H$), le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ est nul, à moins que $[Q : {}^gH]$ (respectivement $[{}^gQ : H]$) soit une puissance de p.*

Preuve : Si les modules V et W sont simples, autrement dit, si les foncteurs $T_{H,V}$ et $T_{Q,W}$ sont simples, alors il ne peut y avoir d'extension non triviale entre ces foncteurs que s'ils appartiennent tous les deux au même bloc de

$\mu_k(G)$, vu la proposition 1.7.2, donc a fortiori, que s'ils appartiennent tous les deux à $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ pour un sous-groupe p-parfait $J \leq G$ (voir la section 1.7). Par la proposition 1.7.7, cela revient à demander que

$$J = O^p(H) = O^p(Q).$$

Par suite, si ${}^gH \leq Q$, alors $[Q : {}^gH]$ divise $[Q : O^p(Q)]$, donc c'est une puissance de p. Il en va de même si ${}^gQ \leq H$.

Dans le cas général, posons $V = \bigoplus_i V_i$ et $W = \bigoplus_j W_j$, où les modules V_i et W_j sont indécomposables pour tout i, j. Alors, vu la proposition 2.3.9, $T_{H,V} \cong \bigoplus_i T_{H,V_i}$ et $T_{H,W} \cong \bigoplus_j T_{H,W_j}$ où les foncteurs T_{H,V_i} et T_{H,W_j} sont indécomposables pour tout i, j. Comme avant, il ne peut y avoir d'extension non triviale entre T_{H,V_i} et T_{H,W_j}, pour certains i et j, que s'ils appartiennent tous les deux à $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ pour un $J \leq G$. Or $T_{H,V_i} \in \mathrm{Mack}_k(G, J)$ si et seulement si $J = O^p(H)$, vu que T_{H,V_i} est indécomposable et que ses seuls sous-foncteurs simples sont indexés par H (voir la proposition 2.3.10). Il en va de même pour T_{Q,W_j}, ce qui nous permet de conclure comme dans le cas précédent.

$\square$

La décomposition de l'algèbre de Mackey en blocs, donnée dans la section 1.7, nous permet également d'obtenir des conditions sur les modules V et W pour que le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ ne soit pas trivial. Explicitement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.4.5. *Soient H, $Q \leq G$, V un $k\overline{N}_G(H)$-module et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module. Le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ est trivial, à moins qu'il existe des facteurs directs indécomposables, W_0 et V_0, de W et V respectivement, tels $D^G = E^G$, où D^G est le bloc de kG correspondant au bloc D de $kN_G(Q)$ auquel appartient W_0 et où E^G est le bloc de kG correspondant au bloc E de $kN_G(H)$ auquel appartient V_0.*

Preuve : Tout d'abord, par la proposition 2.3.9, si U est un $k\overline{N}_G(J)$-module, alors $U = U_1 \oplus U_2$ si et seulement si $T_{J,U} = T_{J,U_1} \oplus T_{J,U_2}$. Nous pouvons donc nous ramener au cas où les modules W et V sont indécomposables. Par conséquent, si le groupe $\mathrm{Ext}(T_{Q,W}, T_{H,V})$ est non nul, alors il faut que les foncteurs $T_{Q,W}$ et $T_{H,V}$ appartiennent au même bloc de $\mathrm{Mack}_k(G)$ (voir la proposition 1.7.2). En particulier, il existe un sous-groupe p-parfait J tel que $T_{Q,W}$ et $T_{H,V}$ appartiennent à $\mathrm{Mack}_k(G, J)$. Vu l'équivalence de catégories donnée dans le théorème 1.7.8, nous pouvons supposer que $J = 1$, autrement dit, que Q et H sont des p-groupes.

Les sous-foncteurs simples du foncteur indécomposable $T_{Q,W}$ sont de la forme S_{Q,W_i} où W_i est un sous-module simple de W (voir la proposition 2.3.10). Comme W est indécomposable, il appartient à un bloc D de $kN_G(Q)$, auquel correspond un unique bloc de kG, noté D^G (voir la section 1.7). Vu le théorème 1.7.9, à D^G correspond un unique bloc b de $\mathrm{Mack}_k(G,1)$ et de plus, le foncteur simple S_{Q,W_i} appartient à ce bloc b, du fait que W_i appartient au bloc D. Il s'ensuit que le foncteur $T_{Q,W}$ appartient également à b.

De même, le foncteur $T_{H,V}$ appartient à un bloc e de $\mathrm{Mack}_k(G,1)$ où e est le bloc décrit de la manière suivante : le module V appartient à un bloc E de $kN_G(H)$, auquel correspond un bloc E^G de kG. Le bloc e est le bloc correspondant à E^G, via la bijection donnée dans le théorème 1.7.9. Par conséquent, les foncteurs $T_{Q,W}$ et $T_{H,V}$ appartiennent au même bloc, si et seulement si $D^G = E^G$, d'où le résultat.

□

En résumé, le calcul des groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples peut se ramener au calcul des groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs T. Bien que nous n'ayons pas de formule explicite pour déterminer ces groupes, les résultats de cette section nous donnent plusieurs conditions sur les sous-groupes et les modules qui indexent ces foncteurs T pour que les groupes d'extension correspondants soient triviaux, et nous permettent de les calculer explicitement dans certains cas. En effet, si les sous-groupes Q et H sont normaux dans G, alors le théorème 2.1.1 nous permet de calculer $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$. Dans le cas contraire, le groupe $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ s'exprime en fonction des groupes $\mathrm{Ext}\left(T^{M_g}_{Q,W}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(V)}\right)$, où $M_g = N_G({}^gH) \cap N_G(Q)$ pour certains $g \in G$ tels que $Q \leq N_G({}^gH)$ et ${}^gH \leq N_G(Q)$ (voir le théorème 2.4.1), et ces groupes M_g sont des sous-groupes stricts de G. Ainsi, même s'il nous faut alors calculer des extensions entre foncteurs T, plutôt qu'entre foncteurs simples, les propriétés des foncteurs T étudiées dans la section 2.3 et le fait que les groupes M_g peuvent être assez petits nous permettent de déterminer ces groupes d'extension dans certains cas, comme l'illustre l'exemple de $\mathcal{S}_4$ du paragraphe 2.4.2.

Nous allons ainsi terminer cette section par deux exemples. Le premier nous montre qu'il peut exister des extensions non triviales entre foncteurs T indexés par des sous-groupes H et K tels que $H < K$ et que l'indice de H dans K est strictement plus grand que p. Autrement dit, cet exemple permet de voir que le résultat sur les extensions entre foncteurs simples indexés par des sous-groupes normaux (voir théorème 2.1.1) ne se généralise pas aux cas des extensions entre foncteurs T. Le second est le calcul de toutes les extensions entre foncteurs de Mackey simples, indexés par des sous-groupes non conjugués, associés au groupe $\mathcal{S}_4$. Ce dernier exemple nous permet de voir comment les techniques précédentes peuvent être appliquées pour calculer des groupes d'extension.

2.4.1 Exemple du groupe C_{p^2}

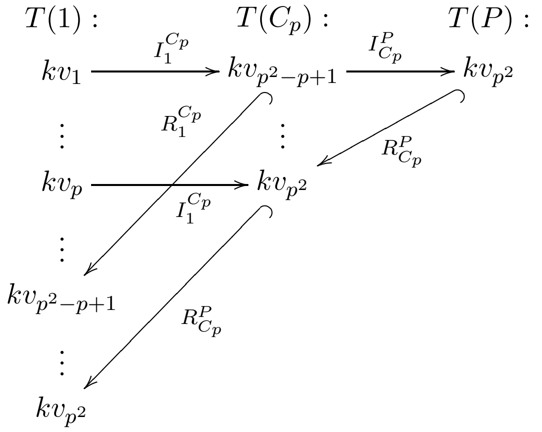
Le but de cet exemple est de construire une extension non triviale entre foncteurs T indexés par des sous-groupes H et K, tels que $H < K$ et que $[K : H] > p$. Donc le théorème 2.1.1 n'est plus valable pour les foncteurs T.

Commençons par considérer le foncteur $T_{1,kP}$, où $P = C_{p^2} = \langle g \rangle$ est le groupe cyclique d'ordre p^2 et k est un corps algébriquement clos de caractéristique p.
Le module kP possède une base $\{v_1, \ldots, v_{p^2}\}$ telle que l'action de g est donnée par $gv_i = v_i + v_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, p^2 - 1$ et par $gv_{p^2} = v_{p^2}$. De plus, pour tout $i = 1, \ldots, p^2$, $\mathrm{Rad}^i(kP) = \mathrm{vect}_k(v_i, \ldots, v_{p^2})$, autrement dit, il est engendré, comme k-espace vectoriel, par $v_i, \ldots, v_{p^2}$. Le module kP possède alors une unique série de composition donnée par :

$$kP \supseteq \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_{p^2}) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{vect}_k(v_{p^2-1}, v_{p^2}) \supseteq kv_{p^2} \supseteq 0$$

dont les quotients successifs sont égaux à $kv_1, kv_2, \ldots, kv_{p^2}$, respectivement, et sont tous isomorphes au module trivial k. Par conséquent, la série de Loewy de kP peut se représenter de la manière suivante : $kP = \begin{matrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_{p^2} \end{matrix}$ (pour plus de détails, voir [Alp86], section 4).

Par définition, $T_{1,kP}(1) = kP$ et $T_{1,kP}(H) = I_1^H(kP)$, si H est égal à C_p ou à P. Plus précisément, nous obtenons $I_1^{C_p}(v_i) = \begin{cases} v_{p^2-p+i} & \text{si } i \leq p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $I_1^P(v_i) = \begin{cases} v_{p^2} & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $T_{1,kP}(P) = kv_{p^2} \cong k$ et $T_{1,kP}(C_p)$ possède la k-base $\{v_{p^2-p+1}, v_{p^2-p+2}, \ldots, v_{p^2}\}$. Comme dans le cas de kP, le module $T_{1,kP}(C_p)$ possède une unique série de composition et sa série de Loewy peut se représenter de la manière suivante : $T_{1,kP}(C_p) = \begin{matrix} kv_{p^2-p+1} \\ kv_{p^2-p+2} \\ \vdots \\ kv_{p^2} \end{matrix}$. Finalement, les restrictions du foncteur $T = T_{1,kP}$ sont des inclusions. Nous pouvons donc représenter T à l'aide du diagramme suivant, où les modules $T(J)$ sont donnés sous forme de couches :



et où la conjugaison par g est donnée par $c_g(v_i) = v_i + v_{i+1}$ pour $i < p^2$ et $c_g(v_{p^2}) = v_{p^2}$.

Définissons ensuite le sous-foncteur N de $T_{1,kP}$ par $N(1) = \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_{p^2})$, $N(C_p) = \mathrm{vect}_k(v_{p^2-p+2}, \ldots, v_{p^2})$ et $N(P) = kv_{p^2}$.
Le foncteur N possède alors un sous-foncteur maximal L, isomorphe à $T_{1,\mathrm{Rad}(kP)}$ où $\mathrm{Rad}(kP) = \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_{p^2})$. En effet, posons $L(P) = 0$ et $L(J) = N(J)$ pour $J < P$. On vérifie alors que L est un sous-foncteur de N isomorphe à $T_{1,\mathrm{Rad}(kP)}$ et, de plus, $N/L \cong S_{P,k}$.

Par ailleurs, N ne possède pas de sous-foncteur isomorphe à $S_{P,k}$, vu que l'application de restriction $R^P_{C_p} : N(P) \to N(C_p)$ n'est pas nulle. Nous avons donc construit une extension non scindée de $S_{P,k}$ par $T_{1,\mathrm{Rad}(kP)}$:

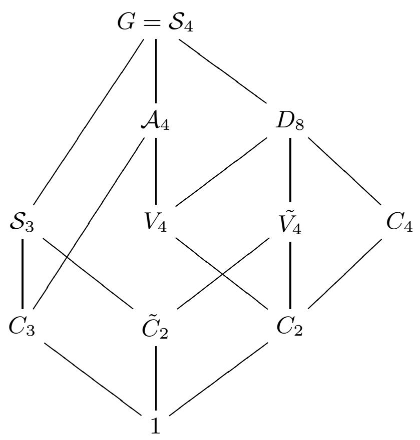
$$0 \to T_{1,\mathrm{Rad}(kP)} \to N \to S_{P,k} \to 0$$

par conséquent $\mathrm{Ext}\left(S_{P,k}, T_{1,\mathrm{Rad}(kP)}\right) \neq 0$ et $[P : 1] = p^2$.

2.4.2 Exemple du groupe $\mathcal{S}_4$

Nous allons utiliser les techniques précédentes afin de calculer tous les groupes d'extension entre les foncteurs de Mackey simples associés au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$, sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique 2, indexés par des sous-groupes distincts (nous traiterons les cas où les sous-groupes sont conjugués plus tard). Cet exemple permet d'illustrer les problèmes auxquels il faut faire face dans le calcul des groupes d'extension.

Les foncteurs de Mackey simples associés à $G = \mathcal{S}_4$ sont de la forme $S_{H,V}$, où H est un sous-groupe de G, à conjugaison près, et V un $k\overline{N}_G(H)$-module simple, à isomorphisme près (voir la section 1.4). Les sous-groupes de G, à conjugaison près, forment le treillis suivant :



où V_4 et $\tilde{V}_4$ sont des groupes de Klein, c'est-à-dire égaux à $C_2 \times C_2$, et plus précisément, V_4 est le sous-groupe normal de G engendré par les éléments $(12)(34)$ et $(13)(24)$. En fait, les seuls sous-groupes normaux propres non triviaux de G sont $\mathcal{A}_4$ et V_4. Les normalisateurs des sous-groupes précédents (toujours à conjugaison près) sont donnés par $N_G(\mathcal{A}_4) = G$, $N_G(D_8) = D_8$, $N_G(\mathcal{S}_3) = \mathcal{S}_3$, $N_G(V_4) = G$, $N_G(\tilde{V}_4) = D_8$, $N_G(C_4) = D_8$, $N_G(C_3) = \mathcal{S}_3$, $N_G(\tilde{C}_2) = \tilde{V}_4$ et $N_G(C_2) = D_8$.

Afin de déterminer les foncteurs de Mackey simples, il faut trouver, pour chaque sous-groupe H de G, à conjugaison près, les $k\overline{N}_G(H)$-modules simples. Or il n'y a que deux tels H pour lesquels il existe un $k\overline{N}_G(H)$-module simple non trivial. Tout d'abord, si $H = V_4$, alors $\overline{N}_G(H) \cong \mathcal{S}_3$ et il existe un $k\mathcal{S}_3$-module simple, S, de dimension 2. Explicitement, $S = \mathrm{vect}_k(u, v)$ et l'action de $\mathcal{S}_3 = \langle (123), (12) \rangle$ est donnée par $(123)u = v$, $(123)v = u + v$, $(12)u = v$ et $(12)v = u$. Ensuite, si $H = 1$, il existe un kG-module simple, V, de dimension 2. Comme V_4 est normal dans G, V_4 agit trivialement sur V, par le théorème de Clifford (voir la remarque qui suit le théorème 1.3.7) et comme $G/V_4 \cong \mathcal{S}_3$, V correspond au $k\mathcal{S}_3$-module simple de dimension 2 précédent. Explicitement, $V = \mathrm{vect}_k(x, y)$, et si $a = (1234)$ et $b = (12)$, alors $G = \langle a, b \rangle$ et l'action de G sur V est alors donnée par $ax = x + y$, $ay = y$, $bx = y$ et $by = x$ (l'élément (1234) agit comme l'élément (13) de $\mathcal{S}_3$).

Par conséquent, la liste complète des foncteurs de Mackey simples pour G est donnée par : $S_{1,k}$, $S_{1,V}$, $S_{\tilde{C}_2,k}$, $S_{C_2,k}$, $S_{C_3,k}$, $S_{\mathcal{S}_3,k}$, $S_{\tilde{V}_4,k}$, $S_{V_4,k}$, $S_{V_4,S}$, $S_{C_4,k}$, $S_{D_8,k}$, $S_{\mathcal{A}_4,k}$ et $S_{G,k}$.

Rappelons encore les résultats suivants :

i) Vu le corollaire 2.1.3,

$$\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V}) \cong \mathrm{Ext}(S_{H,V^\star}, S_{Q,W^\star}).$$

De plus, le module trivial est clairement isomorphe à son dual, et de même le module V (respectivement le module S) défini ci-dessus, est isomorphe à son dual, vu que c'est le seul kG-module (respectivement $k\mathcal{S}_3$-module) simple de dimension 2. Par conséquent, afin de connaître tous les groupes d'extension entre foncteurs de Mackey simples indexés par des sous-groupes non conjugués, il suffit de calculer le groupe $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ pour $Q <_G H$.

ii) Les groupes $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ sont nuls si H et Q ne sont pas inclus l'un dans l'autre, à conjugaison près, et d'indice une puissance de p (voir le théorème 2.1.4 et la proposition 2.4.4).

iii) Le k-espace vectoriel $\mathrm{Ext}(S_{Q,k}, S_{H,k})$ est égal à

$$\begin{cases} \bigoplus_{g\in J} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xH < Q \text{ et } [Q : {}^xH] = p, \\ \bigoplus_{g\in J'} k & \text{s'il existe } x \in G \text{ tel que } {}^xQ < H \text{ et } [H : {}^xQ] = p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où J (respectivement J') est l'ensemble des éléments g appartenant à $[N_G(Q)\backslash T_G(H, N_G(Q))/N_G(H)]$, tels que ${}^gH < Q \leq N_G({}^gH)$ (respectivement tels que $Q < {}^gH$), (voir le théorème 2.2.5).

iv) Si H, $Q \trianglelefteq G$ avec $H \neq Q$, le k-espace vectoriel $\mathrm{Ext}(S_{Q,W}, S_{H,V})$ est isomorphe à

$$\begin{cases} k & \text{si } H < Q,\ [Q : H] = p,\ V^{Q/H} = V \text{ et } V \cong W, \\ k & \text{si } Q < H,\ [H : Q] = p,\ W^{Q/H} = W \text{ et } W \cong V, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(voir le théorème 2.1.1).

Les quatre résultats précédents nous permettent de déterminer les groupes d'extension $\mathrm{Ext}\,(S_{Q,W}, S_{H,V})$ pour tout $Q \neq_G H$, à l'exception de :
$\mathrm{Ext}\left(S_{1,V}, S_{\tilde{C}_2,k}\right)$, $\mathrm{Ext}\,(S_{1,V}, S_{C_2,k})$, $\mathrm{Ext}\left(S_{1,V}, S_{\tilde{V}_4,k}\right)$, $\mathrm{Ext}\,(S_{1,V}, S_{C_4,k})$,

$\mathrm{Ext}\,(S_{1,V}, S_{D_8,k})$, $\mathrm{Ext}\,(S_{C_2,k}, S_{V_4,S})$ et $\mathrm{Ext}\,(S_{V_4,S}, S_{D_8,k})$.

Commençons par traiter le cas de $\mathrm{Ext}\left(S_{1,V}, S_{\tilde{C}_2,k}\right)$. Par la proposition 2.4.1,

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}\left(S^G_{1,V}, S^G_{\tilde{C}_2,k}\right) \cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(\tilde{V}_4)}\left(T^{\tilde{V}_4}_{1,V}, S^{\tilde{V}_4}_{\tilde{C}_2,k}\right).$$

Choisissons ensuite des représentants : $\tilde{C}_2 = \langle b\rangle$, avec $b = (12)$ et $\tilde{V}_4 = \langle b, c\rangle$ où $c = (12)(34)$, des classes de conjugaison de sous-groupes de G. Rappelons que le kG-module V est engendré par les éléments x et y, que l'action de b est donnée par $bx = y$, $by = x$ et que celle de $c = (ba^2)^2$, où $a = (1234)$, est triviale.
Le module V, vu comme $k\tilde{V}_4$-module n'est pas simple. En effet, l'élément c agit trivialement sur V, donc V possède un unique sous-module simple trivial qui est $k(x + y)$, et, par suite, un unique quotient simple trivial. A l'aide de la proposition 2.3.10, nous en déduisons que $\mathrm{Soc}(T_{1,V}) = S_{1,k}$ et $\mathrm{Hd}(T_{1,V}) = S_{1,k}$.
Posons ensuite $C_2' = \langle (34)\rangle$ et $C_2'' = \langle c\rangle$ (autrement dit, $\tilde{C}_2$, C_2' et C_2'' sont les trois sous-groupes d'ordre 2 de $\tilde{V}_4$). Nous avons alors

$$T_{1,V}(C_2') = I_1^{C_2'}(V) = k(x + y) = T_{1,V}(\tilde{C}_2)$$

et $T_{1,V}(C_2'') = 0$, donc $T_{1,V}(\tilde{V}_4) = I^{\tilde{V}_4}_{C_2''}(T_{1,V}(C_2'')) = 0$. Comme $\tilde{V}_4$ est un 2-groupe, les foncteurs de Mackey simples associés à $\tilde{V}_4$ sont de la forme $S_{J,k}$ et leur évaluation en H est égale à k si $H = J$, et elle est nulle sinon, vu la proposition 1.4.12. De plus, par la remarque qui suit cette même proposition, le nombre de fois que $S_{J,k}$ apparaît comme facteur de composition de $T_{1,V}$ est égal à la dimension sur k de $T_{1,V}(J)$. Par conséquent, les facteurs de composition de $T_{1,V}$ sont $S_{C_2',k}$, $S_{\tilde{C}_2,k}$ et deux fois $S_{1,k}$ (qui apparaissent dans la tête et dans le socle respectivement). Comme $\mathrm{Ext}_{\mu_k(\tilde{V}_4)}\left(S_{C_2',k}, S_{\tilde{C}_2,k}\right) = 0$, vu que les sous-groupes C_2' et $\tilde{C}_2$ ne sont pas inclus l'un dans l'autre, il s'ensuit que les couches de la série de Loewy de $T_{1,V}$ sont égales à

$$T_{1,V} : \qquad \begin{matrix} S_{1,k} \\ S_{C_2',k}\ S_{\tilde{C}_2,k} \\ S_{1,k} \end{matrix}$$

D'autre part, comme la tête de $T_{1,V}$ est égale à $S_{1,k}$, la couverture projective de $T_{1,V}$ est égale à $P_{1,k}$ (vu la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15). Vu le théorème 1.5.4, le foncteur $P_{1,k}$ est égal au foncteur $FP_{k\tilde{V}_4}$, donc $P_{1,k}(1) = k\tilde{V}_4$, $P_{1,k}(\tilde{V}_4) = k\omega_{\tilde{V}_4}$, où $\omega_{\tilde{V}_4} = 1 + b + c + bc$, et

$$\begin{aligned} P_{1,k}(\tilde{C}_2) &= \mathrm{vect}_k(1 + b, c + bc), \\ P_{1,k}(C_2') &= \mathrm{vect}_k(1 + bc, b + c), \\ P_{1,k}(C_2'') &= \mathrm{vect}_k(1 + c, b + bc). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc explicitement définir le sous-foncteur L de $P_{1,k}$ par $L(\tilde{V}_4) = L(\tilde{C}_2) = L(C_2') = k\omega_{\tilde{V}_4}$ et $L(C_2'') = L(1) = \mathrm{vect}_k(1+c, b+bc)$. Il est facile de vérifier que L est bien un sous-foncteur, autrement dit, il respecte les restrictions (qui sont des inclusions), les inductions (qui sont des traces relatives) et les conjugaisons (qui sont des multiplications à gauche). De plus, $P_{1,k}/L \cong T_{1,V}$, donc L correspond au noyau de la surjection de $P_{1,k}$ sur $T_{1,V}$; autrement dit, il existe une suite exacte courte de la forme :

$$0 \to L \to P_{1,k} \to T_{1,V} \to 0$$

entre foncteurs de Mackey associés au groupe $\tilde{V}_4$. Vu le théorème 1.2.20, il existe alors une suite exacte :

$$\mathrm{Hom}\big(P_{1,k}, S_{\tilde{C}_2,k}\big) \to \mathrm{Hom}\big(L, S_{\tilde{C}_2,k}\big) \to \mathrm{Ext}\big(T_{1,V}, S_{\tilde{C}_2,k}\big) \to \mathrm{Ext}\big(P_{1,k}, S_{\tilde{C}_2,k}\big)$$

Comme $\mathrm{Ext}\big(P_{1,k}, S_{\tilde{C}_2,k}\big) = 0$ étant donné que $P_{1,k}$ est projectif et, comme $\mathrm{Hom}\big(P_{1,k}, S_{\tilde{C}_2,k}\big) = 0$ (car $P_{1,k}/\mathrm{Rad}(P_{1,k}) = S_{1,k}$, donc $P_{1,k}$ ne possède pas de quotient simple isomorphe à $S_{\tilde{C}_2,k}$), nous obtenons alors un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}\big(T_{1,V}, S_{\tilde{C}_2,k}\big) \cong \mathrm{Hom}\big(L, S_{\tilde{C}_2,k}\big).$$

Pour connaître $\mathrm{Ext}\big(T_{1,V}, S_{\tilde{C}_2,k}\big)$ et par suite $\mathrm{Ext}\left(S^G_{1,V}, S^G_{\tilde{C}_2,k}\right)$, il nous faut donc déterminer combien de fois $S_{\tilde{C}_2,k}$ apparaît dans la tête de L.

Supposons alors que M est un sous-foncteur de L tel que $L/M \cong S_{\tilde{C}_2,k}$. En particulier, $M(\tilde{V}_4) = L(\tilde{V}_4) = k\omega_{\tilde{V}_4}$ et, comme les restrictions sont des inclusions,

$$k\omega_{\tilde{V}_4} = R^{\tilde{V}_4}_{\tilde{C}_2}(M(\tilde{V}_4)) \subseteq M(\tilde{C}_2) \subseteq L(\tilde{C}_2) = k\omega_{\tilde{V}_4}$$

et, par conséquent, $M(\tilde{C}_2) = L(\tilde{C}_2)$, donc $(L/M)(\tilde{C}_2) = 0$; autrement dit L/M ne peut pas être isomorphe à $S_{\tilde{C}_2,k}$. Donc L ne possède pas de quotient isomorphe à $S_{\tilde{C}_2,k}$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}\left(S^G_{1,V}, S^G_{\tilde{C}_2,k}\right) \cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(\tilde{V}_4)}\left(T^{\tilde{V}_4}_{1,V}, S^{\tilde{V}_4}_{\tilde{C}_2,k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(\tilde{V}_4)}\left(L, S_{\tilde{C}_2,k}\right) = 0.$$

Remarquons ensuite que, vu la proposition 2.4.1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{C_2,k}) &\cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{C_2,k}),\\
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{\tilde{V}_4,k}) &\cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{\tilde{V}_4,k}),\\
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{C_4,k}) &\cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{C_4,k}),\\
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{D_8,k}) &\cong \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{D_8,k}).
\end{aligned}$$

Comme avant, choisissons des représentants : $D_8 = \langle a, s\rangle$ avec $a = (1234)$ et $s = (14)(23)$, $C_2 = \langle a^2\rangle$, $\tilde{V}_4 = \langle a^2, as\rangle$ et $C_4 = \langle a\rangle$, des classes de conjugaison de sous-groupes de G. Nous allons calculer ces quatre groupes d'extension de manière analogue.

Le sous-groupe $V_4 = \langle a^2, s\rangle$ agit trivialement sur le kG-module simple V, car V_4 est normal dans G (voir la remarque qui suit le théorème 1.3.7). Donc V possède un unique sous-kD_8-module simple trivial, qui est ky et, par suite, un unique quotient simple. Comme avant, nous en déduisons que $\mathrm{Soc}(T_{1,V}) = S_{1,k}$ et que $\mathrm{Hd}(T_{1,V}) = S_{1,k}$. Rappelons que les sous-groupes de D_8, à conjugaison près, forment le treillis suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & D_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\tilde{V}_4 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & C_4 \arrow[d, dash] & V_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
\tilde{H} \arrow[dr, dash] & C_2 \arrow[d, dash] & H \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{H} = \langle as\rangle$ et $H = \langle s\rangle$. Rappelons également que le foncteur $T_{1,V}$ est engendré par sa valeur en 1. Comme V_4 agit trivialement sur V et que D_8 est un 2-groupe, où 2 est la caractéristique de k, $T_{1,V}(J) = 0$ à moins que $J = 1$, et dans ce cas, $T_{1,V}(1) = V$, ou que $J = \tilde{H}$, et dans ce cas, $T_{1,V}(\tilde{H}) = ky$. Comme avant, vu que D_8 est un 2-groupe, le nombre de fois qu'un foncteur simple $S_{J,k}$ apparaît comme facteur de composition de $T_{1,V}$ est égal à la dimension sur k de $T_{1,V}(J)$ (vu la remarque qui suit la proposition 1.4.12). Par conséquent, les facteurs de composition de $T_{1,V}$ sont $S_{\tilde{H},k}$ et deux fois $S_{1,k}$ (qui apparaissent dans la tête et dans le socle de $T_{1,V}$). Il s'ensuit que les couches de la série de Loewy de $T_{1,V}$ sont égales à :

$$T_{1,V} : \quad \begin{matrix} S_{1,k} \\ S_{\tilde{H},k} \\ S_{1,k} \end{matrix}$$

Comme auparavant, la couverture projective de $T_{1,V}$ est égale à $P_{1,k}$, pour le groupe D_8. Vu le théorème 1.5.4, $P_{1,k} = FP_{kD_8}$ et nous pouvons alors définir le sous-foncteur K de $P_{1,k}$ par

$$K(1) = k(1+s) \oplus k(a+a^3s) \oplus k(a^3+as) \oplus k(1+a^2) \oplus k(a+a^3) \oplus k(s+a^2s)$$

$$K(\tilde{H}) = k(1+s+a^3+a^3s) \oplus k(1+a^2+as+a^3s) \oplus k(a+a^3+s+a^2s)$$

et $K(J) = P_{1,k}(J)$ pour tous les autres sous-groupes J de D_8. Avec cette définition, K est bien un sous-foncteur de $P_{1,k}$ tel que $P_{1,k}/K \cong T_{1,V}$; autrement dit, K est le noyau de la surjection de $P_{1,k}$ sur $T_{1,V}$. Il existe donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}\big(T_{1,V}, S\big) \cong \mathrm{Hom}\big(K, S\big)$$

pour $S = S_{C_2,k}$, $S_{\tilde{V}_4,k}$, $S_{C_4,k}$ et $S_{D_8,k}$. Or la tête de K est égale à $S_{H,k} \oplus S_{C_2,k}$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{C_2,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{C_2,k}) & \cong & k, \\ \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{\tilde{V}_4,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{\tilde{V}_4,k}) & = & 0, \\ \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{C_4,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{C_4,k}) & = & 0, \\ \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{1,V}, S_{D_8,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{1,V}, S_{D_8,k}) & = & 0. \end{array}$$

Il nous reste finalement à étudier les deux groupes suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{C_2,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{V_4,S}, S_{C_2,k}), \\ \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{D_8,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{V_4,S}, S_{D_8,k}) \end{array}$$

où les isomorphismes proviennent de la proposition 2.4.1.

Rappelons que $N_G(V_4)/V_4 = \mathcal{S}_4/V_4 \cong \mathcal{S}_3$ et que S est le $k\mathcal{S}_3$-module simple de dimension 2. Explicitement, si $\mathcal{S}_3 = \langle (123), b = (12) \rangle$, alors $S = \mathrm{vect}_k(u, v)$ comme k-espace vectoriel ; et l'action de $\mathcal{S}_3$ sur S est donnée par $(123)u = v$, $(123)v = u + v$, $bu = v$ et $bv = u$. Le module S, vu cette fois comme kD_8/V_4-module, possède un unique sous-module simple trivial et, par suite, un unique quotient simple. Par la proposition 2.3.10, il s'ensuit que $\mathrm{Soc}(T_{V_4,S}) = S_{V_4,k}$ et que $\mathrm{Hd}(T_{V_4,S}) = S_{V_4,k}$. De plus, $T_{V_4,S}(J) = 0$ pour tous les sous-groupes J ne contenant pas V_4, $T_{V_4,S}(V_4) = S$ et $T_{V_4,S}(D_8) = k(u+v)$. Par suite, les facteurs de composition de $T_{V_4,S}$ sont $S_{D_8,k}$ et deux fois $S_{V_4,k}$, qui apparaissent dans la tête et dans le socle de $T_{V_4,S}$, en utilisant, comme avant, la remarque qui suit la proposition 1.4.12. Les couches de la série de Loewy de $T_{V_4,S}$ sont donc égales à :

$$T_{V_4,S} : \quad \begin{array}{c} S_{V_4,k} \\ S_{D_8,k} \\ S_{V_4,k} \end{array}$$

La couverture projective de $T_{V_4,S}$ est égale à $P_{V_4,k}$ (voir la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15). Cette fois, nous allons utiliser la remarque qui suit le théorème 1.5.2, qui nous dit que $P_{V_4,k} = B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8}$. Nous obtenons que $B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8} (D_8) = B(V_4)$ et que $B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8} (V_4) = \bigoplus_{g \in [D_8/V_4]} (B(V_4))_g$, à l'aide des formules de l'induction d'un foncteur de Mackey induit, données à la page 30. Définissons alors le sous-foncteur N de $B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8}$ par

$$N(D_8) = \overline{B}(V_4) := \bigoplus_{J<V_4} kV_4/J\,, \quad N(V_4) = \bigoplus_{g\in[D_8/V_4]} (\overline{B}(V_4))_g$$

et $N(J) = B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8} (J)$ pour tous les autres sous-groupes J de D_8.
De nouveau, on vérifie que N est bien un sous-foncteur de $B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8}$ et que $B^{V_4} \uparrow_{V_4}^{D_8} /N \cong T_{V_4,S}$. Donc N est le noyau de la projection de $P_{V_4,k}$ sur $T_{V_4,S}$; il existe ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}(T_{V_4,S}, T) \cong \mathrm{Hom}(N, T)$$

pour $T = S_{C_2,k}$ et $S_{D_8,k}$. De plus, la tête de N est égale à $S_{C_2,k} \oplus S_{H,k} \oplus S_{V_4,k}$ et, par conséquent,

$$\begin{array}{rcccl}
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{C_2,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{V_4,S}, S_{C_2,k}) & \cong & k, \\
\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{D_8,k}) & \cong & \mathrm{Ext}_{\mu_k(D_8)}(T_{V_4,S}, S_{D_8,k}) & = & 0.
\end{array}$$

ce qui termine le calcul des groupes d'extension entre foncteurs simples, associés à $\mathcal{S}_4$, indexés par des sous-groupes non conjugués. Le cas des extensions entre foncteurs simples indexés par des sous-groupes conjugués sera traité dans la section 2.5.1 et, nous donnerons à ce moment-là, la liste complète des résultats de ces groupes d'extension.

Cet exemple nous montre que, même dans le cas d'un groupe G assez petit, il est plutôt difficile de calculer les groupes d'extension. Toutefois, les résultats précédents nous permettent, dans ce cas, de nous restreindre à des sous-groupes de G et, en l'occurrence, à des p-groupes.

2.5 Groupes d'extension entre foncteurs T indexés par le même sous-groupe

Nous allons à présent étudier le cas des groupes d'extensions entre deux foncteurs T, qui sont indexés par le même sous-groupe, dans le but d'avoir des informations sur les groupes d'extension entre deux foncteurs simples également indexés par le même sous-groupe. Nous allons montrer en particulier, que dans le cas où G est un p-groupe ou possède un p-sous-groupe de Sylow normal, ces groupes d'extension entre foncteurs de Mackey simples sont isomorphes à des groupes d'extension entre modules sur une algèbre de groupe, du moins dans le cas où p est impair. Puis nous terminerons l'exemple du groupe $\mathcal{S}_4$, en calculant tous les groupes d'extension qui nous manquent.

Fixons un groupe fini G, un sous-groupe H de G et des $k\overline{N}_G(H)$-modules V et W. Nous allons donc nous intéresser au groupe

$$\mathrm{Ext}(T_{H,V}, T_{H,W}) = \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}).$$

La première remarque à faire est que nous pouvons nous restreindre au cas où le sous-groupe H est normal. En effet, vu la proposition 2.4.1, nous savons que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T^G_{H,V}, T^G_{H,W}) = \bigoplus_{\substack{g \in J \text{ tels que} \\ H \leq N_G({}^gH)}} \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(T^{M_g}_{H,V}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(W)}\Big)$$

où $J = [N_G(H)\backslash T_G(H, N_G(H))/N_G(H)]$ et pour tout $g \in J$, le sous-groupe M_g est égal à $N_G({}^gH) \cap N_G(H)$.
De plus, vu le théorème 2.4.3, le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(M_g)}\Big(T^{M_g}_{H,V}, T^{M_g}_{{}^gH,c_g(W)}\Big)$ est trivial à moins que $H \leq_{M_g} {}^gH$ ou ${}^gH \leq_{M_g} H$. Or, comme $H \trianglelefteq M_g$, nous obtenons que le groupe ci-dessus est non nul seulement si $g \in N_G(H)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T^G_{H,V}, T^G_{H,W}) = \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N_G(H))}\Big(T^{N_G(H)}_{H,V}, T^{N_G(H)}_{H,W}\Big).$$

Nous pouvons donc en général supposer que le sous-groupe H est normal dans G.

Afin d'étudier le groupe $\mathrm{Ext}(T_{H,V}, T_{H,W})$, nous allons considérer le morphisme d'évaluation en H :

$$\eta_H : \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \to \mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W).$$

Rappelons que dans le cas où V et W sont simples, le morphisme précédent est injectif, vu le théorème 2.1.4. Il en va de même dans le cas général, mais afin de démontrer cela, nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 2.5.1. *Soient H et Q des sous-groupes de G, V un $k\overline{N}_G(H)$-module et W un $k\overline{N}_G(Q)$-module. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{Q,W}, T_{H,V}) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{k\overline{N}_G(H)}(W, V) & si\ Q =_G H \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En particulier, si $Q = H$, l'isomorphisme est donné par le morphisme

$$\mu_H : \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{H,W}, T_{H,V}) \to \mathrm{Hom}_{kG/H}(W, V)$$

d'évaluation en H.

Preuve : Supposons que les sous-groupes H et Q ne sont pas conjugués. Vu la proposition 2.4.1, nous pouvons supposer que les H et Q sont normaux dans G.
Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{Q,W}, T_{H,V})$. Si Q n'est pas contenu dans H, alors $T_{Q,W}(H) = 0$ donc $\varphi(H) = 0$. Par suite, pour tout sous-groupe J de G contenant H,

$$\varphi(J)\left(I_H^J(v)\right) = I_H^J(\varphi(H)(v)) = 0$$

pour tout $v \in V$, donc $\varphi = 0$; autrement dit $\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{Q,W}, T_{H,V}) = 0$.
Si $Q < H$, alors $T_{H,V}(Q) = 0$. Par ailleurs, φ induit un isomorphisme entre $T_{H,V}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ qui est un sous-foncteur de $T_{Q,W}$. Donc si $\mathrm{Im}(\varphi) \neq 0$, $\mathrm{Soc}(\mathrm{Im}(\varphi)) = \bigoplus\limits_i S_{Q,W_i}$ vu la proposition 2.3.10. Or comme $T_{H,V}(Q) = 0$, le foncteur $T_{H,V}$ ne peut pas posséder de facteurs de composition isomorphes à $S_{Q,W}$, donc l'image de φ doit être nulle. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{Q,W}, T_{H,V}) = 0$ si $Q \neq H$.

Supposons ensuite que $Q = H$ et considérons le morphisme d'évaluation en H :

$$\mu_H : \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \to \mathrm{Hom}_{kN_G(H)/H}(V, W).$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de remarquer que, vu la proposition 2.3.7, le foncteur $\mathcal{T}_H$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{kN_G(H)/H}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$$

dont l'inverse est exactement μ_H, comme on le voit dans la preuve de la même proposition.

□

Proposition 2.5.2. *Le morphisme η_H est injectif.*

Preuve : Vu les remarques précédentes, il suffit de démontrer le résultat dans le cas où H est normal dans G.

Soit

$$\mathcal{E} : 0 \to T_{H,W} \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} T_{H,V} \to 0$$

une extension de foncteurs de Mackey, telle que l'extension de modules $0 \to W \xrightarrow{i(H)} N(H) \xrightarrow{p(H)} V \to 0$ est scindée. Il existe donc $\sigma : N(H) \to W$ tel que $\sigma i(H) = id$. Montrons alors que l'extension $\mathcal{E}$ est triviale.

Comme $N(J) = 0$ si $H \not\leq_G J$, il y a une bijection entre $\mathrm{Hom}(N(H), W)$ et $\mathrm{Hom}\big(N, \mathrm{Inf}_{G/H}^G FP_W\big)$, en utilisant la proposition 1.4.6. En particulier, à σ correspond le morphisme de foncteurs de Mackey $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}(K))_K$ qui est nul si H n'est pas un sous-groupe de K et qui est donné par :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma}(K) : & N(K) & \to & FP_W(K/H) \\ & a & \mapsto & \sigma R_H^K(a) \end{array}$$

si $H \leq K$. En particulier, si $K = H$, alors $\tilde{\sigma}(H) = \sigma$.

Il faut donc vérifier que l'image de $\tilde{\sigma}$ est contenue dans $T_{H,W}$ et que $\tilde{\sigma} i = id$.

