Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Sur la courbure des surfaces de Riemann ouvertes

Dominique HULIN et Marc TROYANOV

Résumé – Nous étudions le problème de la courbure prescrite sur les surfaces de Riemann. En particulier, nous étendons certains résultats classiques du cas compact au cas non compact.

On the curvature of open Riemann surfaces

Abstract – *We study the problem of prescribing the curvature on Riemann surfaces. We extend some results that are classical in the compact case to the non compact case.*

Dans cette Note, nous présentons quelques nouveaux résultats sur le problème de la courbure prescrite des surfaces. Nous travaillons dans une classe conforme donnée.

En courbure négative, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME I. – *Soient* S' *une surface de Riemann ouverte, connexe et de type fini, non isomorphe à* $\mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{C}^*$ *et* $K : S' \to \mathbf{R}$ *une fonction lisse non positive vérifiant*

$$-a \leqq K(x) \leqq -b < 0,$$

en dehors d'un compact $N \subset S'$.

Alors il existe une unique métrique g *sur* S' *qui soit conforme, complète et de courbure* K.

De plus, chaque bout de (S', g) *admet un voisinage quasi isométrique au bout de la pseudo-sphère de Beltrami s'il est parabolique, et au bout du disque de Poincaré s'il est hyperbolique.*

Enfin, si S' *ne possède aucun bout hyperbolique, alors l'aire de* (S', g) *est finie et l'on a*

$$\int_{S'} K\, dA = 2\pi\chi(S').$$

Nous dirons que deux métriques conformes g et $g' = e^{2u} g$ sont quasi isométriques si la fonction u est bornée.

Si par contre la courbure d'une surface riemannienne complète s'annule en un bout parabolique, la surface n'est en général pas quasi isométrique en ce bout à un modèle fixe.

Voyons un exemple. Considérons la fonction $K : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ définie par $K(z) = 1$ si $|z| < 1$ et $K(z) = 0$ si $|z| > 1$. Alors, pour $-1 \leqq \alpha < 0$, la métrique g_α définie ci-dessous est conforme, complète et de courbure K :

$$g_\alpha = \begin{cases} \dfrac{4|\alpha|(2+\alpha)}{(2+\alpha+|\alpha|\,|z|^2)^2}\,|dz|^2, & \text{pour } |z| \leqq 1 \\ |\alpha|(2+\alpha)|z|^{2\alpha}|dz|^2, & \text{pour } |z| \geqq 1. \end{cases}$$

Remarquons que $(\mathbf{C}, g_{-1})$ est isométrique à une demi-sphère recollée à un demi-cylindre infini, et que $(\mathbf{C}, g_\alpha)$ est isométrique à une calotte sphérique recollée à un cône tronqué d'ouverture $2\pi(\alpha+1)$.

Le point à l'infini de la surface $(\mathbf{C}, g_\alpha)$, et le point à l'infini d'une pseudo-sphère de Beltrami sont des cas particuliers de « singularités simples », une notion que nous introduisons maintenant.

Note présentée par Marcel BERGER.

0764-4442/90/03100203 $ 2.00 © Académie des Sciences

DÉFINITIONS. — Soit S une surface de Riemann.

(i) Soit $\beta \in \mathbf{R}$. On dit qu'une métrique g conforme sur S possède au point $p \in S$ une *singularité simple d'ordre* β s'il existe un voisinage U de p ainsi qu'un système de coordonnées (x, y) sur U (avec $x=y=0$ en p) tel que

$$g=e^{2u}|z|^{2\beta}|dz|^2$$

sur U, où $u \in L^1(U)$ est une fonction telle que u est C^2 sur $U \setminus \{0\}$ et $\Delta u \in L^1(U)$ au sens faible.

(ii) Un *diviseur* sur S est une somme formelle $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i$ (avec $\beta_i \in \mathbf{R}$ et $p_i \in S$). La *caractéristique d'Euler* de $(S, \boldsymbol{\beta})$ est le nombre réel $\chi(S, \boldsymbol{\beta})=\chi(S)+\sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Le *support* du diviseur est l'ensemble fini $\operatorname{supp} \boldsymbol{\beta}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset S$.

