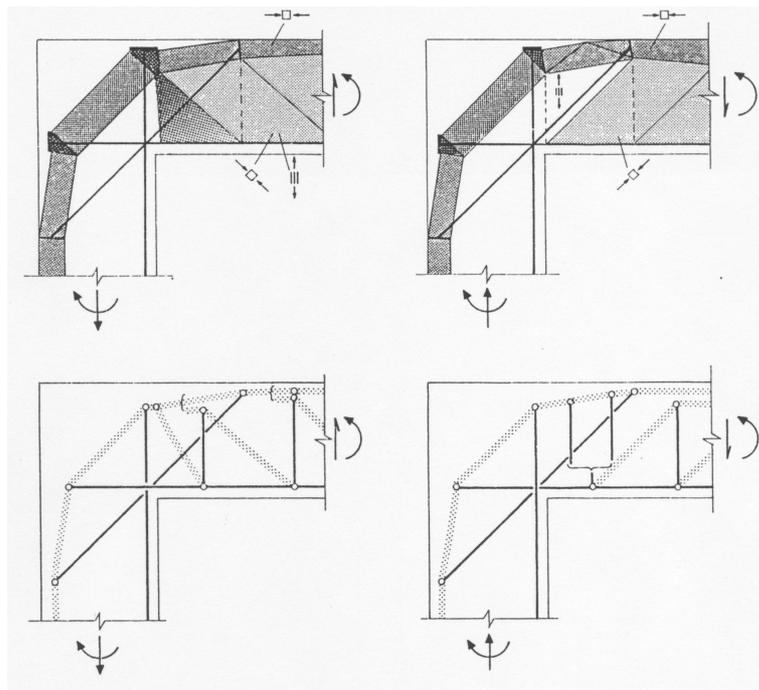


---

# Dimensionamiento y concepción de estructuras en hormigón armado mediante campos de tensiones

---

*Teoría y aplicación práctica*



A. Muttoni  
J. Schwartz  
B. Thürlimann

## **Dimensionamiento y concepción de estructuras en hormigón armado mediante campos de tensiones**

Teoría y aplicación práctica

Versión original en alemán (Bemessen und Konstruieren von Stahlbetontragwerken mit Spannungsfeldern), 1988.

Traducido del alemán por Alfonso Fernández Canteli (Catedrático en la Universidad de Oviedo).

Redacción en 2006 por Miguel Fernández Ruiz (École Polytechnique Fédérale de Lausanne).

Lausana, Suiza, 28 de junio de 2006

École Polytechnique Fédérale de Lausanne  
ENAC - IS-BETON. Bât. GC B2 383 (Station 18)  
CH-1015 Lausanne (CH)

E-mail: [aurelio.muttoni@epfl.ch](mailto:aurelio.muttoni@epfl.ch)

Web page: <http://is-beton.epfl.ch>

# Prefacio

Desde los comienzos en el cálculo y dimensionamiento de estructuras en hormigón armado, la débil resistencia a tracción del hormigón ha sido prácticamente siempre despreciada, resultando en una modelización con elementos de hormigón comprimidos y armaduras traccionadas. Un método simplificado consistente en bielas y tirantes configurando una celosía resistente fue propuesto por Ritter [3] a finales del siglo XIX. Este método fue posteriormente desarrollado durante todo el siglo XX, especialmente en la escuela de Stuttgart (Mörsch [4], Leonhardt y finalmente Schlaich [10]) eligiendo la posición de las bielas y los tirantes en el interior de los elementos estructurales basándose en los esfuerzos estimados antes de su fisuración. Un método más sistemático basado en la teoría de la plasticidad, permitiendo un dimensionamiento más racional en rotura, ha sido desarrollado principalmente en las escuelas de Zürich (Thürlimann [6, 7] y posteriormente Marti) y Copenhagen (Nielsen [8]). En este método, llamado campos de tensiones, las bielas y los nudos tienen dimensiones finitas de forma que los esfuerzos en el hormigón pueden ser comparados fácilmente con su resistencia.

Este texto fue escrito originalmente para los estudiantes de la Escuela Politécnica Federal de Zürich en 1988 [29]. Presenta una descripción de los campos de tensiones conocidos para casos simples y muestra asimismo campos nuevos para elementos más complejos (alas traccionadas o comprimidas de vigas flectadas, esfuerzo cortante y torsión, marcos, vigas pared, ...). Una versión ligeramente mejorada de este texto ha sido publicada en inglés [30] y alemán [31]. A pesar de los trabajos de investigación efectuados en los últimos veinte años, este texto sigue con total vigencia [28]. Se presenta en español gracias a la traducción de Alfonso Fernández Canteli y contiene también un ejemplo práctico desarrollado por Miguel Fernández Ruiz, quien además se ha encargado de la redacción de este texto.

Lausana, Junio de 2006

Aurelio Muttoni

# Nota sobre el formato de seguridad

En la fecha en la cual el texto original de esta obra fue escrito, el formato de seguridad comprendía cálculos en rotura mediante la utilización de coeficientes de seguridad totales ( $\gamma$ ). Dichos coeficientes englobaban las reservas pertinentes tanto para los materiales como para las acciones. Actualmente, este formato de seguridad se encuentra superado por el uso de coeficientes parciales de seguridad, que afectan por separado a materiales y acciones.

En el texto, por lo tanto, la resolución de los diferentes ejemplos se presenta en rotura, empleando coeficientes totales de seguridad. La actualización de este formato de seguridad al empleado hoy en día puede ser consultada en el Apéndice B. En el mismo se detalla la verificación de un elemento mediante la técnica de campos de tensiones de acuerdo con el formato actual de seguridad y empleando por lo tanto coeficientes parciales de seguridad.

# Índice general

<b>Notación</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción y fundamentos teóricos</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos	1
1.2. Bases teóricas y observaciones sobre el dimensionamiento de estructuras hiperestáticas	2
1.2.1. Dimensionamiento según la teoría de la elasticidad	2
1.2.2. Dimensionamiento según la teoría de la plasticidad	3
1.2.3. Comparación y crítica de ambos métodos de dimensionamiento con la ayuda de una ley constitutiva elastoplástica	4
1.2.4. Comparación con la ayuda de una ley constitutiva ‘realista’	7
1.2.5. Observaciones y conclusiones	8
<b>2. Campos de tensiones para elementos estructurales sencillos</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción	11
2.2. Almas de vigas de hormigón armado	11
2.2.1. Esbeltez pequeña, cargas concentradas	12
2.2.2. Pequeña esbeltez, varias cargas concentradas	16
2.2.3. Pequeña esbeltez, carga distribuida	18
2.2.4. Esbeltez media, cargas concentradas	19
2.2.5. Gran esbeltez, cargas concentradas	22
2.2.6. Gran esbeltez, carga uniforme	27
2.2.7. Caso general, dimensionamiento	28
2.3. Cordones en vigas con alas	31
2.3.1. Ala comprimida	31
2.3.2. Ala traccionada	34
2.4. Viga en torsión	35
2.4.1. Introducción	35
2.4.2. Torsión de alabeo (sección abierta)	37
2.4.3. Torsión uniforme (sección cerrada)	38
2.5. Ménsulas cortas	40
2.6. Vigas de unión	40

2.7. Nudos de pórticos . . . . .	44
2.7.1. Esquina de pórtico, compresión en el interior . . . . .	44
2.7.2. Esquina de pórtico, tracción en el interior . . . . .	45
2.7.3. Nudos de pórticos con confluencia de tres vigas . . . . .	47
2.7.4. Nudo de pórtico con confluencia de cuatro vigas . . . . .	50
2.8. Vigas de gran canto . . . . .	51
<b>3. Propiedades y características resistentes de los materiales</b>	<b>57</b>
3.1. Acero . . . . .	57
3.2. Hormigón . . . . .	58
3.2.1. Estado de tensión uniaxial . . . . .	58
3.2.2. Estado de tensión multiaxial . . . . .	60
3.2.3. Hormigón con fisuración inducida . . . . .	63
3.2.4. Transmisión de esfuerzos a través del engranamiento de áridos . . . . .	65
3.3. Transmisión de fuerza armadura-hormigón . . . . .	65
3.3.1. Anclaje de barras . . . . .	65
3.3.2. Solapes . . . . .	68
3.3.3. Desvíos . . . . .	69
<b>4. Consideraciones cinemáticas para la obtención de campos de tensiones satisfactorios</b>	<b>75</b>
4.1. Introducción . . . . .	75
4.2. Procedimiento para el desarrollo de subsistemas . . . . .	75
4.3. Ejemplos adicionales. Transmisión de la carga en una laja . . . . .	76
4.3.1. Laja solicitada a tracción . . . . .	76
4.3.2. Laja solicitada a compresión . . . . .	76
4.4. Aplicaciones . . . . .	80
4.5. Disminución de la resistencia a rotura debido a la presencia de fisuras anchas	82
<b>5. Campos de tensiones para diferentes elementos y casos de carga</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>
<b>A. Cuantía de armadura en lajas comprimidas en función de su deformación</b>	<b>93</b>
<b>B. Ejemplo de aplicación del método de los campos de tensiones</b>	<b>97</b>