Pour le premier point, rappelons que $T_{H,W}$ est le sous-foncteur du foncteur

$$M = \mathrm{Inf}_{G/H}^G FP_W$$

engendré par $T_{H,W}(H) = M(H) = W$. Il nous suffit donc de vérifier que, pour tout sous-groupe K, l'image de $\tilde{\sigma}(K)$ est induite à partir de $\tilde{\sigma}(H)$.

Fixons K tel que $H \leq K \leq G$. Comme i et p sont des morphismes de foncteurs de Mackey, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_{H,W}(H) \arrow[r, "i_H"] \arrow[d, "\alpha_1"] & N(H) \arrow[r, "p_H"] \arrow[d, "\beta"] & T_{H,V}(H) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_{H,W}(K) \arrow[r, "i_K"] & N(K) \arrow[r, "p_K"] & T_{H,V}(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où α_1, α_2 et β sont égales à I_H^K.

Comme $T_{H,W}(K) = I_H^K(W)$ et $T_{H,W}(H) = W$, α_1 est surjective et, de même, α_2 est surjective. Par le lemme des cinq, β est également surjective.
Fixons $a \in N(K)$; il existe alors $b \in N(H)$ tel que $a = I_H^K(b)$. Par suite,

$$\tilde{\sigma}(K)(a) = \tilde{\sigma}(K) I_H^K(b) = I_H^K \tilde{\sigma}(H)(b)$$

donc $\tilde{\sigma}(K)(N(K))$ est bien induite à partir de $\tilde{\sigma}(H)(N(H))$.

Il nous reste donc à démontrer que $\tilde{\sigma} i = id$. Pour cela, rappelons que l'application d'évaluation en H,

$$\mu_H : \mathrm{Hom}_{\mu_k(G)}(T_{H,W}, T_{H,W}) \to \mathrm{Hom}_{kG/H}(W, W)$$

est bijective (voir la proposition 2.5.1). Par conséquent, comme

$$\mu_H(\tilde{\sigma}i) = \tilde{\sigma}(H)i(H) = \sigma i(H) = id_H = \mu_H(id_{T_{H,W}}),$$

nous obtenons que $\tilde{\sigma}i = id$.

$\square$

Vu la proposition précédente, nous pouvons identifier $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$ à un sous-groupe de $\mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$. La question est donc de déterminer si ces deux groupes peuvent être égaux. Avant d'aller plus loin, nous allons traiter un exemple pour comprendre ce qui peut arriver.

Exemple : Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p, G le groupe cyclique d'ordre p, engendré par un élément g, et $H = 1$. Soient $V = W = k$ les kG-modules triviaux. Considérons le morphisme d'évaluation en 1 :

$$\eta_1 : \mathrm{Ext}(T_{1,V}, T_{1,W}) \to \mathrm{Ext}(V, W).$$

La question est de savoir si η_1 est surjectif. Soit donc

$$\xi : \ 0 \to W \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} V \to 0$$

une extension non triviale de V par W.

Supposons tout d'abord que p est impair et considérons la suite d'applications

$$\zeta : \ 0 \to S_{1,W} \xrightarrow{i} T_{1,E} \xrightarrow{q} S_{1,V} \to 0.$$

Rappelons que l'évaluation de $S_{1,V}$ (respectivement de $S_{1,W}$) en 1 est égale à V (respectivement à W), et que leur évaluation en G est nulle (voir la proposition 1.4.12).
Intéressons-nous ensuite au foncteur $T_{1,E}$. Par définition, $T_{1,E}(1) = E$ et $T_{1,E}(G) = I_1^G(E)$. Comme $E/W \cong V$ qui est le module trivial, $g\overline{x} = \overline{x}$ pour tout $\overline{x} \in E/W$, et par suite, si $x \in E$, alors $gx = x + w$ pour un $w \in W$. Par conséquent,

$$I_1^G(x) = \sum_{i=0}^{p-1} g^i x = px + \frac{p(p-1)}{2} w = 0$$

donc $T_{1,E}(G) = 0$. L'application i doit donc satisfaire $i(1) = j$ et $i(G) = 0$ et, de même, $q(1) = p$ et $q(G) = 0$. Les applications i et q sont des morphismes de foncteurs de Mackey. De plus, la suite ζ est une suite exacte, vu qu'elle est égale à ξ en 1 et qu'elle est nulle en G. Par conséquent, ζ est une préimage de ξ par l'application η_1, donc η_1 est surjective dans ce cas.

Supposons ensuite que $p = 2$ et qu'il existe une suite exacte courte de foncteurs de Mackey :

$$0 \to S_{1,W} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} S_{1,V} \to 0.$$

Comme $S_{1,W}(G) = S_{1,V}(G) = 0$, on a aussi $M(G) = 0$. D'autre part, vu que l'extension ξ n'est pas scindée, le module E n'est pas trivial, donc il existe $x \in E$ tel que $gx \neq x$. Par ailleurs, $g\overline{y} = \overline{y}$ pour tout $\overline{y} \in E/W$, car $E/W \cong V$ qui est trivial. Par conséquent, il existe $w \in W$, $w \neq 0$, tel que $gx = x + w$. Il s'ensuit que $I_1^G(x) = x + gx = w \neq 0$, donc $M(G) \neq 0$ ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi $\mathrm{Ext}(T_{1,V}, T_{1,W}) = 0$ dans ce cas. Par suite, l'application η_1 n'est pas surjective, vu que $\mathrm{Ext}(V, W) \neq 0$. En effet, il existe bien une extension ξ non triviale, en prenant $E = kC_2$.

La question de la surjectivité de l'application η_H est un problème difficile qui va dépendre de plusieurs paramètres, et principalement de la structure des modules V et W. Nous allons étudier certaines conditions pour que η_H soit surjective, puis nous allons donner deux exemples dans lesquels η_H est surjective, donc bijective. La première étape est de comprendre quels peuvent être les foncteurs de Mackey et les morphismes intervenant dans la préimage d'une extension donnée :

Proposition 2.5.3. *Soit $\mathcal{E} : 0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ une extension de $k\overline{N}_G(H)$-modules. Si $\mathcal{F} : 0 \to T_{H,W} \xrightarrow{j} N \xrightarrow{p} T_{H,V} \to 0$ est une extension de foncteurs de Mackey dont l'évaluation en H donne $\mathcal{E}$, alors $N \cong T_{H,U}$.*

Preuve : Si $U = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc $U \neq 0$. Si une telle extension $\mathcal{F}$ existe, alors H est un sous-groupe minimal de G tel que $N(H) \neq 0$ et, plus précisément, $N(H) = U$. Nous allons appliquer alors le critère donné par la proposition 2.3.4 pour démontrer que $N \cong T_{H,U}$. Soit χ l'ensemble des sous-groupes conjugués à un sous-groupe de H. Il faut vérifier que $\mathrm{Ker}(R_\chi^N) = 0$ et que $\mathrm{Im}(I_\chi^N) = N$, où $\mathrm{Ker}(R_\chi^N)(K) = \bigcap_{X \in \chi,\, X \leq K} \mathrm{Ker}(R_X^K)$ et $\mathrm{Im}(I_\chi^N)(K) = \sum_{X \in \chi,\, X \leq K} \mathrm{Im}(I_X^K)$.

Fixons $K \leq G$ tel qu'il existe $g \in G$ avec ${}^gH \leq K$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{H,W}(K) \arrow[r, "j(K)"] \arrow[d, shift left, "R_1"] & N(K) \arrow[r, "p(K)"] \arrow[d, shift left, "R_2"] & T_{H,V}(K) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "R_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sum\limits_{g \in T_G(H,K)} T_{H,W}({}^gH) \arrow[r, "j({}^gH)"] \arrow[u, shift left, "I_1"] & \sum\limits_{g \in T_G(H,K)} N({}^gH) \arrow[r, "p({}^gH)"] \arrow[u, shift left, "I_2"] & \sum\limits_{g \in T_G(H,K)} T_{H,V}({}^gH) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "I_3"] & 0
\end{tikzcd}$$

où les applications I_i sont données par $\sum\limits_{g\in T_G(H,K)} I^K_{{}^gH}$ et les applications R_i par $\sum\limits_{g\in T_G(H,K)} R^K_{{}^gH}$, pour $i = 1, 2, 3$.

En particulier, en utilisant les propriétés des foncteurs $T_{H,W}$ et $T_{H,V}$, nous obtenons que $\mathrm{Im}(I_1) = \mathrm{Im}\big(I_\chi^{T_{H,W}}\big)(K) = T_{H,W}(K)$, donc I_1 est surjective et de même, I_3 est surjective. Par le lemme des cinq, l'application I_2 est également surjective, et par suite, $\mathrm{Im}(I_\chi^N) = N$.
De même, $\mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}\big(R_\chi^{T_{H,W}}\big) = 0$, donc R_1 est injective. Comme R_3 est également injective, nous obtenons que R_2 l'est aussi, toujours par le lemme des cinq, ce qui revient à dire que $\mathrm{Ker}(R_\chi^N) = 0$.
La proposition 2.3.4 nous permet alors de conclure.

□

La surjectivité de l'application

$$\eta_H : \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \to \mathrm{Ext}^1_{kG/H}(V, W)$$

d'évaluation en H, où $H \trianglelefteq G$, est donc équivalente au problème suivant : si $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ est une suite exacte de kG/H-modules, existe-t-il une suite exacte de foncteurs de Mackey du type :

$$0 \to T_{H,W} \xrightarrow{j} T_{H,U} \xrightarrow{p} T_{H,V} \to 0 \quad ?$$

Commençons donc par comprendre quelles peuvent être les applications j et p. Dans ce but, fixons un sous-groupe K de G contenant H. Alors l'application $j(K) : I_H^K(W) \to I_H^K(U)$ doit satisfaire

$$j(K)(I_H^K(w)) = I_H^K j(H)(w) = I_H^K i(w) = i(I_H^K(w))$$

pour tout $w \in W$, où la dernière égalité provient du fait que l'application i est kG/H-linéaire. Donc $j(K)$ coïncide avec i et elle est bien définie, vu les égalités ci-dessus. De même, nous obtenons que

$$p(K)(I_H^K(u)) = I_H^K p(H)(u) = I_H^K q(u) = q(I_H^K(u))$$

donc $p(K)$ coïncide avec q.

Nous n'avons donc aucune liberté de choix pour les applications j et p. De plus, vu leur définition, il est facile de vérifier que j est injective, p est surjective et $\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(p)$. Le seul point qui pose problème est de déterminer quand $\mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Im}(j)$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(p(K))$, alors en particulier, $q(x) = 0$ et, comme $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(i)$, il s'ensuit que $x \in I_H^K(U) \cap W$, pour tout $H \leq K \leq G$, quitte à remplacer W par $i(W)$, vu que i est injective. Nous pouvons également identifier $I_H^K(W)$ et $i(I_H^K(W))$, pour tout $H \leq K \leq G$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Im}(j)$ si et seulement si $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$ pour tout $H \leq K \leq G$. Comme l'inclusion $I_H^K(W) \subseteq I_H^K(U) \cap W$ est toujours vérifiée, l'égalité sera en particulier vraie si $I_H^K(U) = 0$.

Remarquons encore que pour tout kG/H-module E, $I_H^K(E) = I_{H/H}^{K/H}(E)$, puisque si $x \in E$, alors

$$I_H^K(x) = \sum_{g \in [K/H]} gx = \sum_{g \in [(K/H)/(H/H)]} gx = I_{H/H}^{K/H}(x).$$

Pour savoir si la condition $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$ est vérifiée, pour tout sous-groupe K de G contenant H, il nous suffira donc de déterminer si l'égalité $I_1^{\overline{K}}(U) \cap W = I_1^{\overline{K}}(W)$ est vraie pour tout sous-groupe $\overline{K}$ du groupe G/H ; autrement dit, nous pourrons nous restreindre, si nécessaire, au cas où le groupe H est trivial.

Proposition 2.5.4. *Soient H un sous-groupe de G, et V, W des $k\overline{N}_G(H)$-modules. Le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$ est isomorphe au sous-groupe des extensions U de W par V telles que $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$ pour tout sous-groupe $H \leq K \leq N_G(H)$.*

Preuve : Rappelons tout d'abord que, vu la proposition 2.4.1 et les remarques du début de cette section,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}\left(T^G_{H,V}, T^G_{H,W}\right) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N_G(H))}\left(T^{N_G(H)}_{H,V}, T^{N_G(H)}_{H,W}\right).$$

Vu la proposition 2.5.2, le morphisme

$$\eta_H : \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N_G(H))}(T_{H,V}, T_{H,W}) \to \mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$$

est injectif et, par ce qui précède, il est surjectif si et seulement si pour tout sous-groupe K de $N_G(H)$ et pour toute extension $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ de $kN_G(H)/H$-modules, $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$. Par conséquent η_H est un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$ sur le sous-groupe des extensions U de $\mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$ telles que $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$ pour tout sous-groupe $H \leq K \leq G$.

$\square$

Pour déterminer quand η_H est un isomorphisme, il nous faut donc comprendre quand la trace relative I_H^K est exacte et ceci pour chaque sous-groupe K avec $H \leq K \leq N_G(H)$. Ce problème est difficile à résoudre globalement, toutefois, dans certains cas, il est possible d'avoir des résultats plus précis. Par exemple dans le cas où K/H est d'ordre premier à p ou, au contraire, dans le cas où K/H est un p-groupe.

Intéressons-nous tout d'abord au cas où K/H est d'ordre premier à p. Si V est un kG-module et que J est un sous-groupe d'ordre premier à p, alors $I_1^J(V) = V^J$, où V^J est l'ensemble des points J-fixes de V. En effet, l'application $I_1^J : V \to V^J$ est surjective vu que si $x \in V^J$, alors $x = I_1^J\left(\frac{1}{|J|} \cdot x\right)$.

Corollaire 2.5.5. *Soit H un p-sous-groupe de Sylow de G. Alors pour tous $k\overline{N}_G(H)$-modules V et W,*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \cong \mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W) = 0.$$

Preuve : Soient $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ une extension de $k\overline{N}_G(H)$-modules et K/H un sous-groupe de $N_G(H)/H$. Comme p ne divise pas $|K/H|$,

$$I_1^{K/H}(U) \cap W = U^{K/H} \cap W = W^{K/H} = I_1^{K/H}(W)$$

qui est égal à $I_H^K(W)$ vu les remarques précédentes ; donc la proposition 2.5.4 nous fournit l'isomorphisme entre $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$ et $\mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$. Or ce dernier groupe est trivial, car $\overline{N}_G(H)$ est d'ordre premier à p et, par conséquent, l'algèbre $k\overline{N}_G(H)$ est semi-simple.

□

Dans le cas des p-groupes, il existe une caractérisation des situations où l'image de la trace relative est nulle :

Lemme 2.5.6. *Soit P un p-groupe et U un kP-module. Alors $I_1^P(U) = 0$ si et seulement si U est sans facteur libre.*

Preuve : Supposons que $U = F \oplus V$ où $F \cong (kP)^m$ pour un entier $m \geq 1$. Nous avons alors $I_1^P(U) = I_1^P(F) \oplus I_1^P(V)$ et

$$I_1^P(F) \cong I_1^P((kP)^m) = (k\omega)^m \neq 0$$

où $\omega = \sum_{g \in P} g$. Donc $I_1^P(U) \neq 0$.

Réciproquement, si $I_1^P(U) \neq 0$, il possède une k-base $\{I_1^P(v_1), \ldots, I_1^P(v_r)\}$.

Considérons l'application $\varphi : (kP)^r \to U$ définie par $\varphi(e_i) = v_i$. Cette application est injective car le socle de la $i^{\text{ème}}$ copie de kP est égal à $k(I_1^P(e_i))$ et $\varphi(I_1^P(e_i)) = I_1^P(v_i) \neq 0$, donc $\varphi|_{\mathrm{Soc}((kP)^r)}$ est injective. De plus, le module $(kP)^r$ est injectif (voir la proposition 1.2.10) et, par conséquent, il est facteur direct de U, d'où le résultat.

$\square$

Nous pouvons alors appliquer ce résultat pour obtenir des conditions sur l'exactitude de la trace relative associée à un p-sous-groupe de G :

Proposition 2.5.7. *Soient* $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ *une suite exacte de* kG*-modules et* P *un* p*-sous-groupe de* G*. Si* $W = L \oplus \tilde{W}$ *où* L *est un facteur libre maximal de* W *vu comme* kP*-module et si* $V = L' \oplus \tilde{V}$ *où* L' *est un facteur libre maximal de* V *vu comme* kP*-module, alors* $U \cong L' \oplus L \oplus \tilde{U}$ *comme* kP*-module et* $I_1^P(U) \cap W = I_1^P(W)$ *si et seulement si* $\tilde{U}$*, vu comme* kP*-module, ne possède pas de facteur libre.*

Preuve : Le kP-module L' est libre donc projectif ; il existe donc un homomorphisme $f : L' \to U$ telle que $qf = i_1$, où i_1 est l'inclusion de L' dans V :

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "i_1"] \\ U \arrow[r, two heads, "q"'] & V \end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que la composition : $L' \xrightarrow{f} U \xrightarrow{p_1 q} L'$ est l'identité, vu que $p_1 q f = p_1 i_1 = \mathrm{id}$, où $p_1 : V = L' \oplus \tilde{V} \to L'$ est la projection sur le premier facteur. Par conséquent, l'application $\theta : L' \oplus K \to U$, où $K = \mathrm{Ker}(p_1 q)$, donnée par $\theta(l' + x) = f(l') + x$ est un isomorphisme de kP-modules, ce qui nous permet d'identifier U et $L' \oplus K$. Via cette identification, l'application $q : L' \oplus K \to L' \oplus \tilde{V}$ est alors donnée par $q(l' + x) = qf(l') + \tilde{q}(x) = l' + \tilde{q}(x)$, où $\tilde{q} = q|_K$, et $\tilde{q}(x) \in \tilde{V}$ puisque $\tilde{q}(x) = p_1\tilde{q}(x) + p_2\tilde{q}(x) = p_2\tilde{q}(x)$; autrement dit $q = \mathrm{id} \oplus \tilde{q}$.

L'image de l'application i est contenue dans K car $p_1 q i = 0$. Comme le kP-module L est libre donc injectif, il existe un homomorphisme $g : K \to L$ tel que $gi = q_1$ où q_1 est la projection de W sur L :

$$\begin{tikzcd} L & \\ W \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, tail, "i"'] & K \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

De nouveau, la composition $L \xrightarrow{ij_1} K \xrightarrow{g} L$, où j_1 est l'inclusion de L dans W, est l'identité, vu que $gij_1 = q_1 j_1 = \mathrm{id}$. Par conséquent, l'application $\nu : K \to L \oplus \tilde{U}$, où $\tilde{U} = \mathrm{Ker}(g)$, donnée par $\nu(x) = g(x) + (x - ij_1 g(x))$ est un isomorphisme de kP-modules. L'application $i : L \oplus \tilde{W} \to L' \oplus L \oplus \tilde{U}$ est alors donnée par

$$i(l + \tilde{w}) = 0 + gi(l, \tilde{w}) + (i(l, \tilde{w}) - ij_1 gi(l, \tilde{w})) = 0 + l + i(0, \tilde{w})$$

autrement dit, $i = 0 \oplus \mathrm{id} \oplus ij_2$, où j_2 est l'inclusion de $\tilde{W}$ dans W.

L'application $\tilde{q} : K \cong L \oplus \tilde{U} \to \tilde{V}$ est donnée par $\tilde{q}(l+x) = q(l)+q(x) = q(x)$ car, vu la caractérisation de l'application i ci-dessus, $l \in \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(q)$, autrement dit $\tilde{q} = 0 \oplus q|_{\tilde{U}}$. La suite exacte de départ devient ainsi :

$$0 \longrightarrow L \oplus \tilde{W} \xrightarrow{\mathrm{incl}_2 \oplus i|_{\tilde{W}}} L' \oplus L \oplus \tilde{U} \xrightarrow{\mathrm{proj}_1 \oplus q|_{\tilde{U}}} L' \oplus \tilde{V} \longrightarrow 0$$

où incl_2 est l'inclusion de L dans $L' \oplus L$ et où proj_1 est la projection de $L' \oplus L$ sur L'.

De plus, les suites $0 \to L \overset{\mathrm{incl}_2}{\to} L' \oplus L \overset{\mathrm{proj}_1}{\to} L' \to 0$ et $0 \to \tilde{W} \overset{\overline{i}}{\to} \tilde{U} \overset{\overline{q}}{\to} \tilde{V} \to 0$, où $\overline{i} = i|_{\tilde{W}}$ et $\overline{q} = q|_{\tilde{U}}$, sont exactes. En effet, il est clair que $\overline{i}$ est injective et que $\mathrm{Im}(\overline{i}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{q})$. Si $v \in \tilde{V}$, alors il existe $u \in U$ tel que $q(u) = v$ et u s'écrit sous la forme $l' + l + \tilde{u}$. Ainsi $v = q(u) = l' + q(\tilde{u})$ et comme $l' = q(u) - q(\tilde{u}) \in L' \cap \tilde{V} = \{0\}$, $q(u) = q(\tilde{u})$, donc $v \in \mathrm{Im}(\overline{q})$. Par suite, $\overline{q}$ est surjective. Finalement, si $x \in \mathrm{Ker}(\overline{q})$, alors il existe $w \in W$ tel que $i(w) = x$. Or $w = l + \tilde{w}$ et $i(w) = l + i(\tilde{w})$, donc $l = i(w) - i(\tilde{w}) \in L \cap \tilde{U} = \{0\}$. Par conséquent, $x = i(\tilde{w}) \in \mathrm{Im}(\overline{i})$.

Nous obtenons ainsi que $I_1^P(W) = I_1^P(L) \oplus I_1^P(\tilde{W})$ et que

$$I_1^P(U) \cap W = I_1^P(L) \oplus \left(I_1^P(\tilde{U}) \cap \tilde{W}\right)$$

vu que $I_1^P(L) \subseteq W$ et que $I_1^P(L') \cap W = 0$. Donc si $I_1^P(\tilde{U}) \cap \tilde{W} = I_1^P(\tilde{W})$, alors il s'ensuivra que $I_1^P(U) \cap W = I_1^P(W)$; autrement dit, il suffit de démontrer l'égalité $I_1^P(U) \cap W = I_1^P(W)$ dans le cas où W et V ne possèdent pas de facteur libre.

Supposons donc qu'il existe une suite exacte $0 \to W \overset{i}{\to} U \overset{q}{\to} V \to 0$, où W et V ne possèdent pas de facteur libre. Par le lemme 2.5.6, $I_1^P(W) = 0$. Si U est sans facteur libre, alors, par le même lemme, $I_1^P(U) = 0$ et l'égalité $I_1^P(U) \cap W = I_1^P(W)$ est vérifiée.

Réciproquement, si $U = F \oplus \overline{U}$ avec F libre, $F \neq 0$ et $\overline{U}$ sans facteur libre, alors $I_1^P(U) = \mathrm{Soc}(F) \oplus 0$. Distinguons deux cas :

i) Si $W \cap F \neq 0$, alors $0 \neq \mathrm{Soc}(W \cap F) \subseteq W \cap \mathrm{Soc}(F) = W \cap I_1^P(U)$, et par conséquent, $I_1^P(U) \cap W \neq I_1^P(W)$.
ii) Si $W \cap F = 0$, alors $q(F) \cong F$ est un facteur direct de V car F est un module injectif. Or ceci est impossible car V ne possède pas de facteur libre.

Donc si le module U possède un facteur libre, alors $I_1^P(U) \cap W \neq I_1^P(W)$, ce qui termine la preuve de la proposition.

□

La proposition précédente nous donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.8. *Soit H un sous-groupe de G tel que $N_G(H)/H$ est un p-groupe. Alors*

$$\eta_H : \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \to \mathrm{Ext}^1_{k\overline{N}_G(H)}(V, W)$$

l'homomorphisme d'évaluation en H, est un isomorphisme si et seulement si pour tout sous-groupe J de G tel que $H \leq J \leq N_G(H)$ et pour toute extension $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ de $k\overline{N}_G(H)$-modules, le module U, vu comme kJ/H-module, ne possède pas d'autres facteurs libres que ceux de W et V.

Nous allons terminer cette section en traitant deux cas particuliers : le cas des p-groupes et le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe de Sylow normal. Dans ces deux cas, nous allons voir que si les modules V et W sont simples, autrement dit si nous sommes dans le cas des extensions entre foncteurs simples, alors l'application η_H est surjective, donc bijective, dans le cas où p est impair.

Le cas des p-groupes est en fait un corollaire du théorème suivant :

Théorème 2.5.9. *Soit H un sous-groupe d'un groupe G et soit k le $k\overline{N}_G(H)$-module trivial. Si p est impair, alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,k}, S_{H,k}) \cong \mathrm{Ext}_{k\overline{N}_G(H)}(k, k) \cong \mathrm{Hom}\left(\overline{N}_G(H), k^+\right)$$

où $\mathrm{Hom}(\overline{N}_G(H), k^+)$ est l'espace vectoriel des homomorphismes de groupes de $\overline{N}_G(H)$ vers le groupe additif k^+ de k.
Si $p = 2$, alors $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,k}, S_{H,k})$ est isomorphe au sous-groupe des extensions U de k par k, telles que les éléments d'ordre 2 de $\overline{N}_G(H)$ agissent trivialement sur U. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,k}, S_{H,k}) \cong \mathrm{Hom}\left(\overline{N}_G(H)/I_H, k^+\right)$$

où I_H est le sous-groupe de $\overline{N}_G(H)$ engendré par les involutions.

Preuve : Pour l'isomorphisme entre $\mathrm{Ext}_{k\overline{N}_G(H)}(k,k)$ et $\mathrm{Hom}\left(\overline{N}_G(H), k^+\right)$, voir [Ben91], propositions 3.14.2 et 3.14.3.

Intéressons-nous donc au premier isomorphisme. Vu la proposition 2.5.4, $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,k}, S_{H,k}) \cong \mathrm{Ext}_{k\overline{N}_G(H)}(k,k)$ si et seulement si pour tout sous-groupe K/H de $N_G(H)/H$ et pour toute extension $0 \to W \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} V \to 0$ de $k\overline{N}_G(H)$-modules, où $V \cong k \cong W$, nous avons $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$.

Soit $H \leq K \leq N_G(H)$. Si l'ordre du groupe K/H est premier à p, nous obtenons que

$$I_H^K(U) \cap W = U^K \cap W = W^K = I_H^K(W)$$

vu que l'application $I_H^K : U^H \to U^K$ est surjective. Supposons donc que p divise l'ordre de K/H. Nous avons alors $I_H^K(W) = [K:H] \cdot W = 0$. Soit $S/H \cong C_p$ un sous-groupe minimal de K/H, engendré par un élément g. Comme $I_H^S(k) = 0$ et que $U/W \cong V \cong k$, nous obtenons que $I_H^S(U) \subseteq W$.

Supposons p impair. Si $x \in U$, alors $g\overline{x} = \overline{x}$ où $\overline{x}$ est l'image de x dans U/W, qui est isomorphe au module trivial k. Il existe donc un élément $w \in W$ tel que $gx = x + w$, et par conséquent,

$$I_H^S(x) = \sum_{i=0}^{p-1} g^i x = px + \sum_{i=0}^{p-1} iw = px + \frac{p(p-1)}{2} w = 0.$$

Il s'ensuit que $I_H^K(U) = I_S^K(I_H^S(U)) = I_S^K(0) = 0$, et ainsi,

$$I_H^K(U) \cap W = I_H^K(U) = 0 = I_H^K(W).$$

Si $p = 2$ et que les éléments d'ordre 2 de $N_G(H)/H$ agissent trivialement sur U, alors $gx = x$ pour tout $x \in U$ et comme avant, $I_H^S(U) = 0$, donc $I_H^K(U) = 0$.
D'autre part, s'il existe un élément $j \in \overline{N}_G(H)$ d'ordre 2 et un élément $x \in U$ tel que $jx = x + w$ avec $w \in W$, $w \neq 0$, alors $I_H^J(x) = w \neq 0$ où $J/H = \langle j \rangle$. Par conséquent, $I_H^J(U) \cap W = I_H^J(U) \neq 0 = I_H^J(W)$, donc une telle extension U ne provient pas d'une extension de $S_{H,k}$ par $S_{H,k}$.

□

Remarque : Le cas où p est impair peut aussi être vu comme une conséquence directe du corollaire 2.5.8. En effet, pour toute extension U de k par k, le kP-module U est de dimension 2, donc il ne peut pas posséder de facteur libre si P est un p-groupe non trivial. Pour $p = 2$, au contraire, cela devient possible et même, cela se produit, comme nous l'avons vu dans l'exemple de la page 91.

Comme le seul kP-module simple est le module trivial si P est un p-groupe (voir la proposition 1.3.3), nous obtenons immédiatement le corollaire suivant qui décrit entièrement les groupes d'extension entre foncteurs simples, associés à P, indexés par le même sous-groupe :

Corollaire 2.5.10. *Soit H un sous-groupe d'un p-groupe P. Si p est impair, alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(P)}(S_{H,k}, S_{H,k}) \cong \mathrm{Ext}_{k\overline{N}_P(H)}(k,k) \cong \mathrm{Hom}\left(\overline{N}_P(H), k^+\right)$$

où $\mathrm{Hom}(\overline{N}_P(H), k^+)$ est l'espace vectoriel des homomorphismes de groupes de $\overline{N}_P(H)$ vers le groupe additif k^+ de k.
Si $p = 2$, alors $\mathrm{Ext}_{\mu_k(P)}(S_{H,k}, S_{H,k})$ est isomorphe au sous-groupe des extensions U de k par k, telles que les éléments d'ordre 2 de $\overline{N}_P(H)$ agissent trivialement sur U. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(P)}(S_{H,k}, S_{H,k}) \cong \mathrm{Hom}\left(\overline{N}_P(H)/I_H, k^+\right)$$

où I_H est le sous-groupe de $\overline{N}_P(H)$ engendré par les involutions.

Traitons ensuite le cas où le groupe G possède un sous-groupe de Sylow normal :

Théorème 2.5.11. *Soient G un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow P normal, $H \leq G$ et V, W des $k\overline{N}_G(H)$-modules simples. Si p est impair, alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,V}, S_{H,W}) \cong \mathrm{Ext}_{k\overline{N}_G(H)}(V,W).$$

Si $p = 2$, alors $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,V}, S_{H,W})$ est isomorphe au sous-groupe des extensions U de W par V telles que les éléments d'ordre 2 de $\overline{N}_G(H)$ agissent trivialement sur U.

Preuve : Rappelons tout d'abord que par la proposition 2.4.1,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S^G_{H,V}, S^G_{H,W}) = \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(N_G(H))}\left(T^{N_G(H)}_{H,V}, T^{N_G(H)}_{H,W}\right)$$

et comme $\overline{N}_{N_G(H)}(H) = \overline{N}_G(H)$, nous obtenons $T^{N_G(H)}_{H,V} = S^{N_G(H)}_{H,V}$ et $T^{N_G(H)}_{H,W} = S^{N_G(H)}_{H,W}$, vu que les modules V et W sont simples. Nous pouvons donc nous ramener au cas où le sous-groupe H est normal.

Par la proposition 2.5.4, le groupe $\operatorname{Ext}\big(S_{H,V}, S_{H,W}\big)$ est isomorphe au sous-groupe de $\operatorname{Ext}(V, W)$ constitué des extensions U de V par W, telles que $I_H^K(U) \cap W = I_H^K(W)$ pour tout sous-groupe K de G contenant H. Fixons donc une telle extension et un sous-groupe K/H de G/H. Distinguons ensuite deux cas :

i) Si p divise l'ordre de K/H : comme $P/(P \cap H) \cong PH/H$ est normal dans G/H, il agit trivialement sur V et W (voir la remarque qui suit le théorème 1.3.7). Fixons $J/H \cong C_p$, engendré par $g \in G$, un sous-groupe de K/H d'ordre p. Comme J/H est un sous-groupe de PH/H, il agit aussi trivialement sur V et W. Il s'ensuit que $I_H^K(W) = I_J^K(I_H^J(W)) = 0$. De même $I_H^K(V) = 0$ et comme $U/W \cong V$, cela implique $I_H^K(U) \subseteq W$. Supposons que p est impair.
Si $x \in U$, alors $gx = x + w$ avec $w \in W$ et donc, comme dans la preuve du théorème 2.5.9,

$$I_H^J(x) = \sum_{i=0}^{p-1} g^i x = px + \sum_{i=0}^{p-1} iw = px + \frac{p(p-1)}{2} w = 0.$$

Donc $I_H^K(U) \cap W = I_J^K(I_H^J(U)) \cap W = 0 = I_H^K(W)$; autrement dit $\operatorname{Ext}\big(S_{H,V}, S_{H,W}\big) \cong \operatorname{Ext}(V, W)$.

Si $p = 2$ et que les éléments d'ordre 2 de $\overline{N}_G(H)$ agissent trivialement sur U, alors $gx = x$ pour tout $x \in U$ et comme avant, $I_H^K(U) = 0$. Sinon, comme dans le cas des p-groupes, $I_H^K(U) \cap W \neq I_H^K(W)$.

ii) Si l'ordre de K/H est premier à p, nous obtenons, comme dans la preuve du théorème 2.5.9, que

$$I_H^K(U) \cap W = U^{K/H} \cap W = W^{K/H} = I_H^K(W)$$

vu que l'application $I_H^K : U^H \to U^K$ est surjective. Par conséquent, $\operatorname{Ext}\big(S_{H,V}, S_{H,W}\big) \cong \operatorname{Ext}(V, W)$.

□

2.5.1 Exemple du groupe $\mathcal{S}_4$

Comme à la fin de la section précédente, nous allons utiliser les résultats de cette section pour déterminer les groupes d'extension entre les foncteurs de Mackey simples, indexés par le même sous-groupe, associés au groupe $G = \mathcal{S}_4$ et sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique 2. Rappelons que la liste complète des foncteurs de Mackey simples associés à G est donnée par : $S_{1,k}$, $S_{1,V}$, $S_{\tilde{C}_2,k}$, $S_{C_2,k}$, $S_{C_3,k}$, $S_{\mathcal{S}_3,k}$, $S_{\tilde{V}_4,k}$, $S_{V_4,k}$, $S_{V_4,S}$, $S_{C_4,k}$,

$S_{D_8,k}$, $S_{\mathcal{A}_4,k}$ et $S_{G,k}$ (voir la page 82).

De plus, vu le théorème 2.5.9, $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,k}, S_{H,k})$ est isomorphe au sous-groupe des extensions U de k par k, telles que les éléments d'ordre 2 de $\overline{N}_G(H)$ agissent trivialement sur U. Or $\overline{N}_G(H)$ est engendré par des éléments d'ordre 2, pour tout $H \leq \mathcal{S}_4$. Par conséquent $\mathrm{Ext}_{\mu_k(\mathcal{S}_4)}(S_{H,k}, S_{H,k}) = 0$ pour tout sous-groupe H de $\mathcal{S}_4$.

Remarquons ensuite que l'évaluation en V_4 induit un homomorphisme de $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{V_4,S})$ dans $\mathrm{Ext}_{kG/V_4}(S,S)$, qui est injectif (voir la proposition 2.5.2). Or S est un kG/V_4-module projectif, vu qu'il s'identifie au $k\mathcal{S}_3$-module simple de dimension 2, et par conséquent, le groupe précédent est trivial, donc $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{V_4,S}, S_{V_4,S}) = 0$.

Il nous reste donc à calculer $\mathrm{Ext}(S_{1,k}, S_{1,V})$ et $\mathrm{Ext}(S_{1,V}, S_{1,V})$ et, de nouveau, l'évaluation en 1 induit un homomorphisme injectif de ces groupes dans $\mathrm{Ext}_{kG}(k,V)$ et $\mathrm{Ext}_{kG}(V,V)$ respectivement. Nous allons donc tout d'abord déterminer ces groupes d'extension entre kG-modules afin d'obtenir des informations sur les groupes d'extension entre foncteurs de Mackey correspondants.

Commençons par calculer $\mathrm{Ext}_{kG}(k,V)$. Rappelons que le sous-groupe V_4 est un 2-sous-groupe normal de G, donc il agit trivialement sur V (voir la remarque qui suit le théorème 1.3.7) ; autrement dit, V possède une structure de kG/V_4-module simple. Or $G/V_4 \cong \mathcal{S}_3$, donc $\mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V)$ est le kS_3-module simple de dimension 2, qui est également projectif. Par conséquent, le module $\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}\mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V)$ est projectif (voir la proposition 1.3.6).

De plus, par la proposition 1.3.6,

$$\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}\mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V) \cong \mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}(k \otimes_k \mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V)) \cong \mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}(k) \otimes_k V$$

donc il existe une surjection de $\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}\mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V)$ dans V. Finalement, comme $\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}\mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}(V)$ est de dimension 8, il s'ensuit qu'il doit être indécomposable, vu la proposition 1.3.4. C'est donc la couverture projective P_V de V.

Vu la proposition 1.3.6,

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k,k) \cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k, \mathrm{Res}^G_{\mathcal{S}_3}k) \cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_4}\left(\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}(k), k\right)$$

donc il existe une suite exacte courte $0 \to \Omega \to \mathrm{Ind}^G_{\mathcal{S}_3}(k) \to k \to 0$, qui induit, en tensorisant par V, la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \Omega \otimes_k V \to P_V \to V \to 0.$$

Par ailleurs, cette suite nous permet d'obtenir la suite exacte longue suivante, vu la proposition 1.2.20 :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(V, k) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P_V, k) \to \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega \otimes_k V, k) \\ \to \mathrm{Ext}_{kG}(V, k) \to 0$$

Comme le seul quotient simple du module P_V est V, $\mathrm{Hom}_{kG}(P_V, k) = 0$ et, par conséquent, $\mathrm{Ext}_{kG}(V, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(V \otimes_k \Omega, k)$. Or, pour tous kG-modules U_1, U_2 et U_3, $\mathrm{Hom}_{kG}(U_1 \otimes_k U_2, U_3) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(U_1, (U_2)^\star \otimes_k U_3)$ (voir [Alp86], lemme 3, section 7). Par suite

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\Omega \otimes_k V, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V^\star \otimes_k k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V)$$

où le dernier isomorphisme se déduit du fait que $V^\star \otimes_k k \cong V^\star \cong V$, car, comme V est l'unique kG-module simple de dimension 2, il doit être isomorphe à son dual. Il faut donc déterminer si le module simple V est un quotient de Ω. Dans ce but, nous allons commencer par déterminer la structure du module $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$. Par la proposition 1.3.6,

$$\mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}\big(\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k), k\big) \text{ et } \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}\big(k, \mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)\big)$$

et, vu le lemme de Schur (voir la proposition 1.2.24), $\mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k, k) \cong k$. Par conséquent, le module $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ possède un unique sous-module isomorphe au module trivial k et un unique quotient isomorphe à k. Comme le seul autre kG-module simple est V, que

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k), V) \cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k, \mathrm{Res}_{\mathcal{S}_3}^G(V)) = 0$$

et que

$$\mathrm{Hom}_{kG}(V, \mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)) \cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_3}^G(V), k) = 0$$

car $\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_3}^G(V)$ est un module simple non trivial, il s'ensuit que la tête et le socle du module $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ sont tous deux isomorphes au module trivial k.

Il faut ensuite déterminer les autres facteurs de composition de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$. Remarquons tout d'abord que P_k, la couverture projective de k est égale à $\mathrm{Ind}_{C_3}^G(k)$. En effet, en utilisant plusieurs fois la proposition 1.3.6, nous obtenons les faits suivants : comme k est un kC_3-module projectif, vu que le corps k est de caractéristique 2, $\mathrm{Ind}_{C_3}^G(k)$ est un kG-module projectif. Comme $\dim_k\left(\mathrm{Ind}_{C_3}^G(k)\right) = 8$, il est indécomposable et finalement, comme $\mathrm{Hom}_{kG}\left(\mathrm{Ind}_{C_3}^G(k), k\right) \cong \mathrm{Hom}_{kC_3}(k, k) \cong k$, alors $P_k = \mathrm{Ind}_{C_3}^G(k)$. En utilisant toujours la même proposition, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{kG}(P_k, \mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)) &\cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(\mathrm{Res}_{\mathcal{S}_3}^G \mathrm{Ind}_{C_3}^G(k), k) \\ &\cong \bigoplus_{g \in [\mathcal{S}_3 \backslash G / \mathcal{S}_3]} \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}\big(k\big[\mathcal{S}_3 / \mathcal{S}_3 \cap {}^g C_3\big], k\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k\mathcal{S}_3 / C_3, k) \oplus \mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}_3}(k\mathcal{S}_3 / 1, k) \end{aligned}$$

donc $\dim_k(\mathrm{Hom}_{kG}(P_k, \mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k))) = 2$ et, par conséquent, $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ ne possède que deux facteurs de composition isomorphes à k. Les couches de la série de Loewy de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ se représentent donc de la manière suivante : $\begin{smallmatrix} k \\ V \\ k \end{smallmatrix}$. Par conséquent, la tête de Ω est égale à V, car c'est le noyau de la surjection de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ sur k.

Finalement, nous obtenons, à l'aide du lemme 2.1.2, que

$$\mathrm{Ext}_{kG}(k, V) \cong \mathrm{Ext}_{kG}(V^\star, k^\star) \cong \mathrm{Ext}_{kG}(V, k) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V) \cong k.$$

où nous avons utilisé le fait que $kG \cong (kG)^{op}$ via l'automorphisme qui envoie g sur g^{-1} pour tout $g \in G$.