(iii) Une métrique g sur S *représente* le diviseur $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i$ si g est conforme, lisse sur $S' := S \setminus \operatorname{supp} \boldsymbol{\beta}$ et possède une singularité simple d'ordre β_i en p_i $(1 \leqq i \leqq n)$.

Notons alors que (S', g) est à courbure totale finie si S est compacte, et complète dès que $\beta_i < -1$ pour tout i.

Deux singularités du même ordre ont des géométries proches, mais elles ne sont pas nécessairement quasi-isométriques (par exemple, un cylindre et une pseudosphère de Beltrami correspondent tous deux à des singularités d'ordre -1).

Un résultat fondamental de A. Huber ([1], [2], [3]) nous dit que si (S', g') est une surface riemannienne complète dont la courbure totale est finie $\left(\int_{S'} |K| \, dA < \infty\right)$, alors (S', g') est isométrique à la partie régulière d'une surface riemannienne compacte (S, g) dont la métrique représente un diviseur $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i$ tel que $\beta_i \leqq -1$ pour tout i.

Grâce au théorème de A. Huber, la recherche de métriques conformes complètes, à courbure totale finie, et de courbure prescrite, est contenue dans le problème suivant :

PROBLÈME. — *Sur une surface de Riemann à diviseur* $(S, \boldsymbol{\beta})$, *construire une métrique conforme, de courbure* K *et représentant* $\boldsymbol{\beta}$.

Une obstruction simple est donnée par la formule de Gauss-Bonnet :

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K \, dA = \chi(S, \boldsymbol{\beta})$$

valide pour toute métrique g représentant un diviseur $\boldsymbol{\beta}$ sur une surface close S [4].

Le théorème suivant est un analogue des résultats connus dans le cas compact (*cf.* [5]).

THÉORÈME II. — *Soient* $(S, \boldsymbol{\beta})$ *une surface de Riemann compacte avec un diviseur* $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i$, *et* $K: S \rightarrow \mathbf{R}$ *une fonction lisse. Supposons qu'il existe un nombre* $p>1$ *tel que, au voisinage de chaque* p_i, $(|z-p_i|^{2\beta_i} K(z)) \in L^p$. *De plus :*

(*a*) *si* $\chi(S, \boldsymbol{\beta})>0$, *on suppose* $q\chi(S, \boldsymbol{\beta})<2$ *et* $\sup(K)>0$ (*où* $(1/p)+(1/q)=1$);

(*b*) *si* $\chi(S, \boldsymbol{\beta})=0$, *on suppose* $K \equiv 0$ *ou* $\sup(K)>0$ *et* $\int_S K \, dA_0<0$ (*où* dA_0 *est l'aire d'une métrique plate représentant* $\boldsymbol{\beta}$ *sur* S);

(*c*) *si* $\chi(S, \beta) < 0$, *on suppose* $K \leqq 0$ *et* $K \not\equiv 0$.

Il existe alors une métrique conforme g sur S qui représente le diviseur β *et dont la courbure est K. Dans le cas (c), cette métrique est unique.*

Idée des preuves. — Ces énoncés se démontrent par déformation conforme. Commençons par le théorème II. Choisissons d'abord une métrique lisse g_0 conforme sur S, ainsi qu'une fonction ρ sur S, lisse sur $S' = S \setminus \beta$ et telle que $\rho = |z - p_i|^{2\beta_i}$ dans un voisinage de p_i. Alors la métrique $g_1 := \rho g_0$ représente le diviseur β.

La métrique cherchée sur S sera construite si l'on trouve une fonction $u \in W^{1,2}(S, g_0)$ telle que

$$(E_1) \qquad \Delta_1 u = K e^{2u} - K_1$$

où Δ_i et K_i sont le laplacien et la courbure de $g_i (i = 0, 1)$.

La métrique $g = e^{2u} g_1$ possède en effet les propriétés voulues.

L'équation (E_1) est équivalente à

$$(E_0) \qquad \Delta_0 u = K \rho e^{2u} - K_1 \rho$$

qui est plus commode, pusqu'elle permet de travailler avec la métrique lisse g_0.