# Notación

## Mayúsculas Latinas

$A$	Área
$A_s$	Área de acero
$A_c$	Área de hormigón
$E$	Módulo de elasticidad
$E_s$	Módulo de elasticidad del acero
$E_c$	Módulo de elasticidad del hormigón
$N$	Esfuerzo normal
$Q$	Carga
$Q_y$	Carga de plastificación
$Q_R$	Carga de rotura

## Minúsculas Latinas

$c$	Cohesión
$d$	Diámetro
$f_c$	Resistencia a compresión en cilindro del hormigón
$f_{ce}$	Resistencia plástica equivalente a compresión del hormigón
$f_{ct}$	Resistencia a tracción uniaxial del acero
$f_{sy}$	Tensión de plastificación del acero
$l$	Longitud de un elemento

## Mayúsculas Griegas

$\Delta$	Incremento
----------	------------

## Minúsculas Griegas

$\delta$	Flecha, abertura
$\phi$	Diámetro de una armadura
$\varepsilon$	Deformación
$\varepsilon_s$	Deformación del acero
$\varepsilon_{sy}$	Deformación de plastificación del acero

---

$\varepsilon_c$	Deformación del hormigón
$\varphi$	Ángulo de rozamiento
$\gamma$	Coefficiente total de seguridad
$\rho$	Cuantía de armadura
$\sigma$	Tensión
$\sigma_s$	Tensión en el acero
$\sigma_c$	Tensión en el hormigón
$\sigma_{adm}$	Tensión admisible
$\vartheta$	Ángulo del campo de compresiones
$\tau$	Tensión cortante

# Capítulo 1

## Introducción y fundamentos teóricos

“No hay nada más práctico  
que una teoría sencilla”

(Robert Maillart)

### 1.1. Objetivos

El objetivo del análisis estático consiste en proyectar, calcular dimensionar y construir una estructura de modo que se satisfagan todos los requerimientos relativos a capacidad resistente, funcionalidad en servicio y durabilidad.

Componentes importantes de este proceso son, el dimensionamiento, es decir, la decisión de las dimensiones de la sección de hormigón y de la cuantía de la armadura, y la definición de los detalles constructivos, es decir, la disposición de la armadura, resolución solapes, nudos, apoyos, etc.

Hasta la fecha, se han venido aplicando reglas empíricas en el dimensionamiento y construcción, basadas en años de experiencia práctica y en resultados de los ensayos realizados, pero que escapan a una base teórica unificada.

En este documento se utilizará la teoría de la plasticidad (especialmente su límite estático), para establecer una base clara para el dimensionamiento y concepción sistemáticos de estructuras de hormigón armado y pretensado.

Cada teoría debe ser sencilla para poder ser aplicable. A este respecto Albert Einstein escribía:

“Una teoría debe ser tan sencilla como sea posible,  
pero no banal” (A. Einstein)

La teoría de la plasticidad es sencilla y con fundamentos físicos. Su aplicación al dimensionamiento y la concepción lleva a resultados claros, explícitos y con una cantidad de trabajo razonable. Sólomente la experimentación y sobre todo la experiencia puede dar una respuesta sobre si esta teoría no es demasiado simple y conocer el valor práctico de los resultados obtenidos. La experiencia confirma que estructuras adecuadamente concebidas, sometidas a acciones excepcionales, pueden presentar daños más o menos importantes sin colapsar, a pesar de que según análisis elásticos deberían haberlo hecho. Las redistribuciones plásticas de esfuerzos internos necesarias a este efecto son normalmente llamadas “la inteligencia del

material”.

Desde la década de 1940 se han desarrollado diferentes investigaciones relacionadas con los materiales, componentes y comportamientos estructurales, primero en la construcción en acero y después en la construcción en hormigón. Sobre todo, los ensayos estructurales son los más importantes para conocer la aplicación de la teoría, porque la rotura se encuentra gobernada normalmente por los detalles y conexiones. Todos estos ensayos han mostrado que sólo la teoría de la plasticidad proporciona un método racional, consecuente, lógico y simple para la determinación de la capacidad portante y el dimensionamiento de estructuras en acero y hormigón armado.

## 1.2. Bases teóricas y observaciones sobre el dimensionamiento de estructuras hiperestáticas

En esta sección se presentan los dos métodos más conocidos para el dimensionamiento de estructuras hiperestáticas: la teoría de la elasticidad y la teoría de la plasticidad. Para ello se aplican a un ejemplo sencillo. La estructura dimensionada por los dos procedimientos será posteriormente estudiada en servicio, comparando los resultados y derivando una serie de conclusiones interesantes para el dimensionamiento de estructuras de hormigón.

La estructura en estudio se presenta en la fig. 1.1a. La misma consta de tres tirantes de diferentes longitudes, unidos por una pieza de gran rigidez. Esta estructura puede ser considerada como representativa de diferentes esquemas estructurales hiperestáticos, lo que permite comparar sus resultados con otros ejemplos (como la viga pretensada mostrada en la fig. 1.1b).

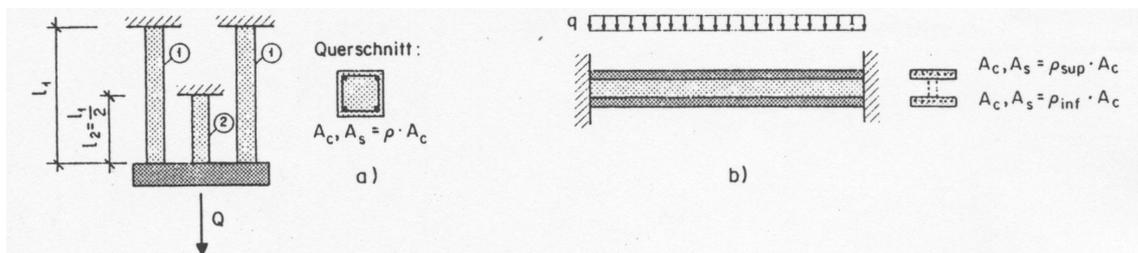


Figura 1.1: Estructura hiperestática sencilla

### 1.2.1. Dimensionamiento según la teoría de la elasticidad

Las bases teóricas de esta teoría se suponen conocidas. En este ejemplo se obtienen las siguientes condiciones:

- Equilibrio:  $2N_1 + N_2 = 0$
- Cinemática:  $N_1 \cdot l_1 / (EA_1) = \delta = N_2 \cdot l_2 / (EA_2)$
- Condición de plasticidad:  $\gamma N \leq N_R = A_s \cdot f_{sy} = \rho \cdot A_c \cdot f_{sy}$
- Comportamiento en servicio:  $N \leq N_{adm} = A_s \cdot \sigma_{adm} = \rho \cdot A_c \cdot \sigma_{adm}$

Donde:

$N_1, N_2$	= Axiles en las barras
$EA_1, EA_2$	= Rigideces de las barras
$\delta$	= Flecha
$\gamma$	= Coeficiente de seguridad
$f_{sy}$	= Tensión de plastificación de los aceros
$\sigma_{adm}$	= Tensión admisible
$A_s$	= Sección de acero
$\rho$	= Cuantía geométrica

Para el análisis, los tirantes se consideran en estado elástico lineal no fisurado. Por lo tanto, la cuantía de acero tiene una influencia despreciable sobre la rigidez. Considerando  $EA_1 = EA_2$  se tiene:

$$N_1 = N_2 \frac{l_2}{l_1} = \frac{N_2}{2} \quad (1.1)$$

La armadura necesaria se obtiene limitando la tensión en los aceros (a  $f_{sy}$  en rotura o bien a  $\sigma_{adm}$  en servicio). De esta forma, se obtiene el doble de armadura en el elemento de menor longitud (fig. 1.2). Debe notarse que en este ejemplo la resistencia a tracción del hormigón se ha despreciado, lo que entra en contradicción con la hipótesis adoptada de rigideces.

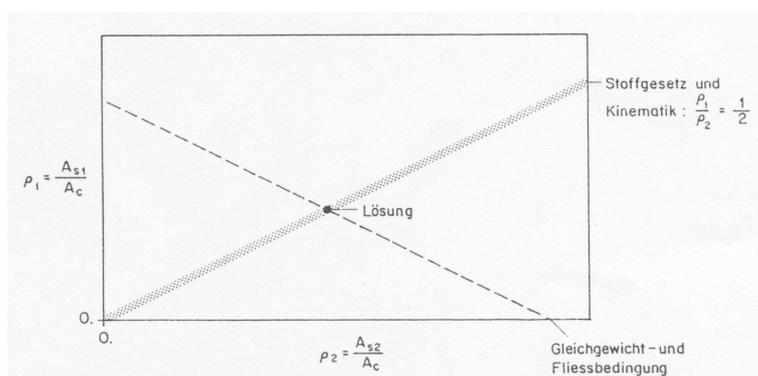


Figura 1.2: Cantidad de armadura en cada elemento

### 1.2.2. Dimensionamiento según la teoría de la plasticidad

Los límites de la teoría de la plasticidad van a ser enunciados de manera breve. Pueden encontrarse más detalles sobre sus bases teóricas por ejemplo en [1].