Nous pouvons à présent déterminer $\mathrm{Ext}(S_{1,k}, S_{1,V})$. Vu ce qui précède, nous savons que sa dimension sur k est au plus égale à 1 et, plus précisément, sa dimension sera 1 si l'application d'évaluation en le sous-groupe trivial est surjective. Cela est encore équivalent à demander que pour toute extension de kG-modules $0 \to V \to E \to k \to 0$, et pour tout sous-groupe J de G, $I_1^J(E) \cap V = I_1^J(V)$ (voir la proposition 2.5.4).

Nous avons vu que le module Ω est unisériel et les couches de sa série de Loewy peuvent se représenter par $\begin{smallmatrix} V \\ k \end{smallmatrix}$. Par conséquent, il existe une suite exacte courte non scindée de la forme $0 \to k \to \Omega \to V \to 0$. Comme $V \cong V^\star$ et $k \cong k^\star$, il existe ainsi, par dualité, une suite exacte courte non scindée :

$$0 \to V \to \Omega^\star \to k \to 0.$$

Comme Ω est le noyau de la surjection de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{S}_3}^G(k)$ sur k, nous pouvons le déterminer explicitement, ainsi que son dual. Nous obtenons alors que le kG-module $\Omega^\star$ possède une k-base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sur laquelle l'action de G est donnée de la manière suivante : posons $G = \langle a, b\rangle$, avec $a = (1234)$, $b = (12)$, alors $ae_1 = e_2$, $be_1 = e_2$, $ae_2 = e_3$, $be_2 = e_1$, $ae_3 = e_1 + e_2 + e_3$ et $be_3 = e_3$. En particulier, V s'identifie avec le sous-module de $\Omega^\star$ engendré par $e_2 + e_3$ et $e_1 + e_3$.

Considérons alors le sous-groupe $J = \langle (12)(34)\rangle$ de G. Comme J est un sous-groupe de V_4 qui est normal dans G, J agit trivialement sur V, donc $I_1^J(V) = |J| \cdot V = 0$. Par ailleurs, nous obtenons que $I_1^J(\Omega^\star) = \mathrm{vect}_k(e_1 + e_2)$ et par conséquent,

$$I_1^J(\Omega^\star) \cap V = \mathrm{vect}_k(e_1 + e_2) \neq 0 = I_1^J(V).$$

Il s'ensuit que l'application d'évaluation en le sous-groupe trivial n'est pas surjective, et donc

$$\mathrm{Ext}(S_{1,k}, S_{1,V}) = 0.$$

Intéressons-nous ensuite au groupe $\mathrm{Ext}_{kG}(V,V)$. Vu la proposition 1.2.20, la suite exacte courte $0 \to \Omega \otimes_k V \to P_V \to V \to 0$ induit la suite exacte longue suivante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{kG}(P_V,V) \to \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega \otimes_k V, V)$$

$$\to \mathrm{Ext}_{kG}(V,V) \to 0$$

Comme $\mathrm{Hom}_{kG}(V,V) \cong k \cong \mathrm{Hom}_{kG}(P_V,V)$ (voir le lemme 1.2.24 et la proposition 1.2.13), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{kG}(V,V) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega \otimes_k V, V) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V^\star \otimes_k V)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V \otimes_k V).\end{aligned}$$

Le socle du module $V \otimes_k V$ est égal à $k \oplus V$. Explicitement, le module V possède deux générateurs x et y, et l'action de $G = \langle a, b\rangle$ est donnée par $ax = x + y$, $ay = y$, $bx = y$ et $by = x$. Notons u et v les générateurs correspondants de la deuxième copie de V. Le module $V \otimes_k V$ possède alors la k-base $\{f_1 = x \otimes u, f_2 = x \otimes v, f_3 = y \otimes u, f_4 = y \otimes v\}$. De plus $\mathrm{vect}(f_2, f_3)$ est un sous-module de $V \otimes_k V$ isomorphe à k et $\mathrm{vect}(f_1+f_2+f_3, f_2+f_3+f_4)$ est un sous-module de $V \otimes_k V$ isomorphe à V.

Si $f \in \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V \otimes_k V)$, alors f ne peut pas être injectif. En effet, si c'est le cas, alors Ω/k s'identifie à un sous-module de $(V \otimes_k V)/k$, qui est unisériel car son socle est égal à V, vu ce qui précède. Il s'ensuit que $\Omega/k \cong (k \oplus V)/k$ et ainsi, $\Omega \cong V \oplus k$, ce qui contredit le fait que le socle de Ω est égal à k. Par conséquent, le noyau d'un homomorphisme non nul de Ω dans $V \otimes_k V$ doit être égal à k. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{kG}(\Omega, V \otimes_k V) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega/k, V \otimes_k V) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(V, V \otimes_k V)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(V, k \oplus V) \cong k.\end{aligned}$$

et ainsi, $\mathrm{Ext}_{kG}(V,V) \cong k$.

Passons au calcul de $\mathrm{Ext}(S_{1,V}, S_{1,V})$. Comme auparavant, nous savons que sa dimension sur k est au plus égale à 1 et, plus précisément, sa dimension sera 1 si l'application d'évaluation en le sous-groupe trivial est surjective. Cela est encore équivalent à demander que pour toute extension de kG-modules $0 \to V \to E \to V \to 0$, et pour tout sous-groupe J de G, $I_1^J(E) \cap V = I_1^J(V)$.

Commençons par construire une extension non triviale de V par V. Dans ce but, il suffit de considérer l'homomorphisme d'inclusion canonique de V dans $k \oplus V$, puis de suivre les isomorphismes ci-dessus. Cela nous permet de construire une suite exacte courte non scindée :

$$0 \to V \to E \to V \to 0$$

où E est possède une k-base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ sur laquelle le groupe $G = \langle a, b \rangle$ agit par $a\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $b\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $a\varepsilon_2 = \varepsilon_2$, $b\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, $a\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $b\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, $a\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_4$ et $b\varepsilon_4 = \varepsilon_3$. Le module engendré par ε_1 et ε_2 est alors un sous-module de E isomorphe à V, et le quotient correspondant de E est également isomorphe à V. Considérons le sous-groupe $J' = \langle c \rangle \cong C_3$ de G, où $c = (123)$. Par calcul, nous obtenons que $I_1^{J'}(V) = 0$ et que $I_1^{J'}(E) = V$. Donc

$$I_1^{J'}(E) \cap V = V \neq 0 = I_1^{J'}(V).$$

Il s'ensuit que l'application d'évaluation en le sous-groupe trivial n'est pas surjective, et donc

$$\mathrm{Ext}(S_{1,V}, S_{1,V}) = 0.$$

Nous pouvons à présent donner le tableau des valeurs de tous les groupes d'extension entre foncteurs simples associés au groupe $\mathcal{S}_4$:

	$S_{1,k}$	$S_{1,V}$	$S_{\tilde{C}_2,k}$	$S_{C_2,k}$	$S_{C_3,k}$	$S_{V_4,k}$	$S_{V_4,S}$	$S_{\tilde{V}_4,k}$	$S_{C_4,k}$	$S_{\mathcal{S}_3,k}$	$S_{D_8,k}$	$S_{\mathcal{A}_4,k}$	$S_{G,k}$
$S_{1,k}$	0	0	k	k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{1,V}$		0	0	k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{\tilde{C}_2,k}$			0	0	0	0	0	k	0	0	0	0	0
$S_{C_2,k}$				0	0	k	k	k	k	0	0	0	0
$S_{C_3,k}$					0	0	0	0	0	k	0	0	0
$S_{V_4,k}$						0	0	0	0	0	k	0	0
$S_{V_4,S}$							0	0	0	0	0	0	0
$S_{\tilde{V}_4,k}$								0	0	0	k	0	0
$S_{C_4,k}$									0	0	k	0	0
$S_{\mathcal{S}_3,k}$										0	0	0	0
$S_{D_8,k}$											0	0	0
$S_{\mathcal{A}_4,k}$												0	k
$S_{G,k}$													0

TAB. II.1 – Les groupes d'extension de degré 1 des foncteurs de Mackey simples associé à $\mathcal{S}_4$.

Chapitre III

Extensions de degré supérieur et résolutions projectives

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs simples nous permettent de décrire la deuxième couche de la série de Loewy des foncteurs projectifs indécomposables correspondants. Par ailleurs, si $S_{H,V}$ est un foncteur de Mackey simple, sa couverture projective est le foncteur $P_{H,V}$, donc il existe une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Rad}(P_{H,V}) \to P_{H,V} \to S_{H,V} \to 0.$$

Par conséquent, si l'on connaît la tête du module $\mathrm{Rad}(P_{H,V})$, qui est donnée justement par la deuxième couche de la série de Loewy de $P_{H,V}$, c'est-à-dire $\mathrm{Rad}(P_{H,V})/\mathrm{Rad}^2(P_{H,V}) = \bigoplus_i S_{H_i,V_i}$, alors nous pouvons construire le début d'une résolution projective, qui sera de plus minimale, du foncteur $S_{H,V}$. Explicitement la situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i P_{H_i,V_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{H,V} \arrow[r, two heads] & S_{H,V} \arrow[r] & 0 \\
& \mathrm{Rad}(P_{H,V}) \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

En résumé, les groupes d'extension de degré 1 nous permettent de déterminer le début d'une résolution projective minimale d'un foncteur simple. En fait, plus généralement, les groupes d'extension de degré supérieur vont nous permettre de construire entièrement ces résolutions, vu la section ci-après. Nous allons donc nous intéresser, dans ce chapitre, aux groupes d'extension de degré supérieur ou égal à 1, entre foncteurs de Mackey simples, ainsi qu'aux résolutions projectives minimales de ces mêmes foncteurs. Pour ce faire, nous allons nous placer dans le cas des groupes possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p. En effet, sous cette hypothèse, la structure des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables est décrite explicitement dans [TW95]. Nous allons donc commencer par quelques rappels sur les résolutions projectives minimales. Puis nous verrons que la résolution projective minimale des foncteurs de Mackey simples associés à un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p, est périodique. Finalement nous étudierons le lien entre les groupes d'extension sur l'algèbre de Mackey et ceux sur l'algèbre de Mackey cohomologique.

3.1 Résolutions projectives minimales : quelques rappels

Fixons une k-algèbre A de dimension finie sur un corps k algébriquement clos. Une résolution projective minimale d'un A-module M est une résolution projective de M dont les termes sont de dimension sur k aussi petite que possible. Plus précisément, une telle résolution peut se définir de la manière suivante :

Définition 3.1.1. *Une résolution projective*

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

d'un A-module M est minimale si $\delta_n(P_n) \subseteq \mathrm{Rad}(P_{n-1})$ pour tout $n > 0$.

Comme nous allons le voir, dans le cas d'une k-algèbre A de dimension finie, une résolution projective minimale existe toujours et de plus, elle est unique. Pour construire une telle résolution, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 3.1.2. *Soient A une k-algèbre de dimension finie, M un A-module et P_M la couverture projective de M. Le translaté de Heller de M, noté $\Omega(M)$, est le noyau de la surjection de P_M sur M. Il est défini à isomorphisme près, vu qu'il en va de même pour P_M. On définit ensuite, par récurrence, $\Omega^n(M)$ par $\Omega(\Omega^{n-1}(M))$, pour tout $n \geq 2$.*

Proposition 3.1.3. *Soient A une k-algèbre de dimension finie et M un A-module. Tout A-module possède une unique résolution projective minimale. De plus, si l'algèbre A est auto-injective (voir définition 1.2.9), alors :*

i) le module $\Omega(M)$ ne possède pas de facteur projectif,

ii) les seuls A-modules qui possèdent une résolution projective finie sont les modules projectifs.

Preuve : Pour l'existence d'une unique résolution projective minimale, voir [Ben91], section 2.4. Supposons ensuite A auto-injective. Si Q est un facteur projectif de $\Omega(M)$, alors il est également injectif. Par conséquent, c'est un facteur direct de P_M, la couverture projective de M, ce qui contredit la minimalité de P_M. Par conséquent, $\Omega(M)$ ne peut pas posséder de facteur projectif. Le point ii) découle alors de i). En effet, si un module non projectif possède une résolution projective finie, alors sa résolution projective minimale est finie, donc un des noyaux des différentielles doit être projectif, ce qui contredit l'assertion i).

□

Remarque : La résolution projective minimale d'un A-module M, où A est une k-algèbre A de dimension finie, se calcule de la manière suivante : soit $P_0 = P_M$ la couverture projective de M. Il existe alors un homomorphisme surjectif $\delta_0 : P_0 \to M$, dont le noyau est $\Omega(M)$. En particulier, $\Omega(M)$ est contenu dans le radical de P_0. On pose ensuite $P_1 = P_{\Omega(M)}$, la couverture projective du module $\Omega(M)$, donc il existe un homomorphisme surjectif $\varphi : P_1 \to \Omega(M)$, dont le noyau est $\Omega^2(M)$. A nouveau, $\Omega^2(M)$ est contenu dans $\mathrm{Rad}(P_1)$. Puis on considère la couverture projective de $\Omega^2(M)$ et on continue ainsi à construire la résolution projective de M.

Le problème de déterminer la résolution projective d'un A-module M est directement lié aux calculs des groupes d'extension entre M et n'importe quel A-module simple, vu le résultat suivant :

Proposition 3.1.4. *Soient A une k-algèbre de dimension finie, M un A-module et*

$$(P_\star, \varphi_\star) : \ \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(P_\star, \varphi_\star)$ est une résolution projective minimale de M.

ii) Si S est un A-module simple, alors pour tout $n > 0$,

$$\mathrm{Hom}_A(P_n, S) \cong \mathrm{Ext}_A^n(M, S).$$

iii) Si S est un A-module simple, alors pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{Hom}_A(\varphi_n, S) = 0$.

iv) Si $(Q_\star, \epsilon_\star)$ est une résolution projective de M, alors tout morphisme de complexe de $(P_\star, \varphi_\star)$ dans $(Q_\star, \epsilon_\star)$, qui prolonge l'identité sur M, est injectif.

v) Si $(Q_\star, \epsilon_\star)$ est une résolution projective de M, alors tout morphisme de complexe de $(Q_\star, \epsilon_\star)$ sur $(P_\star, \varphi_\star)$, qui prolonge l'identité sur M, est surjectif.

De plus, si les assertions ci-dessus sont vérifiées, alors

$$P_i = \bigoplus_S (P_S)^{\dim_k\left(\mathrm{Ext}^i_A(M,S)\right)}$$

où S parcourt les classes d'isomorphisme de A-modules simples et où P_S est la couverture projective de S.

Preuve : Pour l'équivalence des assertions, voir [CTVEZ03], proposition 3.2.3 (l'énoncé est donné pour une algèbre de groupe kG où G est un groupe fini, mais il se généralise tel quel à une k-algèbre de dimension finie, auto-injective).

Supposons ensuite que les assertions sont vérifiées. Si P est un A-module projectif, il existe des modules projectifs indécomposables $P_1, \ldots, P_r$ tels que $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_r$. Or tout module projectif indécomposable est la couverture projective d'un module simple, qui est sa tête (voir la proposition 1.2.13). Donc il existe des modules simples $S_1, \ldots, S_r$ tels que $P_i = P_{S_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Par conséquent, si T est un A-module simple,

$$\mathrm{Hom}_A(P, T) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hom}_A(P_i, T) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hom}_A(S_i, T)$$

et, par le lemme de Schur, la dimension de ce dernier terme est égale au nombre de modules S_i isomorphes à T, et par suite, au nombre de fois que le module P_T apparaît dans P. En résumé,

$$P = \bigoplus_{T \text{ simples}} (P_T)^{\dim_k(\mathrm{Hom}_A(P,T))}$$

En appliquant l'égalité précédente à P_i et en utilisant l'isomorphisme entre $\mathrm{Ext}^n_A(M, S)$ et $\mathrm{Hom}_A(P_n, S)$, pour tout A-module simple S, nous obtenons le résultat cherché.

□

Une question importante qui se pose lorsque l'on travaille avec des résolutions projectives minimales est de déterminer si elles sont périodiques. C'est un problème qui a été résolu dans le cas des algèbres de groupes. En particulier, si $A = kG$ une algèbre d'un groupe fini G, la complexité d'un kG-module M est le taux de croissance d'une résolution projective minimale de M. Par exemple, M a une complexité nulle si et seulement s'il possède une résolution projective finie, ce qui, en fait, n'arrive que si le module est projectif (voir [Ben91], proposition 3.1.2). Le module M a une complexité de 1 si et seulement si tous les modules de sa résolution minimale sont de dimension bornée. Or il se trouve qu'un module a une complexité de 1 exactement lorsque sa résolution projective minimale est périodique. Nous allons, dans la suite de ce chapitre, nous intéresser à ce problème pour l'algèbre de Mackey, $\mu_k(G)$, dans le cas où le groupe G possède un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p.

Soit M un A-module, où A est une k-algèbre de dimension finie, auto-injective. Nous allons voir que pour montrer que la résolution projective minimale d'un module M est périodique, il suffit de trouver une résolution projective périodique de M. Mais avant cela, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires :

Lemme 3.1.5. *(Schanuel)*
Soient $0 \to M_1 \to P_1 \to M \to 0$ et $0 \to M_2 \to P_2 \to M \to 0$ deux suites exactes courtes de modules avec P_1 et P_2 projectifs. Alors $M_1 \oplus P_2 \cong P_1 \oplus M_2$.

Preuve : voir [Ben91], lemme 1.5.3.

Proposition 3.1.6. *Soient A une k-algèbre de dimension finie et M, N des A-modules de type fini. Pour toute suite exacte :*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

où les P_i sont des A-modules projectifs, pour tout i, il existe une sous-suite exacte :

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow P'_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où N' est un facteur direct de N, P'_i est un facteur direct de P_i et de plus, P'_i est le $i^{\text{ème}}$ terme de la résolution projective minimale de M, pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Preuve : Notons P'_i le $i^{\text{ème}}$ terme de la résolution projective minimale de M, pour tout $i = 1, \dots, n-1$; et montrons, par récurrence sur i, que P'_i est un facteur direct du module P_i. Rappelons que $\Omega^r(M)$ est le noyau de la $r^{\text{ème}}$ différentielle de la résolution projective minimale de M et que P'_i est la couverture projective de $\Omega^i(M)$.

Commençons par montrer le résultat suivant : si N est un A-module et P est un A-module projectif tel qu'il existe une surjection $\varphi : P \to N$, alors il existe un module Q tel que $P \cong P_N \oplus Q$ et que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \Omega(N) \oplus Q$.

Comme P est un module projectif, il existe un homomorphisme $h : P \to P_N$ tel $\varphi = ph$ où p est la surjection canonique de P_N sur N. En particulier, $h(P)$ est un sous-module de P_N qui se surjecte sur N et par conséquent, $h(P) = P_N$ par définition de la couverture projective ; en d'autres termes, h est surjectif. Comme P_N est projectif, il s'ensuit qu'il existe un module Q tel que $P \cong P_N \oplus Q$. Par ailleurs, le lemme de Schanuel (lemme 3.1.5), nous dit que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus P_N \cong \Omega(N) \oplus P \cong \Omega(N) \oplus P_N \oplus Q.$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \Omega(N) \oplus Q$ vu le théorème de Krull-Schmidt (théorème 1.2.11).

Nous pouvons à présent démontrer la proposition. Vu ce qui précède, il existe un module Q_0 tel que $P_0 \cong P'_0 \oplus Q_0$ et que $\mathrm{Ker}(\delta_0) \cong \Omega(M) \oplus Q_0$, car $P'_0 \cong P_M$ et que P_0 se surjecte sur M. Comme $\mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathrm{Im}(\delta_1)$, P_1 se surjecte sur Q_0 qui est projectif, donc il existe un module $\tilde{P}_1$ tel que $P_1 = \tilde{P}_1 \oplus Q_0$. Par conséquent,

$$\delta_1 = \delta_1|_{\tilde{P}_1} \oplus \mathrm{id} : \tilde{P}_1 \oplus Q_0 \longrightarrow P'_0 \oplus Q_0$$

et $\mathrm{Im}(\delta_2) \subseteq \tilde{P}_1$. Nous obtenons ainsi une nouvelle suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \xrightarrow{\delta_2} \tilde{P}_1 \xrightarrow{\delta_1|_{\tilde{P}_1}} P'_0 \xrightarrow{\delta_0|_{P'_0}} M \longrightarrow 0$$

où P'_0 est un facteur direct de P_0 et où le noyau de $\delta_0|_{P'_0}$ est égal à $\Omega(M)$.

Supposons ensuite, par récurrence, qu'il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \xrightarrow{\delta_r} \tilde{P}_{r-1} \xrightarrow{\delta_{r-1}|_{\tilde{P}_{r-1}}} P'_{r-2} \xrightarrow{\delta_{r-2}|_{P'_{r-2}}} \dots \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où P'_i est un facteur direct de P_i pour $i = 0, \dots, r-2$ et où le noyau de $\delta_{r-2}|_{P'_{r-2}}$ est égal $\Omega^{r-1}(M)$. Comme auparavant, il existe un module Q_{r-1} tel que $\tilde{P}_{r-1} = P'_{r-1} \oplus Q_{r-1}$ et que $\mathrm{Ker}\Big(\delta_{r-1}|_{\tilde{P}_{r-1}}\Big) \cong \Omega^r(M) \oplus Q_{r-1}$.

Comme $\mathrm{Ker}(\delta_{r-1}) = \mathrm{Im}(\delta_r)$, P_r se surjecte sur Q_{r-1} qui est projectif, donc, il existe un module $\tilde{P}_r$ tel que $P_r = \tilde{P}_r \oplus Q_{r-1}$ (si $r = n$, alors $P_r = N$) et que

$$\delta_r = \delta_r|_{\tilde{P}_r} \oplus \mathrm{id} : \tilde{P}_r \oplus Q_{r-1} \longrightarrow P'_{r-1} \oplus Q_{r-1}.$$

Nous obtenons donc une nouvelle suite exacte, en simplifiant les modules Q_{r-1} et en remplaçant l'application δ_r par $\delta_r|_{\tilde{P}_r}$, ce qui termine la preuve de la proposition.

□

La proposition précédente nous permet à présent d'énoncer le résultat qui nous intéresse :

Corollaire 3.1.7. *Soient A une k-algèbre de dimension finie auto-injective et M un A-module indécomposable. Si M possède une résolution projective périodique de période n, alors soit M est projectif, soit la résolution projective minimale de M est périodique, de période divisant n.*

Preuve : Supposons que M n'est pas projectif et qu'il possède une résolution projective périodique, de période n. Il existe alors une suite exacte :

$$0 \to M \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

où les modules P_i sont projectifs. Par la proposition 3.1.6, il existe alors une suite exacte :

$$0 \to M' \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

où P'_i est isomorphe au $i^{\text{ème}}$ terme de la résolution projective minimale de M, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. De plus, M' est un facteur direct de M qui doit être non nul vu que le module M n'est pas projectif (voir la proposition 3.1.3). Comme M est indécomposable, il s'ensuit que $M' = M$. Par conséquent, la résolution projective minimale de M est périodique, de période divisant n.

□

Proposition 3.1.8. *Soient A une k-algèbre de dimension finie auto-injective et M un A-module, dont la résolution projective minimale est périodique (ou finie). Alors la résolution projective minimale de chaque facteur direct de M est également périodique. De plus, la période de chacune de ces résolutions projectives minimales est un multiple de la période de la résolution projective minimale de M.*

Preuve : Supposons tout d'abord que $M = P \oplus M'$ où P est un A-module projectif. Comme la résolution projective minimale de M est périodique, disons de période n, il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

où les P_i sont les modules projectifs apparaissant dans la résolution projective minimale de M, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$; autrement dit, $P_i = \Omega^i(M)$. En particulier, $P_0 = P_M \cong P \oplus P_{M'}$ vu la proposition 1.2.15, et $\delta_0 = \mathrm{id} \oplus \delta'_0$. Par ailleurs, comme M s'injecte dans P_{n-1} et que P est projectif donc injectif, P doit être un facteur de direct de P_{n-1}. Donc $P_{n-1} \cong P \oplus P'_{n-1}$ et $i = \mathrm{id} \oplus i'$. Par conséquent, il existe une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i'} P'_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} P'_0 \xrightarrow{\delta'_0} M' \longrightarrow 0.$$

Nous pouvons donc supposer que M ne possède pas de facteur projectif. Ecrivons $M = \bigoplus_{j=1}^{m} M_j$ où les M_j sont des A-modules indécomposables, non projectifs, et considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

où les P_i sont les modules projectifs apparaissant dans la résolution projective minimale de M, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$.

Pour tout $j = 1, \ldots, m$, appelons $\left((Q^j)_\star, d^j_\star\right)$ la résolution projective minimale de M_j. Comme la couverture projective d'une somme directe de modules est égale à la somme directe des couvertures projectives de chacun des modules (voir la proposition 1.2.15), il s'ensuit que $\left(\bigoplus_j (Q^j)_\star, \bigoplus_j d^j_\star\right)$ est égale à la résolution projective minimale de M. Par conséquent, pour tout $j = 1, \ldots, m$, $\mathrm{Ker}\left(d^j_{n-1}\right)$ doit être un facteur direct de M, qui est de plus non nul (par la proposition 3.1.3, iii), M_j ne peut pas posséder de résolution projective finie vu qu'il n'est pas projectif). Donc il existe $\sigma \in \mathcal{S}_m$ tel que $\mathrm{Ker}\left(d^j_{n-1}\right) = M_{\sigma(j)}$, pour tout $j = 1, \ldots, m$. Il s'ensuit que la résolution projective minimale de M_j est périodique, de période nu où u est l'ordre de la permutation σ.

$\square$

Contrairement à notre démarche précédente, nous allons utiliser la structure des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables pour construire des résolutions projectives minimales de foncteurs de Mackey. Par conséquent, nous allons nous placer dans un cadre où nous connaissons explicitement la structure de tous les projectifs indécomposables : le cas où G possède un p-sous-groupe de Sylow normal d'ordre p. Ce cas correspond par ailleurs exactement au cas où l'algèbre de Mackey est auto-injective, ce qui nous permet d'appliquer les résultats de cette section.

3.2 Les groupes possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p

Fixons un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow $C = C_p$, cyclique d'ordre p. Comme les catégories $\mathrm{Mack}_k(G, J)$ et $\mathrm{Mack}_k(\overline{N}_G(J), 1)$ sont équivalentes pour tout sous-groupe p-parfait J (voir le théorème 1.7.8), nous pouvons nous placer dans $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$, autrement dit, considérer uniquement les foncteurs de Mackey dont les facteurs de composition sont indexés par des p-sous-groupes (voir la section 1.7).

Commençons par traiter le cas où le sous-groupe C est normal. Dans ce cas, si V est un kG-module simple, $\mathrm{Res}^G_C(V)$ doit être semi-simple par le théorème de Clifford (voir le théorème 1.3.7) et, en particulier, C agit trivialement sur V. Par conséquent, tout kG-module simple est également un kG/C-module simple.

Soit B un bloc de kG (pour la définition de bloc, voir la page 43) et soient $V_1, \ldots, V_e$ les modules simples appartenant à ce bloc. Ces modules sont tous de la même dimension et e divise $p-1$. De plus, pour chaque $1 \leq i \leq e$, la couverture projective P_{V_i} du module V_i est unisérielle et il est possible de numéroter ces modules de sorte que la série de Loewy de P_{V_i} soit la suivante :

$$P_{V_i} = \begin{array}{l} V_i \\ V_{i+1} \\ \vdots \\ V_{i-1} \\ V_i \end{array}$$

où les indices i sont pris modulo e, où chaque V_j, pour $j \neq i$, apparaît $\frac{p-1}{e}$ fois et où V_i apparaît $\frac{p-1}{e}+1$ fois (pour les détails, voir [Alp86], sections 5 et 17).

Par le théorème 1.7.9, les blocs de kG sont en bijection avec les blocs de $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$, et par conséquent, à B correspond un bloc b dans $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$. De plus les foncteurs de Mackey simples appartenant à ce bloc b doivent être indexés par un p-sous-groupe de G, vu qu'ils appartiennent à $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$. Ils sont donc de la forme $S_{1,V}$ ou $S_{C,V}$, pour un kG-module simple V, appartenant au bloc B (voir la remarque qui suit le théorème 1.7.9). Par conséquent, les foncteurs de Mackey simples de b sont les S_{1,V_i} et S_{C,V_i} pour $i = 1, \ldots, e$.

Dans cette situation, la structure des foncteurs de Mackey projectifs du bloc b peut être décrite explicitement, grâce au résultat suivant de Thévenaz et Webb :

Théorème 3.2.1. *Avec les notations précédentes, si $1 \leq i \leq e$, le foncteur projectif P_{C,V_i} est unisériel et sa série de Loewy est donnée par*

$$P_{C,V_i} = \begin{array}{c} S_{C,V_i} \\ S_{1,V_i} \\ S_{C,V_i} \end{array}$$

Le foncteur projectif P_{1,V_i} possède un socle simple, isomorphe à S_{1,V_i}, et $\mathrm{Rad}(P_{1,V_i})/\mathrm{Soc}(P_{1,V_i}) \cong M_i \oplus S_{C,V_i}$ *où M_i est un module unisériel dont la série de Loewy est la suivante :*

$$M_i = \begin{array}{l} S_{1,V_{i+1}} \\ S_{1,V_{i+2}} \\ \vdots \\ S_{1,V_{i-2}} \\ S_{1,V_{i-1}} \end{array}$$

où chaque facteur de composition S_{1,V_j}, pour $j \neq i$, apparaît $\frac{p-1}{e}$ fois et où S_{1,V_i} apparaît $\frac{p-1}{e} - 1$ fois. En d'autres termes, la série de Loewy de P_{1,V_i} est égale à :

$$P_{1,V_i} = \begin{array}{ccc} & S_{1,V_i} & \\ S_{1,V_{i+1}} & & S_{C,V_i} \\ S_{1,V_{i+2}} & & \\ \vdots & & \\ S_{1,V_{i-1}} & & \\ & S_{1,V_i} & \end{array}$$

où chaque facteur de composition S_{1,V_j}, pour $j \neq i$, apparaît $\frac{p-1}{e}$ fois et où V_i apparaît $\frac{p-1}{e} + 1$ fois.

Preuve : voir [TW95], théorème 20.1.

Remarque : Dans le cas où $p = 2$, alors e doit diviser $p - 1$, donc $e = 1$ et $M = 0$. Par conséquent, le seul kG-module simple est le module trivial k et la série de Loewy du foncteur projectif $P_{1,k}$ est égale à :

$$P_{1,k} = \begin{array}{c} S_{1,k} \\ S_{C,k} \\ S_{1,k} \end{array}$$

Commençons par étudier le cas où $P = C_p$ est le groupe cyclique d'ordre p. Dans ce cas, le seul kP-module simple est le module trivial k (voir la proposition 1.3.3), et il y a deux foncteurs de Mackey simples : $S_1 = S_{1,k}$ et

$S_p = S_{P,k}$, dont les couvertures projectives respectives sont notées $P_1 = P_{1,k}$ et $P_p = P_{P,k}$. Le foncteur P_1 peut être décrit explicitement à l'aide du théorème 1.5.4 qui affirme que $P_1 = FP_{P_k}$ où P_k est la couverture projective du module trivial k. Dans notre cas, $P_k = kP$ (voir la proposition 1.3.3) et, par suite, $P_1 \cong FP_{kP}$. En particulier, $P_1(1) = kP$ et

$$P_1(P) = (kP)^P = k\omega_P \cong k \quad \text{où} \quad \omega_P = \sum_{g \in P} g\,.$$

Donc les facteurs de composition de P_1 sont p fois S_1 et une fois S_p (voir la remarque qui suit la proposition 1.4.12).

Supposons que $p \neq 2$. Vu le théorème 3.2.1, $\mathrm{Rad}(P_1)/\mathrm{Soc}(P_1) \cong M \oplus S_p$ où M est unisériel et possède une unique série de composition, de longueur $p-2$, dont tous les facteurs sont isomorphes à S_1. Par conséquent, les couches de la série de Loewy de P_1 peuvent se représenter de la manière suivante :

$$P_1 = \begin{array}{ccc} & S_1 & \\ S_1 & & S_p \\ S_1 & & \\ \vdots & & \\ S_1 & & \\ & S_1 & \end{array}$$

Notons encore $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ les sous-foncteurs de P_1 définis par $M = \tilde{M}/\mathrm{Soc}(P_1)$ et $S_p = \tilde{N}/\mathrm{Soc}(P_1)$, respectivement. Comme M et S_p sont unisériels, et que le socle de $\tilde{M}$ et celui de $\tilde{N}$ sont tous deux égaux à $\mathrm{Soc}(P_1)$, il s'ensuit que $\tilde{M}$ est unisériel avec $p-1$ fois le facteur de composition S_1 et que $\tilde{N}$ est unisériel avec deux facteurs de composition : son socle égal à S_1 et sa tête égale à S_p.

Si $p = 2$, les couches de la série de Loewy de P_1 peuvent se représenter par $P_1 = \begin{array}{c} S_1 \\ S_p \\ S_1 \end{array}$, vu la remarque qui suit le théorème 3.2.1.

Le foncteur P_p peut quant à lui être décrit par le théorème 1.5.2 qui affirme que le foncteur de Burnside est isomorphe à :

$$B^P \cong \bigoplus_{H \leq P} \dim_k(S_{H,k}(P)) \cdot P_{H,k}\,.$$

Comme $S_1(P) = 0$ et que $S_p(P) = k$, il s'ensuit que $B^P = P_p$. Par suite $P_p(1) = k1/1 \cong k$, où $1/1$ est le 1-ensemble qui engendre $B(1)$; et de même, $P_p(P) = B(P) = kP/1 \oplus kP/P$, où $P/1$ et P/P sont les P-ensembles qui engendrent $B(P)$ (voir l'exemple du foncteur de Burnside à la page 13). Par conséquent les facteurs de composition de P_p sont deux fois S_p et une fois S_1 (vu la remarque qui suit la proposition 1.4.12). De plus, le théorème 3.2.1 montre que les couches de la série de Loewy de P_p peuvent se représenter de la manière suivante :

$$P_p = \begin{array}{c} S_p \\ S_1 \\ S_p \end{array}$$

Nous allons tout d'abord construire une résolution projective minimale du foncteur simple S_p :

Proposition 3.2.2. *Soit $P = C_p$ le groupe cyclique d'ordre p. Le foncteur de Mackey simple $S_p = S_{P,k}$ possède une résolution projective minimale périodique, de période 4. Plus précisément, sa résolution projective minimale est donnée par :*

$$\ldots \longrightarrow Q_3 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow S_p \longrightarrow 0$$

où $Q_j = \left\{ \begin{array}{ll} P_p = P_{P,k} & si\ j \equiv 0, 3\ mod\ 4 \\ P_1 = P_{1,k} & si\ j \equiv 1, 2\ mod\ 4 \end{array} \right. .$

Preuve : Supposons que $p \neq 2$. En utilisant les couches de la série de Loewy du foncteur P_p décrites précédemment, nous obtenons que P_p se surjecte sur S_p. Le noyau de cette application est égal à $R = \mathrm{Rad}(P_p)$, qui possède deux facteurs de composition S_1 et S_p et dont le socle est S_p. Par conséquent la tête de R est égale à S_1 et, par suite, sa couverture projective est égale à P_1, car la couverture projective d'un module U est égale à la couverture projective de la tête de U (voir la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15). Il faut ensuite comprendre quel est le noyau de la surjection de P_1 sur R. Pour cela, remarquons que le quotient $P_1/\tilde{M}$ possède deux facteurs de composition : S_1 et S_p, et que la tête de ce quotient est égale à S_1, vu que S_1 est l'unique quotient simple de P_1. Par conséquent, $P_1/\tilde{M} \cong R$, et de plus, la couverture projective de $\tilde{M}$ est égale à P_1, vu que c'est un module unisériel avec tous ses facteurs de composition égaux à S_1. La situation est donc la suivante :

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_p \arrow[r, two heads] & S_p \arrow[r] & 0 \\
& \tilde{M} \arrow[ur, hook] & & R \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Le noyau de la surjection de P_1 sur $\tilde{M}$ possède deux facteurs de composition : S_1 et S_p. De plus, son socle est égal à S_1 du fait que le socle de P_1 est S_1. Par conséquent, ce noyau est isomorphe à $\tilde{N}$. De plus, la couverture projective de $\tilde{N}$ est égale à la couverture projective de la tête de $\tilde{N}$, qui est S_p, donc $P_{\tilde{N}} = P_p$. Finalement, le noyau de la surjection de P_p sur $\tilde{N}$ ne possède qu'un facteur de composition : S_p, autrement dit, il est simple. En résumé, nous avons :

$$\begin{tikzcd}
& P_p \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_p \arrow[rr, two heads] & & S_p \arrow[r] & 0 \\
S_p \arrow[ur, hook] & & \tilde{N} \arrow[ur, hook] & & \tilde{M} \arrow[ur, hook] & & R \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

A partir de ce point, il suffit de répéter la suite d'applications ci-dessus, en repartant de S_p pour obtenir une résolution projective minimale de S_p qui est périodique, de période 4, et qui est égale à :

$$\cdots \to P_p \to P_1 \to P_1 \to P_p \to P_p \to P_1 \to P_1 \to P_p \to S_p \to 0$$

d'où le résultat, lorsque p est impair.

Supposons ensuite que $p = 2$. Rappelons que dans ce cas, P_1 et P_2 sont tous deux unisériels et que leurs séries de Loewy sont $P_1 = \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_1 \end{matrix}$ et $P_2 = \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{matrix}$, respectivement. Comme dans le cas où p est impair, la couverture projective de S_2 est P_2 et le noyau de la surjection de P_2 sur S_2 est $R = \mathrm{Rad}(P_2)$, qui possède deux facteurs de composition : S_1 et S_2, et dont le socle est S_2. Par conséquent, la couverture projective de R est P_1 et, cette fois, le noyau de la surjection de P_1 sur R est simple, égal à S_1. La couverture projective de S_1 est P_1 et le noyau correspondant est égal $R' = \mathrm{Rad}(P_1)$ qui possède deux facteurs de composition : S_2 et S_1, et dont le socle est S_1. Par conséquent, la couverture projective de R' est P_2 et, comme dans le cas précédent, le noyau de la surjection de P_2 sur R' est simple, isomorphe à S_2. En résumé, la situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
& P_2 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_2 \arrow[rr, two heads] & & S_2 \arrow[r] & 0 \\
S_2 \arrow[ur, hook] & & R' \arrow[ur, hook] & & S_1 \arrow[ur, hook] & & R \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

De nouveau, il suffit de répéter la suite d'applications ci-dessus, en repartant de S_2 pour obtenir le résultat lorsque $p = 2$.

□

Remarque : Lorsque $p = 2$, la preuve précédente nous permet de construire une résolution projective minimale de S_1, vu que S_1 apparaît parmi les noyaux de la résolution projective de S_2. Explicitement, cette résolution est donnée par

$$\cdots \to P_1 \to P_2 \to P_2 \to P_1 \to P_1 \to P_2 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0$$

et elle est également périodique, de période 4.

Traitons ensuite le cas du foncteur simple S_1. Cette fois, nous allons déterminer explicitement les homomorphismes qui apparaissent dans sa résolution projective minimale, et dans ce but, le résultat suivant nous sera utile, vu que $P_p = B^P$ et $P_1 = B^1 \uparrow_1^P$:

Proposition 3.2.3. *Soient M un foncteur de Mackey associé à un groupe G et $m \in M(G)$. Il existe un unique morphisme de foncteur de Mackey de B^G dans M, qui envoie G/G sur m.*

Preuve : voir [TW95], corollaire 8.2.

Par conséquent, si M est un foncteur de Mackey associé à un groupe G et que H est un sous-groupe de G, pour définir un homomorphisme de $B^H \uparrow_H^G$ dans M, il suffit de choisir un élément $m \in M(H)$. En effet, vu la proposition précédente, il existe alors un unique homomorphisme de B^H dans $M \downarrow_H^G$ qui envoie H/H sur m. Puis par adjonction (voir la proposition 1.4.3), nous obtenons un homomorphisme de $B^H \uparrow_H^G$ dans M. Cette adjonction est donnée explicitement de la manière suivante : soient $H \leq G$, $M \in \mathrm{Mack}_k(H)$ et $N \in \mathrm{Mack}_k(G)$. Nous avons alors

$$\mu : \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}(M, N \downarrow_H^G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}(M \uparrow_H^G, N)$$

et, pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mu_k(H)}(M, N \downarrow_H^G)$ et $K \leq G$,

$$\mu(\varphi)(K) : M \uparrow_H^G (K) = \bigoplus_{g \in [K\backslash G/H]} M(H \cap K^g) \longrightarrow N(K)$$

est définie par

$$\mu(\varphi)(K)\left((x_g)_{g\in[K\backslash G/H]}\right) = \sum_{g\in[K\backslash G/H]} I^K_{{}^gH\cap K}\, c_g\, \varphi(H \cap K^g)(x_g)$$

(voir la preuve de la proposition 4.2 de [TW90]).