Sous les hypothèses du théorème II, l'équation (E_0) est résolue au moyen de la méthode variationnelle; la preuve est analogue à celle du cas compact (*cf.* [5]).

Passons au théorème I. La surface de Riemann S' peut se plonger dans une surface de Riemann compacte S.

Donnons-nous à nouveau une métrique conforme lisse g_0 sur S et choisissons une métrique conforme $g_1 := \rho g_0$ sur $S' \subset S$ telle que (S', g) soit complète et à courbure -1 vers l'infini. Nous voulons résoudre (E_0). Pour cela, on définit deux fonctions $f, f_1 \in L^\infty(S)$ telles que $f = f_1 = 0$ sur $S \setminus N$, $f = K\rho$ et $f_1 = K\rho_1$ sur N.

En résolvant les équations

$$\Delta_0 \varphi = (f - 1) e^{2\varphi} - f_1$$

et

$$\Delta_0 \psi = \mu f - f_1 - \lambda$$

(où $\mu > 0$ et $\lambda < 0$ sont des constantes convenables), on peut construire des sur- et sous-solutions pour l'équation (E_1) sur (S', g_1).

On sait alors (en utilisant par exemple le théorème 2.10 de [6]) que (E_1) possède une solution bornée u sur S'. La métrique $g = e^{2u} g_1$ possède les propriétés voulues.

L'unicité se démontre à partir du principe du maximum généralisé [7], et d'une extension du lemme de Schwarz [8]. ■

Remarques. — Les résultats ci-dessus sont déjà connus lorsque $S' = \mathbf{C}$ ou D (*cf.* [9] à [13]).

Nous présentons ces résultats, ainsi que quelques autres, et donnons des démonstrations complètes, dans un article en préparation [14].

Les auteurs sont partiellement soutenus par le contrat C.E.E. Gadget n° SC 1-0105-C.

Note remise le 6 décembre 1989, acceptée le 11 décembre 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. HUBER, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, 32, 1957-1958, p. 19-72.

[2] A. HUBER, Zum potentialtheoretischen Aspekt der Alexandrowschen Flächentheorie, *Comm. Math. Helv.*, 34, 1960, p. 99-126.

[3] A. HUBER, Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten sub-harmonischer Funktionen, *Comment. Math. Helv.*, 41, 1966, p. 105-136.

[4] R. FINN, On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, 40, 1965, p. 1-30.

[5] J. KAZDAN et F. WARNER, Curvature functions for compact 2-manifolds, *Ann. of Math.*, 99, 1974, p. 14-47.

[6] W. M. NI, On the elliptic equation $\Delta u + \mathrm{K}(x) u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations, and applications in geometry, *Indiana Univ. Math. J.*, 31, 1982, p. 493-529.

[7] T. AUBIN, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1982.

[8] L. V. AHLFORS, An extension of Schwarz Lemma, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43, 1938, p. 359-364.

[9] W. N. NI, On the elliptic equation $\Delta u + \mathrm{K}(x) e^{2u} = 0$ and conformal metrics with prescribed Gaussian curvatures, *Inventiones Math.*, 66, 1982, p. 343-352.

[10] R. MCOWEN, On the equation $\Delta u + \mathrm{K}(x) e^{2u} = 0$ and prescribed negative curvature on $\mathbf{R}^2$, *J. Math. Anal. Appl.*, 103, 1984, p. 365-370.

[11] R. MCOWEN, Conformal metrics in $\mathbf{R}^2$ with prescribed Gaussian curvature and positive total curvature, *Indiana Univ. Math. J.*, 34, 1985, p. 97-104.

[12] J. BLAND et M. KALKA, Complete metrics conformal to the hyperbolic disc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97, 1986, p. 128-132.

[13] P. AVILES et R. MCOWEN, Conformal deformations of complete manifolds with negative curvature, *J. Differential Geom.*, 21, 1985, p. 269-281.

[14] D. HULIN et M. TROYANOV, *Prescribing curvature on open surfaces*, preprint.

U.R.A. du C.N.R.S., D 0169, *Centre de Mathématiques, École Polytechnique*, 91128 *Palaiseau Cedex.*