#### Límite estático (límite inferior)

Un estado de cargas  $[Q_s]$  que pertenece a un campo de tensiones, que:

- satisface las condiciones de equilibrio y las condiciones de contorno estáticas
- no viola la condición de plasticidad

es un límite inferior de la carga de rotura  $[Q_R]$ :

$$[Q_s] \leq [Q_R] \quad (1.2)$$

### Límite cinemático (límite superior)

Un estado de cargas  $[Q_k]$  que con un mecanismo, el cual:

- satisface las condiciones de contorno geométricas
- satisface la condición de plasticidad en las zonas plásticas

constituye un sistema en equilibrio global, es un límite inferior de la carga de rotura  $[Q_R]$ :

$$[Q_k] \geq [Q_R] \quad (1.3)$$

Se presentan a continuación en la tabla 1.1 las condiciones para ambos límites resumidos en forma de tabla.

	Límite estático $[Q_s] \leq [Q_R]$	Límite cinemático $[Q_k] \geq [Q_R]$	Solución exacta $[Q] = [Q_R]$
Equilibrio	Satisfecho	Satisfecho	Satisfecho
Condición de plasticidad	Satisfecha	?	Satisfecha
Mecanismo	?	Satisfecho	Satisfecho

Cuadro 1.1: Condiciones para ambos límites

Una solución que satisfaga ambos límites a la vez se constituye en una solución exacta según la teoría de la plasticidad.

Para el dimensionamiento se emplea normalmente el límite estático de la teoría de la plasticidad.

Las condiciones a respetar para el ejemplo de la fig. 1.1 se resumen a continuación:

- Equilibrio:  $2N_1 + N_2 = 0$
- Cinemática:  $0 \leq \frac{N_1}{N_2} \leq \infty$
- Condición de plasticidad:  $\gamma N \leq N_R = A_s \cdot f_{sy} = \rho \cdot A_c \cdot f_{sy}$

Mediante el dimensionamiento según la teoría de la plasticidad no se obtiene de la condición cinemática ninguna dependencia entre las cuantías de armadura  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . La solución por lo tanto no es única (fig. 1.3).

Todas las soluciones entre A (armadura sólo en el tirante de mayor longitud) y B (sólo armadura en el tirante de menor longitud) son lícitas.

### 1.2.3. Comparación y crítica de ambos métodos de dimensionamiento con la ayuda de una ley constitutiva elastoplástica

En este apartado se adopta la hipótesis de que el hormigón no puede desarrollar tensiones de tracción. En la fig. 1.4 se presenta la carga fuerza-deformación de un tirante admitiendo esta hipótesis.

El diagrama carga-deformación para la estructura puede obtenerse sumando el comportamiento de sus tres elementos. La fig. 1.5 muestra esta respuesta para  $\rho_1/\rho_2 = 1/2$  (dimensionamiento elástico). Debe notarse que las barras no alcanzan su tensión de plastificación a la

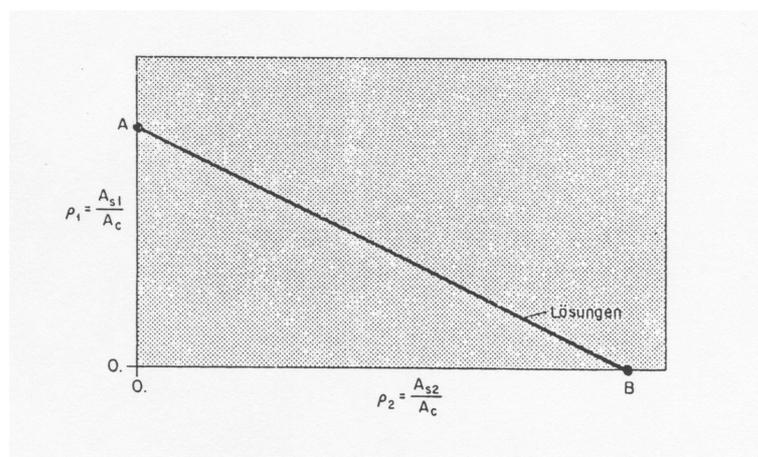


Figura 1.3: Cuantías de armado para ambos tirantes. La línea indicada corresponde al rango de posibles soluciones

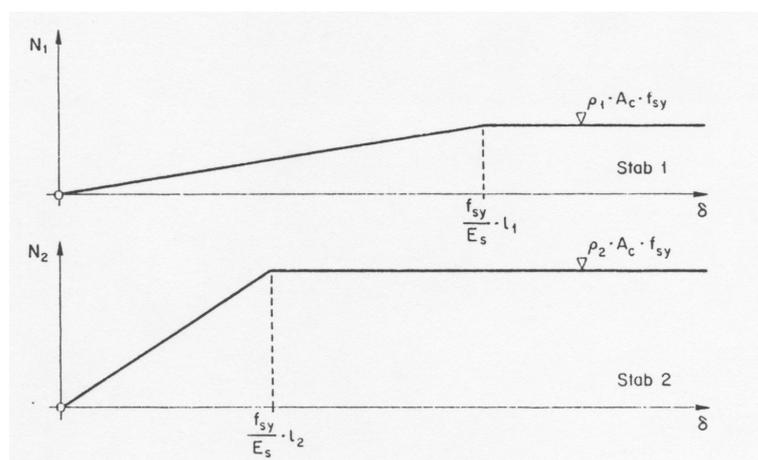


Figura 1.4: Curva carga-deformación del tirante

vez. Debido a que la deformación en el tirante corto es el doble que en el tirante largo, cuando el tirante corto alcanza su carga de plastificación  $Q_y$ , el tirante largo sólo ha desarrollado la mitad de su capacidad resistente. Esto se encuentra en contradicción con las bases del dimensionamiento elástico, donde se suponen todos los elementos trabajando a su máxima tensión admisible ( $\sigma_{adm}$  o  $f_{sy}$ ). La carga máxima resistida  $Q_R$  se alcanza cuando todos los tirantes plastifican.

En la fig. 1.6 se muestran las curvas carga-deformación para diferentes valores de  $\rho_1/\rho_2$  elegidos según el dimensionamiento plástico.

Para  $\rho_1/\rho_2 < 0,5$  la armadura del tirante corto plastifica para una carga superior al 75 % de la carga máxima. El valor de  $Q_y/Q_R$  es función por lo tanto de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  según se muestra en la fig. 1.7. Es interesante destacar la fuerte influencia que  $\rho_1/\rho_2$  tiene sobre  $Q_y/Q_R$ .

Debe notarse que una vez plastificada la armadura, se desarrollan en el elemento fisuras de gran abertura. Como la carga  $Q_R$  es independiente del método de dimensionamiento elegido (elástico o plástico), el cociente  $Q_y/Q_R$  puede ser considerado como un factor para investigar

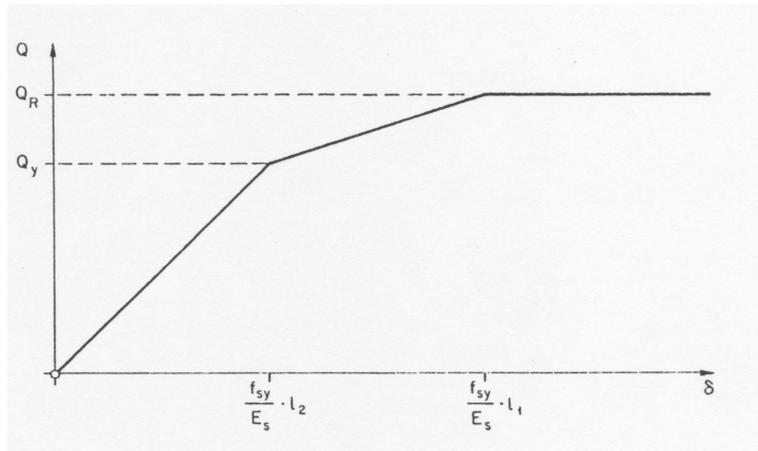


Figura 1.5: Curva carga-deformación de la estructura dimensionada elásticamente

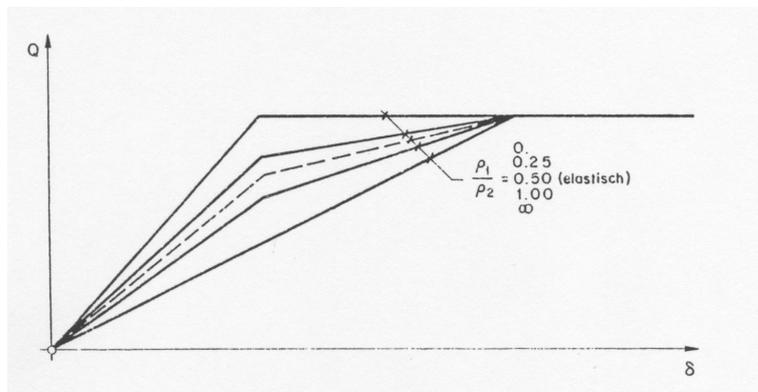


Figura 1.6: Curvas carga-deformación de la estructura para diferentes dimensionamientos plásticos