Proposition 3.2.4. *Soit $P = C_p$ le groupe cyclique d'ordre p. Le foncteur de Mackey simple $S_1 = S_{1,k}$ possède une résolution projective minimale périodique, de période 4. Plus précisément, sa résolution projective minimale est donnée par :*

$$\dots \longrightarrow Q_3 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

où $Q_j = \begin{cases} P_1 & si\ j \equiv 0,3\ mod\ 4, \\ P_1 \oplus P_p & si\ j \equiv 1,2\ mod\ 4, \end{cases}$ *si p est un nombre premier impair*

et où $Q_j = \begin{cases} P_1 & si\ j \equiv 0,3\ mod\ 4, \\ P_p & si\ j \equiv 1,2\ mod\ 4, \end{cases}$ *si $p = 2$.*

Preuve : Si $p = 2$, le résultat découle de la preuve de la proposition 3.2.2 (et plus précisément, de la remarque qui suit la preuve).
Supposons que $p \neq 2$. Nous allons construire explicitement les homomorphismes de cette résolution car contrairement à la résolution projective minimale de S_p, les noyaux qui apparaissent ne sont plus unisériels. Rappelons que $P_p \cong B^P$ et que $P_1 = FP_{kP} = B^1 \uparrow_1^P$. Le foncteur P_p se représente donc de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} P_p(P) = & kP/1 \quad \oplus \quad kP/P & \\ & {\scriptstyle I_1^P} \nwarrow \quad \swarrow {\scriptstyle R_1^P} & \\ P_p(1) = & k1/1 & \end{array}$$

et toutes les conjugaisons sont triviales (pour les applications d'induction, de restriction et de conjugaison d'un foncteur de Burnside, voir la page 13).

Posons $P = \langle h \rangle$ et $kP = \mathrm{vect}_k(v_1, \dots, v_p)$ où $v_i = (h-1)^i$, pour tout $i = 1 \dots, p$. Alors $hv_i = v_i + v_{i+1}$ si $i < p$ et $hv_p = v_p$. Le foncteur P_1 se représente alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} P_1(P) = & kv_p & \\ & {\scriptstyle I_1^P} \nearrow \quad \searrow {\scriptstyle R_1^P} & \\ P_1(1) = & kv_1 \oplus \dots \oplus kv_p & \end{array}$$

et la conjugaison par le générateur h de P est définie par $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ si $i < p$ et $c_h(v_p) = v_p$ (pour les applications d'induction, de restriction et de conjugaison d'un foncteur point fixe, voir la page 14).

La couverture projective du foncteur S_1 est égale à P_1 par définition. De plus, vu ce qui précède, pour définir une application de $P_1 = B^1 \uparrow_1^P$ dans S_1, il suffit de choisir un élément $m \in S_1(1) = k$. Choisissons alors l'élément

$m = 1$, ce qui nous donne, à l'aide de la formule qui précède cette proposition, l'application $\alpha_1 : P_1 \to S_1$ définie par $\alpha_1(P) = 0$ et

$$\begin{array}{rccc} \alpha_1(1) : & kP & \to & k \\ & \sum\limits_{g\in P} \lambda_g g & \mapsto & \sum\limits_{g\in P} \lambda_g \end{array}$$

autrement dit, $\alpha_1(1)$ est l'homomorphisme d'augmentation.

Soit K_1 le noyau de α_1. Alors K_1 est le sous-foncteur de P_1 défini par $K_1(P) = kv_p \cong k$ et $K_1(1) = \mathrm{Rad}(kP) = \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_p)$, avec les applications de restriction, d'induction et de conjugaison induites par celles de P_1. Par suite, le radical de K_1 est donné par $\mathrm{Rad}(K_1)(1) = \mathrm{vect}_k(v_3, \ldots, v_p)$ et $\mathrm{Rad}(K_1)(P) = 0$, d'où $\mathrm{Hd}(K_1) = K_1/\mathrm{Rad}(K_1) \cong S_1 \oplus S_p$. Il s'ensuit que la couverture projective de K_1 est égale à $P_1 \oplus P_p$ (en utilisant comme avant la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15). Il faut donc définir une application α_2 de $P_1 \oplus P_p$ dans P_1 dont l'image est égale à K_1.

Commençons par définir $\beta_2 : P_1 \to P_1$. Comme avant, il suffit de choisir un élément dans $P_1(1) = kP$. Vu que $K_1(1) = \mathrm{Rad}(kP)$ qui est engendré, comme kP-module par $v_2 = h-1$, c'est l'élément v_2 que nous allons choisir. L'application β_2 correspondante est alors définie par

$$\begin{array}{rccc} \beta_2(1) : & kP & \longrightarrow & kP \\ & x & \longmapsto & (h-1)x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta_2(P) : & kv_p & \longrightarrow & kv_p \\ & \lambda v_p & \longmapsto & I_1^P(\lambda v_2) = 0 \end{array}$$

donc $\beta_2(P) = 0$.

Définissons ensuite $\gamma_2 : P_p \to P_1$. Cette fois, il faut choisir un élément dans $P_1(P) = kv_p$ et le choix canonique est $v_p \in kv_p$. L'application correspondante γ_2 est alors définie par

$$\begin{array}{rccc} \gamma_2(P) : & B(P) & \longrightarrow & kv_p \\ & \lambda_1 \cdot P/1 + \lambda_2 \cdot P/P & \longmapsto & \lambda_1 I_1^P(v_p) + \lambda_2 \cdot v_p = \lambda_2 \cdot v_p \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_2(1) : & B(1) & \longrightarrow & kP \\ & \lambda \cdot 1/1 & \longmapsto & \gamma_2(P)(R_1^P(\lambda \cdot P/P)) = \lambda v_p \end{array}$$

Posons alors $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2 : P_1 \oplus P_p \to P_1$ et $K_2 = \mathrm{Ker}(\alpha_2)$. De par sa définition, α_2 est bien un morphisme de foncteurs de Mackey, dont l'image

est égale à K_1. Il faut à présent déterminer la couverture projective du foncteur K_2.
Remarquons tout d'abord que $K_2(1) = \mathrm{vect}_k(v_p, -v_{p-1} + 1/1) \subseteq kP \oplus B(1)$ et que $K_2(P) = kv_p \oplus kP/1 \subseteq kv_p \oplus B(P)$. Par conséquent, le foncteur K_2 peut se représenter de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} K_2(P) = & kv_p & \oplus & kP/1 \\ & \Big\downarrow R_1^P & & \Big\uparrow I_1^P \\ K_2(1) = & kv_p & \oplus & k(-v_p + 1/1) \end{array}$$

et la conjugaison par le générateur h de P est donnée par $c_h(v_p) = v_p$ et $c_h(-v_{p-1} + 1/1) = -v_p + (-v_{p-1} + 1/1)$. Le radical de K_2 est donc donné par $\mathrm{Rad}(K_2)(1) = kv_p$ et $\mathrm{Rad}(K_2)(P) = kP/1$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Hd}(K_2) = K_2/\mathrm{Rad}(K_2) \cong S_1 \oplus S_p.$$

Comme avant, nous en déduisons que la couverture projective de K_2 est égale à $P_1 \oplus P_p$, et nous devons définir un morphisme $\alpha_3 : P_1 \oplus P_p \to P_1 \oplus P_p$ dont l'image est K_2.

Tout d'abord définissons $\beta_3 : P_1 \to P_1 \oplus P_p$. Il faut donc choisir un élément dans $kP \oplus B(1)$ contenu dans $K_2(1) = \mathrm{vect}_k(v_p, -v_{p-1} + 1/1)$. Plus précisément, il faut que β_3 se surjecte sur le quotient de K_2 isomorphe à S_1. Comme $(K_2/\mathrm{Rad}(K_2))(1) = \overline{k(-v_{p-1} + 1/1)}$, l'élément que nous allons choisir est $-v_{p-1} + 1/1$. Par suite, nous obtenons un morphisme β_3, qui est défini par

$$\begin{array}{rccc} \beta_3(1): & kP & \longrightarrow & kP \oplus B(1) \\ & x & \longmapsto & (-(h-1)^{p-2}x, \epsilon(x) \cdot 1/1) \end{array}$$

où ϵ est l'homomorphisme d'augmentation. En particulier, si l'on exprime x en fonction des v_i, c'est-à-dire $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p$, alors

$$\beta_3(1)(x) = (-\lambda_1 \cdot v_{p-1} - \lambda_2 \cdot v_p, \lambda_1 \cdot 1/1)$$

L'évaluation de β_3 en P est définie par

$$\begin{array}{rccc} \beta_3(P): & kv_p & \longrightarrow & kv_p \oplus B(P) \\ & \lambda v_p & \longmapsto & (0, \lambda \cdot P/1) \end{array}$$

Définissons ensuite $\gamma_3 : P_p \to P_1 \oplus P_p$. Comme avant, il faut que γ_3 se surjecte sur le quotient de K_2 isomorphe S_p. Comme $(K_2/\mathrm{Rad}(K_2))(P) = \overline{kv_p}$, γ_3

sera l'homomorphisme correspondant à l'élément $(v_p, 0) \in K_2(P)$, et défini par

$$\begin{array}{llcl}
\gamma_3(P): & B(P) & \longrightarrow & kv_p \oplus B(P) \\
 & \lambda_1 \cdot P/1 + \lambda_2 \cdot P/P & \longmapsto & \lambda_1 I_1^P(v_p, 0) + \lambda_2 \cdot (v_p, 0) = \lambda_2 \cdot (v_p, 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\gamma_3(1): & B(1) & \longrightarrow & kP \oplus B(1) \\
 & \lambda \cdot 1/1 & \longmapsto & \gamma_3(P)(R_1^P(\lambda v_p, 0)) = (\lambda v_p, 0)
\end{array}$$

Par suite, $\alpha_3 = \beta_3 + \gamma_3 : P_1 \oplus P_p \to P_1 \oplus P_p$ est un morphisme de foncteurs de Mackey, dont l'image est égale à K_2. Posons alors $K_3 = \mathrm{Ker}(\alpha_3)$. La situation est alors la suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \oplus P_p \arrow[rr, "\alpha_3"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[r, two heads, "\alpha_1"] & S_1 \arrow[r] & 0 \\
K_3 \arrow[ur, hook] & & K_2 \arrow[ur, hook] & & K_1 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Remarquons ensuite que $K_3(1) = \mathrm{vect}_k(v_2 + 1/1, v_3, \ldots, v_p) \subseteq kP \oplus B(1)$ et que $K_3(P) = kP/1$. Donc K_3 se représente de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
K_3(P) = & & kP/1 & \\
K_3(1) = & k(v_2 \oplus 1/1) \arrow[ur, "I_1^P"] & \oplus & kv_3 \oplus \cdots \oplus kv_p
\end{tikzcd}$$

et la conjugaison par le générateur h de P est définie par $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ pour $2 < i < p$, $c_h(v_p) = v_p$ et $c_h(v_2 + 1/1) = (v_2 + 1/1) + v_3$.

Par suite, le radical de K_3 est donné par $\mathrm{Rad}(K_3)(1) = \mathrm{vect}_k(v_3, \ldots, v_p)$ et $\mathrm{Rad}(K_3)(P) = kP/1$. Il s'ensuit que $\mathrm{Hd}(K_3) = K_3/\mathrm{Rad}(K_3) \cong S_1$, donc la couverture projective de K_3 est égale à P_1. Il nous faut finalement définir un morphisme $\alpha_4 : P_1 \to P_1 \oplus P_p$ dont l'image est K_3.

Pour cela, il faut choisir un élément de $kP \oplus B(1)$ appartenant à $K_3(1)$. Comme α_4 doit se surjecter sur le quotient de K_3 isomorphe à S_1 et vu que $(K_3/\mathrm{Rad}(K_3))(1) = \overline{k(v_2 + 1/1)}$, l'élément que nous allons choisir sera $v_2 + 1/1$. L'application α_4 est alors définie par

$$\begin{array}{rlcl}
\alpha_4(1): & kP & \longrightarrow & kP \oplus B(1) \\
 & x & \longmapsto & ((h-1)x, \epsilon(x) \cdot 1/1)
\end{array}$$

où ϵ est l'homomorphisme d'augmentation. En particulier, si l'on exprime x en fonction des v_i, c'est-à-dire $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_p \cdot v_p$, alors

$$\alpha_4(1)(x) = (\lambda_1 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot v_p, \lambda_1 \cdot 1/1)$$

L'évaluation de α_4 en P est définie par

$$\begin{array}{rccc} \alpha_4(P): & kv_p & \longrightarrow & kv_p \oplus B(P) \\ & \lambda v_p & \longmapsto & (0, \lambda \cdot P/1) \end{array}$$

Posons $K_4 = \mathrm{Ker}(\alpha_4)$. Nous avons alors $K_4(1) = kv_p$ et $K_4(P) = 0$, donc $K_4 \cong S_1$. Par conséquent, nous avons :

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[rr, "\alpha_4"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr, "\alpha_3"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[r, two heads, "\alpha_1"] & S_1 \arrow[r] & 0 \\
S_1 \arrow[ur, hook] & & K_3 \arrow[ur, hook] & & K_2 \arrow[ur, hook] & & K_1 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de répéter la suite d'applications ci-dessus en repartant de S_1 pour obtenir une résolution projective minimale de S_1. Cette dernière sera donc égale à

$$\cdots \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \to P_1 \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \to S_1 \to 0$$

d'où le résultat.

□

Les propositions 3.1.4, 3.2.2 et 3.2.4 nous permettent de calculer les groupes d'extension entre foncteurs simples pour le groupe cyclique d'ordre p :

Proposition 3.2.5. *Soient P le groupe cyclique d'ordre p et $S_1 = S_{1,k}$, $S_p = S_{P,k}$, les deux foncteurs de Mackey simples associés à P. Alors*

$$\mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(S_p, S_1) = \mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(S_1, S_p) = \begin{cases} k & si\ j \equiv 1, 2\ mod\ 4, \\ 0 & si\ j \equiv 0, 3\ mod\ 4, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(S_p, S_p) = \begin{cases} k & si\ j \equiv 0, 3\ mod\ 4, \\ 0 & si\ j \equiv 1, 2\ mod\ 4, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(S_1, S_1) = k\ pour\ tout\ j \geq 0,\ si\ p \neq 2,\ et$$

$$\mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(S_1, S_1) = \begin{cases} k & si\ j \equiv 0, 3\ mod\ 4, \\ 0 & si\ j \equiv 1, 2\ mod\ 4, \end{cases} \quad si\ p = 2.$$

Preuve : Les propositions 3.2.2 et 3.2.4 nous fournissent des résolutions projectives minimales des foncteurs simples S_1 et S_p :

$$\cdots \to P_p \to P_1 \to P_1 \to P_p \to P_p \to P_1 \to P_1 \to P_p \to S_p \to 0$$

$$\cdots \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \to P_1 \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \oplus P_p \to P_1 \to S_1 \to 0$$

si $p \neq 2$.

Si $p = 2$, la résolution projective minimale du foncteur S_1 devient :

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_1 \to P_2 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0.$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.1.4, qui nous dit que la dimension sur k de $\mathrm{Ext}^j_{\mu_k(P)}(T, S)$, où T et S sont des foncteurs simples, est égale au nombre de fois où P_S apparaît dans le $j^{\text{ème}}$ terme d'une résolution projective minimale de T.

$\square$

Intéressons-nous ensuite au cas où G est un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C normal, cyclique d'ordre p. Dans ce cas, nous pouvons construire une résolution projective minimale des foncteurs simples indexés par C, de manière analogue au cas de C_p :

Proposition 3.2.6. *Soient G un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C, normal, cyclique d'ordre p, b un bloc de foncteurs de Mackey dans* $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$ *et B le bloc correspondant de kG.*
Notons, comme auparavant, $V_1, \ldots, V_e$ les kG-modules simples dans B, où les indices sont pris modulo e. Fixons $1 \leq i \leq e$. Le foncteur de Mackey simple S_{C,V_i} possède alors la résolution projective minimale :

$$\ldots \longrightarrow B_{i+3} \longrightarrow B_{i+2} \longrightarrow B_{i+1} \longrightarrow B_i \longrightarrow S_{C,V_i} \longrightarrow 0$$

où B_j désigne la suite exacte suivante : $P_{C,V_{j+1}} \to P_{1,V_{j+1}} \to P_{1,V_j} \to P_{C,V_j}$ pour tout $j = 1, \ldots, e$. En particulier, cette résolution est périodique, de période $4e$.

Preuve : Si $p = 2$, alors e doit diviser $p - 1$, donc $e = 1$. Le seul foncteur de Mackey simple indexé par C, est alors $S_{C,k}$ et nous obtenons le résultat en utilisant la même preuve que celle de la proposition 3.2.2.

Supposons alors que $p \neq 2$. Nous allons faire une preuve analogue à celle de la proposition 3.2.2, en utilisant la structure des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, donnée dans le théorème 3.2.1.

La couverture projective de S_{C,V_i} est égale à P_{C,V_i} et le noyau de cette surjection est $R_i = \mathrm{Rad}(P_{C,V_i})$. Or R_i possède deux facteurs de composition : S_{1,V_i} et S_{C,V_i}, et son socle est S_{C,V_i} vu que c'est le cas de P_{C,V_i}. Par conséquent, la tête de R_i est égale à S_{1,V_i}, donc la couverture projective de R_i est P_{1,V_i} (vu la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15).

Il faut donc étudier le noyau de la surjection de P_{1,V_i} sur R_i. Rappelons que, vu le théorème 3.2.1, $\mathrm{Rad}(P_{1,V_i})/\mathrm{Soc}(P_{1,V_i}) \cong M_i \oplus S_{C,V_i}$, où M_i est un module unisériel dont la série de Loewy est la suivante :

$$M_i = \begin{array}{l} S_{1,V_{i+1}} \\ S_{1,V_{i+2}} \\ \vdots \\ S_{1,V_{i-1}} \\ S_{V_i} \end{array}$$

Appelons $\tilde{M}_i$ (respectivement $\tilde{N}_i$), le sous-foncteur de R_i qui est défini par $\tilde{M}_i/\mathrm{Soc}(P_{1,V_i}) = M_i$ (respectivement $\tilde{N}_i/\mathrm{Soc}(P_{1,V_i}) = S_{C,V_i}$). Le foncteur $P_{1,V_i}/\tilde{M}_i$ possède alors deux facteurs de composition S_{1,V_i} et S_{C,V_i}. De plus, sa tête doit être égale à S_{1,V_i}, vu que S_{1,V_i} est l'unique quotient simple de P_{1,V_i}. Il s'ensuit que $P_{1,V_i}/\tilde{M}_i \cong R_i$. Comme le module M_i est unisériel et que sa tête est égale à $S_{1,V_{i+1}}$, il en va de même pour $\tilde{M}_i$. Donc la couverture projective de $\tilde{M}_i$ est égale à $P_{1,V_{i+1}}$. En résumé, la situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
P_{1,V_{i+1}} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{C,V_i} \arrow[r, two heads] & S_{C,V_i} \arrow[r] & 0 \\
& \tilde{M}_i \arrow[ur, hook] & & R_i \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Le noyau de la surjection de $P_{1,V_{i+1}}$ sur $\tilde{M}_i$ possède à nouveau deux facteurs de composition : $S_{1,V_{i+1}}$ et $S_{C,V_{i+1}}$. Comme c'est un sous-foncteur de $P_{1,V_{i+1}}$, son socle doit être égal à $S_{1,V_{i+1}}$. Par conséquent, ce noyau est isomorphe au foncteur $\tilde{N}_{i+1}$ défini ci-dessus. De plus, sa couverture projective est égale à $P_{C,V_{i+1}}$. Finalement, remarquons que le noyau de la surjection de $P_{C,V_{i+1}}$ sur $\tilde{N}_{i+1}$ n'a qu'un seul facteur de composition qui est $S_{C,V_{i+1}}$; autrement dit, il est simple. La résolution projective de S_{C,V_i} se prolonge donc de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
& P_{C,V_{i+1}} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_{i+1}} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{C,V_i} \arrow[r, two heads] & S_{C,V_i} \\
S_{C,V_{i+1}} \arrow[ur, hook] & & \tilde{N}_{i+1} \arrow[ur, hook] & & \tilde{M}_i \arrow[ur, hook] & & R_i \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Comme la suite d'applications ci-dessus est définie pour tout $i = 1, \ldots, e$, il suffit de la répéter à partir du foncteur $S_{C,V_{i+1}}$ en décalant les indices à chaque fois pour obtenir une résolution projective minimale du foncteur S_{C,V_i}, ce qui termine la preuve de la proposition.

□

La proposition précédente nous permet donc de calculer une partie des groupes d'extension entre foncteurs simples :

Proposition 3.2.7. *Soit G un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C, normal, cyclique d'ordre p, b un bloc de foncteurs de Mackey dans* $\mathrm{Mack}_k(G,1)$ *et B le bloc correspondant de kG.*
Notons, comme avant, $V_1, \ldots, V_e$ les kG-modules simples dans B, où les indices sont pris modulo e. Pour $1 \leq i, j \leq e$, appelons $x_{i,j}$ l'entier compris entre 1 et e, tel que $x_{i,j} \equiv j - i$ mod e et $y_{i,j}$ l'entier compris entre 1 et e, tel que $y_{i,j} \equiv j - i - 1$ mod e. Alors

$$\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}\left(S_{C,V_i}, S_{C,V_j}\right) = \begin{cases} k & \textit{si } n \equiv 4x_{i,j}, 4x_{i,j} - 1 \textit{ mod } 4e, \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}\left(S_{C,V_i}, S_{1,V_j}\right) = \begin{cases} k & \textit{si } n \equiv 4y_{i,j} + 2, 4y_{i,j} + 5 \textit{ mod } 4e, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la résolution projective minimale de S_{C,V_i}, pour tout $1 \leq i \leq e$, donnée dans la proposition 3.2.6, puis d'appliquer la proposition 3.1.4, qui nous dit que la dimension sur k de $\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}(T, S)$, où T et S sont des foncteurs simples, est égale au nombre de fois où P_S apparaît dans le $n^{\text{ème}}$ terme d'une résolution projective minimale de T.

□

Par ailleurs, si G est un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C d'ordre p (pas forcément normal), en utilisant la proposition 3.2.6, nous obtenons que les foncteurs simples indexés par C possèdent une résolution projective minimale périodique, même si nous ne pouvons pas la calculer explicitement ; autrement dit nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3.2.8. *Soient G un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C d'ordre p et V un $k\overline{N}_G(C)$-module simple. Le foncteur de Mackey simple $S^G_{C,V}$ possède alors une résolution projective périodique, de période divisant $4e$, où e est le nombre de modules simples appartenant au même bloc de $N_G(C)$ que le module V.*

Preuve : En utilisant la définition du foncteur $S^G_{C,V}$, nous obtenons que $S^G_{C,V} = S^{N_G(C)}_{C,V} \uparrow^G_{N_G(C)}$. Vu la proposition 3.2.6, la résolution projective minimale, $(P_\star)$, du foncteur $S^{N_G(C)}_{C,V}$ est périodique, de période $4e$, où e est le nombre de modules simples appartenant au même bloc de $N_G(C)$ que le module V.

Appliquons ensuite le foncteur d'induction de $N_G(C)$ à G à la résolution $(P_\star)$. Comme le foncteur d'induction est exact (proposition 1.4.3) et que l'induit d'un foncteur de Mackey projectif est projectif (proposition 1.5.5), nous obtenons une résolution projective de $S^G_{C,V}$ qui est, en particulier, périodique. Le corollaire 3.1.7 nous dit alors que la résolution projective minimale de $S^G_{C,V}$ est également périodique, de période divisant $4e$, vu que le foncteur $S^G_{C,V}$ n'est pas projectif car C n'est pas un sous-groupe p-parfait de G (voir [TW95], corollaire 17.3).

$\square$

Il nous reste à déterminer une résolution projective des foncteurs simples S_{1,V_i} pour $i = 1, \ldots, e$. Comme dans le cas du groupe cyclique d'ordre p, c'est un problème plus difficile, car les noyaux qui apparaissent dans une telle résolution ne sont plus unisériels. Nous allons donc traiter uniquement le cas dans lequel le groupe G est égal au produit semi-direct $C \rtimes C_e$, où $C \cong C_p$, où e divise $p-1$ et où C_e agit fidèlement sur C.

Remarquons que ce cas est le cas fondamental dans le cadre des algèbres de groupes kG, où G est un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p. En effet, on peut montrer que si B est un bloc de l'algèbre $kN_G(C)$, alors B est Morita-équivalent à l'algèbre $k(C \rtimes C_e)$, où e divise $p-1$ et où C_e agit fidèlement sur C ; autrement dit la catégorie des B-modules est équivalente à la catégorie des $k(C \rtimes C_e)$-modules, et les modules simples et projectifs sont préservés par cette équivalence (voir [Ben91], proposition 6.5.4 et section 2.2).

Si $G = C \rtimes C_e$, alors l'algèbre de groupe kG ne possède qu'un seul bloc, qui contient donc tous les kG-module simples, qui sont, comme auparavant, des kG/C-modules simples. Comme $G/C \cong C_e$, il y a exactement e modules simples, $V_1, \ldots, V_e$, qui sont tous de dimension 1. Plus précisément, soit ζ une racine primitive $e^{\text{ème}}$ de l'unité et g un générateur de C_e, alors $V_i = kx_i$ et l'action de g est donnée par $gx_i = \zeta^i x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, e$, ordonnés de manière cyclique. Par conséquent, $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$ contient $2e$ foncteurs de Mackey simples : les S_{1,V_i} et les S_{C,V_i} pour tout $i = 1, \ldots, e$.

Proposition 3.2.9. *Soit $G = C \rtimes C_e$, où $C \cong C_p$, où e divise $p-1$ et où C_e agit fidèlement sur C, et soient $V_1, \ldots, V_e$ les kG-modules simples, où les indices sont pris modulo e. Fixons $1 \leq i \leq e$. Le foncteur de Mackey simple S_{1,V_i} possède alors la résolution projective minimale :*

$$\ldots \longrightarrow B_{i+3} \longrightarrow B_{i+2} \longrightarrow B_{i+1} \longrightarrow B_i \longrightarrow S_{1,V_i} \longrightarrow 0$$

où B_j désigne la suite exacte suivante :

$$P_{1,V_{j+1}} \to P_{C,V_{j+1}} \oplus P_{1,V_j} \to P_{C,V_j} \oplus P_{1,V_{j+1}} \to P_{1,V_j}$$

pour tout $j = 1, \ldots, e$. En particulier, cette résolution est périodique, de période $4e$.

Preuve : Si $p = 2$, alors $e = 1$ et le seul foncteur de Mackey simple indexé par le sous-groupe trivial est $S_{1,k}$. Sa résolution projective minimale est alors la même que celle donnée dans la proposition 3.2.4, avec la même preuve.

Supposons que $p \neq 2$. La proposition 3.2.4 nous dit que le foncteur simple $S_{1,k}^C$ associé au groupe C possède la résolution projective minimale suivante, dans $\mathrm{Mack}_k(C)$, qui est périodique, de période 4 :

$$\cdots \to P_1^C \oplus P_p^C \to P_1^C \to P_1^C \to P_1^C \oplus P_p^C \to P_1^C \oplus P_p^C \to P_1^C \to S_{1,k}^C \to 0$$

où $P_1^C = B^1 \uparrow_1^C$ et $P_p^C = B^C$. Comme le foncteur d'induction est un foncteur exact (voir la proposition 1.4.3), l'induction de C à G de la suite exacte ci-dessus est à nouveau une suite exacte. De plus, par la proposition 2.3.13 et la proposition 2.3.9,

$$S_{1,k}^C \uparrow_C^G \;\cong\; T^G_{1,\,\mathrm{Ind}_C^G(k)} \;\cong\; \bigoplus_{i=1}^{e} S_{1,V_i}^G$$

vu que $\mathrm{Ind}_C^G(k) \;\cong kG/C \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_e$, car l'algèbre kG/C est semi-simple étant donné que p ne divise pas l'ordre du groupe G/C (voir le théorème 1.3.1).

D'autre part, vu le théorème 1.5.2,

$$B^C \uparrow_C^G \cong \bigoplus_{(H,V)} \dim_k(S_{H,V}(C)) \cdot P_{H,V}.$$

Or si $S_{H,V}(C) \neq 0$, alors $H \leq C$, donc $H = 1$ ou C. De plus, comme C agit trivialement sur tout kG-module simple V, $S_{1,V}(C) = I_1^C(V) = 0$, vu que l'induction est la trace relative, qui correspond ici à la multiplication par p. Par conséquent, les seuls foncteurs simples $S_{H,V}$ qui ne sont pas nuls en C, sont les S_{C,V_i}, pour $i = 1, \ldots, e$. Comme les modules V_i sont de dimension 1, nous obtenons alors que $B^C \uparrow_C^G \cong \bigoplus_{i=1}^{e} P_{C,V_i}$.

De même, par le théorème 1.5.2,

$$\left(B^1 \uparrow_1^C\right) \uparrow_C^G = B^1 \uparrow_1^G \cong \bigoplus_{(H,V)} \dim_k(S_{H,V}(1)) \cdot P_{H,V}.$$

Les seuls foncteurs simples qui ne s'annulent pas en 1 sont les S_{1,V_i} et, en utilisant à nouveau le fait que la dimension des kG-modules V_i est égale à 1, nous obtenons que $B^1 \uparrow_1^G \cong \bigoplus_{i=1}^{e} P_{1,V_i}$.

Par conséquent, en induisant la résolution projective du foncteur simple $S_{1,k}^C$ de C à G, nous obtenons la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned}\cdots \to \bigoplus_{j=1}^{e} \left(P_{1,V_j} \oplus P_{C,V_j}\right) \to \bigoplus_{j=1}^{e} P_{1,V_j} \to \bigoplus_{j=1}^{e} P_{1,V_j} \to \bigoplus_{j=1}^{e} \left(P_{1,V_j} \oplus P_{C,V_j}\right) \\ \to \bigoplus_{j=1}^{e} \left(P_{1,V_j} \oplus P_{C,V_j}\right) \to \bigoplus_{j=1}^{e} P_{1,V_j} \to \bigoplus_{j=1}^{e} S_{1,V_j} \to 0\end{aligned}$$

qui est une résolution projective de $\bigoplus_{j=1}^{e} S_{1,V_j}$. Donc si $(P_j)_\star$ est une résolution projective minimale de S_{1,V_j} pour tout $j = 1, \ldots, e$, alors $\bigoplus_{j=1}^{e}(P_j)_\star$ est une résolution projective minimale de $\bigoplus_{j=1}^{e} S_{1,V_j}$ (vu que la résolution projective minimale d'une somme directe de modules est égale à la somme directe des résolutions projectives de chaque module, voir la proposition 1.2.15). Par conséquent, pour tout $i \geq 0$, $\bigoplus_{j=1}^{e} (P_j)_i$ devra être un facteur direct du $i^{\text{ème}}$ terme de la résolution ci-dessus.

Construisons à présent une résolution projective minimale de S_{1,V_i}. La couverture projective de S_{1,V_i} est P_{1,V_i}, et le noyau de la surjection de P_{1,V_i} sur S_{1,V_i} est égale à $R_i = \mathrm{Rad}(P_{1,V_i})$. Vu le théorème 3.2.1,

$$\mathrm{Rad}(P_{1,V_i})/\mathrm{Soc}(P_{1,V_i}) \cong M_i \oplus S_{C,V_i}$$

où M_i est un module unisériel dont la tête est égale à $S_{1,V_{i+1}}$. Il s'ensuit que la tête de R_i est égale à $S_{1,V_{i+1}} \oplus S_{C,V_i}$, et par conséquent, sa couverture projective sera égale à $P_{1,V_{i+1}} \oplus P_{C,V_i}$ (en utilisant les remarques qui suivent la proposition 1.2.15).

Soit K_i le noyau de la surjection de $P_{1,V_{i+1}} \oplus P_{C,V_i}$ sur R_i. Vu que le théorème 3.2.1 nous donne les facteurs de composition de $P_{1,V_{i+1}}$, de P_{C,V_i} et de R_i, nous pouvons en déduire les facteurs de composition de K_i, qui sont S_{1,V_i}, S_{C,V_i}, $S_{1,V_{i+1}}$ et $S_{C,V_{i+1}}$. En particulier, K_i ne peut pas être projectif, car il n'existe pas de foncteurs projectifs indécomposables dont la liste des facteurs de composition est égale à ceux de K_i (ou par la proposition 3.1.3).

La situation est donc la suivante :

$$\begin{tikzcd}
P_{K_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_{i+1}} \oplus P_{C,V_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_i} \arrow[r, two heads] & S_{1,V_i} \arrow[r] & 0 \\
& K_i \arrow[ur, hook] & & R_i \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Or, vu le corollaire 2.1.3, pour tout $1 \leq j \leq e$,

$$\mathrm{Ext}^2_{\mu_k(G)}\left(S_{1,V_i}, S_{C,V_j}\right) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mu_k(G)}\left(S_{C,(V_j)^\star}, S_{1,(V_i)^\star}\right)$$

Rappelons que le module V_l, pour $1 \leq l \leq e$ est défini par $V_l = kx_l$, où l'action du groupe $G/C \cong C_e = \langle g \rangle$ est donnée par $gx_l = \zeta^l x_l$, ζ étant une racine primitive $e^{\text{ème}}$ de l'unité. Par conséquent, si $\varphi \in (V_l)^\star$, alors $g \cdot \varphi = \zeta^{-l}\varphi$ vu que si $v \in V_l$, alors

$$g \cdot \varphi(v) = \varphi(g^{-l}v) = \varphi(\zeta^{-l}v) = \zeta^{-l}\varphi(v).$$

Il s'ensuit que $(V_l)^\star \cong V_{e-l}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^2_{\mu_k(G)}\left(S_{1,V_i}, S_{C,V_j}\right) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mu_k(G)}\left(S_{C,V_{e-j}}, S_{1,V_{e-i}}\right)$$

et, par la proposition 3.2.7, ce dernier terme est non nul seulement si 2 est congru à $4y_{e-j,e-i} + 2$ ou à $4y_{e-j,e-i} + 5$ modulo $4e$, où

$$y_{e-j,e-i} \equiv (e-i) - (e-j) - 1 \pmod{e} = j - i - 1 \pmod{e}$$

autrement dit, ce terme est non nul uniquement si $j = i+1$, et, dans ce cas, il est égal à k.

Vu la proposition 3.1.4, le foncteur P_{K_i} possède donc un facteur direct égal à $P_{C,V_{i+1}}$, et ne possède pas d'autre facteurs directs du type P_{C,V_j}. Comme les facteurs de composition de $P_{C,V_{i+1}}$ sont deux fois $S_{C,V_{i+1}}$ et une fois $S_{1,V_{i+1}}$, le foncteur $P_{C,V_{i+1}}$ ne peut pas se surjecter sur K_i, dont les facteurs de composition sont S_{1,V_i}, S_{C,V_i}, $S_{1,V_{i+1}}$ et $S_{C,V_{i+1}}$. Il s'ensuit que $P_{K_i} = P_{C,V_{i+1}} \oplus P_{1,V_j}$ pour exactement un facteur P_{1,V_j}, car vu les remarques précédentes, $\bigoplus_{i=1}^{e} P_{K_i}$ doit être un facteur de $\bigoplus_{i=1}^{e} (P_{1,V_i} \oplus P_{C,V_i})$. Finalement, j doit être égal à i car le seul foncteur projectif indécomposable P_{1,V_j} qui possède S_{C,V_i} comme facteur de composition est P_{1,V_i}. Nous avons donc démontré que $P_{K_i} = P_{C,V_{i+1}} \oplus P_{1,V_i}$.

Appelons L_i le noyau de la surjection de P_{K_i} sur K_i, et P_{L_i} la couverture projective de L_i. Comme avant, $\bigoplus_{i=1}^{e} P_{L_i}$ doit être un facteur de $\bigoplus_{i=1}^{e} (P_{1,V_i})$. De plus, les facteurs de composition de L_i sont $S_{C,V_{i+1}}$, $\frac{p-1}{e}$ fois S_{1,V_1}, $\frac{p-1}{e}$ fois S_{1,V_2},..., et $\frac{p-1}{e}$ fois S_{1,V_e}. En particulier, L_i ne peut pas être projectif, car il n'existe pas de foncteurs projectifs indécomposables dont la liste des facteurs de composition est égale à ceux de L_i (ou par la proposition 3.1.3). La seule solution est donc que $P_{L_i} = P_{1,V_j}$ pour un certain j. Or le seul foncteur projectif du type P_{1,V_j} qui possède $S_{C,V_{i+1}}$ comme facteur de composition est $P_{1,V_{i+1}}$, autrement dit, $j = i+1$ et $P_{L_i} = P_{1,V_{i+1}}$.

Finalement, le noyau de la surjection de P_{L_i} sur L_i n'a qu'un facteur de composition, $S_{1,V_{i+1}}$; autrement dit, il est simple, égal à $S_{1,V_{i+1}}$. En résumé, la situation est la suivante :

$$
\begin{tikzcd}
 & P_{1,V_{i+1}} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_i} \oplus P_{C,V_{i+1}} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_{i+1}} \oplus P_{C,V_i} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{1,V_i} \arrow[r, two heads] & S_{1,V_i} \\
S_{1,V_{i+1}} \arrow[ur, hook] & & L_i \arrow[ur, hook] & & K_i \arrow[ur, hook] & & R_i \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

Comme la suite d'applications ci-dessus est définie pour tout $i = 1, \ldots, e$, il suffit de la répéter à partir du foncteur $S_{1,V_{i+1}}$ en décalant les indices à chaque fois pour obtenir une résolution projective minimale du foncteur S_{1,V_i}, ce qui termine la preuve la proposition.

□

La proposition précédente nous permet donc de terminer les calculs des groupes d'extension entre foncteurs simples associés à G :

Proposition 3.2.10. *Soit $G = C \rtimes C_e$, où $C \cong C_p$, où e divise $p-1$ et où C_e agit fidèlement sur C. Notons, comme avant, $V_1, \ldots, V_e$ les kG-modules simples, où les indices sont pris modulo e. Pour $1 \leq i, j \leq e$, soit $x_{i,j}$ l'entier compris entre 1 et e, tel que $x_{i,j} \equiv j - i$ mod e et $y_{i,j}$ l'entier compris entre 1 et e, tel que $y_{i,j} \equiv j - i - 1$ mod e. Alors*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}\left(S_{1,V_i}, S_{1,V_j}\right) = \begin{cases} k & \text{si } n \equiv 4x_{i,j}+1, 4x_{i,j}+3, 4x_{i,j}+4 \text{ ou} \\ & \qquad\qquad 4x_{i,j}+6 \text{ mod } 4e, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}\left(S_{1,V_i}, S_{C,V_j}\right) = \begin{cases} k & \text{si } n \equiv 4y_{i,j}+2, 4y_{i,j}+5 \text{ mod } 4e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mu_k(G)}\left(S_{1,V_i}, S_{C,V_j}\right)$ avaient déjà été calculés dans la proposition 3.2.7 (en utilisant le corollaire 2.1.3) : en effet, leur détermination s'obtient directement à l'aide de la résolution projective minimale des S_{C,V_j}.

Preuve : Il suffit d'utiliser la résolution projective minimale de S_{1,V_i}, pour tout $1 \leq i \leq e$, donnée dans la proposition 3.2.9, puis d'appliquer la proposition 3.1.4, qui nous dit que la dimension sur k de $\mathrm{Ext}^i_{\mu_k(G)}(T, S)$, où T et S sont des foncteurs simples, est égale au nombre de fois où P_S apparaît dans le $i^{\text{ème}}$ terme d'une résolution projective minimale de T.

□

Comme dans le cas des foncteurs de Mackey simples indexés par le p-sous-groupe de Sylow (voir le corollaire 3.2.8), nous pouvons utiliser la proposition 3.2.9 pour montrer que si $S_{1,V}$ est un foncteur de Mackey associé à un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow C d'ordre p, il possède une résolution projective minimale périodique. La situation est toutefois plus compliquée que dans le cas précédent, du fait que $S_{1,V}$ ne peut pas s'écrire à priori comme un induit d'un foncteur de Mackey associé au groupe $C \rtimes C_e$, où e divise $p-1$. Par contre, nous verrons qu'il existe un foncteur de Mackey indécomposable M, associé à C, tel que $S_{1,V}$ est un facteur direct de $M \uparrow_C^G$ (voir la preuve de la proposition 3.2.12). Nous allons donc commencer par montrer que tout foncteur de Mackey indécomposable associé au groupe cyclique d'ordre p possède une résolution projective minimale périodique, ou périodique à partir d'un certain point :

Proposition 3.2.11. *Soient $P = C_p$ le groupe cyclique d'ordre p et M un foncteur de Mackey indécomposable non projectif associé à P. La résolution projective minimale de M est soit périodique de période 4, soit périodique à partir du deuxième ou du troisième terme, également de période 4.*

Preuve : Les foncteurs de Mackey indécomposables associés au groupe P sont en nombre fini et ils sont construits explicitement dans la preuve du théorème 18.1 de [TW95]. Nous allons donc prouver cette proposition au cas par cas. Dans ce but, commençons par décrire les foncteurs de Mackey indécomposables associés à P.

