Comprendre pour se rapprocher de la beauté

Entretien avec Marc Troyanov

(interview publié dans Polyrama 119, Novembre 2003. http://polyrama.epfl.ch/art_P119_Troyanov.html)

La discussion n'a aucun mal à s'établir avec Marc Troyanov, professeur de mathématiques à l'EPFL. Il débute l'échange en posant des pièces géométriques sous les yeux de son interlocutrice. Il s'agit d'assembler ces morceaux pour reconstituer une forme précise, maison, animal, etc. A sa manière, il pose les bases de la conversation à venir. Le progrès, c'est un peu comme le tangram, fait-il comprendre. On apprend d'un exercice à l'autre. Mais surtout, beaucoup de choses ont lieu en sourdine. Alors qu'«en haut», on pourrait croire que rien ne se passe, en réalité, «en profondeur», des choses se mettent en place. Soudain, le déclic a lieu: ça y est, c'est compris!
Le progrès? Instant béni…

Marc Troyanov, comment définissez-vous le progrès en mathématiques?
Pour moi, le progrès peut être de plusieurs types. Pour résumer, il existe un progrès de type A, qui consiste à accumuler des résultats ou des réponses à des questions. Les autres progrès, de types B à E, contribuent à faire évoluer les théories, au sens biologique du terme.
Ces différents types de progrès consistent à:
A. Résoudre des problèmes dans le cadre de théories connues. Il s'agit d'une activité de routine, débouchant sur un accroissement de connaissances, qui peuvent ensuite être conservées. La réalisation de tables et de formulaires en est un bon exemple.
B. Prendre conscience des limites des théories disponibles. Certains problèmes qui se posent dans une théorie donnée ne rencontrent pas de solution dans le cadre de cette théorie. Ainsi, le problème de la « quadrature du cercle », qui date de l'Antiquité grecque. Il s'agit de construire, à l'aide d'une règle et d'un compas, un carré de même surface qu'un disque de rayon 1. Ceci est impossible! Mais il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour en avoir une preuve.
C. Faire éclater les limites et explorer de nouveaux horizons. Faire éclater les limites, c'est sortir d'une théorie. Cela nécessite le courage de travailler sans fondement, sans outil, et surtout sans la sécurité de savoir si ce qu'on fait est rigoureux. Prenez, par exemple, les nombres imaginaires ou nombres complexes (racine carrée d'un nombre négatif), développés par Cardano lors de la Renaissance italienne. Autrefois, notre cadre actuel, constitué par la théorie des ensembles, n'existait pas. Cela devait donner, aux mathématiciens de l'époque, le sentiment désécurisant de vraiment «sortir des mathématiques». Aujourd'hui par contre, lorsque nous explorons de nouveaux horizons mathématiques, nous demeurons tout de même à l'intérieur de cette théorie des ensembles.
D. Créer de nouvelles théories afin de clarifier «de quoi on parle». Ce progrès-là consiste à poser les fondements d'une nouvelle théorie, puis à la consolider.
E. Rendre les résultats transparents. Cela correspond à un «nettoyage» des calculs, à leur simplification. Mieux comprendre ces calculs pour purifier les méthodes. Pour cela, il faut se reposer les mêmes questions 10, 100, 1000 fois pour atteindre l'essence du problème. L'un des buts recherchés ici est essentiellement esthétique.
F. Appliquer la nouvelle théorie à d'autres domaines, la physique par exemple. Lorsque nous savons que de nombreux problèmes mathématiques nous viennent de cette science, la boucle est ainsi bouclée.

Pour vous, le progrès est-il linéaire?
Le progrès de type A est linéaire et les autres types de progrès ne le sont pas. Un mathématicien peut sécher pendant plusieurs mois sur un problème pour finir par trouver la solution en l'espace de quelques jours, voire, parfois, en quelques heures

seulement. Le cheminement qui mène au progrès n'est pas quantifiable. Alors que la situation semble bloquée en surface, en sourdine, par contre, le travail se fait et les éléments se mettent doucement en place. C'est pourquoi je considère un peu inquiétante la tendance à vouloir trop juger le travail scientifique sur la seule base du nombre de publications. Cela suppose une notion de rentabilité linéaire, de travail de routine, qui n'est guère compatible avec les progrès de type B à E. Ces autres types de progrès, qui demandent simplement qu'on laisse aux idées le temps de mûrir.

Etes-vous pour ou contre «le progrès»? Nécessite-t-il, parfois, un cadre?
Je suis pour le progrès en sciences et en mathématiques, mais je suis également d'avis qu'il faudra un jour songer à mettre en place un cadre éthique dans ce domaine. Jusqu'à présent, les mathématiciens ne se sont guère posé de questions éthiques. Sans doute à cause des nombreux filtres qui séparent mathématiques et monde réel. Mais, dans une société de l'information et des flux financiers, dans un monde globalisé, les mathématiques ne servent plus seulement à comprendre le monde. Elles peuvent aussi être utilisées pour agir sur lui, voire éventuellement le manipuler. C'est ici que les problèmes éthiques risquent d'apparaître. On peut, notamment, déjà en observer un exemple aux Etats-Unis. Là-bas, des mathématiciens ont été sollicités par les agences de sécurité pour développer les méthodes de décodage qui permettent d'analyser, chaque jour, une quantité énorme de communications téléphoniques et d'e-mails. Qu'en est-il de l'éthique de ces scientifiques?