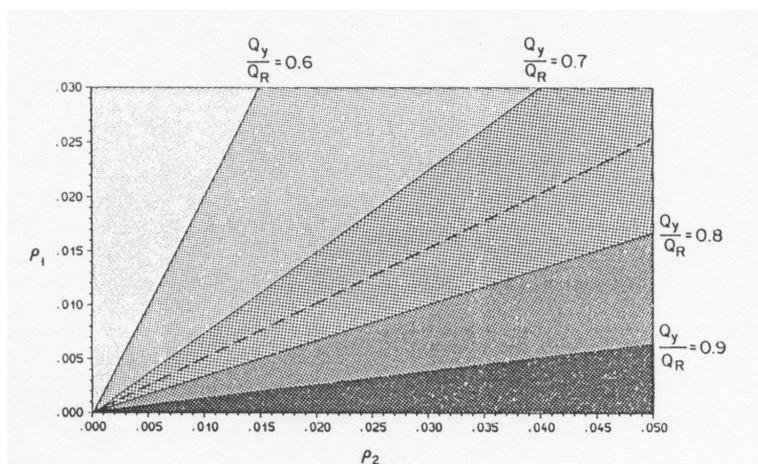


Figura 1.7: Influencia de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  sobre  $Q_y/Q_R$

el comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio. En esta situación, el límite de plastificación de los aceros no debe alcanzarse nunca, debiendo satisfacerse:

$$\frac{Q_y}{Q_R} > \frac{1}{\gamma} \quad (1.4)$$

En las figs. 1.6 y 1.7 puede notarse que el dimensionamiento plástico puede tener un comportamiento en servicio mejor o peor que el elástico.

Debe también notarse que estados de tensiones autoequilibradas en el elemento influyen en el valor de  $Q_y$  aunque no el de  $Q_R$ . Este hecho se presenta de manera esquemática en la fig. 1.8.

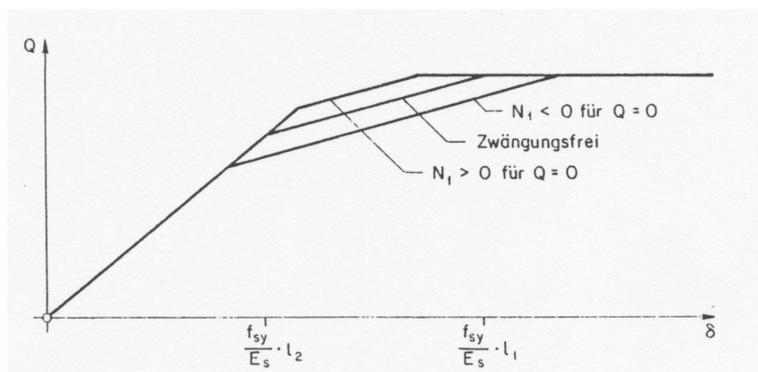


Figura 1.8: Influencia de deformaciones impuestas en el comportamiento carga-deformación

#### 1.2.4. Comparación con la ayuda de una ley constitutiva ‘realista’

La ley constitutiva empleada en las secciones anteriores se va a refinar en este apartado considerando la resistencia a la tracción del hormigón. Hasta alcanzar la resistencia a tracción del hormigón, los tirantes se comportan como no fisurados. Una vez fisurados, se emplea una ley constitutiva empírica para considerar la contribución del hormigón en tracción (tension-stiffening). La descripción de este comportamiento se realiza mediante una hipérbola de primer grado según se detalla en [2]. Este comportamiento se muestra en la fig. 1.9, donde la línea discontinua corresponde a la ley de comportamiento elasto-plástico mostrada en la fig. 1.4.

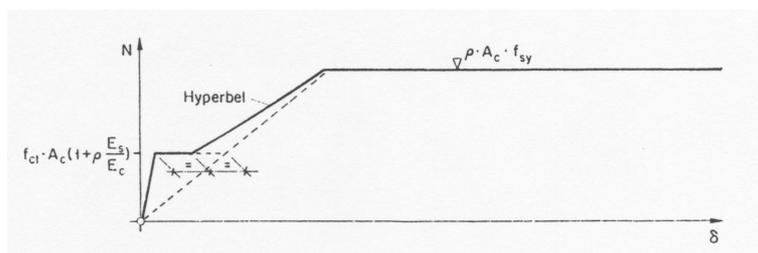


Figura 1.9: Comportamiento carga-deformación de los tirantes

El diagrama carga-deformación para la estructura puede obtenerse sumando los correspondientes de cada elemento. En la fig. 1.10 se muestra dicho diagrama para tres valores diferentes

de  $\rho_1/\rho_2$ .

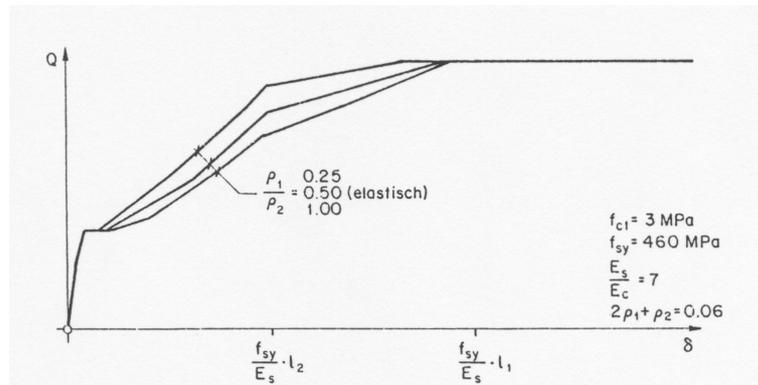


Figura 1.10: Comportamiento carga-deformación de la estructura

En esta figura puede notarse que el tirante corto plastifica nuevamente antes de alcanzar el sistema la carga máxima  $Q_R$ .

El comportamiento  $Q_y/Q_R$  como función de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se muestra en la fig. 1.11.

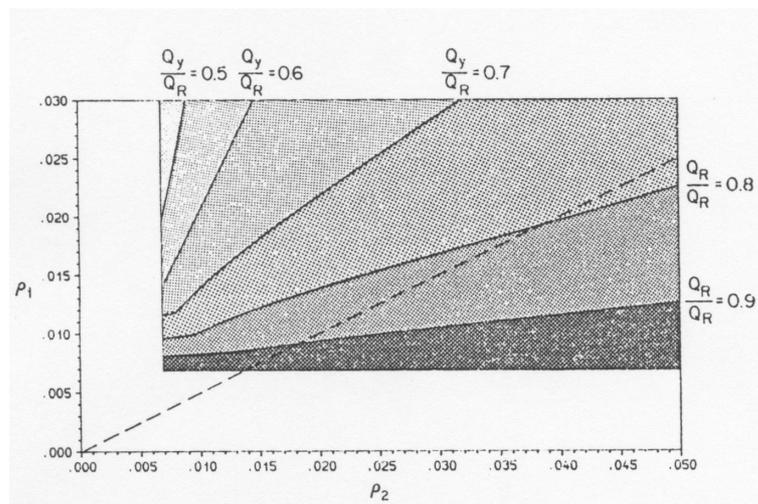


Figura 1.11: Influencia de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en el comportamiento  $Q_y/Q_R$ , estructura de la fig. 1.1a

Gracias a que el ejemplo estudiado es representativo de sistemas hiperestáticos, se presenta a continuación una comparación con otra estructura. La fig. 1.12 muestra la influencia de  $\rho_{inf}$  y  $\rho_{sup}$  en  $Q_y/Q_R$  para la estructura mostrada en la fig. 1.1b.

### 1.2.5. Observaciones y conclusiones

La concepción del sistema estructural y la rigidez de los elementos de hormigón tienen una gran influencia en el comportamiento de una estructura bajo condiciones de servicio. Las deformaciones locales (aberturas de fisura) dependen igualmente de la disposición, diámetro de las armaduras y distancia entre las mismas. Fisuras de abertura importante se producen sobre todo una vez que la armadura ha plastificado. Para evitar fisuras de abertura inaceptable y

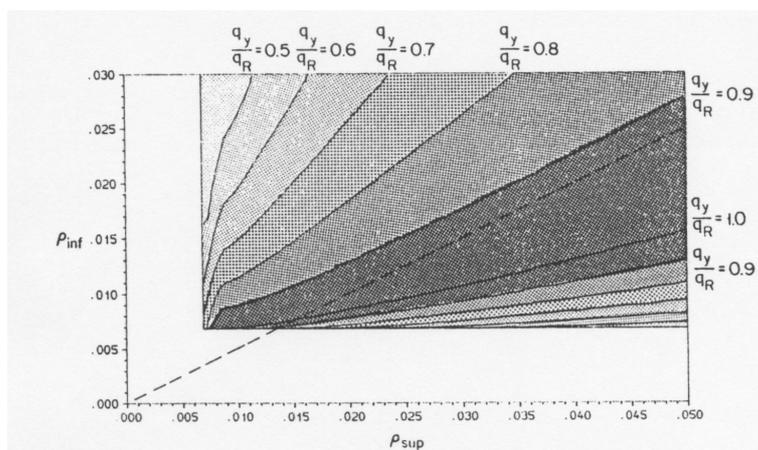


Figura 1.12: Influencia de  $\rho_{inf}$  y  $\rho_{sup}$  sobre  $q_y/q_R$ , estructura de la fig. 1.1b

controlar las tensiones en las armaduras es necesario la disposición de una armadura mínima. Este tema se estudiará con profundidad en el capítulo 4.