En dehors des foncteurs de Mackey simples et des foncteurs projectifs indécomposables, il y a quatre familles de foncteurs indécomposables : A_i, B_i, C_i et D_i. L'évaluation en 1 de chacun de ces foncteurs est égale à V_i, l'unique kP-module indécomposable de dimension i. Plus précisément, V_i possède la base $v_1, \ldots, v_i$ et, si h est un générateur fixé de P, $hv_j = v_j + v_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, i-1$ et $hv_i = v_i$. Il nous suffit donc de donner les évaluations de ces foncteurs en P, ainsi que la valeur des applications $R = R_1^P$ et $I = I_1^P$ sur les éléments de base, quand elle n'est pas nulle :

i) $A_i(P) = k$, $I(v_1) = 1$ (pour $1 \leq i \leq p-1$),

ii) $B_i(P) = k$, $R(1) = v_i$ (pour $1 \leq i \leq p-1$),

iii) $C_i(P) = kx \oplus ky \cong k^2$, $I(v_1) = x$, $R(y) = v_i$ (pour $2 \leq i \leq p-1$),

iv) $D_i(P) = 0$ (pour $2 \leq i \leq p-1$).

Rappelons ensuite qu'il y a deux foncteurs de Mackey projectifs indécomposables associés à P : $P_1 = B^1 \uparrow_1^P$, la couverture projective du foncteur simple $S_1 = S_{1,k}$ et $P_p = B^P$, la couverture projective du foncteur simple $S_p = S_{P,k}$. Ces deux foncteurs se représentent de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
P_p(P) = & kP/1 & \oplus & kP/P \arrow[dl, "R_1^P"] \\
P_p(1) = & & k1/1 \arrow[ul, "I_1^P"] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
P_1(P) = & & kv_p \arrow[dr, "R_1^P"] & \\
P_1(1) = & kv_1 \arrow[ur, "I_1^P"] & \oplus \cdots \oplus & kv_p
\end{tikzcd}$$

Pour le foncteur P_p toutes les conjugaisons sont triviales et pour le foncteur P_1, la conjugaison par l'élément générateur h de P est donnée par $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ si $i < p$ et $c_h(v_p) = v_p$ (voir la preuve de la proposition 3.2.4).

Commençons par déterminer une résolution projective minimale des foncteurs A_i. Tout d'abord le foncteur de Mackey projectif P_1 possède un sous-foncteur M_1 défini par $M_1(P) = 0$ et $M_1(1) = \mathrm{vect}_k(v_{i+1}, \ldots, v_p)$, qui est isomorphe à S_1 si $i = p-1$ et à D_{p-i} sinon. De plus, $P_1/M_1 \cong A_i$, donc P_1 est la couverture projective de A_i. En particulier, comme la résolution projective minimale de S_1 est périodique (proposition 3.2.4), nous obtenons que le foncteur A_{p-1} possède une résolution projective minimale qui est périodique, de période 4 :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_p \arrow[r] & P_p \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r] & 0 \\
& & & & & S_1 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Supposons donc que $i < p-1$.

Considérons ensuite le sous-foncteur M_2 de P_1 défini par $M_2(P) = k$ et $M_2(1) = \mathrm{vect}_k(v_{p-i+1}, \ldots, v_p)$. Le foncteur M_2 est indécomposable, et isomorphe à B_i. De plus $P_1/M_2 \cong D_{p-i}$; autrement dit, P_1 est la couverture projective de D_{p-i}.

Si $i = 1$, le foncteur B_1 n'a que deux facteurs de composition : S_1 et S_p. Comme B_1 s'identifie à un sous-foncteur de P_1 et que $\mathrm{Soc}(P_1) = S_1$, il s'ensuit que le socle de B_1 est égal à S_1 et sa tête à S_p. La couverture projective de B_1 est égale alors à P_p (voir la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15) et le noyau correspondant s'identifie à S_p. Par conséquent, en utilisant la résolution projective minimale du foncteur simple S_p décrite dans la proposition 3.2.2, nous obtenons que le foncteur A_1 possède la résolution projective minimale suivante :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_p \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_p \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & 0 \\
& & & & S_p \arrow[ur, hook] & & B_1 \arrow[ur, hook] & & D_{p-1} \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

qui est périodique, de période 4.

Il reste donc à déterminer une résolution projective minimale de A_i pour $1 < i < p-1$. Toutefois, comme il nous faut également une résolution projective minimale de B_{p-1}, nous allons supposer que $1 < i \leq p-1$. Le radical du foncteur B_i est alors défini par $\mathrm{Rad}(B_i)(1) = \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_i)$ et $\mathrm{Rad}(B_i)(P) = 0$, et le quotient correspondant est isomorphe à $S_1 \oplus S_p$. Par conséquent, le couverture projective de B_i est $P_1 \oplus P_p$ (voir la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15). Considérons le sous-foncteur M_3 de $P_1 \oplus P_p$ défini par $M_3(P) = kv_p \oplus kP/1$ et $M_3(1) = \mathrm{vect}_k(1/1 - v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_p)$. On vérifie alors que $M_3 \cong C_{p+1-i}$ et que $(P_1 \oplus P_p)/M_3 \cong B_i$, pour tout $1 < i \leq p-1$.

La radical de C_{p+1-i} est donné par $\mathrm{Rad}(C_{p+1-i})(1) = \mathrm{vect}_k(v_2, \ldots, v_{p+1-i})$ et $\mathrm{Rad}(C_{p+1-i})(P) = kx$. En particulier, $C_{p+1-i}/\mathrm{Rad}(C_{p+1-i}) \cong S_1 \oplus S_p$, donc la couverture projective de C_{p+1-i} doit être égale à $P_1 \oplus P_p$ (en utilisant à nouveau la remarque iii) qui suit la proposition 1.2.15).

Finalement définissons le sous-foncteur M_4 de $P_1 \oplus P_p$ de la manière suivante : $M_4(1) = \mathrm{vect}_k(1/1 + v_{p+1-i}, v_{p+2-i}, \ldots, v_p)$ et $M_4(P) = kP/1$. Le sous-foncteur M_4 est isomorphe à A_i et de plus, $(P_1 \oplus P_p)/M_4 \cong C_{p+1-i}$. Il s'ensuit que le foncteur A_i, pour $1 < i < p-1$, possède la résolution projective minimale :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \arrow[r, ->>] & A_i \\
& A_i \arrow[ur, hook] & & C_{p+1-i} \arrow[ur, hook] & & B_i \arrow[ur, hook] & & D_{p-i} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

qui est périodique, de période 4.

Les résolutions projectives minimales de A_i pour tout $i = 1, \ldots, p-1$ nous donnent également des résolutions projectives minimales de B_i pour $i = 1, \ldots, p-1$, de C_i pour $i = 3, \ldots, p-1$ et de D_i pour $i = 2, \ldots, p-1$, qui sont toutes périodiques, de période 4, vu que tous ces foncteurs apparaissent comme noyaux dans les résolutions projectives minimales précédentes. Il nous reste donc à traiter les cas des foncteurs B_{p-1} et C_2. Or nous venons de voir que le foncteur B_{p-1} possède la résolution projective minimale suivante :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \oplus P_p \arrow[rr] \arrow[dr, ->>] & & P_1 \oplus P_p \arrow[r, ->>] & B_{p-1} \\
& & & & A_{p-1} \arrow[ur, hook] & & C_2 \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, la résolution projective minimale de B_{p-1} est périodique à partir du troisième terme et celle de C_2 est périodique à partir du deuxième terme, ce qui achève la preuve de la proposition.

$\square$

Proposition 3.2.12. *Soient G un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow C d'ordre p et V un kG-module simple, non projectif. Le foncteur de Mackey $S_{1,V}^G$ possède alors une résolution projective périodique.*

Remarque : Si le module V de l'énoncé est simple et projectif, alors le foncteur de Mackey $S_{1,V}$ est également projectif (voir [TW95], corollaire 17.3), donc la résolution projective de $S_{1,V}$ est triviale.

Preuve : La proposition 11.4 de [TW95] nous dit qu'il existe un kC-module indécomposable U tel que $S_{1,V}$ est un facteur direct de $T_{1,U}^C \uparrow_C^G$.

En particulier, le foncteur $T_{1,U}^C$ est un foncteur de Mackey non projectif et indécomposable (voir la proposition 2.3.9) associé au groupe C. Plus précisément, en utilisant la définition des foncteurs T, nous obtenons qu'il existe $1 \leq i \leq p-1$ tel que $T_{1,U}^C$ est égal à D_i, où D_i est le foncteur de Mackey défini dans la preuve de la proposition 3.2.11. De plus, toujours vu la preuve de la proposition 3.2.11, la résolution projective minimale de D_i est périodique.

Comme le foncteur d'induction de C à G est exact (proposition 1.4.3) et que l'induit d'un foncteur de Mackey projectif est projectif (proposition 1.5.5), le foncteur $T_{1,U}^C \uparrow_C^G = D_i \uparrow_C^G$ possède une résolution projective périodique, donc sa résolution projective minimale est périodique (voir la proposition 3.1.7). Finalement, comme $S_{1,V}$ est un facteur direct de $T_{1,U}^C \uparrow_C^G$, la proposition 3.1.8 nous permet de conclure.

$\square$

Remarque : Le corollaire 3.2.8 et la proposition 3.2.12 montrent que tout foncteur de Mackey simple, associé à un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p, a une résolution projective minimale périodique. Nous pouvons en déduire que tout foncteur de Mackey (de type fini) M possède une résolution projective minimale bornée, c'est-à-dire telle que la dimension sur k des foncteurs projectifs qui apparaissent dans la résolution projective minimale de M est bornée par une constante. En effet, on montre cela par récurrence sur la longueur de M. Vu la proposition 3.1.4, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ext}^n(M,S)$ est de dimension bornée sur k, pour tout foncteur simple S.
Si M est de longueur 1, alors il est simple et le résultat est démontré. Si M est de longueur supérieure à 1, alors il existe une suite exacte courte de la forme $0 \to N \to M \to T \to 0$, où T est un foncteur de Mackey simple et où N est de longueur strictement inférieure à la longueur de M. Soit S un foncteur de Mackey simple. Vu le théorème 1.2.20, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n(T,S) \to \mathrm{Ext}^n(M,S) \to \mathrm{Ext}^n(N,S) \to \dots$$

et, par conséquent,

$$\dim_k(\mathrm{Ext}^n(M,S)) \leq \dim_k(\mathrm{Ext}^n(T,S)) + \dim_k(\mathrm{Ext}^n(N,S)).$$

Donc, par hypothèse de récurrence, cela implique que $\dim_k(\mathrm{Ext}^n(M,S))$ est bornée. De plus, le fait que M possède une résolution projective bornée semble impliquer qu'il possède une résolution projective périodique.

3.3 Le cas cohomologique

Dans cette section, nous allons nous intéresser au cas des foncteurs cohomologiques et, plus particulièrement des groupes d'extension sur l'algèbre de Mackey cohomologique. Rappelons qu'un foncteur de Mackey M est dit cohomologique si pour tout $K \leq H \leq G$, on a $I_K^H R_K^H = m_{|H:K|}$, où $m_{|H:K|}$ est la multiplication par l'indice de H dans K. De plus, la catégorie des foncteurs cohomologiques, $\mathrm{Comack}_k(G)$, peut être considérée comme la catégorie des modules sur l'algèbre de Mackey cohomologique, $co\mu_k(G)$, qui est le quotient de $\mu_k(G)$ par l'idéal engendré par les éléments $I_K^H R_K^H - |H:K| I_H^H$, pour tout $H \leq G$ (voir la page 15).

Dans un premier temps, nous allons démontrer que si deux foncteurs de Mackey simples sont cohomologiques, alors leur groupe d'extension de degré 1, vu sur l'algèbre de Mackey cohomologique, est le même que celui vu sur l'algèbre de Mackey standard. Nous montrerons ensuite, à l'aide d'exemples, que ce résultat n'est plus vrai pour les groupes d'extension de degré supérieur entre foncteurs simples, ou pour les groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs quelconques.

Proposition 3.3.1. *Soient S et S' des foncteurs de Mackey simples pour un groupe G. Si S et S' sont cohomologiques, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S, S') = \mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(G)}(S, S')$$

où $co\mu_k(G)$ est l'algèbre de Mackey cohomologique.

Preuve : Dans l'énoncé du théorème 2.1.4, nous pouvons remplacer chaque fois le groupe des extensions sur $\mu_k(G)$ par celui sur $co\mu_k(G)$. En effet, la preuve est analogue (voir [TW95], preuve du théorème 14.3), en remarquant les points suivants :

i) un foncteur simple $S_{H,V}$ pour le groupe G est cohomologique si et seulement si H est un p-sous-groupe de G (voir [TW95], proposition 16.10),

ii) pour tout p-sous-groupe H de G et pour tout $k\overline{N}_G(H)$-module U, le foncteur $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_U\right) \uparrow_{N_G(H)}^G$ est cohomologique (voir [TW95], proposition 16.14),

iii) la catégorie des foncteurs de Mackey cohomologiques est une sous-catégorie pleine de celle des foncteurs de Mackey ; donc s'il existe un morphisme de foncteurs de Mackey entre deux foncteurs cohomologiques, alors c'est un morphisme de foncteurs de Mackey cohomologiques,

iv) il y a une injection canonique de $\mathrm{Ext}_{co\mu_k(G)}(S,S')$ dans $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S,S')$, si S et S' sont des foncteurs de Mackey simples cohomologiques,

v) tout sous-foncteur d'un foncteur de Mackey cohomologique est cohomologique (voir [TW95], lemme 16.1).

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W})$$

si les sous-groupes H et K ne sont pas contenus l'un dans l'autre, à G-conjugaison près ;

$$\dim_k\left(\mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W})\right) = \dim_k\left(\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W})\right)$$

si $H=K$, car ils sont les deux égaux à la multiplicité de $S_{H,V}$ dans la seconde couche de la série des socles de $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_{P_W}\right)\uparrow_{N(H)}^G$; et finalement

$$\dim_k\left(\mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W})\right) = \dim_k\left(\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(G)}(S_{H,V},S_{K,W})\right)$$

également si $H <_G K$ (respectivement $K <_G H$) car ils sont les deux égaux à la multiplicité de $S_{K,W}$ (respectivement $S_{H,V}$) dans la seconde couche de la série des socles de $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(K)}^{N_G(K)} FP_V\right)\uparrow_{N(K)}^G$ (respectivement $\left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(H)}^{N_G(H)} FP_W\right)\uparrow_{N(H)}^G$).

□

Remarque : Dans le cas où $G=P$ est un p-groupe, nous obtenons une preuve directe de ce résultat. En effet, dans ce cas, tous les foncteurs simples sont cohomologiques. Fixons une extension $0\to S_{H,k}\overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} S_{Q,k}\to 0$ de $S_{Q,k}$ par $S_{H,k}$. Nous allons démontrer que le foncteur M est cohomologique. Pour cela, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{H,k}(J) \arrow[r, "\alpha_J"] \arrow[d, "R^J_K"] \arrow[dd, bend right, "m_{[J:K]}"'] & M(J) \arrow[r, "\beta_J"] \arrow[d, "R^J_K"'] & S_{Q,k}(J) \arrow[r] \arrow[d, "R^J_K"'] \arrow[dd, bend left, "m_{[J:K]}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{H,k}(K) \arrow[r, "\alpha_K"] \arrow[d, "I^J_K"] & M(K) \arrow[r, "\beta_K"] \arrow[d, "I^J_K"'] & S_{Q,k}(K) \arrow[r] \arrow[d, "I^J_K"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{H,k}(J) \arrow[r, "\alpha_J"] & M(J) \arrow[r, "\beta_J"] & S_{Q,k}(J) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec $K<J\leq P$ et où $m_{[J:K]}$ est la multiplication par $[J:K]$. Ce diagramme est commutatif car α et β sont des morphismes de foncteurs de

Mackey et que les foncteurs simples qui y apparaissent sont cohomologiques.

Rappelons tout d'abord que dans le cas des p-groupes, vu la proposition 1.4.12, les foncteurs simples sont donnés explicitement par

$$S_{L,k}(M) = \begin{cases} k & \text{si } L =_G M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons ensuite que la multiplication par l'indice $[J : K]$ est toujours nulle, car $K < J$ et donc p divise $[J : K]$. Nous allons considérer plusieurs cas :

i) Si H et Q ne sont pas conjugués à J, alors $M(J) = 0$ et par suite $I_K^J R_K^J = 0 = m_{[J:K]}$, vues comme applications de $M(J)$ dans $M(J)$.

ii) Si $Q \neq_G J$ (respectivement $H \neq_G J$), alors α_J (respectivement β_J) est un isomorphisme, donc nous obtenons également

$$I_K^J R_K^J = \alpha_J I_K^J R_K^J \alpha_J^{-1} = 0 = m_{[J:K]}$$

$$\text{(respectivement } I_K^J R_K^J = \beta_J^{-1} I_K^J R_K^J \beta_J = 0 = m_{[J:K]}\text{)}$$

vues comme applications de $M(J)$ dans $M(J)$.

iii) Supposons finalement que J est conjugué à H et à Q. Dans ce cas, l'application $I_K^J R_K^J$ de $M(J)$ dans $M(J)$ se factorise par $M(K) = 0$, donc est également nulle.

Par conséquent le foncteur M est cohomologique et nous obtenons

$$\mathrm{Ext}_{co\mu_k(P)}(S_{H,k}, S_{Q,k}) = \mathrm{Ext}_{\mu_k(P)}(S_{H,k}, S_{Q,k}).$$

En particulier, les corollaires 2.2.6 et 2.5.10, qui décrivent les groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples associés à un p-groupe peuvent se voir comme un corollaire du résultat de Samy Modeliar (voir [SM05], chapitre 11) qui donne ces groupes pour un p-groupe dans le cas cohomologique.

Nous allons à présent donner deux exemples : le premier sera un exemple où les groupes d'extension de degré 1, entre deux foncteurs, forcément non simples, ne coïncident pas dans les cas cohomologique et général, et le second sera un exemple où les extensions de degré supérieur à 1 entre foncteurs simples ne coïncident pas.

Exemple : extensions de degré 1 associées au groupe C_2

Considérons le groupe $P = C_2$ et un corps k algébriquement clos de caractéristique 2. Soit $S_2 = S_{C_2,k}$ le foncteur de Mackey simple associé à P et $P_2 = P_{C_2,k}$ sa couverture projective. Vu la remarque qui suit le théorème 1.5.2, P_2 est égal au foncteur de Burnside B^{C_2}. Par conséquent, P_2 se représente de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} P_2(C_2) = & kC_2/1 \arrow[dr, phantom, ""] & \oplus & kC_2/C_2 \arrow[dl, "R_1^{C_2}"] \\ P_2(1) = & & k1/1 \arrow[ul, "I_1^{C_2}"] & \end{tikzcd}$$

et les conjugaisons sont triviales. Soit A le sous-foncteur de P_2 défini par

$$\begin{tikzcd} A(C_2) = & kC_2/1 \\ A(1) = & k1/1 \arrow[u, "I_1^{C_2}"'] \end{tikzcd}$$

Le foncteur A est alors le radical de P_2 et, en particulier, $P_2/A \cong S_2$. Il existe donc une suite exacte courte non scindée : $0 \to A \to P_2 \to S_2 \to 0$ et, par conséquent, $\mathrm{Ext}^1_{\mu_k(P)}(S_2, A) \neq 0$.

D'autre part, le foncteur S_2 est cohomologique, car il est indexé par C_2 qui est un 2-groupe et sa couverture projective, comme foncteur de Mackey cohomologique, est égale à FP_k (voir [TW95], proposition 16.10). Le foncteur FP_k est défini par :

$$\begin{tikzcd} FP_k(C_2) = & k \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ FP_k(1) = & k \end{tikzcd}$$

donc il existe une suite exacte courte $0 \to S_1 \to FP_k \to S_2 \to 0$, où $S_1 = S_{1,k}$. Cette suite induit alors la suite exacte suivante (voir le théorème 1.2.20) :

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{co\mu_k(P)}(S_1, A) \to \mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(P)}(S_2, A) \to \mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(P)}(FP_k, A) \to \dots$$

où A est le foncteur défini précédemment, qui est également cohomologique vu qu'il est isomorphe au foncteur quotient fixe FQ_k (voir [TW95], lemme 16.2). Comme le foncteur A ne possède pas de sous-foncteur isomorphe à S_1, $\mathrm{Hom}_{co\mu_k(P)}(S_1, A) = 0$ et, comme FP_k est un $co\mu_k(P)$-module projectif (voir [TW95], lemme 16.2), $\mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(P)}(FP_k, A) = 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ext}^1_{co\mu_k(P)}(S_2, A) = 0 \neq \mathrm{Ext}^1_{\mu_k(P)}(S_2, A).$$

Cet exemple nous montre que même dans le cas “presque simple”, dans le sens où S_2 est simple et que A n'a que deux facteurs de composition, les extensions de degré 1 sur $\mu_k(P)$ et sur $co\mu_k(P)$ ne se comportent pas de la même manière.

Exemple : extensions de degré supérieur à 1 associées au groupe C_p, avec $p \neq 2$

Nous allons terminer ce chapitre avec un second exemple qui illustre le fait que les groupes d'extension de degré supérieur à 1 sur $co\mu_k(G)$, entre foncteurs de Mackey simples cohomologiques, sont différents de ceux sur $\mu_k(G)$. Dans ce but, nous allons calculer tous les groupes d'extension pour le groupe C_p, dans le cas cohomologique :

Proposition 3.3.2. *Soient $P = C_p$, le groupe cyclique d'ordre p et $co\mu_k(P)$ l'algèbre de Mackey cohomologique associée. Notons $S_1 = S_{1,k}$ et $S_p = S_{P,k}$ les deux foncteurs de Mackey simples associés à P, alors, si $p \neq 2$,*

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_p, S_1) = \mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_p) = \begin{cases} k & \text{si } j \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_p, S_p) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0 \text{ ou } j \geq 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_1) = k \text{ pour tout } j \geq 0,$$

et si $p = 2$, alors

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_2, S_1) = \mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_2) = \begin{cases} k & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_2, S_2) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0 \text{ ou } j = 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_1) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Vu la proposition 16.10 de [TW95], la couverture projective de S_1, vu comme foncteur de Mackey cohomologique est $P_1^c = FP_{kP}$ (comme dans $\mathrm{Mack}_k(P)$) et celle de S_p est $P_p^c = FP_k$, qui sont définis par

$$\begin{tikzcd} P_1^c(P) = & & kv_p \arrow[dr, "R_1^P"] & & & P_p^c(P) = & ku \arrow[d, "R_1^P"] \\ P_1^c(1) = & kv_1 \oplus \cdots \arrow[ur, "I_1^P"] & & \oplus kv_p & & P_p^c(1) = & kv \end{tikzcd}$$

où la conjugaison par un générateur h de P est donnée par $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ si $i < p$, $c_h(v_p) = v_p$, $c_h(u) = u$ et $c_h(v) = v$, avec $P = \langle h \rangle$ et $v_i = (h-1)^i$.

Supposons que $p \neq 2$. Nous allons construire une résolution projective minimale de S_1, en utilisant les mêmes méthodes que dans la preuve de la proposition 3.2.4, c'est pourquoi nous ne donnerons que peu de détails. Par ailleurs de telles résolutions ont été construites explicitement par Samy Modeliar, dans [SM05].

Comme $P_1^c = P_{1,k}$, cette résolution commence de la même manière que dans la preuve de la proposition 3.2.4, c'est-à-dire que P_1^c se surjecte sur S_1 et la couverture projective du noyau correspondant, K_1, est égale à $P_1^c \oplus P_p^c$. Plus précisément, K_1 est défini par

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_1(P) = & & kv_p \arrow[dr, "R_1^P"] & \\ K_1(1) = & kv_2 \oplus \cdots \oplus & & kv_p \end{tikzcd}$$

où la conjugaison par un générateur h de P est donnée par $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ si $i < p$ et $c_h(v_p) = v_p$.

Par conséquent, $P_1^c \oplus P_p^c$ se surjecte sur K_1 et le noyau de cette application, K_2, est le sous-foncteur de $P_1^c \oplus P_p^c$ défini par

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_2(P) = & & kv_p \arrow[dr, "R_1^P"] & \\ K_2(1) = & k(v - v_{p-1}) \oplus & & kv_p \end{tikzcd}$$

où la conjugaison par un générateur h de P est donnée par $c_h(v_p) = v_p$ et $c_h(v - v_{p-1}) = (v - v_{p-1}) - v_p$.

En particulier, la couverture projective de K_2 est égale à $P_1^c \oplus P_p^c$ et l'on vérifie que le noyau correspondant est le foncteur K_3 défini par

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_3(P) = & & kv_p \arrow[dr, "R_1^P"] & \\ K_3(1) = & k(v + v_2) \oplus kv_3 \oplus \cdots \oplus & & kv_p \end{tikzcd}$$

où la conjugaison par un générateur h de P est donnée par $c_h(v_p) = v_p$, $c_h(v + v_2) = (v + v_2) + v_3$ et $c_h(v_i) = v_i + v_{i+1}$ si $2 < i < p$. Par conséquent, le foncteur K_3 est isomorphe à K_1. La situation est donc la suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & P_1^c \oplus P_p^c \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1^c \oplus P_p^c \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1^c \arrow[r, two heads] & S_1 \arrow[r] & 0 \\
K_1 \arrow[ur, hook] & & K_2 \arrow[ur, hook] & & K_1 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

et il suffit de répéter la suite d'applications ci-dessus à partir de K_1 pour obtenir la résolution projective minimale de S_1, dans $\mathrm{Comack}_k(P)$, suivante :

$$\cdots \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \to S_1 \to 0\,.$$

En utilisant la proposition 3.1.4, nous pouvons alors déterminer les groupes d'extension entre S_1 et n'importe quel autre foncteur simple, pour $p \neq 2$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_p) &= \begin{cases} k & \text{si } j \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_1) &= k \text{ pour tout } j \geq 0.
\end{aligned}$$

Passons à présent à S_p. Comme $P_p^c(1) \cong k$ et $P_p^c(P) \cong k$, le foncteur P_p^c possède deux facteurs de composition S_1 et S_p (voir la remarque qui suit la proposition 1.4.12) et sa tête est égale à S_p. Par conséquent, il existe une suite exacte courte :

$$0 \to S_1 \to P_p^c \to S_p \to 0$$

et il suffit de prolonger cette suite avec la résolution projective minimale de S_1 pour obtenir une résolution projective minimale de S_p, qui est alors égale à

$$\cdots \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \oplus P_p^c \to P_1^c \to P_c^c \to S_p \to 0\,.$$

En utilisant à nouveau la proposition 3.1.4, nous obtenons, pour $p \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_p, S_1) &= \begin{cases} k & \text{si } j \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_p, S_p) &= \begin{cases} k & \text{si } j = 0 \text{ ou } j \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il nous reste à traiter le cas où $p = 2$. Dans ce cas, les foncteurs P_1^c et P_p^c sont définis par

$$\begin{tikzcd}
P_1^c(P) = & & kv_2 \arrow[dr, "R_1^P"] & \\
P_1^c(1) = & kv_1 \arrow[ur, "I_1^P"] & \oplus & kv_2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
P_2^c(P) = & ku \arrow[d, "R_1^P"] \\
P_2^c(1) = & kv
\end{tikzcd}$$

où la conjugaison par un générateur h de P est donnée par $c_h(v_1) = v_1 + v_2$, $c_h(v_2) = v_2$, $c_h(u) = u$ et $c_h(v) = v$. En particulier, P_2^c s'identifie à un sous-foncteur de P_1^c, dont le quotient correspondant est isomorphe à S_1. La résolution projective minimale de S_1 est donc la suivante :

$$0 \to P_2^c \to P_1^c \to S_1 \to 0\,.$$

De plus, comme dans le cas où p est impair, il existe une suite exacte courte :

$$0 \to S_1 \to P_2^c \to S_2 \to 0$$

qui nous permet de déterminer la résolution projective minimale de S_2 suivante :

$$0 \to P_2^c \to P_1^c \to P_2^c \to S_2 \to 0\,.$$

La proposition 3.1.4 nous permet alors de déterminer tous les groupes d'extension dans le cas $p = 2$, explicitement :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_2, S_1) = \mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_2) = \begin{cases} k & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
&\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_2, S_2) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0 \text{ ou } j = 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
&\mathrm{Ext}^j_{co\mu_k(P)}(S_1, S_1) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Par conséquent, en comparant les propositions 3.2.5 et 3.3.2, nous obtenons le résultat voulu, à savoir que les groupes d'extension entre foncteurs de Mackey simples, associés à $P = C_p$, de degré supérieur à 1 sur $co\mu_k(P)$ sont différents des groupes correspondant sur $\mu_k(P)$. Par exemple

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^3_{co\mu_k(P)}(S_p, S_1) = k \neq 0 = \mathrm{Ext}^3_{\mu_k(P)}(S_p, S_1) \\
\mathrm{Ext}^2_{co\mu_k(P)}(S_p, S_p) = k \neq 0 = \mathrm{Ext}^2_{\mu_k(P)}(S_p, S_p)
\end{aligned}$$

et, plus particulièrement, si $p = 2$:

$$\mathrm{Ext}^3_{co\mu_k(P)}(S_1, S_1) = 0 \neq k = \mathrm{Ext}^3_{\mu_k(P)}(S_1, S_1)$$

En particulier, dans le cas où $p = 2$, les foncteurs simples S_1 et S_2 possèdent des résolutions projectives finies dans $\mathrm{Comack}_k(C_2)$, ce qui ne peut jamais se produire dans $\mathrm{Mack}_k(G)$, lorsque G possède un p-sous-groupe de Sylow d'ordre 2, vu la proposition 3.1.3.

Chapitre IV

Socle des foncteurs de Mackey projectifs

Comme l'algèbre de Mackey $\mu_k(G)$ est une k-algèbre de dimension finie, il y a une bijection entre les foncteurs de Mackey simples et les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables (voir la proposition 1.2.13). Plus précisément, à chaque foncteur simple $S_{H,V}$ correspond sa couverture projective, qui est notée $P_{H,V}$. En particulier, $S_{H,V}$ est l'unique quotient simple, donc la tête, de $P_{H,V}$. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la question duale, c'est-à-dire nous demander quels sont les sous-foncteurs simples de $P_{H,V}$. Dans le cas des kG-modules, où G est un groupe fini, le socle des modules projectifs indécomposables est simple et, de plus, il est isomorphe à la tête de ces derniers (voir [Alp86], théorème 6, chapitre 2). Mais dans le cas des foncteurs de Mackey, ce résultat n'est plus vrai et la question de déterminer quels sont les sous-foncteurs simples des foncteurs projectifs se révèle être très ardue.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les foncteurs Δ introduits dans la section 1.6, pour obtenir des informations sur les sous-foncteurs simples qui peuvent apparaître dans le foncteur de Mackey projectif $P_{H,k}$ associé à un p-groupe P. Puis nous allons démontrer que si le socle du foncteur de Burnside B^H, associé au sous-groupe H de P, n'est composé que de foncteurs simples égaux à $S^H_{H,k}$, alors le socle de $P^P_{H,k}$ ne contient que des foncteurs simples égaux à $S^P_{H,k}$. Dans le cas particulier où le groupe P est abélien, le foncteur B^P remplit la condition précédente. Par conséquent, la section 4.2 sera consacrée à l'étude du socle du foncteur de Burnside dans le cas abélien. Plus précisément, nous allons construire explicitement certains sous-foncteurs simples de $\mathrm{Soc}(B^P)$, puis calculer ce socle explicitement pour P cyclique, $P = (C_p)^2$ et $P = (C_p)^3$. Dans la section suivante, nous calculerons le socle du foncteur de Burnside associé à un p-groupe abélien de rang 2. Finalement, dans la dernière section de ce chapitre, nous étudierons quelques propriétés de B^P pour P non nécessairement abélien, et, en particulier, nous donnerons un exemple où B^P possède des sous-foncteurs simples différents de $S_{P,k}$.

Dans tout le chapitre, nous allons donc essentiellement considérer le cas où les foncteurs de Mackey sont associés à un p-groupe P, sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique p. Commençons toutefois par fixer un groupe fini G arbitraire.

4.1 Foncteurs Δ et foncteur de Burnside

Remarquons tout d'abord que, toujours en utilisant le fait que $\mu_k(G)$ est une k-algèbre de dimension finie, les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, $P_{H,V}$, possèdent un socle non trivial. Rappelons de plus, que si H est un sous-groupe de G, ces foncteurs $P_{H,V}$ sont des facteurs directs d'un foncteur de Burnside induit (pour la définition du foncteur de Burnside, voir la page 13). Plus précisément, la multiplicité de $P_{H,V}$ comme facteur direct du foncteur $B^K\uparrow_K^G$, induit à partir du sous-groupe K de G, est égale à $\dim_k(S_{H,V}(K))$, autrement dit,

$$B^K\uparrow_K^G = \bigoplus_{(H,V)} \dim_k(S_{H,V}(K)) \cdot P_{H,V}$$

où la somme est prise sur les couples (H,V) où H parcourt les sous-groupes de G à conjugaison près et V les $k\overline{N}_G(H)$-modules simples à isomorphisme près (voir le théorème 1.5.2).

En particulier, l'étude des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, et plus précisément de leur socle, est très fortement liée à l'étude du foncteur de Burnside.

Tout d'abord, si k est un corps de caractéristique nulle ou première à l'ordre de G, alors l'algèbre de Mackey, $\mu_k(G)$, est semi-simple (voir le théorème 1.1.5), donc tout foncteur de Mackey se décompose en somme directe de foncteurs simples. En particulier, $\mathrm{Soc}(M) = M$ pour tout $M \in \mathrm{Mack}_k(G)$, et tout foncteur de Mackey projectif indécomposable est simple, autrement dit $P_{H,V} = S_{H,V}$.

Si, de plus, k est algébriquement clos, alors

$$B^G \cong \bigoplus_{H \leq_G G} P_{H,k} \cong \bigoplus_{H \leq_G G} S_{H,k}$$

(voir [TW95], corollaire 8.9).

Supposons dorénavant que k est algébriquement clos, de caractéristique p et que P est un p-groupe. Dans ce cas, pour tout sous-groupe H de P, k est l'unique $k\overline{N}_P(H)$-module simple (voir la proposition 1.3.3) et, vu la proposition 1.4.12,

$$S_{H,k}(L) = \begin{cases} k & \text{si } H =_P L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous en déduisons donc que $P_{H,k} = B^H \uparrow_H^P$.

Pour étudier le socle des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, nous allons utiliser la Δ-filtration des foncteurs de Mackey projectifs, donnée dans le corollaire 1.6.7. Rappelons que ces foncteurs sont définis de la manière suivante :

$$\Delta_{H,U} = \left(\mathrm{Inf}_{\overline{N}_P(H)}^{N_P(H)} FQ_U\right) \uparrow_{N_P(H)}^P$$

où H est un sous-groupe de P et U un $k\overline{N}_P(H)$-module.

Rappelons que si M est un foncteur de Mackey projectif de type fini sur un corps k, alors P est un objet de $\mathcal{D}$ (voir le théorème 1.6.5 et la page 42 pour la définition de la catégorie $\mathcal{D}$). Si, de plus, $M = P_{H,k}$ est un foncteur de Mackey projectif indécomposable pour un p-groupe P, alors M possède une Δ-filtration

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_r = M$$

dont les facteurs sont égaux à

$$M_i/M_{i-1} = \Delta_{H_i,k}^H \uparrow_H^P \cong \Delta_{H_i,kN_P(H_i)/N_H(H_i)}^P$$

pour $i = 1, \ldots, r$, où $H_1, \ldots, H_r$ sont les sous-groupes de H, à H-conjugaison près, ordonnés de sorte que si H_i est conjugué à un sous-groupe de H_j, alors $i \leq j$ (voir le corollaire 1.6.7).

Cela nous permet, en particulier, de déduire le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Soient H et J des sous-groupes de P. Notons $\{H_1, \ldots, H_r\}$ les sous-groupes de H, à H-conjugaison près. Le foncteur $P_{H,k}$ possède alors une Δ-filtration où le foncteur $\Delta_{J,U}$ apparaît, comme facteur, autant de fois que la cardinalité de l'ensemble*

$$E = \{i \mid H_i =_P J \text{ et } U \cong kN_P(H_i)/N_H(H_i)\}.$$

Remarque : Dans le cas particulier où P est un groupe abélien, les foncteurs Δ qui apparaissent dans une filtration d'un foncteur de Mackey projectif $P_{H,k}$ sont donc exactement les foncteurs $\Delta_{J,kP/H}$ où J est un sous-groupe de H.

Nous voulons déterminer le socle de certains foncteurs de Mackey projectifs et pour cela, nous pouvons utiliser la filtration précédente. En effet, si M est un foncteur de Mackey, possédant une filtration

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

et si S est un sous-foncteur simple de M, alors il existe un indice $i \geq 0$ tel que $S \subset M_{i+1}$ et $S \nsubseteq M_i$. Il s'ensuit que $S \cong (S + M_i)/M_i$ est sous-module simple, non trivial, de M_{i+1}/M_i, autrement dit, c'est un facteur direct du socle de M_{i+1}/M_i.

Ainsi, le socle des foncteurs Δ va nous donner des informations sur le socle des foncteurs de Mackey projectifs. Avant de donner le premier résultat obtenu à partir des foncteurs Δ, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.2. *Pour tout foncteur de Mackey projectif M, les morphismes $FQ_{M(1)} \to M$ et $M \to FP_{M(1)}$, qui sont induits par l'identité au niveau du sous-groupe trivial, sont, respectivement, un monomorphisme et un épimorphisme.*

Preuve : voir [TW95], lemme 12.4.

Proposition 4.1.3. *Le socle du foncteur de Mackey $\Delta_{1,kP/H} = FQ_{kP/H}$ est égal à $S_{H,k}$. En particulier, le foncteur simple $S_{H,k}$ est un sous-foncteur du foncteur projectif $P_{H,k}$; autrement dit, c'est un facteur direct du socle de $P_{H,k}$.*

Preuve : Par le théorème 1.5.3, $P_{H,k}(1) = kP/H$. Le lemme précédent nous fournit donc un épimorphisme

$$P_{H,k} \longrightarrow FP_{kP/H} \cong \left(FQ_{kP/H}\right)^{\star} = \Delta^{\star}_{1,kP/H}$$

où le premier isomorphisme provient du fait que $(FP_V)^{\star} \cong FQ_{V^{\star}}$ (voir [TW95], proposition 4.1) et que $(kP/H)^{\star} \cong kP/H$.
Ainsi, vu la remarque ii) qui suit la proposition 1.2.15, $\Delta^{\star}_{1,kP/H}$ possède $S_{H,k}$ comme unique quotient simple. Donc, par dualité, le socle de $\Delta_{1,kP/H}$ est $S_{H,k}$.

Par ailleurs, vu la Δ-filtration du foncteur projectif $P_{H,k} = B^H \uparrow_H^P$, le foncteur $\Delta_{1,kP/H}$ est un sous-foncteur de $P_{H,k}$. Nous en déduisons donc que $S_{H,k}$ est un facteur direct du socle de $P_{H,k}$.

□

Il nous faut ainsi étudier le socle des foncteurs Δ qui apparaissent dans la Δ-filtration des $P_{H,k}$, c'est-à-dire des

$$\Delta^H_{H_i,k} \uparrow_H^P = \left(\mathrm{Inf}^{N_P(H_i)}_{\overline{N}_P(H_i)} FQ_{kN_P(H_i)/N_H(H_i)}\right) \uparrow^P_{N_P(H_i)}$$

pour $i = 1, \ldots, r$, où $H_1,\ldots,H_r$ sont les sous-groupes de H, à H-conjugaison près.

Par la proposition précédente, si $H \leq P$, le socle du foncteur de Mackey $FQ_{kP/H} = \Delta_{1,kP/H}$ pour le groupe P est égal à $S_{H,k}$. Il s'ensuit immédiatement, vu que le foncteur d'inflation est exact (voir la proposition 1.4.4), que

$$\mathrm{Soc}\left(\mathrm{Inf}^{N_P(H_i)}_{\overline{N}_P(H_i)} FQ_{kN_P(H_i)/N_H(H_i)}\right) = S^{N_P(H_i)}_{N_H(H_i),k}$$

pour le groupe $N_P(H_i)$, pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Afin de déterminer les sous-modules simples de $\Delta^H_{H_i,k} \uparrow_H^P$, nous avons besoin d'un résultat sur la semi-simplicité de la restriction des foncteurs de Mackey simples dans le cas des p-groupes, qui est un corollaire de la proposition 2.2.1 :

Proposition 4.1.4. *Soient J, K des sous-groupes d'un p-groupe P. Si J n'est pas conjugué à un sous-groupe de H, alors $S_{J,k} \downarrow_H^P = 0$. Si $J \leq_P H$, alors*

$$S_{J,k} \downarrow_H^P = \bigoplus_{g \in I} S^H_{{}^gJ,k}$$

où $I = [H \backslash T_P(J,H)/N_P(J)]$ et où $T_P(J,H) = \{g \in P \,|\, {}^gJ \leq H\}$ est le transporteur de J dans H. En particulier, $S_{H,k} \downarrow_H^P = S^H_{H,k}$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la proposition 2.2.1, en utilisant le fait que la restriction du module trivial à n'importe quel sous-groupe de P est égale au module trivial, donc en particulier qu'elle est semi-simple.