Selon vous, quelle est la formule, ou la forme, qui symbolise le mieux le progrès?
Attention à ne pas enfermer le progrès dans une formule simplificatrice ! Je pense que l'une des formes importantes du progrès en mathématiques survient au moment où l'on peut donner un nom à un nouvel objet mathématique. Cela constitue l'une des avancées les plus significatives de cette science. Les nombres « imaginaires », par exemple, étaient sans doute considérés, à l'époque de leur invention, comme de purs symboles mystérieux. Leur seule justification venait du fait qu'ils rendaient possible certains calculs, certaines formules. Aujourd'hui, ces nombres complexes sont tellement apprivoisés qu'aucun ingénieur ne pourrait s'en passer dans son travail quotidien.

Qu'en est-il, aujourd'hui, de la vision des Grecs sur l'organisation du monde, leur grille de lecture est-elle encore valable?
Parlons-nous d'Héraclite, de Zénon, de Pythagore… ? Il y a des philosophes qui pensent que toute grille de lecture trouve son origine chez tel ou tel auteur grec. Je ne suis pas de cet avis, je crois que Galilée, Einstein, Schrödinger et les pères de la mécanique quantique, ainsi que Darwin et bien d'autres, ont apporté des éléments tout à fait primordiaux et novateurs à notre vision du monde. Les Grecs, eux, ont posé les bases de la connaissance scientifique en nous transmettant les notions d'argumentation rationnelle, de théorème et de preuve.

«Le progrès fait peur lorsqu'il n'est pas contrôlé», citation d'un anonyme: qu'en pensez-vous?
Mais qui est censé contrôler le progrès? Dans certains cas, je pense que le progrès consiste, au contraire, à lâcher sa volonté de tout contrôler et à faire confiance à l'intuition, à la vie. Je vous réponds par une autre citation anonyme: «La médecine n'arrête pas de faire des progrès: il y a de plus en plus de nouvelles maladies» ceci pour faire référence aux différents sens recouverts par le terme de «progrès».

Marc Troyanov, quel est le moteur qui vous fait progresser, vous pousse en avant chaque jour?
Les délais en retard! Et, plus sérieusement, je crois que j'essaie d'atteindre un peu d'élégance et de pureté dans les raisonnements et les argumentations. Lors d'une recherche récente, j'ai ainsi travaillé plusieurs mois pour améliorer une partie d'un article qui était correcte, mais obscure. J'ai ainsi pu ramener un texte confus, d'une dizaine de pages, à environ deux pages d'arguments qui sont, je crois, simples et clairs. Dans notre

culture scientifique, qui encourage à publier des masses d'articles, un tel travail ne semble évidemment pas très productif. En outre, lorsque les arguments sont finalement bien clarifiés, le lecteur risque de se demander ce qu'il y avait de tellement complexe dans ce travail. Malgré tout, je suis non seulement motivé par la recherche de la vérité en mathématiques mais aussi par le souci de la «vérité bien formulée». Tous les grands physiciens l'ont dit: «Les mathématiques, c'est le langage pour comprendre le monde physique, matériel». En ce qui me concerne, mon souhait, en sciences comme ailleurs, est que l'on essaie de parler la plus belle langue possible. D'ailleurs, ma définition du progrès mathématique pourrait se résumer ainsi: «Une personne qui a vraiment compris quelque chose se rapproche de la beauté».

Pouvez-vous nous décrire en termes profanes vos axes de recherche?
J'essaie de contribuer à des progrès de type C ou D en développant l'analyse géométrique sur les espaces métriques. Il s'agit d'un projet en collaboration avec des collègues de Berne, Zürich et ailleurs dans le monde. Nous essayons de comprendre dans quelle mesure les notions habituelles de l'analyse mathématique (par exemple la théorie du potentiel, le calcul des variations, les notions d'espaces tangents etc.) peuvent s'étendre à des situations de très grande irrégularité, notamment des objets fractals (objets mathématiques dont la création ou la forme ne trouve ses règles que dans l'irrégularité ou la fragmentation). Nous avons formulé une dizaine d'axes dans lesquels nous effectuons nos recherches.
On peut voir l'analyse géométrique comme une extension de la géométrie différentielle et aussi comme un point de vue géométrique sur les questions d'analyse. L'analyse mathématique s'est constituée comme un domaine autonome par rapport à la géométrie et à l'algèbre à partir des XVIIe et XVIIIe siècles (Newton, Leibniz, les frères Bernoulli, Stirling, Taylor et le grand Euler). Il s'agissait de clarifier et d'étudier des concepts tel que celui de tangente à une courbe de longueur, d'aire, de vitesse et d'accélération. Les intuitions fondamentales de l'analyse sont de nature géométrique, mais l'analyse rembourse largement sa dette en fournissant constamment, depuis trois siècles, des outils très puissants permettant de résoudre les questions les plus profondes de la géométrie.
C'est ce travail qu'on appelle l'analyse géométrique; on peut le voir comme une application de l'analyse à des questions géométriques, mais cela va beaucoup plus loin. L'analyse classique se décrit dans l'espace euclidien et il s'agit en analyse géométrique de développer de nouvelles techniques qui puissent s'adapter à des espaces beaucoup plus complexes.

Vers quels sujets s'orientent vos passions mathématiques?
Aujourd'hui même, en 2003, il semble que les travaux de Grigory Perelman, de l'Institut Steklov à Saint-Pétersbourg, ont conduit à la résolutions des conjectures de Poincaré et de Thurston. Il s'agit tout simplement des questions les plus importantes en topologie des espaces à trois dimensions. Les spécialistes sont encore en train d'examiner tous les détails des démonstrations, mais si les articles de Perelmann traversent cet examen avec succès, alors on pourra vraiment parler d'un immense progrès en topologie et géométrie (et Perelman sera accessoirement éligible pour le prix Clay d'une valeur d'un million de dollars). Ce qui m'intéresse particulièrement ici, c'est que ces résultats ont été obtenus par des méthodes analytiques; plus précisément en résolvant des équations aux dérivées partielles. C'est l'analyse géométrique dans toute sa puissance.