Como se ha mostrado en los apartados anteriores, la plastificación de las armaduras se produce de forma gradual en una estructura antes de llegar a su carga máxima. En los dos casos estudiados, la carga de primera plastificación oscilaba entre el 75 % y el 100 % de la carga de rotura (sin considerar posibles deformaciones impuestas). Por esta razón, la plastificación del acero bajo condiciones de servicio es poco probable. Según un dimensionamiento plástico, este límite puede aumentarse o reducirse. Por ello, y para evitar soluciones con un comportamiento no satisfactorio bajo cargas de servicio, puede aplicarse el siguiente principio:

“Cuanto mayor sea la deformación de un elemento,  
más debe armarse”

En los ejemplos analizados anteriormente, resultaba con  $\rho_2 > \rho_1$  un comportamiento  $Q_y/Q_R > 0,7$  y con  $\rho_{sup} > \rho_{inf}$  un comportamiento  $q_y/q_R > 0,75$ .

En el dimensionamiento debe comprobarse tanto el comportamiento en rotura como el comportamiento en servicio.

La seguridad estructural puede estimarse con suficiente precisión con la ayuda de la teoría de la plasticidad.

Un conocimiento del comportamiento en servicio, el cual se ve influido por diversos factores desconocidos (por ejemplo las deformaciones impuestas), puede considerarse superfluo realizando ciertas reflexiones sencillas y cualitativas durante el dimensionamiento.



## Capítulo 2

# Campos de tensiones para elementos estructurales sencillos

### 2.1. Introducción

En este capítulo se estudia la forma de trabajo de elementos estructurales sencillos de hormigón armado o pretensado por medio del método de los campos de tensiones. Se tratan en él almas y alas de vigas, vigas de gran canto, vigas cortas, vigas de unión y nudos de pórticos, con los que se cubre la mayoría de los casos de dimensionamiento. En el capítulo 3 se completarán estos casos mediante tipos de elementos y de solicitaciones más complicados.

Aunque todos los elementos estructurales son por su naturaleza cuerpos tridimensionales, los elementos estudiados en este capítulo se tratan, bien como lajas directamente (tensiones constantes a todo lo ancho del espesor), o se descomponen en lajas aisladas. Como los elementos estructurales bidimensionales presentan un grado de hiperestaticidad interior elevado, se pueden considerar varias (realmente infinitas) formas de trabajo para un caso dado de carga. Si se aplica el método estático de la teoría de la plasticidad, puede considerarse una forma de trabajo (descrita mediante un campo de tensión) o varias libremente combinadas. En el capítulo 1 se demostró por medio de ejemplos, que este método es un procedimiento seguro para el dimensionamiento de elementos estructurales de hormigón. La repercusión de la elección de la forma definitiva de trabajo sobre el comportamiento del sistema estructural se tratará en detalle en el capítulo 4.

Las primeras aplicaciones de este método de cálculo se remiten a Ritter [3] y Morsch [4] que, ya en los comienzos del presente siglo, estudiaron las resultantes de las solicitaciones internas en el hormigón (modelo de celosía). Los primeros campos de tensión basados en los fundamentos de la teoría de la plasticidad fueron desarrollados en los comienzos de los años sesenta por Drucker [5]. El desarrollo de estos métodos aparece recogido en las publicaciones de Thürlimann y otros [6, 7], de Nielsen [8] y de Chen [9]. Una aplicación paralela de este método, influida por la teoría de la elasticidad, ha sido propuesta por Schlaich et al. [10]

### 2.2. Almas de vigas de hormigón armado

Aunque la forma de transmisión de la carga en las vigas es fácil de comprender, o al menos ya es conocida cualitativamente, se pone aquí un mayor énfasis en el desarrollo mediante campos de tensión, alejándose de las soluciones conocidas, con el fin de facilitar la iniciación en esta

técnica.

Para comenzar, se considera la forma de transmisión de carga (distribución de las fuerzas internas) en una viga de poca luz, estáticamente determinada, sometida a dos cargas puntuales, y se describe ésta mediante un campo de tensión. A continuación se distribuye progresivamente la carga y se aumenta la esbeltez, con lo que resultan así campos de tensión para vigas simplemente apoyadas con diferentes relaciones luz/canto (esbeltez).

### 2.2.1. Esbeltez pequeña, cargas concentradas

Se considera una viga de hormigón armado con sección rectangular cuyas medidas y cargas de diseño aparecen reflejadas en la fig. 2.1.

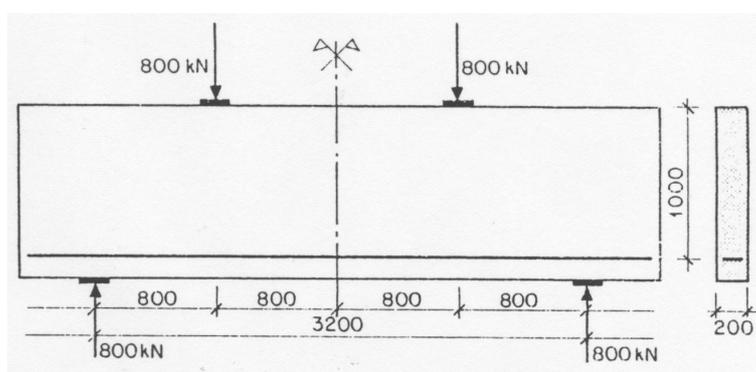


Figura 2.1: Geometría y cargas de la viga de hormigón armado estudiada

Se considerarán las siguientes características resistentes de los materiales:

- resistencia efectiva del hormigón:  $f_{ce} = 20$  MPa
- tensión de plastificación de la armadura:  $f_{sy} = 460$  MPa

La resistencia efectiva del hormigón es aquella utilizada en el cálculo del elemento estructural (para mayor detalle ver el capítulo 3).

La transmisión de las fuerzas internas puede ser deducida de inmediato a partir de reflexiones intuitivas. La distancia del apoyo a la carga es tan pequeña que ésta puede transmitirse directamente hacia el apoyo. Entre la carga y la fuerza de reacción se crea en consecuencia una biela de hormigón en compresión.

La fig. 2.2 muestra la situación de las resultantes de estas bielas de hormigón así como de las restantes fuerzas de tracción y de compresión necesarias para la consecución del equilibrio.

La fuerza de tracción horizontal se soporta mediante una armadura, mientras que la fuerza de compresión horizontal queda asignada al hormigón.

Se puede considerar un campo de tensión lineal (cordón de compresión) de intensidad constante  $f_{ce}$ , estáticamente equivalente a la fuerza horizontal de compresión. En la fig. 2.3.a se representa este campo de tensión para un brazo interno estimado.

Puesto que entre el cordón de compresión y la cara superior de la viga nos queda una zona libre de tensiones, se puede incrementar el brazo interno. Por lo tanto, la posición óptima del cordón de compresión puede ser determinada mediante iteraciones. La fig. 2.3.b muestra el campo de tensiones tras la primera iteración, que podemos considerar como definitiva.

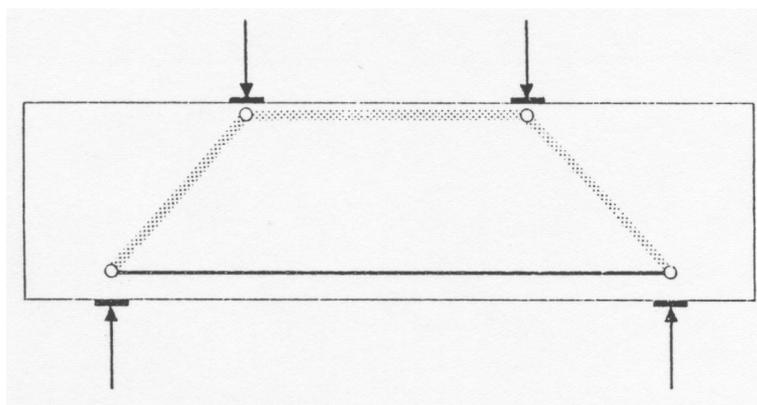


Figura 2.2: Apoyo directo: resultantes de las fuerzas internas

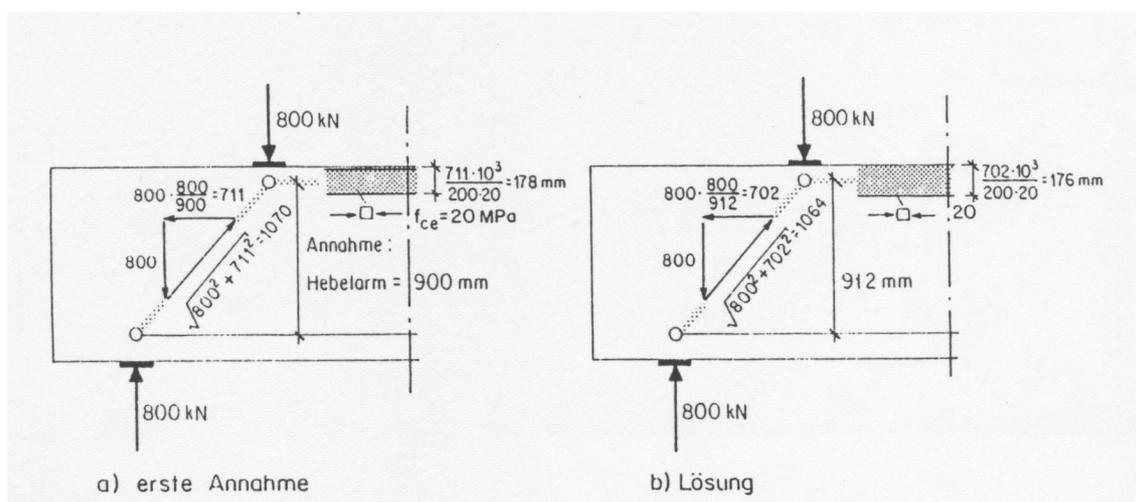


Figura 2.3: Obtención de la cabeza de compresión

La zona media de la viga está solicitada a flexión pura, por lo que las medidas y fuerzas determinadas iterativamente podrían haber sido también calculadas analíticamente con los métodos convencionales ya conocidos.