□

Proposition 4.1.5. *Soient $J \leq H \leq P$ où P est un p-groupe. Le socle du foncteur $\Delta^H_{J,k} \uparrow_H^P$ est égal au foncteur simple $S^P_{N_H(J),k}$.*

Preuve : Posons $M := \mathrm{Inf}_{\overline{N}_P(J)}^{N_P(J)} FQ_{kN_P(J)/N_H(J)}$, alors

$$\Delta_{J,k}^H \uparrow_H^P \;\cong\; \Delta^P_{J,\,\mathrm{Ind}_{N_H(J)}^{N_P(J)}(k)} = M \uparrow_{N_P(J)}^P$$

où le premier isomorphisme est une conséquence du lemme 1.6.3.

Soit $S = S_{L,k}$ un sous-foncteur simple de $\Delta_{J,k}^H \uparrow_H^P$. Comme le foncteur d'induction est l'adjoint du foncteur de restriction (voir la proposition 1.4.3), nous obtenons

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mu_k(P)}\left(S, M \uparrow_{N_P(J)}^P\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S \downarrow_{N_P(J)}^P, M\right).$$

Vu la proposition précédente, cela implique que $L \leq_P N_P(J)$ et, dans ce cas,

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S \downarrow_{N_P(J)}^P, M\right) &= \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\Big(\bigoplus_{g\in I} S_{{}^gL,k}^{N_P(J)}, M\Big) \\ &= \bigoplus_{g\in I} \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S_{{}^gL,k}^{N_P(J)}, M\right) \end{aligned}$$

où $I = [N_P(J)\backslash T_P(L, N_P(J))/N_P(L)]$.

Comme nous l'avons vu précédemment, $\mathrm{Soc}(M) = S_{N_H(J),k}^{N_P(J)}$, donc il existe un unique $g \in I$ tel que $S_{{}^gL,k}^{N_P(J)} = S_{N_H(J),k}^{N_P(J)}$, donc tel que ${}^gL =_{N_P(J)} N_H(J)$. En particulier, le sous-groupe L est conjugué à $N_H(J)$. Nous avons donc montré que le socle de $\Delta_{J,k}^H \uparrow_H^P = M \uparrow_{N_P(J)}^P$ est de la forme $\left(S_{N_H(J),k}^P\right)^m$ pour un entier $m \geq 1$.

Posons $S = S_{N_H(J),k}^P$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mu_k(P)}\left(S, M \uparrow_{N_P(J)}^P\right) &= \mathrm{Hom}_{\mu_k(P)}\left(S, S^m\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mu_k(P)}(S,S)^m \cong k^m \end{aligned}$$

et, d'autre part, en utilisant la proposition 4.1.4,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mu_k(P)}\left(S, M \uparrow_{N_P(J)}^P\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S \downarrow_{N_P(J)}^P, M\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\Big(\bigoplus_{g\in J} S_{{}^gN_H(J),k}^{N_P(J)}, M\Big) \\ &\cong \bigoplus_{g\in J} \mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S_{{}^gN_H(J),k}^{N_P(J)}, S_{N_H(J),k}^{N_P(J)}\right) \\ &\cong k \end{aligned}$$

où $J = [N_P(J)\backslash T_P(N_H(J), N_P(J))/N_P(N_H(J))]$ et où le dernier isomorphisme provient du fait qu'il n'y a qu'un seul g pour lequel l'avant-dernière expression est non nulle. En effet, $\mathrm{Hom}_{\mu_k(N_P(J))}\left(S^{N_P(J)}_{{}^gN_H(J),k}, S^{N_P(J)}_{N_H(J),k}\right)$ est nul, à moins que ${}^gN_H(J)$ et $N_H(J)$ ne soient conjugués dans $N_P(J)$ et, si c'est le cas, alors il existe $x \in N_P(J)$ tel que $xg \in N_P(N_H(J))$ donc $g = x^{-1} = 1$ dans J.
Il s'ensuit donc que $m = 1$.

□

Ce résultat nous donne des informations sur les socles des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables pour un p-groupe P :

Proposition 4.1.6. *Soit H un sous-groupe d'un p-groupe P.*
Notons $H_1, \ldots, H_r$ les sous-groupes de H à H-conjugaison près. Alors

$$\mathrm{Soc}(P_{H,k}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(S^P_{N_H(H_i),k}\right)^{m_i}$$

avec $0 \leq m_i \leq 1$, pour tout $i = 1, \ldots, r$.

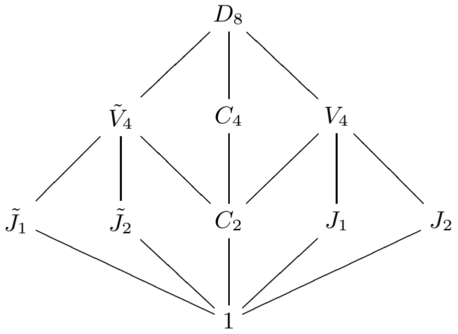
Preuve : Le foncteur projectif $P_{H,k}$ possède une filtration dont les quotients sont $D_{H_i} := \Delta^H_{H_i,k} \uparrow^P_H$, pour $i = 1, \ldots, r$, où $H_1, \ldots, H_r$ sont les sous-groupes de H, à H-conjugaison près (voir le corollaire 1.6.7). Par la proposition précédente, $\mathrm{Soc}(D_{H_i}) = S^P_{N_H(H_i),k}$ et si S est un sous-foncteur simple de $P_{H,k}$, alors il existe un indice i tel que S apparaît dans le socle de D_{H_i}.

□

Avant d'aller plus loin, nous allons traiter un exemple pour D_8, le groupe diédral d'ordre 8 :

Exemple : Le but de cet exemple est de calculer le socle du foncteur $B^P = P_{P,k}$ où $P = D_8 = \langle r, s \,|\, r^4 = s^2 = 1, srs = r^3\rangle$ est le groupe diédral d'ordre 8, sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 2.

Rappelons que les sous-groupes de D_8 forment le treillis suivant :



où $\tilde{J}_1 = \langle rs \rangle$, $\tilde{J}_2 = \langle r^3 s \rangle$, $J_1 = \langle s \rangle$, $J_2 = \langle r^2 s \rangle$, $\tilde{V}_4 = \langle r^2, rs \rangle$ et $V_4 = \langle r^2, s \rangle$. Les groupes $\tilde{J}_1$ et $\tilde{J}_2$ sont conjugués dans P, et il en va de même pour J_1 et J_2. On numérote les sous-groupes de P, à conjugaison près, de la manière suivante : $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = \tilde{J}_1$, $H_4 = J_1$, $H_5 = C_4$, $H_6 = \tilde{V}_4$, $H_7 = V_4$ et $H_8 = G$.

Vu la proposition précédente,

$$\mathrm{Soc}(B^P) = (S_{P,k})^{m_1+m_2+m_5+m_6+m_7+m_8} \oplus \left(S_{\tilde{V}_4,k}\right)^{m_3} \oplus (S_{V_4,k})^{m_4}$$

où les m_i sont égaux à 0 ou 1.

Calculons explicitement le nombre de sous-foncteurs de B^P isomorphes à $S_{P,k}$. De tels sous-foncteurs S sont caractérisés par le fait que $S(P) = kx$, où $x \in B(P)$, et $S(K) = 0$ pour $K < P$. Donc la restriction de x à n'importe quel sous-groupe de D_8 doit être nulle ; autrement dit, x appartient au noyau de l'application :

$$\prod_{K<P} R_K^P : B(P) \to \prod_{K<P} B(K)\,.$$

En utilisant les formules pour les applications de restriction associées au foncteur de Mackey de Burnside (données à la page 13), nous obtenons que ce noyau est égal à $kP/1 \oplus kP/C_2 \oplus k(P/C_4 + P/\tilde{V}_4 + P/V_4)$. Il y a donc trois copies du foncteur $S_{P,k}$ dans le socle de B^P, disons S_1, S_2 et S_3.

Regardons ensuite si B^P possède des sous-foncteurs isomorphes à $S_{\tilde{V}_4,k}$ ou à $S_{V_4,k}$. Un sous-foncteur T de B^P, isomorphe à $S_{V_4,k}$, est caractérisé par le fait que $T(V_4) = ky$, où $y \in B(V_4)$, et les restrictions et les inductions de y à n'importe quel sous-groupe de P sont nulles. Posons

$$y = \lambda_1 V_4/1 + \lambda_2 V_4/C_2 + \lambda_3 V_4/J_1 + \lambda_4 V_4/J_2 + \lambda_5 V_4/V_4 \in B(V_4)$$

alors

$$I_{V_4}^P(y) = \lambda_1 P/1 + \lambda_2 P/C_2 + (\lambda_3 + \lambda_4)P/J_1 + \lambda_5 P/V_4 = 0$$

si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$ et $\lambda_3 = \lambda_4$. Comme de plus

$$R_{J_1}^{V_4}(\lambda(V_4/J_1 + V_4/J_2)) = \lambda J_1/1$$

doit être nul, nous en déduisons que $y = 0$. Par conséquent, le socle de B^P ne contient pas de sous-foncteur isomorphe à $S_{V_4,k}$. Un raisonnement analogue permet de montrer qu'il n'y a pas non plus de sous-foncteur isomorphe à $S_{\tilde{V}_4,k}$, et par suite, $\mathrm{Soc}\left(B^P\right) = (S_{P,k})^3$.

Par ailleurs, le foncteur de Burnside B^P possède une Δ-filtration, qui est donnée par sa filtration ascendante (voir la définition 1.6.6 et ce qui suit) :

$$0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_8 = B^P$$

où M_i est le sous-foncteur engendré par les évaluations de B^P en $H_1, \ldots, H_8$. De plus $M_i/M_{i-1} \cong \Delta_{H_i,k}$, et, vu ce qui précède, le socle de $\Delta_{H_i,k}$ est égal à $S_{N_P(H_i),k}$.

Rappelons que S_1, S_2 et S_3 sont les trois sous-foncteurs de B^P isomorphes à $S_{P,k}$. Le sous-foncteur S_1 de B^P est défini par $S_1(P) = kP/1$, et, comme $P/1 = I_1^P(1/1)$, S_1 appartient au socle de $M_1 = \Delta_{1,k}$. Le deuxième sous-foncteur S_2 est défini par $S_2(P) = kP/C_2$. Comme auparavant, nous avons $P/C_2 = I_{C_2}^P(C_2/C_2)$, donc S_2 appartient au socle de M_2, le sous-foncteur de B^P engendré par l'évaluation de B^P en 1 et en C_2. De plus, S_2 n'est pas un sous-foncteur de M_1, vu que $M_1(P) = I_1^P(k1/1) = kP/1$. Finalement, le troisième sous-foncteur S_3 est défini par $S_3(P) = k(P/C_4 + P/\tilde{V}_4 + P/V_4)$. Il appartient au socle de M_7, le sous-foncteur de B^P engendré par l'évaluation de B^P en tous les sous-groupe de P, à l'exception de P lui-même. De plus, il n'est pas sous-foncteur de M_6, vu que l'élément P/V_4 n'apparaît pas dans $M_6(P)$. Nous avons donc démontré que $m_1 = m_2 = m_7 = 1$ et que tous les autres m_i sont nuls.

Dans le cas où H est un sous-groupe abélien du groupe P, la proposition 4.1.6 nous donne directement le résultat suivant sur le socle de $P_{H,k}$:

Corollaire 4.1.7. *Soient P un p-groupe et H un sous-groupe abélien de P. Le socle du foncteur projectif $P_{H,k}$ ne contient que des sous-foncteurs simples isomorphes à $S_{H,k}$. De plus, le nombre de facteurs simples dans une décomposition de* $\mathrm{Soc}(P_{H,k})$ *n'excède pas n, où n est le nombre de sous-groupes de H.*

La proposition 4.1.6 nous donne une première idée des sous-foncteurs simples d'un foncteur projectif indécomposable $P_{H,k}$, associé à un p-groupe P. Tout le problème revient donc à déterminer les entiers m_i qui apparaissent, et nous allons voir que c'est une question difficile même dans les petits cas abéliens.

Nous pouvons néanmoins calculer, dans certains cas, le socle de ces foncteurs, à l'aide du socle du foncteur de Burnside associé au sous-groupe par lequel est indexé notre foncteur projectif. En particulier, cela nous permettra de déterminer le socle d'un foncteur de Mackey projectif associé à un p-groupe cyclique, abélien élémentaire de rang 3 ou abélien de rang 2. Explicitement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.1.8. *Soit H un sous-groupe d'un p-groupe P. Si le socle du foncteur B^H associé au groupe H est égal à $\left(S_{H,k}^H\right)^m$ pour un entier $m \geq 1$, alors le socle du foncteur $P_{H,k}^P$ est égal à $\left(S_{H,k}^P\right)^m$.*

Preuve : Soit $S = S_{J,k}$ un sous-foncteur simple de $P_{H,k} \cong B^H \uparrow_H^P$. Alors, par les propositions 4.1.4 et 1.4.3,

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathrm{Hom}_{\mu_{k(P)}}\left(S, B^H \uparrow_H^P\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(H)}}\left(S \downarrow_H^P, B^H\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(H)}}\Big(\bigoplus_{g\in I} S_{{}^gJ,k}^H, B^H\Big) \end{aligned}$$

où $I = [H \backslash T_P(J,H)/N_P(J)]$. Comme le socle de B^H est égal à $\left(S_{H,k}^H\right)^m$, il existe un élément $g \in I$ tel que ${}^gJ = H$. Par suite, le sous-groupe J est conjugué à H, donc $\mathrm{Soc}\big(P_{H,k}^P\big) = S^n$ où $S = S_{H,k}^P$. De plus, vu que $S_{H,k}^P \downarrow_H^P = S_{H,k}^H$ (voir la proposition 4.1.4), nous avons

$$\begin{aligned} k^n \cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(P)}}\left(S, P_{H,k}\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(P)}}\left(S, B^H \uparrow_H^P\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(P)}}\left(S \downarrow_H^P, B^H\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mu_{k(H)}}\left(S_{H,k}^H, B^H\right) \cong k^m \end{aligned}$$

et, par conséquent, $n = m$.

□

Remarquons que cette proposition implique, en particulier, que le socle du foncteur $P_{1,k}$ est simple, isomorphe à $S_{1,k}$. C'est par ailleurs un résultat déjà connu (voir le théorème 1.5.4).

Le foncteur de Burnside joue donc un rôle primordial dans l'étude du socle des foncteurs projectifs, et plus particulièrement lorsque son socle ne contient que des foncteurs simples indexés par P. C'est ce qui se passe, par exemple, dans le cas où le groupe P est abélien, vu la proposition 4.1.6 ; autrement dit, $\mathrm{Soc}(B^P) = (S_{P,k})^m$. Tout le problème revient donc à déterminer cet entier m. C'est ce qui va nous occuper dans la suite de ce chapitre, en tout cas pour certains petits groupes.

4.2 Quelques propriétés du socle du foncteur de Burnside dans le cas abélien

Vu les résultats de la section précédente, si P est un p-groupe abélien, alors le socle du foncteur de Burnside B^P est égal à $(S_{P,k})^m$, pour un entier m. Rappelons que l'anneau de Burnside $B^P(P) = B(P)$ possède une k-base $\mathcal{B}$ formée des P/H où H parcourt un ensemble de représentants des sous-groupes de P, à conjugaison près (voir la page 13). Par conséquent, l'entier m peut être borné par le cardinal n de $\mathcal{B}$.

En fait, il est possible de faire un petit peu mieux. En effet, dans le cas d'un p-groupe, le nombre de facteurs de composition isomorphes à $S_{J,k}$, pour $J \leq P$, d'un foncteur de Mackey M est donné par la dimension sur k de $M(J)$ (voir la remarque qui suit la proposition 1.4.12). Par conséquent, le nombre de facteurs de composition de B^P isomorphes à $S_{P,k}$ est égal à $\dim_k(B(P)) = n$. Par ailleurs, B^P est égal au foncteur projectif indécomposable $P_{P,k}$, donc en particulier, la tête de B^P est égale à $S_{P,k}$. Il s'ensuit qu'il ne peut pas y avoir plus de $n-1$ copies de $S_{P,k}$ dans le socle de B^P (du moins, si P n'est pas le groupe trivial) ; autrement dit, $m \leq n-1$.

Remarque : Dans le cas où le groupe P est abélien, nous obtenons de manière directe que le socle de B^P ne contient que des sous-foncteurs simples isomorphes à $S_{P,k}$. En effet, supposons que $S \cong S_{H,k}$ est un sous-foncteur de B^P où $H < P$. Il s'ensuit que $S(H) = kx$ où

$$x = \sum_{L \leq_H H} \lambda_L H/L \in B^P(H) = B(H)$$

(l'anneau de Burnside associé au groupe H) est un élément sur lequel le groupe P/H agit trivialement. De plus, comme

$$S(P) = I_H^P(kx) = [P : H] \cdot kx = 0,$$

il faut que

$$0 = I_H^P(x) = \sum_{L \leq_H H} \lambda_L P/L$$

ce qui force tous les coefficients λ_L à être nuls (ce raisonnement ne peut pas se généraliser à un p-groupe P quelconque, car, dans le cas non abélien, il peut arriver que des sous-groupes non conjugués dans H le deviennent dans P et donnent ainsi le même élément dans $B(P)$).

Nous désirons alors déterminer le nombre de sous-foncteurs simples (donc isomorphes à $S_{P,k}$) apparaissant dans une décomposition du socle de B^P :

Proposition 4.2.1. *Soit P un p-groupe abélien. Le socle de B^P est isomorphe à $S_{P,k}^m$ où m est égal à la dimension du noyau, noté $K(P)$, de l'application*

$$R := \prod_{i=1}^{s} R_{H_i}^P : B(P) \longrightarrow \prod_{i=1}^{s} B(H_i)$$

où $H_1, \ldots, H_s$ sont les sous-groups maximaux de P et où $R_{H_i}^P$ est définie sur les générateurs de $B(P)$ par $R_{H_i}^P(P/K) = [P : H_iK] \cdot H_i/(H_i \cap K)$, pour tout i.

Preuve : Rappelons que $S_{P,k}(H) = \begin{cases} k & \text{si } H = P, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ vu la proposition 1.4.12. Par conséquent, un sous-foncteur simple de B^P est déterminé entièrement par un élément $x \in B^P(P)$, tel que la restriction de x à n'importe quel sous-groupe de P est nulle, vu qu'il n'y a pas de condition sur les inductions ou les conjugaisons (en fait, toutes les conjugaisons sont triviales sur $B(P)$, vu que $\overline{N}_P(P) = 1$). Par conséquent, le nombre m de sous-foncteurs isomorphes à $S_{P,k}$ dans B^P est égal à la dimension du noyau de l'application

$$R' := \prod_{H<P} R_H^P : B(P) \longrightarrow \prod_{H<P} B(H).$$

Rappelons ensuite que la restriction pour le foncteur de Burnside est donnée, pour H, $K \leq P$, par

$$R_H^P(P/K) = \sum_{x \in [H \backslash P/K]} H/(H \cap {}^xK)$$

(voir la page 13). En particulier, si P est abélien, l'application R' est définie par

$$R'(P/K) = \prod_{H<P} \Big(\sum_{x \in [H \backslash P/K]} H/(H \cap {}^xK) \Big) = \prod_{H<P} [P : HK] \cdot H/(H \cap K).$$

Finalement remarquons que le noyau de R' est égal au noyau de l'application $R := \prod_{i=1}^{s} R^P_{H_i}$. En effet, on a clairement $\mathrm{Ker}(R') \subseteq \mathrm{Ker}(R)$ et si $x \in \mathrm{Ker}(R)$, alors pour tout sous-groupe propre K de P, on a $R^P_K(x) = R^H_K R^P_H(x) = 0$, où H est un sous-groupe maximal de P qui contient K.

□

Remarques :

i) Si $K \leq H$ où H est un sous-groupe propre de P, alors $R^P_H(P/K) = 0$, car $[P : HK] = [P : H]$, qui est divisible par p, vu que P est un p-groupe et k est un corps de caractéristique p. En particulier, si P n'est pas trivial, nous avons que $R^P_H(P/1) = 0$ pour tout sous-groupe propre H de P, donc $P/1 \in \mathrm{Ker}(R)$.

ii) Pour $K = P$, nous obtenons $R^P_H(P/P) = H/H$ qui est non nul pour tout sous-groupe H de P.

iii) Si L est un sous-groupe normal de P, contenu dans l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de P (c'est-à-dire dans le sous-groupe de Frattini de P, voir la définition 4.2.7), alors $P/L \in \mathrm{Ker}(R)$. En effet, pour tout sous-groupe maximal H de P, nous avons

$$R^P_H(P/L) = \sum_{x \in [H\backslash P/L]} H/(H \cap L) = p \cdot H/(H \cap L) = 0$$

vu que $[H\backslash P/L] = [P/H]$.

Comme $K(P)$ est difficile à déterminer dans le cas général, nous allons commencer par étudier le cas où P est un p-groupe cyclique, puis certains cas où P est abélien élémentaire. Afin de faciliter l'étude de ce noyau, nous pouvons le diviser en une somme directe de sous-espaces vectoriels plus petits, de la manière suivante :

Proposition 4.2.2. *Si P est un p-groupe abélien, alors le noyau $K(P)$ de l'application R est gradué par l'ordre des sous-groupes de P ; autrement dit, si $|P| = p^r$, alors $K(P) = \bigoplus_{l=1}^{r} K(P)_l$, où*

$$K(P)_l = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot P/K_i \in K(P) \mid K_i \text{ est d'ordre } p^l \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m \Big\}.$$

Preuve : Rappelons que

$$R^P_H\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot P/K_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [P : HK_i] \cdot H/(H \cap K_i)$$

pour tout sous-groupe maximal H de P. Vu la remarque ii) précédente, les termes de la somme correspondant à un $K_i \subseteq H$ sont nuls et si $K_i \nsubseteq H$, alors $[P : HK_i] = 1$. Remarquons de plus que si $H/(H \cap K_i) = H/(H \cap K_j)$ et $HK_i = HK_j = P$, alors

$$|K_i| = \frac{|HK_i| \cdot |H \cap K_i|}{|H|} = \frac{|HK_j| \cdot |H \cap K_j|}{|H|} = |K_j| \,.$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot P/K_i \in K(P)$. Il existe alors $x_1, \dots, x_r \in B(P)$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_r$ et tels que, pour chaque j, les P/H qui apparaissent dans x_j satisfont $|H| = p^j$. Il suffit alors de montrer que chaque x_j est dans $K(P)$, car cela entraînera que $x_i \in K(P)_i$ et, par suite, que $K(P) = \bigoplus_{l=1}^{r} K(P)_l$.
Posons $x_j = \sum_i \lambda_{j,i} \cdot P/K_{j,i}$ pour tout $j = 1, \dots, r$. Pour tout sous-groupe maximal H de P, nous avons alors $0 = R^P_H(x) = y_1 + \cdots + y_r$ où

$$y_j = R^P_H(x_j) = \sum_{i \text{ tels que } K_{j,i} \nsubseteq H} \lambda_{j,i} \cdot H/(H \cap K_{j,i}) \,.$$

S'il existe un indice j tel que $y_j \neq 0$, alors il existe un coefficient μ de y_j tel que $\mu \cdot H/J \neq 0$ où $J = H \cap K_{j,i}$ pour un certain i. Mais le terme H/J n'apparaît dans aucun autre y_l. En effet, s'il existe des indices $l \neq j$ et u tel que

$$H \cap K_{l,u} = J = H \cap K_{j,i}$$

et que $K_{l,u} \nsubseteq H$, alors $p^l = |K_{l,u}| = |K_{j,i}| = p^j$, vu ce qui précède, ce qui contredit l'hypothèse que $l \neq j$. Donc $y_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, r$. Par conséquent, chaque x_j appartient à $K(P)$ pour tout $j = 1, \dots, r$.

$\square$

Le premier cas que nous allons traiter est celui où P est un p-groupe cyclique :

Proposition 4.2.3. *Si $P = C_{p^n}$ est un p-groupe cyclique d'ordre p^n, alors $\dim_k(K(P)) = n$ et, par suite, le socle de B^P est égal à $S^n_{P,k}$.*

Preuve : Les sous-groupes de P sont $1, C_p, C_{p^2}, \dots, C_{p^{n-1}}$ et $C_{p^n} = P$. Pour chaque $1 \leq l \leq n-1$, il y a donc un unique sous-groupe, C_{p^l}, d'ordre p^l et

$$R^P_{C_{p^{n-1}}}(P/C_{p^l}) = [P : C_{p^{n-1}}] \cdot C_{p^{n-1}}/C_{p^l} = 0.$$

De plus, $R^P_{C_{p^{n-1}}}(P/P) = C_{p^{n-1}}/C_{p^{n-1}} \neq 0$, par conséquent

$$K(P) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} kP/C_{p^i}.$$

L'assertion sur le socle résulte alors de la proposition 4.2.1.

□

Nous pouvons immédiatement en déduire le résultat suivant :

Corollaire 4.2.4. *Soient P un p-groupe et $H \cong C_{p^n}$ un sous-groupe cyclique de P, avec $n \geq 1$. Le socle du foncteur de Mackey projectif $P_{H,k}$ est égal $\big(S_{H,k}\big)^n$.*

Preuve : Par la proposition précédente, le socle du foncteur de Burnside B^H, associé au groupe H, est égal à $\big(S^H_{H,k}\big)^n$. La proposition 4.1.8 implique alors que le socle de $P_{H,k}$ est égal à $\big(S^P_{H,k}\big)^n$.

□

Supposons ensuite plus généralement que P est un p-groupe. Nous allons déterminer certains éléments du noyau d'une restriction à un sous-groupe maximal de P qui nous fournissent des éléments de $K(P)$ lorsque le groupe P est abélien. Dans ce but, commençons par quelques rappels :

Proposition 4.2.5. *Soit P un p-groupe fini.*

i) Si H est un sous-groupe propre de P, alors H est un sous-groupe propre de $N_P(H)$.

ii) Tout sous-groupe maximal de P est normal et d'indice p dans P.

iii) Soit s un entier positif tel que p^s divise l'ordre de P. Alors le nombre de sous-groupes de P d'ordre p^s est congru à 1 modulo p.

Preuve : Voir [Rot95], théorèmes 4.6 et 4.8.

Dans le cas où P est un p-groupe abélien élémentaire de rang r, autrement dit, $P = (C_p)^r$, nous pouvons déterminer explicitement le nombre de ses sous-groupes d'un ordre donné. En effet, P s'identifie alors à un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension r et les sous-groupes de P correspondent aux sous-espaces vectoriels. Nous pouvons donc utiliser le résultat suivant :

Lemme 4.2.6. *Soit V un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension r, où q est une puissance d'un nombre premier, et soit $1 \leq t \leq r$. Le nombre de sous-espaces de V de dimension t est égal à*

$$\frac{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\dots(q^{r-t+1}-1)}{(q^t-1)(q^{t-1}-1)\dots(q-1)}.$$

En particulier le nombre de sous-espaces de dimension 1, et celui de codimension 1, sont tous les deux égaux à $1+q+q^2+\dots+q^{r-1}$.

Preuve : Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des sous-espaces de V de dimension t. Le groupe $G := GL_r(\mathbb{F}_q)$ agit transitivement sur $\mathcal{X}$. De plus, si nous fixons un sous-espace W de dimension t, le stabilisateur de W est le groupe

$$G_W = \begin{pmatrix} GL_t(\mathbb{F}_q) & \star \\ 0 & GL_{r-t}(\mathbb{F}_q) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathrm{Card}(\mathcal{X}) = \frac{|G|}{|G_W|} = \frac{|GL_r(\mathbb{F}_q)|}{|GL_t(\mathbb{F}_q)| \cdot |GL_{r-t}(\mathbb{F}_q)| \cdot q^{t(r-t)}}.$$

En utilisant le fait $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{1+2+\dots+(n-1)}(q^n-1)\dots(q-1)$ et en remarquant que $\binom{r}{2} - \binom{t}{2} - \binom{r-t}{2} - t(r-t) = 0$, nous obtenons alors le résultat désiré.

$\square$

Plus généralement, si P est p-groupe quelconque, nous pouvons déterminer le nombre de sous-groupes maximaux de P, à l'aide du sous-groupe de Frattini. Commençons par rappeler sa définition :

Définition 4.2.7. *Le sous-groupe de Frattini d'un groupe G est l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G. Il est noté $\Phi(G)$, et c'est un sous-groupe normal de G.*

L'importance du sous-groupe de Frattini dans le cas des p-groupes provient du résultat suivant :

Proposition 4.2.8. *Soit P un p-groupe. Le groupe $P/\Phi(P)$ est abélien élémentaire. De plus $\Phi(P) = 1$ si et seulement si P est abélien élémentaire.*

Preuve : voir [Gor68], théorème 1.3, chapitre 5.

Définition 4.2.9. *Soit P un p-groupe, on définit $r_p(P)$ comme étant l'entier r tel que $P/\Phi(P) = (C_p)^r$.*

Remarque : Vu le résultat précédent, si P est un p-groupe, le lemme 4.2.6 nous permet de déterminer le nombre de sous-groupes d'un certain ordre contenant $\Phi(P)$, vu que $P/\Phi(P)$ est abélien élémentaire. En particulier, comme tous les sous-groupes maximaux de P contiennent $\Phi(P)$, nous obtenons explicitement que le nombre de tels sous-groupes est égal à $1 + p + \cdots + p^{r-1}$, où $r = r_p(P)$.

Proposition 4.2.10. *Soient J un sous-groupe d'un p-groupe P et H un sous-groupe maximal de P ne contenant pas J. L'élément*

$$a_J := \sum_{K<\cdot J} P/K$$

où $K < \cdot J$ signifie que K est un sous-groupe maximal de J, appartient au noyau de la restriction R_H^P. De plus, si P est un groupe abélien, alors l'élément a_J appartient à $K(P)$.

Preuve : Posons $a_J = \displaystyle\sum_{i=1}^{v} P/K_i$ où les K_i sont les sous-groupes maximaux de J, pour $i = 1, \ldots, v$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $J \cap H = K_1$. En effet, $J \cap H$ est maximal dans J, puisque H est maximal dans P et ne contient pas J, donc

$$[J : J \cap H] = [JH : H] = [P : H] = p.$$

Il s'ensuit que

$$R_H^P\Big(\sum_{i=1}^{v} P/K_i\Big) = \sum_{x\in[P/H]} H/({}^{x}K_1) + \sum_{i=2}^{v} H/(H \cap K_i).$$

Remarquons ensuite que $H \cap K_i$ est un sous-groupe maximal de K_1, pour $i = 2, \ldots, v$. En effet, $H \cap K_i \subseteq H \cap J = K_1$ et

$$[K_1 : H \cap K_i] = [K_1 : J \cap H \cap K_i] = [K_1 : K_1 \cap K_i] = [K_1K_i : K_1] = [J : K_i].$$

Par ailleurs, K_1 contient $w = 1 + p + \cdots + p^{s-1}$ sous-groupes maximaux, disons $L_1, \ldots, L_w$, où $s = r_p(K_1)$, vu la remarque qui suit la proposition 4.2.8. Nous pouvons ainsi représenter la situation de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, dash] & J \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
K_1 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drrr, dash] & K_2 & \cdots & K_v \\
L_1 & L_2 & \cdots & L_w
\end{tikzcd}$$

Appelons u_i le nombre de sous-groupes maximaux dans J contenant un sous-groupe L_i fixé. Alors u_i est congru à 1 modulo p. En effet, les sous-groupes d'indice p dans J contenant L_i sont les mêmes que ceux contenant $L_i\Phi(J)$; par conséquent, u_i est égal au nombre de sous-groupes d'indice p du groupe abélien élémentaire $J/J\Phi(L_i)$. Donc u_i est congru à 1 modulo p, vu le lemme 4.2.6.

Ainsi chaque sous-groupe L_i est contenu dans K_1 et dans $u_i - 1$ autres sous-groupes K_j pour $j \neq 1$. En regroupant tous les K_j tels que $H \cap K_j = L_i$, pour un indice i fixé, nous obtenons $(u_i - 1) \cdot H/L_i = 0$ car $u_i \equiv 1 \bmod p$. Par conséquent

$$\sum_{j=2}^{v} H/(H \cap K_j) = \sum_{i=1}^{w} (u_i - 1) \cdot H/L_i = 0.$$

Remarquons ensuite que, comme $J \nleq H$, nous avons $N_P(J) \nleq H$, donc $HN_P(J) = P$ et par conséquent,

$$N_P(J)/N_H(J) \cong N_P(J)/(H \cap N_P(J)) \cong HN_P(J)/H \cong P/H.$$

De plus, si $x \in [N_P(J)/N_H(J)]$, alors ${}^xK_1 = {}^x(H \cap J) = H \cap J = K_1$. Nous obtenons alors

$$\sum_{x \in [P/H]} H/({}^xK_1) = \sum_{x \in [N_P(J)/N_H(J)]} H/({}^xK_1) = p \cdot H/K_1 = 0$$

ce qui montre que $R^P_H(a_J) = 0$.

Par ailleurs, si P est un groupe abélien et si H est un sous-groupe maximal de P contenant J, alors

$$R^P_H(a_J) = R^P_H\left(\sum_{i=1}^{v} P/K_i\right) = [P : H] \cdot H/K_i = 0$$

car $K_i \leq H$ pour tout $i = 1, \ldots, v$. Par conséquent, l'élément a_J appartient au noyau de toutes les restrictions à des sous-groupes maximaux de P, autrement dit $a_J \in K(P)$.

□

Malheureusement, ces éléments a_J, pour J parcourant les sous-groupes de P d'ordre p^u, n'engendrent pas $K(P)_{u-1}$ en général. En faisant les calculs par ordinateur, nous obtenons déjà un contre-exemple pour le groupe $(C_3)^4$: la dimension de $K(P)_2$ est égale à 31, tandis que la dimension de l'espace engendré par les éléments a_J où J est d'ordre 3^3 est égale à 30. Toutefois, lorsque $u = r$ où $|P| = p^r$, l'élément a_P engendre $K(P)_u$; autrement dit, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.2.11. *Soient P un p-groupe et $x = \sum_{H_i <\cdot P} \lambda_i \cdot P/H_i \in K(P)$. Alors tous les coefficients λ_i sont égaux. En particulier, si P est un p-groupe abélien d'ordre p^r, le sous-espace $K(P)_{r-1}$ de $B(P)$ est engendré par l'élément $a_P = \sum_{H <\cdot P} P/H$.*

Preuve : Montrons tout d'abord qu'il suffit de démontrer ce résultat dans le cas où le groupe P est abélien élémentaire. Rappelons dans ce but les deux définitions suivantes associées aux P-ensembles :

i) l'inflation est le foncteur $\mathrm{Inf}_{P/H}^{P}$: G/H-ens$\rightarrow$ G-ens qui envoie un G/H-ensemble X sur lui-même, vu comme G-ensemble.

ii) la déflation est le foncteur $\mathrm{Def}_{P/H}^{P}$: G-ens$\rightarrow$ G/H-ens qui envoie un G-ensemble X sur le G/H-ensemble $H\backslash X$ des orbites de X sous l'action de H.

Considérons l'élément $y = \sum_{H_i <\cdot P} \lambda_i \cdot (P/\Phi)/(H_i/\Phi) \in K(P/\Phi)$, où $\Phi = \Phi(P)$ est le sous-groupe de Frattini de P. Remarquons alors que $x = \mathrm{Inf}_{P/\Phi}^{P}(y)$. De plus, pour tout sous-groupe maximal H de P, on a $R_H^P \mathrm{Inf}_{P/\Phi}^{P} = \mathrm{Inf}_{H/\Phi}^{H} R_{H/\Phi}^{P/\Phi}$, et comme $\mathrm{Def}_{P/\Phi}^{P}\mathrm{Inf}_{P/\Phi}^{P} = \mathrm{id}$, il s'ensuit que $x \in K(P)$ si et seulement si $y \in K(P/\Phi)$. Par conséquent, il suffit de démontrer le résultat pour P/Φ ; autrement dit, nous pouvons supposer que P est abélien élémentaire, disons $P = (C_p)^r$.

Notons $H_1, \dots, H_s$ les sous-groupes maximaux de P où $s = 1 + p + \dots p^{r-1}$, vu le lemme 4.2.6. Nous avons alors

$$R_{H_j}^{P}(P/H_i) = H_j/(H_j \cap H_i)$$

pour tout $j \neq i$. De plus, comme P est abélien,

$$R_{H_i}^{P}(P/H_i) = \sum_{x \in [P/H_i]} H_i/H_i = p \cdot H_i/H_i = 0.$$

Par conséquent, vu que l'élément $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/H_i$ appartient à $K(P)$, nous obtenons

$$0 = R_{H_j}^{P}\Big(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/H_i\Big) = \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot H_j/(H_j \cap H_i) \qquad \text{(IV.1)}$$

pour tout $j = 1, \ldots, s$.

Fixons $L := H_v \cap H_w$ l'intersection de deux sous-groupes maximaux distincts. Comme $P/L \cong C_p \times C_p$, le sous-groupe L est contenu dans $p+1$ sous-groupes maximaux de P, disons $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_{p+1}}$ (dont H_v et H_w). En observant le coefficient de H_{α_u}/L dans l'équation (IV.1), pour $u = 1, \ldots, p+1$, nous obtenons le système d'équations

$$\sum_{i \neq u} \lambda_{\alpha_i} = 0$$

dont la matrice correspondante est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p+1}(k).$$

En soustrayant la première ligne de M à chacune des autres lignes, nous obtenons la matrice :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{p+1}(k)$$

qui est de rang p dans k, vu que la somme des lignes est nulle car k est de caractéristique p. Par suite, $\dim(\mathrm{Ker}(M')) = 1$ et, plus particulièrement, $\mathrm{Ker}(M') = \langle {}^t(1, 1, \ldots, 1) \rangle$. Donc les coefficients de x correspondant à des sous-groupes contenant le sous-groupe L sont tous les mêmes. En particulier, nous en déduisons que $\lambda_v = \lambda_w$. Comme ce résultat est vrai pour tout sous-groupe L qui est une intersection de deux sous-groupes maximaux, il s'ensuit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s$.

$\square$

En résumé, si P est un p-groupe abélien, le noyau $K(P)$ de l'application R est gradué : $K(P) = \bigoplus_j K(P)_j$ où chaque $K(P)_j$ est constitué des éléments de $K(P)$ de la forme $\sum_i \lambda_i \cdot P/K_i$, où $|K_i| = p^j$ (proposition 4.2.2). De plus, les éléments a_J, définis dans la proposition 4.2.10, appartiennent à $K(P)_{r_J}$, avec $|J| = p^{r_J+1}$, pour tout $J < P$. Finalement, dans la proposition 4.2.11, nous avons vu que si $|P| = p^r$, alors $K(P)_{r-1}$ est engendré par l'élément a_P, mais que cela n'est pas vrai en général pour les $K(P)_j$ avec $1 \leq j \leq r-2$. Rappelons également que $K(P)_0$ est engendré par $P/1$ et que $K(P)_r = 0$.

Nous allons nous intéresser ensuite au sous-espace $K(P)_1$ de $B(P)$, dans le cas où le groupe P est abélien élémentaire. Vu les remarques précédentes, cela résoudra le cas où $G = (C_p)^3$, vu que nous connaissons $K(P)_0$, $K(P)_2$ et $K(P)_3$ et que $K(P) = \bigoplus_{i=0}^{3} K(P)_i$ dans ce cas. Malheureusement, l'étude du cas de $K(P)_1$ ne peut pas se généraliser a priori et les sous-espaces $K(P)_j$ pour $2 \leq j \leq r-2$ semblent être encore plus difficiles à déterminer.

4.2.1 Le sous-espace $K(P)_1$ dans le cas abélien élémentaire

Supposons donc que le groupe P est abélien élémentaire, autrement dit que $P = (C_p)^r$ pour un entier $r \geq 2$. Par conséquent, P s'identifie à un $\mathbb{F}_p$-espace-vectoriel de dimension r, et ses sous-groupes correspondent aux sous-espaces. De ce point de vue, le sous-espace $K(P)_1$ de $B(P)$ correspond aux éléments de $K(P)$ qui font intervenir des droites.

Tout d'abord, si $r = 2$, il y a $p+1$ droites, disons $D_1, \ldots, D_{p+1}$ (qui s'identifient aux hyperplans de P) ; et la proposition 4.2.11 nous dit que $K(P)_1$ est engendré par l'élément $a_P = \sum_{i=1}^{p+1} P/D_i$.

Supposons donc que $r > 2$, et notons $D_1, \ldots, D_s$ les droites de P et $H_1, \ldots, H_s$ les hyperplans de P, où $s = 1 + p + \cdots + p^{r-1}$ (voir le lemme 4.2.6).

Le sous-espace $K(P)_1$ se caractérise alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
K(P)_1 &= \Big\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/D_i \Big| \sum_{i=1}^{s} \lambda_i [P : HD_i] \cdot H/(H \cap D_i) = 0, \ \forall\, H <\cdot P \Big\} \\
&= \Big\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/D_i \Big| \sum_{\substack{i \text{ tels que} \\ D_i \nleq H_j}} \lambda_i \cdot H_j/(H_j \cap D_i) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, s \Big\} \\
&= \Big\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/D_i \Big| \sum_{\substack{i \text{ tels que} \\ D_i \nleq H_j}} \lambda_i = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, s \Big\}
\end{aligned}$$

vu que $D_i \cap H_j = 1$ si $D_i \nleq H_j$.