De acuerdo con el teorema estático de la teoría de la plasticidad (teorema del mínimo), la solución propuesta, que presupone una tensión de magnitud constante en el cordón de compresión, es sólo una de las soluciones a considerar. En el borde interior del cordón aparece una discontinuidad del estado tensional. En la frontera, la tensión cae bruscamente desde  $f_{ce}$  hasta el cero (fig. 2.4.a).

Una discontinuidad de esta naturaleza sólo está permitida en el supuesto de una ley del material rígido plástico (fig. 2.4.b), pero otras soluciones sin discontinuidad de tensiones hubieran sido también posibles (fig. 2.5).

Para cuantías normales, la elección de la distribución de tensiones no ejerce una influencia apreciable sobre la posición de las resultantes, por lo que resulta justificada la elección de una distribución de tensiones lo más sencilla posible.

El modelo de bielas de compresión con tensión constante puede utilizarse igualmente para

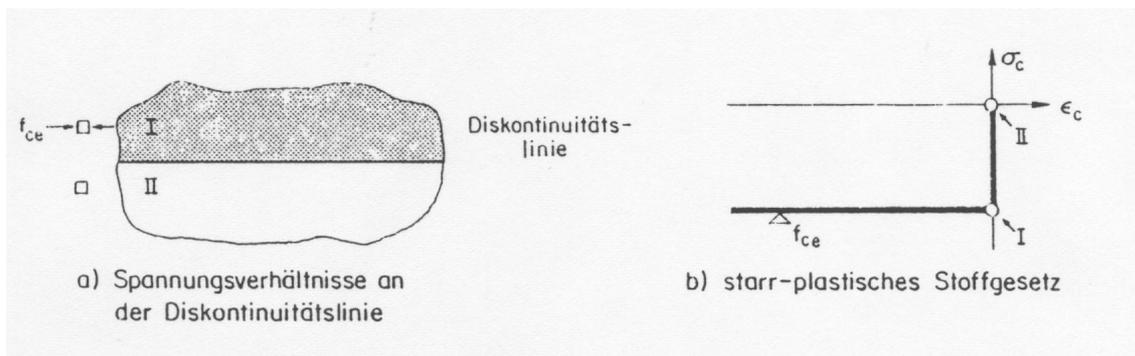


Figura 2.4: Línea de discontinuidad

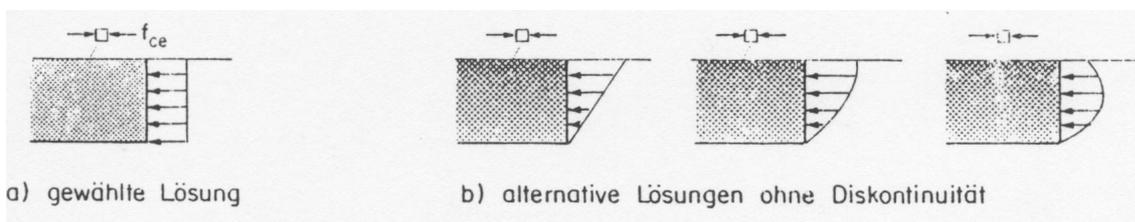


Figura 2.5: Posibles distribuciones de las tensiones en la cabeza de compresión

describir el estado tensional comprendido entre la carga y la fuerza en el apoyo. La anchura de la biela se obtiene al dividir el esfuerzo en la biela por la resistencia efectiva del hormigón y por el espesor de la viga (fig. 2.6). La anchura de las zonas de aplicación de la carga se calcula considerando una sollicitación del hormigón igual a  $f_{ce}$  bajo las placas de apoyo.

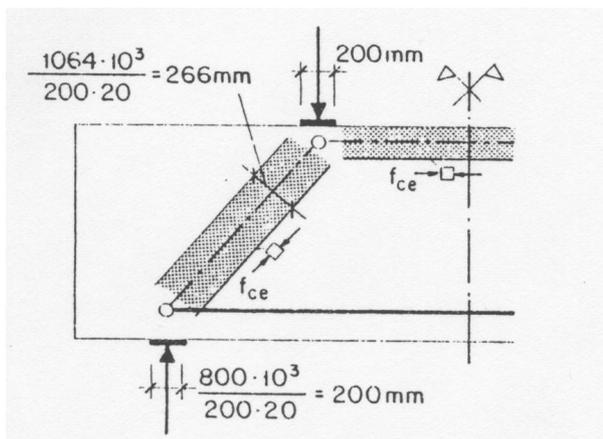


Figura 2.6: Biela de apoyo directo y cabeza de compresión

El desarrollo del campo de tensión en la zona del nudo queda esquematizado en la fig. 2.7, según el cual aparece un estado tensional biaxial, con intensidades de ambas tensiones iguales a  $f_{ce}$ .

Se destaca el hecho de que la línea de transición (fig. 2.7) entre la biela y el nudo resulta perpendicular a la biela, siempre que impere un estado tensional isótropo ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) en la

zona con sollicitación biaxial.

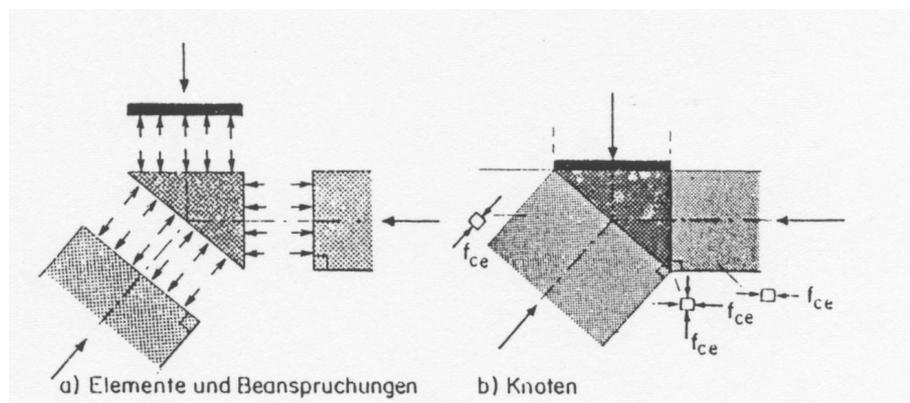


Figura 2.7: Obtención de la geometría del nudo

El nudo en la zona de apoyo se construye de manera análoga (fig. 2.8.a).

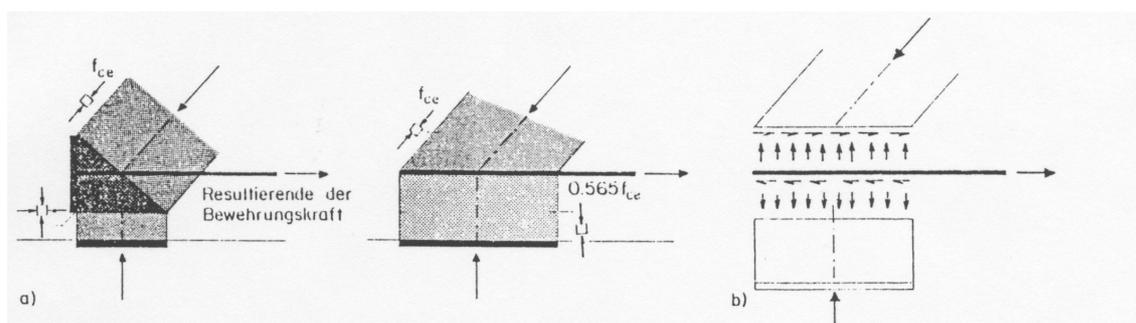


Figura 2.8: Geometría del nudo

El estado tensional en las zonas con sollicitación biaxial está en equilibrio con la fuerza diagonal de la biela de compresión, con la reacción en el apoyo y con el esfuerzo de la armadura. Tanto el esfuerzo de la armadura como la reacción en el apoyo actúan distribuidos uniformemente sobre las líneas de discontinuidad correspondientes.