Pour $1 \leq u \leq r$, notons $\mathbb{F}_p\langle S_u\rangle$ le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble S_u des sous-espaces de P de dimension u. En particulier, nous avons

$$\dim(\mathbb{F}_p\langle S_1\rangle) = \dim(\mathbb{F}_p\langle S_{r-1}\rangle) = s$$

où $s = 1 + p + \cdots + p^{r-1}$. Considérons alors les applications suivantes :

$$\mathbb{F}_p\langle S_{r-1}\rangle \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}_p\langle S_1\rangle \xrightarrow{\psi} \mathbb{F}_p\langle S_{r-1}\rangle$$

définies par $\varphi(H) = \sum\limits_{\substack{D<H \\ \dim(D)=1}} D$ et $\psi(D) = \sum\limits_{\substack{H \ngeq D \\ \dim(H)=r-1}} H$.

Le noyau de l'application ψ s'identifie à $K(P)_1$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\psi) &= \Big\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot D_i \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{j \text{ tels que } H_j \ngeq D_i} H_j = 0 \Big\} \\
&= \Big\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot D_i \mid \sum_{j=1}^{s} \big(\sum_{i \text{ tels que } D_i \nleq H_j} \lambda_i \big) H_j = 0 \Big\} \\
&\cong K(P)_1
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que l'image de φ est contenue dans le noyau de ψ. En effet,

$$\begin{aligned}
\psi\varphi(H) = \psi\Big(\sum_{\substack{D<H \\ \dim(D)=1}} D \Big) &= \sum_{\substack{D<H \\ \dim(D)=1}} \sum_{\substack{K \ngeq D \\ \dim(K)=r-1}} K \\
&= \sum_{\substack{K \\ \dim(K)=r-1}} \Big(\sum_{\substack{D<H, D \nless K. \\ \dim(D)=1}} 1 \Big) K
\end{aligned}$$

Or ce dernier terme est nul, car p divise la cardinalité de l'ensemble

$$E = \{D < H \,|\, \dim(D) = 1, D \nless K\}.$$

En effet, dans un hyperplan fixé H, il y a $1 + p + \cdots + p^{r-2}$ droites, dont $1 + p + \cdots + p^{r-3}$ sont également contenues dans un hyperplan K, distinct de H, en utilisant le lemme 4.2.6. Donc $\mathrm{Card}(E) = p^{r-2}$.

Appelons M la matrice de φ et L la matrice de ψ, relativement aux bases $\mathcal{B}_1 = \{D_1, \ldots, D_s\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{H_1, \ldots, H_s\}$. La matrice M est en fait la matrice d'incidence entre les droites et les hyperplans de P (pour la relation d'inclusion) ; autrement dit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i \leq H_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, la matrice M possède exactement $1+p+\cdots+p^{r-2} = s-p^{r-1}$ fois l'élément 1 par ligne et par colonne et des 0 ailleurs. Donc, si J est la matrice définie par $J_{i,j} = 1$, pour tout $i, j = 1, \ldots, s$, alors $J \cdot M = J$. De plus

$$\left({}^tM \cdot M\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{s} M_{ki} \cdot M_{kj} = 1.$$

En effet, si $1 \leq k \leq s$, $M_{ki} \cdot M_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } D_k < H_i \text{ et } D_k < H_j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; par ailleurs, il y a s droites dans un hyperplan et $s - p^{r-1}$ droites dans l'intersection de deux hyperplans distincts, et ces deux nombres sont congrus à 1 modulo p. Par conséquent, ${}^tM \cdot M = J$. De même, on montre que $M \cdot {}^tM = J$, en utilisant le fait que le nombre d'hyperplans contenant deux droites distinctes est congru à 1 modulo p.

Remarquons ensuite que L, la matrice de ψ est définie par

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } D_j \not< H_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit, que $L = J - {}^tM$. Le rang des matrices M et L diffèrent de 1, et plus précisément, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.2.12. *Avec les notations précédentes,*

$$\text{rang}(L) = \text{rang}(M) - 1.$$

Preuve : Comme le rang de la matrice M est égal au rang de la matrice ${}^tM$, il suffit de montrer que $\text{rang}(L) = \text{rang}({}^tM) - 1$. Remarquons tout d'abord que les rangs des matrices L et ${}^tM$ diffèrent au plus de 1. En effet, en soustrayant, dans ces deux matrices, la première ligne à chacune des autres lignes, nous obtenons des matrices L' et M', respectivement, telles que toutes les lignes de L' sont les mêmes que celles de $-M'$, à l'exception de la première.

Comme $\dim(\mathbb{F}_p\langle S_1\rangle) = \dim(\mathbb{F}_p\langle S_r - 1\rangle)$, les dimensions des noyaux de ces deux matrices diffèrent également d'au plus 1. Or $\text{Ker}({}^tM) \subseteq \text{Ker}(J - {}^tM)$, vu que si x appartient au noyau de ${}^tM$, alors

$$(J - {}^tM)(x) = M\,{}^tM(x) - {}^tM(x) = 0.$$

Finalement, l'élément ${}^t(1,\ldots,1)$ appartient au noyau de $J - {}^tM$ car cette matrice possède exactement p^{r-1} fois l'élément 1 par ligne (et 0 ailleurs), mais n'appartient pas au noyau de ${}^tM$, car ${}^tM$ possède $s-p^{r-1}$ fois l'élément 1 par ligne (et 0 ailleurs) et $s - p^{r-1} \equiv 1 \mod p$. Par conséquent, nous obtenons $\dim(\mathrm{Ker}({}^tM)) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) - 1$, d'où le résultat.

□

Par conséquent

$$\dim(K(P)_1) = \dim(\mathrm{Ker}(\psi)) = s - \mathrm{rang}(L) = s - \mathrm{rang}(M) + 1.$$

Or, déterminer le rang de la matrice d'incidence entre les droites et les hyperplans (pour la relation d'inclusion) est un problème difficile, qui a été résolu par Smith dans le cadre qui nous intéresse (et beaucoup étudié dans un cadre plus général par, entre autres, Hamada et Sin, du fait de son importance dans la théorie des codes) :

Théorème 4.2.13. *Le rang de la matrice d'incidence M entre les droites et les hyperplans dans un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension r, où $q = p^n$ pour un nombre premier p et un entier positif n, est donné par*

$$1 + \begin{pmatrix} p+r-2 \\ r-1 \end{pmatrix}^n.$$

Preuve : voir [Smi69], théorème 2.6.3.

Dans notre cas, comme $P = (C_p)^r$, qui s'identifie à un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension r, nous obtenons

$$\mathrm{rang}(M) = 1 + \begin{pmatrix} p+r-2 \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 4.2.14. *Si P est un p-groupe abélien élémentaire de rang r, alors le sous-espace $K(P)_1$ de $B(P)$ est de dimension $s - \begin{pmatrix} p+r-2 \\ r-1 \end{pmatrix}$ où $s = 1 + p + \cdots + p^{r-1}$ est le nombre de droites de P.*

Remarque : Dans le cas particulier où $P = (C_p)^3$, le rang de la matrice M est égal à $\frac{p^2+p+2}{2} = \frac{s+1}{2}$, où $s = 1 + p + p^2$. Par conséquent, la dimension du sous-espace $K(P)_1$ est égale à

$$s - \frac{s+1}{2} + 1 = \frac{s+1}{2}.$$

Comme l'image de φ est contenue dans le noyau de ψ, qui est isomorphe à $K(P)_1$, et que

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rang}(M) = \frac{s+1}{2} = \dim(K(P)_1)$$

nous en déduisons que $K(P)_1$ est égal à l'image de φ. Par suite, $K(P)_1$ est engendré par les éléments de la forme

$$a_H = \sum_{\substack{D < H \\ \dim(D)=1}} D$$

où H parcourt les hyperplans de P. Ainsi, comme dans le cas de $K(P)_{r-1}$, le sous-espace $K(P)_1$ est engendré par les éléments a_H où les H sont des plans de P.

Théorème 4.2.15. *Soient P un p-groupe. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Si $P = (C_p)^2$, alors $\mathrm{Soc}(B^P) = (S_{P,k})^2$.

(ii) Si $P = (C_p)^3$, alors $\mathrm{Soc}(B^P) = (S_{P,k})^n$, où $n = \frac{p^2+p+6}{2}$.

Preuve : Vu les remarques précédentes, nous savons que $\dim(K(P)_0) = 1$, $\dim(K(P)_{r-1}) = 1$ et $\dim(K(P)_r) = 0$ pour tout groupe abélien élémentaire de rang r. Donc, si $P = (C_p)^2$, la dimension de $K(P)$ est égale à 2.
Si $P = (C_p)^3$, par la remarque précédente, nous obtenons que

$$\dim(K(P)) = 1 + 1 + \frac{p^2+p+2}{2} = \frac{p^2+p+6}{2}.$$

□

Corollaire 4.2.16. *Soient P un p-groupe et H un sous-groupe de P. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Si $H \cong (C_p)^2$, alors $\mathrm{Soc}(P^P_{H,k}) = \left(S^P_{H,k}\right)^2$.

(ii) Si $H \cong (C_p)^3$, alors $\mathrm{Soc}(P^P_{H,k}) = \left(S^P_{H,k}\right)^d$, où $d = \frac{p^2+p+6}{2}$.

Preuve : Pour chaque sous-groupe H ci-dessus, nous connaissons le socle du foncteur de Burnside B^H correspondant, vu le théorème 4.2.15. De plus, dans chaque cas, ce socle ne contient que des foncteurs simples du type $S^H_{H,k}$. Il nous suffit donc d'appliquer la proposition 4.1.8.

□

4.3 Cas des p-groupes abéliens de rang 2

Nous désirons déterminer le socle du foncteur de Burnside associé à des groupes de la forme $P = C_{p^n} \times C_{p^m}$ où $0 \leq n \leq m$. Si $n = 0$ ou si $m = n = 1$, nous connaissons déjà le résultat (voir la proposition 4.2.3 et le corollaire 4.2.15). Soit P un tel groupe, de rang 2, avec $n \geq 1$. Comme P est abélien, son socle est égal à $S^d_{P,k}$ où d est la dimension de $K(P)$, le noyau du produit des restrictions de P à ses sous-groupes maximaux, c'est-à-dire le noyau de l'application

$$\prod_{H <\cdot P} R^P_H : B(P) \longrightarrow \prod_{H <\cdot P} B(H)$$

définie sur les générateurs de $B(P)$ par $R^P_H(P/K) = [P : HK] \cdot H/(H \cap K)$. Il nous faut donc, comme avant, déterminer la dimension de ce noyau ; c'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.3.1. *Soient $P = C_{p^n} \times C_{p^m}$ avec $1 \leq n \leq m$ et $\Phi = \Phi(P)$, le sous-groupe de Frattini de P. Pour chaque sous-groupe K de Φ, tel que $r_p(\Phi/K) = 1$, nous avons $r_p(P/K) = 2$. Donc il existe $p+1$ sous-groupes de P, notés $K_1, \ldots, K_{p+1}$, qui possèdent K comme sous-groupe maximal, dont exactement un, disons K_{p+1}, est contenu dans Φ. La famille $\mathcal{B}$ donnée par*

$$\Big\{ \sum_{H <\cdot P} P/H,\ P/L,\ P/K_1 - P/K_i \ \Big|\ L \leq \Phi,\ K < \Phi,\ r_p(\Phi/K) = 1,\ i = 2, \ldots, p \Big\}$$

est une base de $K(P)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord les trois propriétés suivantes :

i) Si $K \leq \Phi$, alors $(P/K)/(\Phi/K) \cong P/\Phi \cong C_p \times C_p$, donc $r_p(P/K) = 2$.

ii) Si H_i et H_j sont des sous-groupes maximaux distincts de P, alors $\Phi = H_i \cap H_j$, vu que $\Phi \subseteq H_i \cap H_j$ et que

$$[P : H_i \cap H_j] = [P : H_i][H_i : H_i \cap H_j] = p \cdot [P : H_j] = p^2 = [P : \Phi].$$

iii) Si $J < P$ est tel que $J \not\leq \Phi$, alors $J \cap \Phi$ est d'indice p dans J. En effet, J est contenu dans un unique sous-groupe maximal H de P, qui est le sous-groupe engendré par Φ et J, car s'il existait des sous-groupes distincts maximaux H_i et H_j dans P, contenant J, alors $J \leq H_i \cap H_j = \Phi$, vu la remarque précédente. Cela implique que $[J : J \cap \Phi] = [J\Phi : \Phi] = [H : \Phi] = p$.

Commençons par montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Si K est un sous-groupe de Φ fixé tel que $r_p(\Phi/K) = 1$, alors il est contenu dans $p+1$ sous-groupes minimaux, $K_1, \ldots, K_{p+1}$ (vu que $r_p(P/K) = 2$ par la première propriété ci-dessus) et l'un seulement, disons K_{p+1}, est dans Φ vu que $r_p(\Phi/K) = 1$. Donc l'intersection du k-espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\big\{P/K_1 - P/K_i \,|\, K < \Phi, r_p(\Phi/K) = 1, i = 2, \ldots, p\big\}$$

avec celui engendré par les autres éléments de $\mathcal{B}$ est nulle. De plus, la famille $\Big\{\sum\limits_{H <\cdot P} P/H, P/L \,|\, L \leq \Phi\Big\}$ est clairement libre. Donc pour montrer que $\mathcal{B}$ est libre, il suffit de montrer que la famille des $P/K_1 - P/K_i$ pour $i = 2, \ldots, p$ et $K < \Phi$ avec $r_p(\Phi/K) = 1$, est libre. Dans ce but, montrons que chaque K_i ci-dessus n'apparaît que dans un seul élément de $\mathcal{B}$.
Soit $J < P$ tel que $J \nleq \Phi$, alors $J \cap \Phi$ est d'indice p dans J, vu la propriété iii) du début de la preuve. Par conséquent, J possède un unique sous-groupe maximal contenu dans Φ, qui est $J \cap \Phi$. Donc chaque sous-groupe K_i apparaissant dans $\mathcal{B}$ possède un unique sous-groupe maximal K qui est dans Φ, ainsi il ne peut apparaître qu'une seule fois dans $\mathcal{B}$, ce qui démontre que $\mathcal{B}$ est libre.

Montrons ensuite que la famille $\mathcal{B}$ engendre $K(P)$. Vu la proposition 4.2.2, $K(P)$ est gradué par l'ordre des sous-groupes de P, et l'on note $K(P)_i$, la partie de $K(P)$ correspondant aux sous-groupes d'ordre p^i. Nous savons que $K(P)_{n+m} = 0$, que $K(P)_0$ est engendré par l'élément $P/1$ et, par la proposition 4.2.11, que $K(P)_{n+m-1}$ est engendré par l'élément $\sum\limits_{H <\cdot P} P/H$.

Soit $1 \leq l \leq n+m-2$ et $x = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/J_i \in K(P)_l$. Comme Φ est l'intersection des sous-groupes maximaux de P, si $L \leq \Phi$, alors pour tout $H <\cdot P$, nous avons $L \leq H$. Ainsi $[P : HL] = [P : H] = p$ et par suite $R^P_H(P/L) = 0$; autrement dit $P/L \in K(P)$.
Donc si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = \sum\limits_{\substack{i \text{ tels que} \\ J_i \nleq \Phi}} \lambda_i \cdot P/J_i$ et où $x_2 = \sum\limits_{\substack{i \text{ tels que} \\ J_i \leq \Phi}} \lambda_i \cdot P/J_i$, alors $x_2 \in K(P)$, donc x_1 aussi. Nous pouvons ainsi nous restreindre au cas où les sous-groupes J_i apparaissant dans x ne sont pas des sous-groupes de Φ. Si $x = 0$, alors x est engendré par les éléments de $\mathcal{B}$. Supposons donc que x est non nul et, sans perte de généralité, que $\lambda_1 \neq 0$. Ecrivons $x = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/J_i$.
Nous pouvons finalement supposer qu'il n'existe pas de sous-ensemble propre non vide I de $\{1, \ldots, s\}$ tel que $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \cdot P/J_i$ appartient à $K(P)_l$.

En utilisant la propriété iii) ci-dessus, $J_1 \cap \Phi$ est d'indice p dans J_1, car J_1 n'est pas contenu dans Φ, donc $J_1 \cap \Phi$ est maximal dans J_1. Vu la première propriété du début de la preuve, $r_p(P/(J_1 \cap \Phi)) = 2$, donc il existe $p+1$ sous-groupes dont $J_1 \cap \Phi$ est un sous-groupe maximal. De plus, l'un de ces sous-groupes au moins, J_1, n'est pas dans Φ. Il s'ensuit que $r_p(\Phi/(J_1 \cap \Phi)) = 1$, donc $J_1 \cap \Phi$ est contenu dans Φ, dans J_1 et dans $p-1$ autres sous-groupes de P d'ordre p^l, qui ne sont pas contenus dans Φ. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce sont $J_2, \ldots, J_r, \tilde{J}_{r+1}, \ldots, \tilde{J}_p$, où $\tilde{J}_u$ n'apparaît pas dans x pour tout $u = r+1, \ldots, p$, et où $1 \leq r \leq s$.

Nous obtenons alors que $J_i \cap \Phi = J_1 \cap \Phi$, pour $i = 2, \ldots, r$. En effet, $J_1 \cap \Phi \leq J_i \cap \Phi$ et ces deux groupes ont le même ordre vu que $|J_1| = |J_i|$ et que $[J_1 : J_1 \cap \Phi] = p = [J_i : J_i \cap \Phi]$, en utilisant toujours le fait que $J_i \nleq \Phi$. De plus les sous-groupes $J_1, \ldots, J_r$ sont tous contenus dans le même sous-groupe maximal H_0 de P (ce sous-groupe est unique car les J_i ne sont pas dans Φ, vu la deuxième propriété propriété du début de la preuve). En effet, si H est un sous-groupe maximal de P tel que J_1 n'est pas contenu dans H, alors

$$HJ_1/J_1 \cong H/(J_1 \cap \Phi) = H/(J_i \cap \Phi) \cong HJ_i/J_i$$

et comme $|J_i| = |J_1|$, cela force $|HJ_i| = |HJ_1| = |P|$ donc $HJ_i = P$; autrement dit $J_i \nleq H$, pour tout $i = 2, \ldots, r$.

Soit $H <\cdot P$, nous avons $0 = R_H^P\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot P/J_i\right) = \sum_{\substack{i \text{ tels que} \\ J_i \nleq H}} \lambda_i \cdot H/(H \cap J_i)$.

Si $H = H_0 > J_1$, alors les indices $1, \ldots, r$ n'apparaissent pas dans cette somme.

Si $H \ngeq J_1$, alors, comme $R_H^P(x) = 0$, le coefficient de $H/(H \cap J_1)$ doit être nul. Or $H \cap J_1 = H \cap H_0 \cap J_1 = \Phi \cap J_1$, vu la remarque ii) du début de la preuve. Donc le coefficient de $H/(H \cap J_1) = H/(\Phi \cap J_i)$, pour tout $i = 1, \ldots, r$, est égal à $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r$, donc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 0$ et il n'y a aucune autre relation faisant intervenir $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Par suite, l'élément $y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot P/J_i$ appartient à $K(P)$ et donc, vu nos hypothèses sur x, $r = s$ et $y = x$. Finalement, la condition $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 0$ nous permet d'écrire

$$x = -\sum_{i=2}^{r} \lambda_i (P/J_1 - P/J_i)$$

où $J_1, \ldots, J_r$ sont des sous-groupes non contenus dans Φ, dont $J_1 \cap \Phi$ est un sous-groupe maximal. Donc la famille $\mathcal{B}$ engendre $K(P)$.

$\square$

Il nous reste à déterminer le nombre d'éléments de la famille $\mathcal{B}$. Pour cela, nous allons utiliser un résultat de Yeh, qui compte le nombre de sous-groupes de type donné d'un p-groupe abélien :

Théorème 4.3.2. *Soit P un p-groupe abélien, de type $(k_1, \dots, k_n)$; autrement dit $P = C_{p^{k_1}} \times \cdots \times C_{p^{k_n}}$, avec $k_i \leq k_{i+1}$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Le nombre de sous-groupes cycliques de P d'ordre p^h est donné par*

$$\frac{p^{n-\nu_h} - 1}{p-1} p^{(n-\nu_h-1)(h-1)+a}$$

où ν_h est défini par $k_{\nu_h} < h \leq k_{\nu_{h+1}}$ avec $k_0 = 0$ et $a = \sum_{\mu=0}^{\nu_h} k_\mu$.

Soient

$$\begin{aligned} h_1 = \cdots = h_{m_1} > h_{m_1+1} = \cdots = h_{m_1+m_2} > \dots \\ > h_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1} = \cdots = h_{m_1+\cdots+m_r} \end{aligned}$$

des entiers positifs, où $m_1 + \cdots + m_r = m \leq n$ sont des entiers positifs, plus petits ou égaux à k_n. Définissons les entiers ν_i par $k_{\nu_i} < h_i \leq k_{\nu_i+1}$ avec $k_0 = 0$, pour $i = 1, \dots, m$. Alors le nombre de sous-groupes de P de type $(h_1, \dots, h_{m_1+\cdots+m_r})$ est égal à

$$p^N \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} \left(p^{n-\nu_i-i+1} - 1\right)}{\prod_{\mu=1}^{r} \prod_{\nu=1}^{m_\mu} (p^\nu - 1)}$$

où $N = \sum_{i=1}^{m} (n - \nu_i + 1 - 2i)(h_i - 1) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{r} m_i^2 - m^2\Big) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=0}^{\nu_i} k_\mu$.

Preuve : Voir [Yeh48], théorème 1.

Nous pouvons à présent appliquer ce théorème au cas qui nous intéresse, à savoir le cas d'un groupe abélien de rang 2 :

Corollaire 4.3.3. *Soit $P = C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}}$ avec $1 \leq k_1 \leq k_2$. Le nombre de sous-groupes cycliques d'ordre p^h de P est égal à*

i) $(p+1)p^{h-1}$, *si* $1 \leq h \leq k_1$,

ii) p^{k_1}, *si* $k_1 < h \leq k_2$.

Le nombre de sous-groupes de P de type (h_1, h_2), avec $h_1 \geq h_2$ et $h_1, h_2 \neq 0$ est égal à *i)* $p^{h_1-h_2-1}(p+1)$, *si* $1 \leq h_2 < h_1 \leq k_1$,

ii) $p^{k_1-h_2}$, *si* $1 \leq h_2 \leq k_1 < h_1 \leq k_2$,

iii) 1, *si* $1 \leq h_1 = h_2 \leq k_1$.

Preuve : Le théorème précédent, appliqué au cas où $P = C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}}$ avec $k_1 \leq k_2$, nous dit que le nombre de sous-groupes de type (h_1, h_2), avec $h_1 > h_2$ et $h_1, h_2 \neq 0$ est égal à

$$p^N \cdot \frac{\left(p^{2-\nu_1}-1\right)\left(p^{1-\nu_2}-1\right)}{(p-1)^2}$$

où $N = (1-\nu_1)(h_1-1)+(-1-\nu_2)(h_2-1)-1+\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{\mu=0}^{\nu_i} k_\mu$ et où les entiers ν_i sont définis par $k_{\nu_i} < h_i \leq k_{\nu_{i+1}}$. Nous obtenons donc :

i) si $1 \leq h_2 < h_1 \leq k_1$, alors $\nu_1 = \nu_2 = 0$, donc $N = h_1 - h_2 - 1$ et il y a $p^{h_1-h_2-1}(p+1)$ sous-groupes de type (h_1, h_2),

ii) si $1 \leq h_2 \leq k_1 < h_1 \leq k_2$, alors $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$, donc $N = k_1 - h_2$ et il y a $p^{k_1-h_2}$ sous-groupes de type (h_1, h_2).

Dans le cas où $h = h_1 = h_2$, nous avons $h \leq k_1$. Nous obtenons alors que $\nu_1 = \nu_2 = 0$ et que le nombre de sous-groupes de type (h, h) est égal à $p^0 \cdot \frac{\left(p^2-1\right)(p-1)}{(p^2-1)(p-1)} = 1$; autrement dit, il y a un unique sous-groupe de type (h, h).

Finalement, le nombre de sous-groupes cyclique de P d'ordre p^h est donné par

$$\frac{p^{2-\nu_h}-1}{p-1} \cdot p^{(1-\nu_h)(h-1)+a}$$

où $a = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\nu_h} k_\mu$ et où l'entier ν_h est défini par $k_{\nu_h} < h \leq k_{\nu_{h+1}}$. Par conséquent, nous obtenons que

i) si $h \leq k_1$, alors $\nu_h = 0$ donc $a = 0$ et il y a $(p+1)p^{h-1}$ sous-groupes cycliques d'ordre p^h,

ii) si $k_1 < h \leq k_1$, alors $\nu_h = 1$ donc $a = k_1$ et il y a p^{k_1} sous-groupes cycliques d'ordre p^h.

□

Nous pouvons à présent déterminer le socle du foncteur de Burnside associé à un p-groupe abélien de rang 2 :

Proposition 4.3.4. *Soit $P = C_{p^n} \times C_{p^m}$, avec $1 \leq n \leq m$. Alors le socle de B^P est égal à $S^d_{P,k}$ où*

$$\begin{aligned} d = n + 1 + &\frac{p+1}{(p-1)^2}(p^{n+1} - p^n + p^{n-1} - p^2 - (n-2)(p-1)) \\ &+ \frac{m-n}{p-1}(p^{n+1} - p^n + p^{n-1} - 1). \end{aligned}$$

En particulier, si $P = C_p \times C_{p^m}$, alors $d = mp - p + 2$ et si $P = C_{p^2} \times C_{p^m}$, alors $d = m(p^2+1) - p^2 + p + 1$.

Preuve : Vu les résultats précédents, le socle de B^P est égal à $S^d_{P,k}$ où d est la dimension de $K(P)$, le noyau du produit des restrictions de P aux sous-groupes maximaux de P. Or la proposition 4.3.1 nous donne une base $\mathcal{B}$ de cet espace. Il suffit donc de compter le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$.

Tout d'abord, en utilisant le corollaire 4.3.3, nous obtenons que le nombre de sous-groupes de $\Phi(P) = C_{p^{n-1}} \times C_{p^{m-1}}$ est égal à

$$N = n - 1 + (p+1)\left(\sum_{i=0}^{n-2} p^i(n-1-i)\right) + (m-n)\frac{p^n - 1}{p-1} + 1.$$

Il nous reste donc à compter le nombre l de sous-groupes propres $K < \Phi(P)$ tels que $r_p(\Phi(P)/K) = 1$, autrement dit, tels que le quotient $\Phi(P)/K$ est cyclique. Or pour tout groupe abélien fini A, le nombre de sous-groupes de A dont le quotient correspondant est cyclique est égal au nombre de sous-groupes cyclique de A. C'est une conséquence du théorème 10.57 de [Rot95] qui affirme que si S est un sous-groupe de A, alors A contient un sous-groupe isomorphe à A/S. Par conséquent, $l = c - 1$ où c est le nombre de sous-groupes cycliques de $\Phi(P)$. De plus, vu le corollaire 4.3.3,

$$c = (p+1)\frac{p^{n-1} - 1}{p-1} + (m-n)p^{n-1} + 1.$$

Finalement, le nombre d'élément de $\mathcal{B}$, et donc la dimension de $K(P)$, est égal à $d = 1 + N + (p-1)(c-1)$, ce qui, après quelques calculs, nous donne le résultat cherché.

□

Comme dans le cas cyclique et les cas abéliens élémentaires de rang 2 et 3, nous pouvons en déduire un résultat analogue pour le socle des foncteurs de Mackey projectifs :

Corollaire 4.3.5. *Soient P un p-groupe et $H \cong C_{p^n} \times C_{p^m}$ pour des entiers $1 \leq n \leq m$, un sous-groupe abélien de rang 2 de P. Alors le socle du foncteur $P^P_{H,k}$ est égal à $(S^P_{H,k})^d$ où d est l'entier défini dans la proposition 4.3.4.*

Preuve : Par la proposition 4.3.4, le socle du foncteur de Burnside B^H, associé au groupe H, est égal à $\left(S^H_{H,k}\right)^d$. La proposition 4.1.8 nous permet alors de conclure.

□

4.4 Sous-foncteurs simples du foncteur de Burnside

Dans les sections précédentes, nous avons démontré que si P est un p-groupe abélien, alors le socle de B^P ne contient que des foncteurs simples du type $S_{P,k}$. De plus, vu la proposition 4.1.8, si $\mathrm{Soc}\left(B^H\right) = \left(S^H_{H,k}\right)^m$ où $H \leq P$, alors $\mathrm{Soc}\left(P^P_{H,k}\right) = \left(S^P_{H,k}\right)^m$, pour le même entier m. Cela nous a permis, en particulier, de déterminer le socle des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables indexés par un sous-groupe cyclique, abélien de rang 2, ou abélien élémentaire de rang 3 (voir les corollaires 4.2.4, 4.2.16 et 4.3.5).

La question suivante est donc de savoir quels sont les sous-foncteurs simples de B^P. Plus particulièrement, dans quels cas le socle de B^P ne contient-il que des foncteurs simples du type $S_{P,k}$? C'est à cette question que nous allons partiellement répondre dans cette section.

Ce problème s'apparente au calcul du noyau du produit des restrictions étudié dans les paragraphes précédents. Nous sommes donc confrontés au même genre de difficulté et une détermination précise de ces sous-foncteurs semble difficile. Néanmoins, il est possible de donner quelques conditions sur ces sous-foncteurs simples.

Tout d'abord, en utilisant la proposition 4.1.6 et le fait que $B^P = P_{P,k}$, nous obtenons que les sous-foncteurs simples de B^P sont de la forme $S_{H,k}$ où $H = N_P(J)$ pour un sous-groupe J de P.
De plus, si $S \cong S_{H,k}$ est un sous-foncteur simple de B^P, alors $S(H) = kx$ où $x = \sum_i \lambda_i \cdot H/K_i \in B(H)$ doit satisfaire les conditions suivantes :

i) $\sum_i \lambda_i \cdot H/{}^gK_i = c_g(x) = x = \sum_i \lambda_i \cdot H/K_i$, pour tout $g \in N_G(H)$,

ii) $0 = I_H^J(x) = \sum_i \lambda_i \cdot J/K_i$, pour tout $J > H$,

iii) $0 = R_L^H(x) = \sum_i \lambda_i \cdot \sum_{x \in [L \backslash H/K_i]} L/L \cap {}^xK_i$, pour tout $L < H$.

Remarques :

1) Comme précédemment, il suffit d'imposer les deux dernières conditions ci-dessus pour des sous-groupes J contenant H maximalement et des sous-groupes L contenus maximalement dans H.
2) Pour que la condition $I_H^J(x) = 0$ soit satisfaite, pour $J > H$, il faut que H contienne des sous-groupes non conjugués dans H, mais qui le deviennent dans J. En particulier, si N est un sous-groupe normal de J, contenu dans H, alors $I_H^J(H/N) = J/N$ et H/N est le seul élément de $B(H)$ dont l'image par I_H^J est égale à J/N. Par conséquent, si le terme $\lambda \cdot H/N$ apparaît dans x, la condition $0 = I_H^J(x)$ implique $\lambda = 0$.
   En particulier, si P est abélien nous retrouvons le fait que le seul cas où les conditions ci-dessus sont satisfaites est le cas où $H = P$.

Proposition 4.4.1. *Soit H un sous-groupe propre d'un p-groupe P. Si S est un sous-foncteur simple de B^P isomorphe à $S_{H,k}$, avec $S(H) = kx$ où $x = \sum_i \lambda_i \cdot H/J_i$, alors les J_i apparaissant avec un coefficient non nul ne sont pas maximaux dans H.*

Preuve : Posons $K(H) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_{L<H} R_L^H\Big)$, le noyau du produit des restrictions de H à tous les sous-groupes propres et $x_{l-1} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot H/K_i$ la somme des termes de x faisant intervenir des sous-groupes $K_1, \ldots, K_s$ maximaux de H. Montrons que x_{l-1} appartient à $K(P)$. L'élément x peut s'écrire sous la forme $x = \nu \cdot H/H + x_{l-1} + \sum_{\substack{J \text{ tel que} \\ [H:J]>p}} \mu_J \cdot H/J$. Par conséquent, comme $R_L^H(x) = 0$ pour tout sous-groupe maximal L de H, nous obtenons

$$0 = \nu \cdot L/L + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{u \in [L \backslash H/K_i]} L/(L \cap {}^uK_i) + \sum_{\substack{J \text{ tel que} \\ [H:J]>p}} \mu_J \sum_{v \in [L \backslash H/J]} L/(L \cap {}^vJ).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $K_1 = L$ et ainsi, nous obtenons $R_L^H(x_{l-1}) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{u \in [L \backslash H/K_i]} L/(L \cap {}^uK_i) = \sum_{i=2}^{s} \lambda_i \cdot L/(L \cap K_i)$.

Supposons que $R_L^H(x_{l-1}) \neq 0$. Il existe alors un indice i, disons $i = 2$, tel que $\lambda_i \neq 0$. De plus l'équation $R_L^H(x) = 0$ implique qu'il existe un sous-groupe J de H tel que $[H : J] > p$, et un élément $v \in [L\backslash H/J]$ tel que le coefficient de $L/(L \cap {}^vJ)$ dans l'expression de $R_L^H(x)$ n'est pas nul et tel que $L/(L \cap K_2) = L/(L \cap {}^vJ)$. Comme ${}^vJ$ est d'indice plus grand que p dans H, ${}^vJ$ doit être contenu dans L et, par conséquent, ${}^vJ = L \cap K_2$. Donc $J = L \cap K_2$ est normal dans H et ainsi, $R_L^H(\mu_J \cdot H/J) = \mu_j \cdot [H : L] \cdot L/J = 0$ ce qui contredit l'hypothèse que le coefficient de $L/(L \cap {}^vJ) = L/J$ est non nul. Par suite $R_L^H(x_{l-1}) = 0$ pour tout sous-groupe maximal L de H. Donc x_{l-1} appartient à $K(P)$. Par la proposition 4.2.11, tous les coefficients λ_i de x_{l-1} sont égaux ; autrement dit, tous les sous-groupes maximaux de H apparaissent le même nombre de fois dans x_{l-1}, donc aussi dans x.

Fixons J tel que $H <\cdot J$. Soit K un sous-groupe normal de J, d'indice p^2 et contenu dans H. Un tel sous-groupe existe car si J est cyclique, on prend pour K son unique sous-groupe d'indice p^2 qui est alors forcément normal et contenu dans H et sinon, il existe un sous-groupe $H' <\cdot J$ distinct de H et l'on choisit $K = H \cap H'$.
Il existe alors un indice $1 \leq j \leq s$ tel que $K = K_j$ et, comme K est un sous-groupe normal de J contenu dans H, $\lambda_j = 0$, vu la deuxième remarque ci-dessus. Par conséquent, tous les coefficients λ_i de x_{l-1} sont nuls, donc $x_{l-1} = 0$.

□

Nous pouvons en déduire le résultat suivant :

Corollaire 4.4.2. *Soit P un p-groupe. Si $H = 1$, C_p, C_{p^2} ou $C_p \times C_p$ est un sous-groupe propre de P, alors $S_{H,k}$ n'est pas un sous-foncteur de B^P.*

Preuve : Rappelons tout d'abord que si $S_{H,k}$ est un sous-foncteur de B^P, alors $S_{H,k}(H) = kx$, avec $x = \sum_i \lambda_i \cdot H/K_i \in B(H)$, tel que

i) $c_g(x) = x$, pour tout $x \in N_G(H)$,
ii) $I_H^J(x) = 0$ pour tout $J > H$,
iii) $R_K^H(x) = 0$ pour tout $K < H$.

De plus, les sous-groupes K_i qui apparaissent ne peuvent pas être normaux dans P, vu la deuxième remarque ci-dessus. Donc $S_{1,k}$ n'est pas un sous-foncteur de B^P si $P \neq 1$, car 1 est un sous-groupe normal de P. De plus, si $H \neq 1$, les sous-groupes K_i ne peuvent pas être égaux à H, car

$$R_1^H(H/H) = 1/1 \neq 0.$$

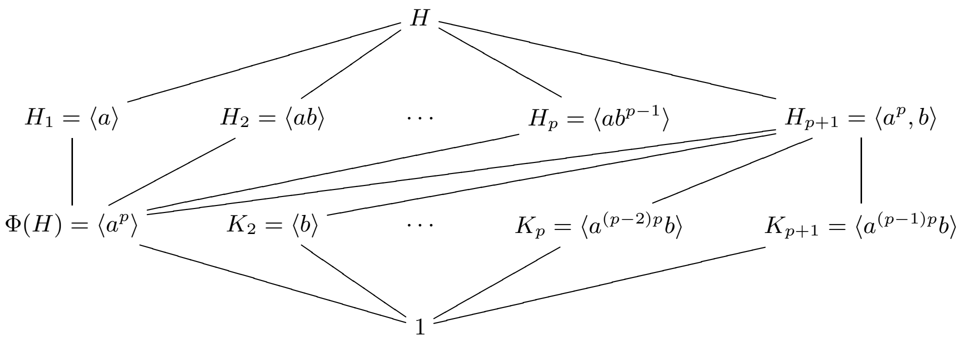
Donc $S_{C_p,k}$ ne peut pas être un sous-foncteur de B^P. Finalement x ne contient pas de terme de la forme H/K où K est maximal dans H. Donc

B^P ne peut pas non plus posséder de sous-foncteurs isomorphes à $S_{H,k}$ pour $H = C_{p^2}$ ou $C_p \times C_p$.

$\square$

La question qui se pose alors naturellement est la suivante : ce résultat reste-t-il vrai pour un sous-groupe propre H quelconque ? La réponse est négative, vu l'exemple suivant :

Exemple : Considérons le groupe $P = (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p$ où l'action de $C_p = \langle g \rangle$ sur $H = C_{p^2} \times C_p = \langle a, b \rangle$ est donnée par ${}^g a = a$ et ${}^g b = a^p b$. Cette action est bien définie car ${}^{g^i} b = a^{ip} b$ et ainsi ${}^{g^p} b = b$, donc g^p agit par l'identité.
Le treillis des sous-groupes de H est le suivant :



Vu la proposition 4.3.1, le noyau $\mathrm{Ker}\Big(\sum_{K \lessdot H} R_K^H\Big)$ possède la base suivante :

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{J \lessdot H} H/J,\ H/\langle a^p \rangle,\ H/1,\ H/\langle b \rangle - H/\langle a^{(i-1)p} b \rangle \text{ pour } i = 2, \ldots, p \right\}.$$

Nous désirons montrer que le foncteur B^P possède un sous-foncteur S isomorphe à $S_{H,k}$. Cela revient à déterminer un élément $x \in B(H)$ tel que $x \in \mathrm{Ker}\Big(\sum_{K \lessdot H} R_K^H\Big)$, que $I_H^G(x) = 0$ et que $c_u(x) = x$ pour tout $u \in \overline{N}_P(H)$, puis à poser $S(H) = kx$.

Commençons par la première condition. Il faut donc que x soit une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Or l'élément $\sum_{J \lessdot H} H/J$ ne peut pas apparaître dans x vu la proposition 4.4.1, et de même, les éléments $H/\langle a^p \rangle$ et $H/1$ ne peuvent pas apparaître dans x, en utilisant la deuxième remarque, page 181, et le fait que $\langle a^p \rangle$ et 1 sont des sous-groupes normaux de P. Donc x doit être de la forme $\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \lambda_i \cdot \Big(H/\langle b\rangle - H/\langle a^{(i-1)p}b\rangle\Big)$.

Par ailleurs, $g^i b g^{-i} = a^{ip}b$, donc ${}^{g^{i-1}}\langle b\rangle = \langle a^{(i-1)p}b\rangle$. Il s'ensuit que

$$I_H^P\Big(H/\langle b\rangle - H/\langle a^{(i-1)p}b\rangle\Big) = 0$$

pour tout $i = 2, \ldots, p$, vu que les sous-groupes $\langle b\rangle$ et $\langle a^{(i-1)p}b\rangle$ sont conjugués dans P.

Il nous reste à traiter la condition $c_u(x) = x$ pour tout $x \in N_P(H)/H$. Par construction, H est un sous-groupe normal de P, donc $N_P(H)/H = P/H = \langle \overline{g}\rangle$. Il suffit ainsi de vérifier que $c_g(x) = x$, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{p} \lambda_i \cdot \Big(H/\langle b\rangle - H/\langle a^{(i-1)p}b\rangle\Big) &= \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \cdot \big(H/\langle a^{p}b\rangle - H/\langle a^{ip}b\rangle\big)\\ &= \sum_{j=3}^{p+1} \lambda_{j-1} \cdot \Big(H/\langle a^{p}b\rangle - H/\langle a^{(j-1)p}b\rangle\Big).\end{aligned}$$

Or les égalités ci-dessus sont vérifiées si et seulement si $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p$. Par conséquent, l'élément

$$x = \sum_{i=2}^{p} \Big(H/\langle b\rangle - H/\langle a^{(i-1)p}b\rangle\Big) = -\sum_{i=1}^{p} H/\langle a^{(i-1)p}b\rangle$$

appartient à $\operatorname{Ker}\Big(\displaystyle\sum_{K \lessdot H} R_K^H\Big)$, à $\operatorname{Ker}(I_H^P)$ et satisfait $c_u(x) = x$ pour tout $u \in \overline{N}_P(H)$. Donc le sous-foncteur S de B^P défini par $S(H) = kx$ est bien isomorphe $S_{H,k}$. Nous avons de plus montré que c'est l'unique tel sous-foncteur de B^P.