Ha de tenerse presente que para esta solución del campo tensional se necesita que el esfuerzo en la armadura actúe al 100 % en el extremo izquierdo del apoyo. En la fig. 2.8.b se representa una solución alternativa. El esfuerzo de la armadura en la zona del apoyo va reduciéndose progresivamente. Este campo de tensión sólo es admisible si el esfuerzo en la armadura puede ser transmitido al hormigón en el interior del nudo. Se observa que la superficie de apoyo de la reacción aumenta, y que, en consecuencia, disminuye correspondientemente la tensión en el campo de compresión vertical.

En la fig. 2.9 quedan representados los campos de tensión del conjunto de la viga para ambas variantes.

En la fig. 2.10.a aparece una posible disposición de armadura en la que el esfuerzo total de la armadura queda anclado por detrás del apoyo. Las figuras 2.10.b, c y d muestran soluciones para las que el anclaje de la armadura tiene lugar directamente en las proximidades del apoyo con ayuda de estribos horizontales, cercos y placas de anclaje.

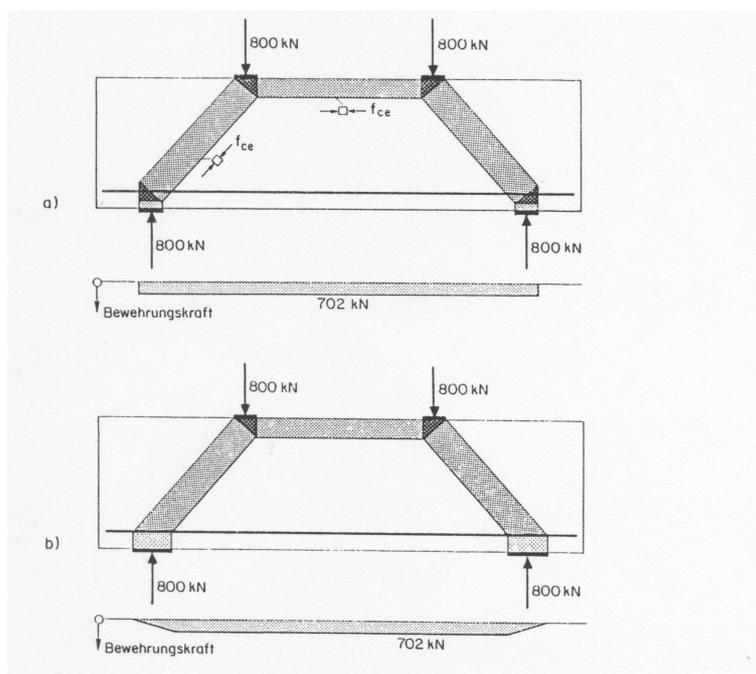


Figura 2.9: Campo de tensiones y fuerzas en la armadura

En resumen:

- A pesar de que la viga tiene una armadura de cortante importante, desde el punto de vista estático, no son necesarios los cercos.
- La distribución de la fuerza en la armadura no se corresponde con la del momento flector, puesto que aquélla es constante a lo largo de la viga y debe anclarse en toda su magnitud en la zona del apoyo.

Del ejemplo anterior se deduce que, en el dimensionamiento de construcciones de hormigón armado, el campo de tensión no tiene por qué ser desarrollado cuantitativamente en todos los elementos, sino que un análisis cualitativo permite conocer suficientemente la distribución de las fuerzas internas para proceder a su dimensionamiento, es decir, a la determinación de la distribución y cuantía de la armadura, a la definición de las soluciones constructivas de los detalles, así como a la comprobación de las tensiones en el hormigón en las zonas determinantes.

### 2.2.2. Pequeña esbeltez, varias cargas concentradas

Consideramos la viga de hormigón del apartado anterior. Cada carga de dimensionamiento de 800kN se sustituye por cuatro fuerzas iguales con igual resultante. Como las reacciones no experimentan variación, tampoco varían la dimensión del cordón de compresión en el centro del vano ni el esfuerzo en la armadura con respecto al ejemplo anterior (fig. 2.11).

Las bielas de compresión pueden desarrollarse progresivamente. En la fig. 2.12.a se representa el desarrollo de la primera biela, en la fig. 2.12.b, el campo de tensión en conjunto y en la fig. 2.12.c, las correspondientes resultantes con ayuda de un diagrama de Cremona.