Chapitre V

Coefficients de Cartan pour des foncteurs de Mackey associés à un p-groupe

Afin de mieux comprendre les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, nous nous sommes précédemment intéressés aux groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs de Mackey simples et au socle de ces foncteurs. En termes de série de Loewy, cela revient à comprendre la deuxième couche et la dernière couche de ces foncteurs. Il reste donc à comprendre tout ce qu'il y a entre deux, et la première question qui se pose est de savoir quels sont les foncteurs simples qui apparaissent dans ces couches ; autrement dit, quels sont les facteurs de composition d'un foncteur de Mackey projectif indécomposable. Dans ce but, nous allons nous intéresser aux matrices de Cartan (voir la définition 1.2.17) qui nous donnent précisément cette information.
Dans tout ce chapitre, nous allons nous placer dans le cas des foncteurs de Mackey associés à des p-groupes. Fixons donc un p-groupe fini P et un corps k algébriquement clos, de caractéristique p.

5.1 Coefficients de Cartan

Afin de calculer les coefficients de Cartan, nous allons utiliser le foncteur B_X, où X est un P-ensemble, qui est le foncteur de Mackey obtenu en appliquant la construction de Dress au foncteur de Burnside $B = B^P$. Rappelons de quoi il s'agit.

Définition 5.1.1. *Soit X un G-ensemble, où G est un groupe fini quelconque. Pour tout foncteur de Mackey M associé à G, on définit le foncteur de Mackey M_X par $M_X(Y) = M(Y \times X)$ pour tout G-ensemble Y (en utilisant la définition de foncteurs de Mackey due à Dress).*

Nous allons appliquer cette construction au foncteur de Mackey de Burnside, ce qui nous permet d'obtenir le foncteur B_X, pour chaque P-ensemble X. La propriété essentielle de ce foncteur est la suivante :

Proposition 5.1.2. *Soient X un G-ensemble et M un foncteur de Mackey associé à G. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B_X, M) \cong M(X).$$

Preuve : Le corollaire 8.2 de [TW95] affirme que pour tout foncteur de Mackey M associé à G, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B, M) \cong M(G)$. En particulier, en appliquant cet isomorphisme au foncteur M_X et en utilisant la définition de Dress de foncteurs de Mackey, nous obtenons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B, M_X) \cong M_X(G/G) = M(X).$$

De plus, pour tout G-ensemble Y, le foncteur $\mathcal{I}_Y : \mathrm{Mack}_k(G) \to \mathrm{Mack}_k(G)$ qui associe à chaque foncteur de Mackey M le foncteur M_Y est autoadjoint (voir [Bou00], proposition 5.5.6). Par conséquent,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B_X, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B, M_X) \cong M(X).$$

□

Théorème 5.1.3. *Soient J et Y des sous-groupes d'un p-groupe P. Le coefficient de la matrice de Cartan correspondant aux foncteurs $P_{Y,k}$ et $S_{J,k}$ est donné par*

$$c_{(J,k),(Y,k)} = \sum_{g \in [J \backslash P / Y]} n_{J \cap {}^g Y}$$

où n_H désigne le nombre de classes de conjugaison d'un groupe H.

Remarque : Le problème plus général de calculer les coefficients de la matrice de Cartan entre foncteurs de Mackey associés a un groupe G quelconque a été résolu par Bouc, dans [Bou98] : soient P_M et P_N des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables pour le groupe G sur k, dont les évaluations en 1 sont égales à M et N respectivement, avec M et N non nuls (cette hypothèse équivaut à dire que P_M et P_N sont dans $\mathrm{Mack}_k(G, 1)$, cas auquel on peut toujours se ramener, vu le théorème 1.7.8). Le coefficient de Cartan correspondant est alors égal à

$$c_{M,N} = \sum_{Q \in [G \backslash s_p(G)]} \dim_k \Big(\mathrm{Hom}_{k\overline{N}_G(Q)}(M[Q], N[Q]) \Big)$$

où $M[Q]$ et $N[Q]$ désignent les quotients de Brauer respectifs en Q (voir la page 38), et $[G \backslash s_p(G)]$ est un système de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G. Même si le théorème 5.1.3 peut se déduire de ce résultat, la preuve donnée ici est différente. Elle m'a par ailleurs été suggérée par Serge Bouc, que je remercie.

Preuve : Soient X et Y des P-ensembles, et B_X, B_Y les foncteurs de Mackey correspondants définis précédemment. Vu la proposition 5.1.2,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B_X, B_Y) \cong B_Y(X) = B(X \times Y).$$

Par ailleurs, si P/H est un P-ensemble transitif, alors $B_{P/H} \cong B^H \uparrow_H^G$. En effet, si P/L est un P-ensemble transitif, alors

$$\begin{aligned} B_{P/H}(P/L) &= B^P(P/L \times P/H) = B^P \left(\mathrm{Ind}_H^P \left(\mathrm{Res}_H^P(P/L) \times H/H \right) \right) \\ &= B^P \downarrow_H^P \left(\mathrm{Res}_H^P(P/L) \right) = B^H \left(\mathrm{Res}_H^P(P/L) \right) = B^H \uparrow_H^P (P/L) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité de Frobenius qui affirme que pour tout P-ensemble U et pour tout H-ensemble V, il existe un isomorphisme de P-ensembles entre $U \times \mathrm{Ind}_H^G(V)$ et $\mathrm{Ind}_H^G \left(\left(\mathrm{Res}_H^G U \right) \times V \right)$ (voir [Bou00], proposition 2.2.1).
Rappelons ensuite que le coefficient de Cartan $c_{(J,k),(Y,k)}$ est égal à la dimension sur k de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(P_{J,k}, P_{Y,k})$ (voir [Lan83], corollaire 5.9). De plus, $P_{J,k} = B^J \uparrow_J^P$ (voir la remarque qui suit le théorème 1.5.2), donc $P_{J,k} = B_{P/J}$, vu ce qui précède ; et de même, $P_{Y,k} = B^Y \uparrow_Y^P = B_{P/Y}$. Par conséquent,

$$c_{(J,k),(Y,k)} = \dim_k \left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}_k(G)}(B_{P/J}, B_{P/Y}) \right) = \dim_k(B((P/J) \times (P/Y))).$$

Par ailleurs, en utilisant à nouveau l'identité de Frobenius et la formule de Mackey, nous obtenons que

$$\begin{aligned} (P/J) \times (P/Y) &\cong \mathrm{Ind}_J^P(J/J) \times (P/Y) \cong \mathrm{Ind}_J^P((J/J) \times \mathrm{Res}_J^P(P/Y)) \\ &\cong \sum_{g \in [J \backslash P/Y]} P/(J \cap {}^g Y). \end{aligned}$$

Par suite,

$$c_{(J,k),(Y,k)} = \dim_k(B((P/J) \times (P/Y))) = \sum_{g \in [J \backslash P/Y]} \dim_k(B(J \cap {}^g Y)).$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes d'un groupe H est égal au rang de $B(H)$.

□

Ce résultat se simplifie beaucoup dans le cas où l'un des sous-groupes, J ou Y, est normal dans P. Nous obtenons alors le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.4. *Soient J et Y des sous-groupes d'un p-groupe P, tels que J ou Y est normal dans P. Le coefficient de la matrice de Cartan correspondant aux foncteurs $P_{Y,k}$ et $S_{J,k}$ est alors donné par*

$$c_{(J,k),(Y,k)} = [P : JY] \cdot n_{J\cap Y}$$

où $n_{J\cap Y}$ désigne le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de $J \cap Y$.

Preuve : Si Y est normal dans P, le théorème précédent nous dit que

$$c_{(J,k),(Y,k)} = \sum_{g\in[J\backslash P/Y]} n_{J\cap {}^gY} = [P : JY] \cdot n_{J\cap Y}.$$

Si J est normal dans P, en utilisant le théorème précédent et le fait que la matrice de Cartan est symétrique (voir [TW95], théorème 7.1), nous obtenons

$$c_{(J,k),(Y,k)} = c_{(Y,k),(J,k)} = \sum_{g\in[Y\backslash P/J]} n_{Y\cap {}^gJ} = [P : JY] \cdot n_{J\cap Y}.$$

□

5.2 Quelques calculs de matrices de Cartan

Nous allons utiliser les formules obtenues dans la section précédente afin de calculer les matrices de Cartan pour les foncteurs de Mackey, associés à certains p-groupes, sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique p.

Rappelons que le groupe abélien $G_0(\mathrm{Mack}_k(G))$ s'obtient en construisant le groupe de Grothendieck de la catégorie des foncteurs de Mackey de type fini. De plus, il possède une $\mathbb{Z}$-base $\mathcal{B}'$ formée des foncteurs de Mackey simples, $S_{H,V}$, où H parcourt les sous-groupes de G et où V est un $k\overline{N}_G(H)$-module simple. Rappelons également que le groupe $K_0(\mathrm{Mack}_k(G))$ s'obtient en construisant le groupe de Grothendieck de la catégorie des foncteurs de Mackey projectifs. De plus, il possède une $\mathbb{Z}$-base $\mathcal{B}$ formée des foncteurs projectifs indécomposables, $P_{H,V}$, où $P_{H,V}$ est la couverture projective du foncteur $S_{H,V}$. En particulier, nous pouvons ordonner les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de sorte que le $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathcal{B}$, disons $P_{H,V}$, soit la couverture projective du $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathcal{B}'$, autrement dit $S_{H,V}$.

L'homomorphisme de Cartan $c : K_0(\mathrm{Mack}_k(G)) \to G_0(\mathrm{Mack}_k(G))$ associe à chaque $\mu_k(G)$-module projectif $P_{H,V}$ sa classe dans $G_0(\mathrm{Mack}_k(G))$, qui est alors la somme des classes de ses facteurs de composition. De plus, la matrice de l'homomorphisme c, exprimée dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, est la matrice de Cartan, dont les coefficients sont les multiplicités des facteurs de composition des modules projectifs indécomposables.

Rappelons encore que dans le cas d'un p-groupe P, les foncteurs de Mackey simples sont indexés par les sous-groupes de P, à conjugaison près, ce qui nous permet de déterminer facilement les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Comme les matrices de Cartan sont symétriques (voir [TW95], corollaire 7.2), nous n'en donnerons que la partie triangulaire supérieure.

i) Commençons par C_p, le groupe cyclique d'ordre p. Les foncteurs de Mackey simples associés à C_p sont $S_1 = S_{1,k}$ et $S_p = S_{C_p,k}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{B}' = \{S_1, S_p\}$ est une $\mathbb{Z}$-base du groupe abélien $G_0(\mathrm{Mack}_k(C_p))$, et de manière analogue, $\mathcal{B} = \{P_1, P_p\}$, où $P_1 = P_{1,k}$ et $P_p = P_{C_p,k}$ sont les couvertures projectives des modules S_1 et S_P respectivement, est une $\mathbb{Z}$-base du groupe abélien $K_0(\mathrm{Mack}_k(C_p))$.

   Par le corollaire 5.1.4, le coefficient de la matrice de Cartan correspondant à P_1 et S_1 est donné par $c_{(1,k),(1,k)} = 1 \cdot [C_p : 1] = p$. De manière analogue, nous obtenons que

$$c_{(C_p,k),(1,k)} = c_{(1,k),(C_p,k)} = 1 \cdot [C_p : C_p] = 1$$

   et que $c_{(C_p,k),(C_p,k)} = 2 \cdot [C_p : C_p] = 2$. Par conséquent, la matrice de Cartan associée à C_p, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Plus généralement, pour C_{p^k}, le groupe cyclique d'ordre p^k, il y a $k+1$ foncteurs de Mackey simples correspondant aux sous-groupes de C_{p^k}. Par conséquent, $\mathcal{B}' = \{S_0, S_1, \ldots, S_k\}$ où $S_i = S_{C_{p^i},k}$ est une $\mathbb{Z}$-base du groupe abélien $G_0\big(\mathrm{Mack}_k(C_{p^k})\big)$. Donc $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$

où $P_i = P_{C_{p^i},k}$ est la couverture projective de S_i est une $\mathbb{Z}$-base du groupe abélien $K_0\big(\mathrm{Mack}_k(C_{p^k})\big)$. Vu le corollaire 5.1.4, le coefficient de la matrice de Cartan correspondant aux sous-groupes C_{p^i} et C_{p^j} est donné par

$$c_{(C_{p^i},k),(C_{p^j},k)} = n_{C_{p^i}\cap C_{p^j}} \cdot [C_{p^k} : C_{p^i}C_{p^j}]$$

où $n_{C_{p^i}\cap C_{p^j}}$ est le nombre de sous-groupes de $C_{p^i}\cap C_{p^j}$.

Par suite, la matrice de Cartan est égale à

$$\begin{pmatrix} p^k & p^{k-1} & p^{k-2} & p^{k-3} & \dots & p^2 & p & 1 \\ & 2p^{k-1} & 2p^{k-2} & 2p^{k-3} & \dots & 2p^2 & 2p & 2 \\ & & 3p^{k-2} & 3p^{k-3} & \dots & 3p^2 & 3p & 3 \\ & & & 4p^{k-3} & \dots & 4p^2 & 4p & 4 \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & k+1 \end{pmatrix}$$

iii) Traitons ensuite le cas de $P = C_p \times C_p$. Les sous-groupes de P sont 1, P et $p+1$ sous-groupes cycliques d'ordre p, notés $H_1,\ldots,H_{p+1}$. Par suite, $\mathcal{B}' = \{S_1, S_{H_1}, \ldots, S_{H_{p+1}}, S_P\}$ et $\mathcal{B} = \{P_1, P_{H_1}, \ldots, P_{H_{p+1}}, P_P\}$. En utilisant à nouveau le corollaire 5.1.4, nous obtenons que la matrice de Cartan est égale à

$$\begin{pmatrix} p^2 & p & p & \dots & p & 1 \\ & 2p & 1 & \dots & 1 & 2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 & \vdots \\ & & & & 2p & 2 \\ & & & & & p+3 \end{pmatrix}$$

iv) Considérons ensuite Q_8, le groupe des quaternions d'ordre 8, qui est donné par $Q_8 = \langle i,j \,|\, i^2 = j^2 = m, m^2 = 1, j^{-1}ij = i^{-1}\rangle$. Les sous-groupes de Q_8, à conjugaison près, forment le treillis suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Q_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H_1 = \langle i \rangle \arrow[dr, dash] & H_2 = \langle j \rangle \arrow[d, dash] & H_3 = \langle ij \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & Z = \langle m \rangle \arrow[d, dash] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Il y a donc 6 foncteurs de Mackey simples associés au groupe Q_8 formant la base $\mathcal{B}' = \{S_1, S_Z, S_{H_1}, S_{H_2}, S_{H_3}, S_{Q_8}\}$ et, de manière analogue, la base $\mathcal{B}$ est donnée par $\mathcal{B} = \{P_1, P_Z, P_{H_1}, P_{H_2}, P_{H_3}, P_{Q_8}\}$.

Le groupe Q_8 n'est pas abélien, toutefois tous ses sous-groupes sont normaux. Le corollaire 5.1.4 nous dit alors que le coefficient de la matrice de Cartan associé à des sous-groupes J et Y de Q_8 est égal à

$$c_{(J,k),(Y,k)} = [P : JY] \cdot n_{J \cap Y}$$

où $n_{J \cap Y}$ désigne le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de $J \cap Y$. La matrice de Cartan est donc égale à

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ & 8 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & 6 & 2 & 2 & 3 \\ & & & 6 & 2 & 3 \\ & & & & 6 & 3 \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}.$$

v) Traitons ensuite le cas de D_8, le groupe diédral d'ordre 8 qui est donné par $D_8 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$. Les sous-groupes de D_8, à conjugaison près, forment le treillis suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & D_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V_4 = \langle s, r^2 \rangle \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & C_4 = \langle r \rangle \arrow[d, dash] & \tilde{V}_4 = \langle rs, r^2 \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
H = \langle s \rangle \arrow[dr, dash] & Z = \langle r^2 \rangle \arrow[d, dash] & \tilde{H} = \langle rs \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Il y a donc 8 foncteurs de Mackey simples associés au groupe D_8 qui forment la base $\mathcal{B}' = \{S_1, S_Z, S_H, S_{\tilde{H}}, S_{C_4}, S_{V_4}, S_{\tilde{V_4}}, S_{D_8}\}$ et, de manière analogue, la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$\mathcal{B} = \{P_1, P_Z, P_H, P_{\tilde{H}}, P_{C_4}, P_{V_4}, P_{\tilde{V_4}}, P_{D_8}\}.$$

Cette fois, le groupe D_8 possède deux sous-groupes (à conjugaison près) qui ne sont pas normaux, à savoir H et $\tilde{H}$. Pour calculer la matrice de Cartan, il faut donc utiliser la formule du théorème 5.1.3, qui nous dit que le coefficient de Cartan correspondant à des sous-groupes J et Y de D_8 est donné par

$$c_{(J,k),(Y,k)} = \sum_{g \in [J \backslash P/Y]} n_{J \cap {}^gY}$$

où n_H désigne le nombre de classes de conjugaison d'un groupe H.

Par exemple, comme $[H \backslash D_8/H] = \{\overline{1}, \overline{r}, \overline{r}^2\}$, le coefficient $c_{(H,k),(H,k)}$ est égal à

$$n_H + n_{H \cap \langle r^2 s\rangle} + n_H = 5.$$

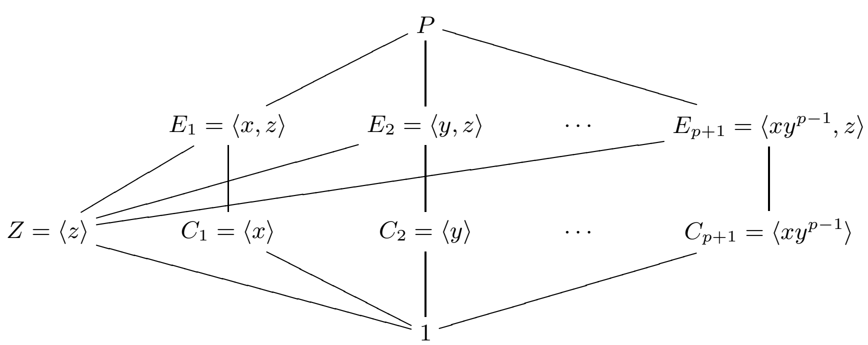
La matrice de Cartan est alors égale à

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ & 8 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ & & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ & & & 5 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ & & & & 6 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & & 10 & 2 & 5 \\ & & & & & & 10 & 5 \\ & & & & & & & 8 \end{pmatrix}.$$

vi) Le dernier exemple que nous allons donner est celui du groupe extraspécial P d'ordre p^3 et d'exposant p, qui est donné par

$$P = \langle x, y, z \,|\, x^p = y^p = z^p, [x,z] = [y,z] = 1, [x,y] = z\rangle.$$

Les sous-groupes de P, à conjugaison près, forment le treillis suivant :



Il y a donc $2p+5$ foncteurs de Mackey simples associés au groupe P formant la base $\mathcal{B}' = \{S_1, S_Z, S_{C_i}, S_{E_j}, S_P \,|\, 1 \leq i, j \leq p+1\}$ et, de manière analogue, la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$\mathcal{B} = \{P_1, P_Z, P_{C_i}, P_{E_j}, P_P \,|\, 1 \leq i, j \leq p+1\}.$$

Comme auparavant, en utilisant la formule du théorème 5.1.3, nous obtenons la matrice Cartan :

$$\begin{pmatrix}
p^3 & p^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & p^2 & p & \dots & \dots & \dots & p & 1 \\
 & 2p^2 & p & \dots & \dots & \dots & p & 2p & \dots & \dots & \dots & 2p & 2 \\
 & & 3p-1 & p & \dots & \dots & p & 2p & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \\
 & & & \ddots & \ddots & & \vdots & 1 & 2p & 1 & \dots & 1 & \vdots \\
 & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 3p-1 & p & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\
 & & & & & & 3p-1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 2p & 2 \\
 & & & & & & & p^2+3p & 2 & \dots & \dots & 2 & p+3 \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \ddots & 2 & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & p^2+3p & p+3 \\
 & & & & & & & & & & & & 2p+5
\end{pmatrix}$$

Conclusion

Pour terminer, nous allons rappeler les différents résultats obtenus dans ce travail, puis donner quelques pistes susceptibles de prolonger cette recherche.

Groupes d'extension de degré 1 et foncteurs T

La première partie de ce travail a été consacrée à l'étude des groupes d'extension de degré 1 entre deux foncteurs de Mackey simples, disons $S_{Q,W}$ et $S_{H,V}$, associés à un groupe G. Cette étude se divisait en trois cas :

i) H et Q ne sont pas inclus l'un dans l'autre, à conjugaison près.

ii) H est strictement inclus dans K, à conjugaison près (ou l'inverse).

iii) H est conjugué à Q.

Dans le premier cas, il n'existe pas d'extension non triviale.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au deuxième cas. Lorsque H et Q sont normaux et strictement inclus l'un dans l'autre, nous avons déterminé explicitement les groupes d'extension de degré 1 entre $S_{Q,W}$ et $S_{H,V}$. Puis nous avons vu que, sous certaines conditions de semi-simplicité de la restriction des modules W et V, ce résultat s'étend à des sous-groupes H et Q, inclus strictement l'un dans l'autre, mais pas nécessairement normaux. Ces considérations nous ont alors amenés à introduire des foncteurs, notés T (et plus précisément $T_{H,V}$ où H est un sous-groupe de G et où V est un $k\overline{N}_G(H)$-module quelconque), dont la définition ressemble à celle des foncteurs de Mackey simples construits dans la classification. Nous avons étudié ces foncteurs et remarqué qu'il suffit de comprendre les extensions entre foncteurs T pour connaître les extensions entre foncteurs simples. L'avantage de ce point de vue est que le calcul des groupes d'extension entre $T_{Q,W}$ et $T_{H,V}$ se restreint au cas où les sous-groupes Q et H sont normaux dans G. Cela permet de travailler avec des groupes plus petits, et par conséquent, de déterminer explicitement les groupes d'extension lorsque le groupe de départ n'est pas trop gros. C'est ce que nous avons illustré à l'aide de l'exemple du groupe $\mathcal{S}_4$.

L'étape suivante serait de déterminer la forme générale de ces groupes d'extension de degré 1 entre foncteurs T. Une des approches possibles pour attaquer ce problème consisterait à étudier les facteurs de composition des foncteurs T (une des principales difficultés résidant dans le fait que les sous-foncteurs et les quotients des foncteurs T ne sont en général pas des foncteurs T). L'étude des différentes propriétés de ces foncteurs, de par leur définition naturelle, est par ailleurs un problème intéressant en soi.

Remarquons au passage que l'étude des facteurs de composition des foncteurs T a été également motivée par le fait suivant : la conjecture d'Alperin affirme que, pour un groupe fini G et un corps k algébriquement clos de caractéristique p, il y a une bijection entre l'ensemble des kG-modules simples et l'ensemble de $k\overline{N}_G(P)$-modules simples et projectifs pour tout p-sous-groupe P de G (voir [Alp87]). Une des idées de Thévenaz et Webb pour aborder cette conjecture était de passer par les foncteurs de Mackey. Explicitement, si V est un kG-module simple, le foncteur de Mackey FP_V appartient à $\mathrm{Mack}_k(G,1)$, donc tous ses facteurs de composition sont du type $S_{H,W}$ où H est un p-groupe et où W est un $k\overline{N}_G(H)$-module simple. Le but était de trouver un facteur de composition $S_{H,W}$ particulier de FP_V tel que W soit projectif, afin d'établir la bijection précédente. Même si cette construction fonctionnait pour de petits groupes, elle ne se généralisait pas à des groupes plus compliqués. Suite à l'étude des foncteurs $T_{H,V}$, une piste analogue semblait possible : si V est un kG-module simple, on peut alors étudier les facteurs de composition du foncteur T_{1,P_V} (qui appartient également à $\mathrm{Mack}_k(G,1)$), où P_V est la couverture projective de V. Cette approche permet d'établir une telle bijection dans le cas où G est abélien et où $G = \mathcal{S}_3$ (en caractéristiques 2 et 3). Malheureusement cette manière de faire ne fonctionne plus déjà dans le cas de $\mathcal{S}_4$. Il serait toutefois envisageable d'utiliser les mêmes idées en considérant un autre foncteur que T_{1,P_V}. Dans tous les cas, l'étude des ces foncteurs T reste une voie à explorer.

Dans le cas où les sous-groupes H et Q sont conjugués, nous avons vu que nous pouvions nous ramener au cas où ces deux sous-groupes sont normaux dans G. L'étude du groupe $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(S_{H,V}, S_{H,W})$, ou plus généralement de $\mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W})$, passe par le morphisme d'évaluation en H :

$$\eta_H : \mathrm{Ext}_{\mu_k(G)}(T_{H,V}, T_{H,W}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\overline{N}_G(H)}(V, W).$$

Ce morphisme est injectif et nous nous sommes par conséquent intéressés à sa surjectivité. A l'aide d'un exemple, nous avons vu qu'il y a des cas où η_H est surjectif et d'autres non. Nous avons en particulier montré que η_H est surjectif si G est un p-groupe ou si G possède un p-sous-groupe de Sylow normal (avec des conditions supplémentaires si $p = 2$).

Les questions qui se posent alors sont les suivantes : peut-on déterminer exactement quand η_H est surjectif ? Et si η_H n'est pas surjectif, quelle est son image ? Ces questions sont très fortement liées à la structure des modules V et W en jeu, comme nous l'avons déjà remarqué. Il semble donc a priori difficile de donner une réponse globale ; par conséquent, il y a encore beaucoup à découvrir à ce sujet.

Groupes d'extension de degré supérieur

Dans le chapitre suivant, nous nous sommes intéressés aux groupes d'extension de degré supérieur entre foncteurs de Mackey simples associés à un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow C d'ordre p. Ce problème équivaut en fait à déterminer des résolutions projectives minimales des foncteurs de Mackey simples associés à G. Nous avons remarqué qu'il suffisait de calculer ces résolutions pour des foncteurs simples indexés par les sous-groupes 1 et C de G. Nous avons déterminé explicitement une résolution projective minimale des foncteurs simples indexés par C lorsque C est normal dans G, et une résolution projective minimale des foncteurs simples indexés par 1 lorsque $G = C_p \rtimes C_e$, où e divise $p-1$. Comme ces deux résolutions sont périodiques, nous avons pu en déduire que tous les foncteurs de Mackey simples associés à un groupe possédant un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p ont une résolution projective minimale périodique (même si nous ne l'avons pas toujours calculée explicitement).

Il serait donc intéressant de déterminer pour quels groupes cette propriété, à savoir que tous les foncteurs de Mackey simples possèdent une résolution projective minimale périodique, reste vraie. A priori, il n'y a que peu de groupes qui vont vérifier cette propriété ; en effet, il semble que ce n'est déjà plus le cas pour C_4, le groupe cyclique d'ordre 4 (la résolution projective minimale du foncteur simple indexé par C_4 ne semble pas être périodique).

Nous avons également vu que les blocs de l'algèbre de groupes $kN_G(C)$ (où C est le p-sous-groupe de Sylow d'ordre p de G) sont en bijection avec les blocs de $\mathrm{Mack}_k(N_G(C), 1)$. Par ailleurs, tout bloc B de $kN_G(C)$ est Morita-équivalent à l'algèbre $k[C_p \rtimes C_e]$, où e est un entier qui divise $p-1$ (voir [Ben91], proposition 6.5.4). Dès lors une question qui se pose serait de savoir s'il existe une équivalence de Morita analogue dans le cas des foncteurs de Mackey ; autrement dit, est-ce que tout bloc de $\mathrm{Mack}_k(N(C), 1)$ est équivalent à l'algèbre $\mu_k(C_p \rtimes C_e)$? Cette question est d'autant plus intéressante que nous avons déterminé explicitement toutes les résolutions projectives minimales des foncteurs de Mackey simples appartenant à $\mathrm{Mack}_k(C_p \rtimes C_e, 1)$. Une telle équivalence nous permettrait ainsi de généraliser notre résultat au cas d'un groupe G possédant un p-sous-groupe de Sylow normal d'ordre p. Nous pourrions ainsi connaître la période d'une résolution projective minimale des foncteurs de Mackey simples indexés par le sous-groupe trivial.

Une autre approche pour calculer les groupes d'extension de degré supérieur serait de construire explicitement des résolutions projectives des foncteurs de Mackey simples. Dans un premier temps, il serait raisonnable de se focaliser sur le cas des p-groupes. En effet, dans ce cadre, les couvertures projectives sont données par des foncteurs de Burnside. Plus précisément, si M est un foncteur de Mackey associé à un p-groupe P, sa couverture projective est égale à B_X où X est un P-ensemble minimal tel que B_X se surjecte sur M. Par exemple, si $M = S_{H,k}$ est un foncteur simple de $\mathrm{Mack}_k(P)$, nous obtenons que $X = P/H$; en particulier, $B_{P/H} \cong B^H \uparrow_H^P \cong P_{H,k}$. Cette approche est intéressante en soi, même si elle paraît difficile à aborder a priori. En effet, il faudrait d'une part déterminer cet ensemble X minimal, puis calculer le noyau de la surjection de B_X sur M, afin de construire la suite de la résolution.

Nous avons finalement montré que les groupes d'extension sur l'algèbre de Mackey coïncident avec les groupes d'extension sur l'algèbre de Mackey cohomologique uniquement pour les extensions de degré 1 entre foncteurs simples. Ce n'est pas le cas si les foncteurs ne sont plus simples, ni si ce sont des extensions de degré supérieures à 1. A priori, l'étude des foncteurs de Mackey cohomologiques ne semble guère utile pour le calcul des groupes d'extension de degré supérieur.

Socle des foncteurs de Mackey projectifs

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés au socle des foncteurs de Mackey projectifs indécomposables, associés à un p-groupe P. Nous avons montré que le socle du foncteur $P_{H,k}$ ne contient que des foncteurs simples indexés par le normalisateur dans H d'un sous-groupe de H. Ce résultat implique en particulier que si H est abélien, tous les sous-foncteurs simples de $P_{H,k}$ sont isomorphes à $S_{H,k}$. Nous avons également montré que si $\mathrm{Soc}(B^H) = \left(S_{H,k}^H\right)^m$, alors $\mathrm{Soc}(P_{H,k}) = \left(S_{H,k}^P\right)^m$. Cela nous a amenés à nous intéresser au socle du foncteur de Burnside dans le cas abélien (ce qui revient à la question suivante : si P est un p-groupe abélien, combien y a-t-il de sous-foncteurs simples isomorphes à $S_{P,k}$ dans B^P ?). Nous avons déterminé ce socle dans le cas où P est un p-groupe cyclique, abélien de rang 2 et abélien élémentaire de rang 3 ; et déjà dans le cas des petits groupes, le problème est ardu.

Il y a donc de nombreuses pistes à explorer. Par exemple : pour quels groupes le foncteur de Burnside B^P ne contient-il que des sous-foncteurs isomorphes à $S_{P,k}$? En effet, nous avons vu que B^P peut posséder des sous-foncteurs indexés par des sous-groupes propres, et il serait par suite intéressant d'avoir une caractérisation des groupes satisfaisant cette propriété. A cela s'ajoutent trois questions légitimes : que se passe-t-il pour les autres p-groupes abéliens élémentaires ? et pour les p-groupes ? et plus généralement pour des groupes quelconques ?

Une approche possible pour attaquer le problème du socle du foncteur de Burnside associé à un groupe abélien élémentaire est la suivante : le socle du foncteur de Burnside B^P, où P est un p-groupe abélien élémentaire est égal à $(S_{P,k})^m$ où m est la dimension du noyau $K(P)$ du produit des restrictions de P à ses sous-groupes maximaux. Nous avons montré que $K(P)$ est gradué par l'ordre des sous-groupes de P et nous avons déterminé $K(P)_1$, la partie de ce noyau correspondant aux sous-groupe d'ordre p (c'est ce qui nous a permis de déterminer le socle de $B^{(C_p)^3}$). Pour pouvoir connaître le socle du foncteur de Burnside associé à n'importe quel groupe abélien élémentaire, il nous faudrait déterminer tous les $K(P)_i$ (c'est-à-dire la partie du noyau correspondant aux sous-groupes d'ordre p^i). Un des moyens possibles pour aborder ce problème est le suivant : pour un sous-groupe L, d'ordre p^{i-1}, fixé, on considère l'application μ_L qui envoie le G-ensemble G/K sur la somme des G/H où H parcourt les sous-groupes maximaux de P dont l'intersection avec K donne L. L'espace $K(P)_i$ est alors égal à l'intersection des noyaux des μ_L pour L parcourant les sous-groupes de P d'ordre p^{i-1}. Bien que nous n'ayons pas de formule explicite pour calculer cette intersection, il est toutefois possible de déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mu_L)$ pour un L fixé (qui est égal à la somme de la dimension de $K(P/L)_1$ et du nombre de sous-groupes de P d'ordre p^i qui ne contiennent pas L). En particulier, nous obtenons une borne pour $K(P)_i$. Le prochain pas serait donc d'étudier plus précisément cette intersection de noyaux afin d'obtenir la dimension exacte de $K(P)_i$ pour tout i.

Le passage des groupes abéliens élémentaires aux p-groupes (abéliens ou non) constituerait l'étape suivante. L'approche usuelle pour faire un tel passage est d'utiliser le sous-groupe de Frattini, $\Phi(P)$, qui est tel que $P/\Phi(P)$ est un groupe abélien élémentaire. Comme nous l'avons vu, il existe une application d'inflation, $\mathrm{Inf} = \mathrm{Inf}_{P/\Phi(P)}^P$, qui permet de passer de $B(P/\Phi(P))$ à $B(P)$. Il existe également une application duale, la déflation, $\mathrm{Def} = \mathrm{Def}_{P/\Phi(P)}^P$, qui va de $B(P)$ dans $B(P/\Phi(P))$ et qui envoie un P-ensemble X sur l'ensemble des orbites de X sous l'action de $\Phi(P)$. On vérifie alors que $\mathrm{Def} \circ \mathrm{Inf} = \mathrm{id}$ et que $\mathrm{Inf} \circ \mathrm{Def}$ est un projecteur. En particulier, nous obtenons les inclusions suivantes :

$$\mathrm{Inf}(K(P/\Phi(P))) \subset K(P) \subset \mathrm{Inf}(K(P/\Phi(P))) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Def}).$$

Comme $\{P/L - P/\Phi(P)L \mid \Phi(P) \nsubseteq L\}$ est une base du noyau de la déflation, la dimension de l'espace $K(P)$ est alors bornée par

$$\dim(K(P/\Phi(P))) \leq \dim(K(P)) \leq \dim(K(P/\Phi(P))) + |\{L \leq_P P \mid \Phi(P) \nsubseteq L\}|.$$

Par conséquent, le socle de B^P dans le cas d'un p-groupe abélien élémentaire nous donne des informations sur le socle de B^P pour un p-groupe quelconque. Il serait donc intéressant de voir s'il est possible de modifier ces bornes afin d'obtenir une valeur aussi précise que possible de la dimension de $K(P)$, à partir de celle de $K(P/\Phi(P))$.

L'ultime question serait alors : est-il possible de généraliser ces résultats au cas des groupes quelconques (donc de sortir du cadre des p-groupes) ? Rappelons que notre approche initiale consistait à utiliser une Δ-filtration des foncteurs de Mackey projectifs, puis à calculer le socle de ces foncteurs Δ afin d'obtenir des informations sur le socle des foncteurs projectifs. Dans le cas d'un groupe G quelconque, les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables possèdent une Δ-filtration, mais le problème qui se pose alors est de déterminer précisément les facteurs de cette filtration. Plus précisément, les Δ-facteurs du foncteur projectif $P_{H,V}$ sont donnés par $\Delta_{J,\overline{P}_{H,V}(J)}$, où J parcourt les sous-groupes de H à conjugaison près. Le problème revient alors à calculer le module $\overline{P}_{H,V}(J)$. Par un résultat de Bouc (voir [Bou98], lemme 5.10), ce module peut s'exprimer comme un quotient de Brauer :

$$\overline{P}_{H,V}(J) = P_{H,V}(1)/\big(\sum_{K<J} I_K^J(P_{H,V}(1))\big).$$

Il faut en particulier déterminer l'évaluation du foncteur $P_{H,V}$ en 1. Dans le cas des p-groupes, nous avons vu que $P_{H,k}(1) = k[P/H]$, et pour un groupe quelconque, un résultat de Thévenaz et Webb affirme que $P_{H,V}(1)$ est le correspondant de Green de la couverture projective de V, vu comme $k\overline{N}_G(H)$-module. Toutefois, ce module semble difficile à déterminer plus explicitement, vu que dans la correspondance de Green, il y a des termes projectifs que l'on n'arrive pas à maîtriser. Il faudrait donc commencer par étudier ces modules $\overline{P}_{H,V}(J)$ pour pouvoir généraliser notre approche à des groupes quelconques.

Bibliographie

[AB79] J. Alperin and M. Broué. Local methods in block theory. *Ann. of Math. (2)*, 110(1) : 143–157, 1979.

[Alp86] J. L. Alperin. *Local representation theory*, volume 11 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1986.

[Alp87] J. L. Alperin. Weights for finite groups. In *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)*, volume 47 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 369–379. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Ben91] D. Benson. *Representations and cohomology. I.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol 30, Cambridge University Press, 1991.

[Bou98] S. Bouc. Résolutions de foncteurs de Mackey. In *Group representations : cohomology, group actions and topology (Seattle, WA, 1996)*, volume 63 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 31–83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[Bou00] S. Bouc. Burnside rings. In *Handbook of algebra, Vol. 2*, pages 739–804. North-Holland, 2000.

[CR81] C. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1981.

[CR87] C. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders II.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1987.

[CTVEZ03] J. Carlson, L. Townsley, L. Valeri-Elizondo, and M. Zhang. *Cohomology rings of finite groups*, volume 3 of *Algebras and Applications.* Kluwer Academic Publishers, 2003.

[Dre73] A. Dress. Contributions to the theory of induced representations. In *Algebraic K-theory, II*, pages 183–240. Lecture Notes in Math., Vol. 342. Springer, 1973.

[Gor68] D. Gorenstein. *Finite groups.* Harper & Row Publishers, 1968.

[Gre71] J. A. Green. Axiomatic representation theory for finite groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 1(1) : 41–77, 1971.

[Lan83] P. Landrock. *Finite group algebras and their modules*, volume 84 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1983.

[Lan94] S. Lang. *Algebraic number theory*, volume 110 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994.

[Lin76] H. Lindner. A remark on Mackey-functors. *Manuscripta Math.*, 18(3) : 273–278, 1976.

[Rot79] J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 85 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., 1979.

[Rot95] J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, fourth edition, 1995.

[Ser78] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[SM05] M. Samy-Modeliar. *Certaines constructions liées aux foncteurs de Mackey cohomologiques*. PhD thesis, Université de Paris 7, 2005.

[Smi69] K. J. C. Smith. On the p-rank of the incidence matrix of points and hyperplanes in a finite projective geometry. *J. Combinatorial Theory*, 7 : 122–129, 1969.

[Thé95] J. Thévenaz. *G-algebras and modular representation theory*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, 1995.

[TW90] J. Thévenaz and P. Webb. Simple Mackey functors. In *Proc. of the 2nd International Group theory Conference, Bressanone 1989, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Vol 23, 299-319* . 1990.

[TW95] J. Thévenaz and P. Webb. The structure of Mackey functors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6) : 1865–1961, 1995.

[Web01] P. Webb. Stratifications and Mackey functors I. Functors for a single group. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 82(2) : 299–336, 2001.

[Wei94] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1994.

[Yeh48] Y. Yeh. On prime power Abelian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 : 323–327, 1948.

[Yos83] T. Yoshida. Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem. *J. Algebra*, 80(1) : 90–105, 1983.

Index

Curriculum Vitae

Muriel Nicollerat

Grey 64
1018 Lausanne
muriel.nicollerat@epfl.ch

Née le 9 janvier 1980 à Lausanne et originaire de Bex (VD)

Formation

Depuis 2003	Préparation d'une thèse de doctorat à l'EPFL, sous la direction du Professeur Jacques Thévenaz. - Recherche en théorie des représentations modulaires des groupes finis. - Présentations orales lors de conférences.
1998-2003	**Diplôme de mathématicien**, Université de Lausanne. - Travail de diplôme en algèbre commutative, sous la direction du Professeur Manuel Ojanguren.
1995-1998	**Certificat de maturité, type X** (mathématiques-sciences-latin), Gymnase de Chamblandes à Lausanne.
1990-1995	Ecoles primaires et secondaires, Cossonay.

Pré-publications

2008	- *Extension groups between simple Mackey functors*, 24p., pré-publication.
	- *The socle of a projective Mackey functor for a p-group*, 19p., pré-publication.

Enseignement

Depuis 2003	Assistante en mathématiques à l'Université de Lausanne, puis à l'EPFL.
2001-2002	Assistante-étudiante au Centre de Mathématiques Spéciales (CMS) à l'EPFL.