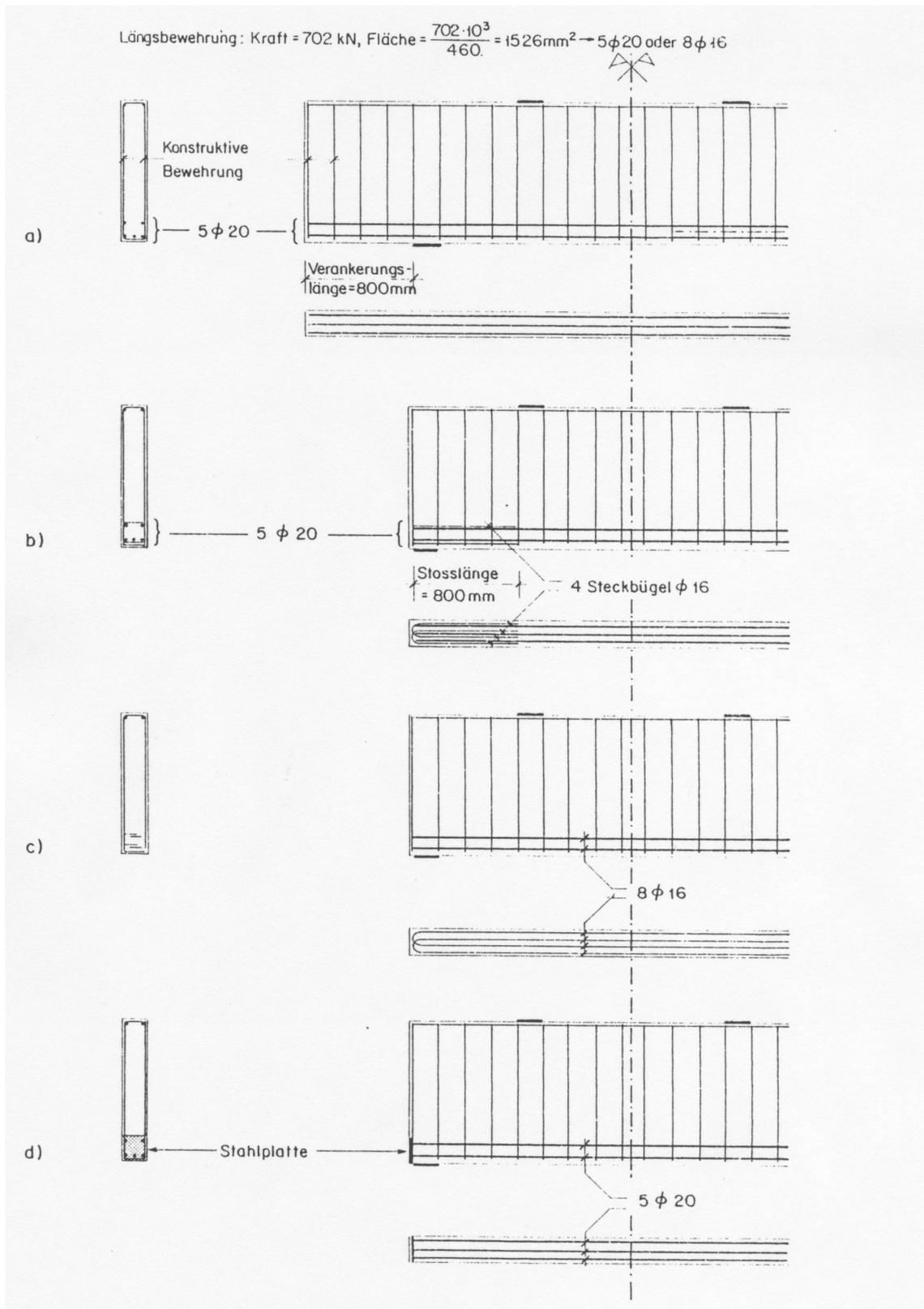


Figura 2.10: Croquis de armado

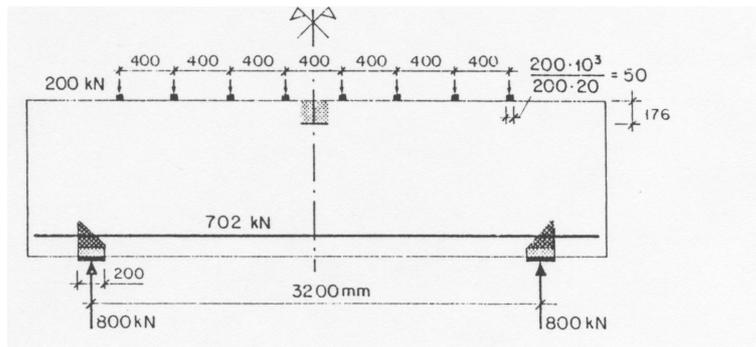


Figura 2.11: Viga y cargas

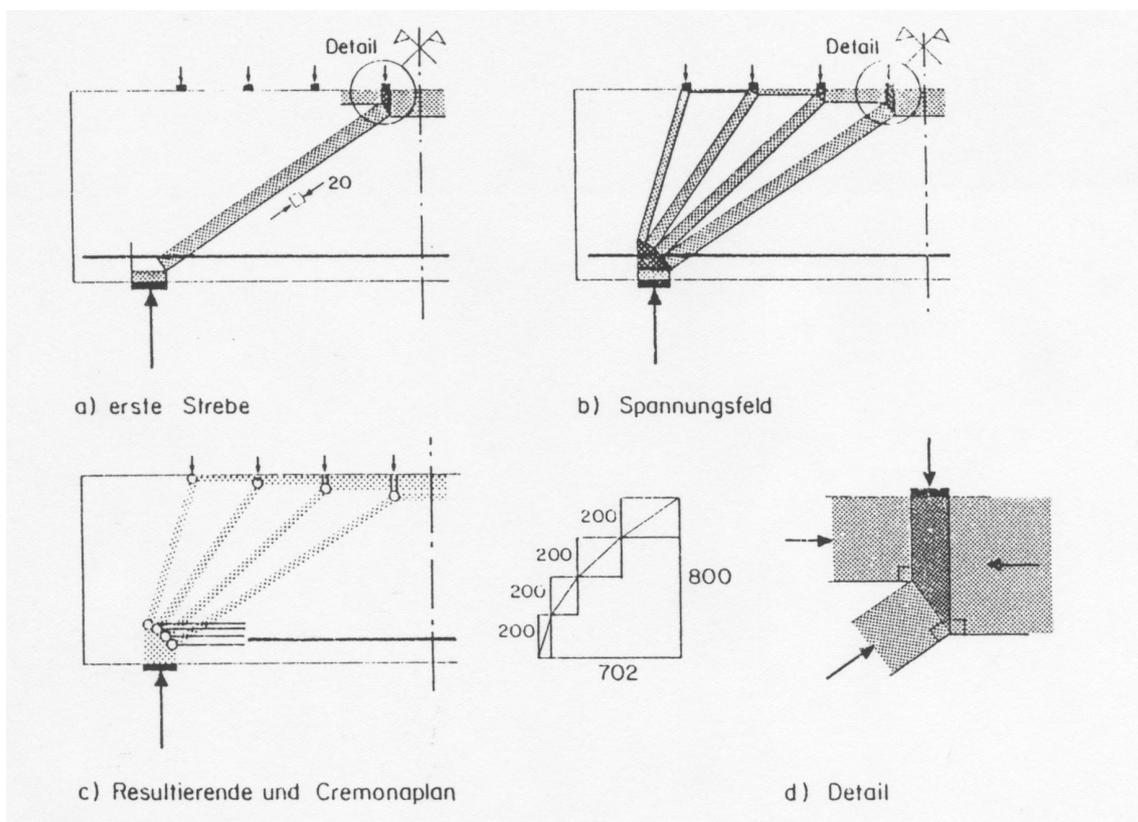


Figura 2.12: Obtención del campo de tensiones

### 2.2.3. Pequeña esbeltez, carga distribuida

Las medidas de la viga y las características del material se siguen manteniendo en este ejemplo. Sobre toda la longitud de la viga actúa, una carga de dimensionamiento uniformemente distribuida de 500 kN/m.

Como las cargas del primer ejemplo pueden ser contempladas como resultantes de la carga uniformemente repartida, tampoco varían en este caso las medidas de la biela horizontal de compresión en el centro del vano ni el esfuerzo en la armadura.

El campo de tensión puede ser desarrollado análogamente al ejemplo anterior dividiendo las

cargas concentradas en infinitas cargas infinitesimales (fig. 2.13).

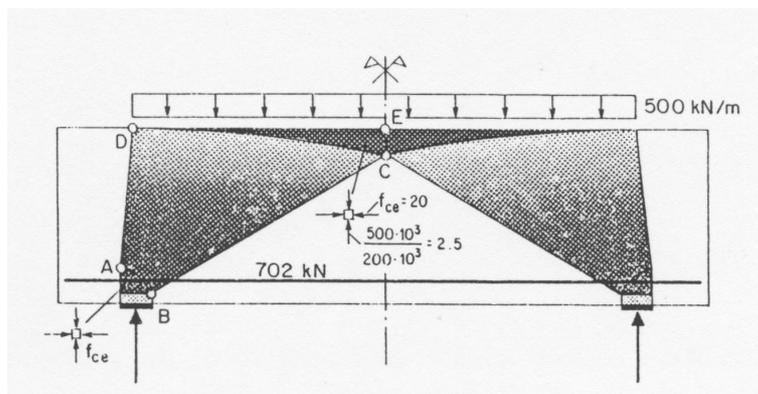


Figura 2.13: Campo de tensiones

El campo de tensión ABCD se denomina “abanico”. La intensidad de la tensión alcanza el valor  $f_{ce}$  en la línea de discontinuidad AB y decrece hiperbólicamente en sentido radial. En la zona CDE reina un estado de tensión biaxial. Se puede demostrar que las líneas de discontinuidad AB y CD son parábolas de 2º orden. La expresión de estas curvas, sin embargo, no tiene significación alguna para el dimensionamiento de la estructura.

#### 2.2.4. Esbeltez media, cargas concentradas

Se considera ahora una viga de igual sección que la de los apartados 2.2.1 a 2.2.3, si bien con una luz doble que anteriormente. Las cargas de dimensionamiento siguen siendo 800 kN y actúan en ambos casos a cuartos de luz de la viga. El campo de tensión desarrollado en el apartado 2.2.1 puede ser también retomado cualitativamente para este caso (fig. 2.14).

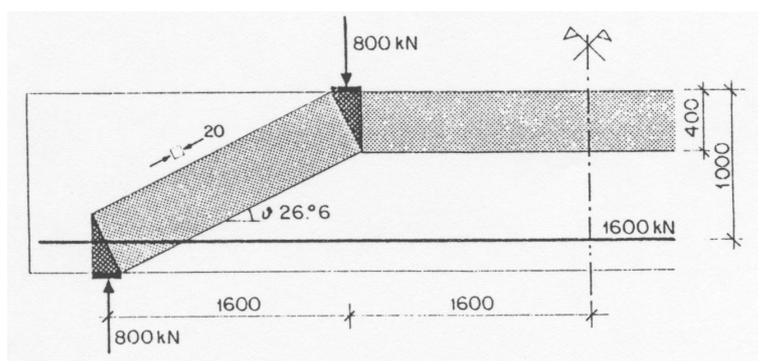


Figura 2.14: Campo de tensiones (apoyo directo)

Estimando la anchura de las bielas horizontales de compresión, por ejemplo, en 400 mm, la inclinación de las bielas diagonales de compresión resulta ser de  $26,6^\circ$ .

Los ensayos experimentales demuestran que este campo de tensión sólo se llega a formar bajo ciertas condiciones. En los capítulos 3 y 4 se expone que la transmisión de fuerzas en el hormigón puede ser problemática cuando una biela de compresión sin armar se extiende

sobre una distancia larga en las proximidades de una armadura sometida a tracción, como es el caso de las bielas de compresión con pequeñas inclinaciones.

Por lo cual, se buscan soluciones alternativas mediante bielas de compresión con mayor inclinación. En la fig. 2.15 se da la solución al problema mediante combinación de dos sistemas de transmisión de carga.

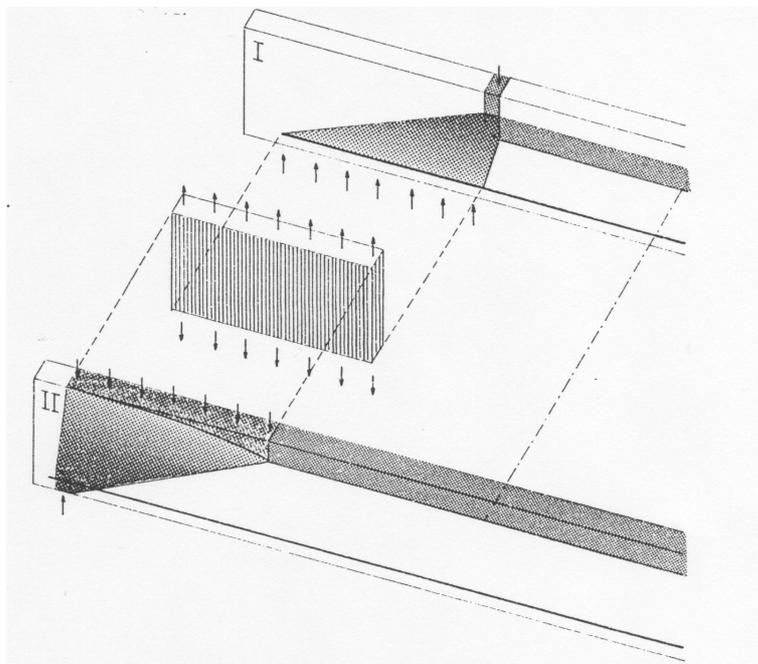


Figura 2.15: Combinación de los dos sistemas portantes

La fuerza de apoyo del sistema I se transmite al sistema II a través de una armadura vertical constituida por estribos que deben estar bien anclados arriba y abajo. El campo de tensión del sistema II puede ser retomado del apartado 2.2.3 (igual carga e iguales medidas).

En el desarrollo del sistema de transmisión I ha de tenerse presente que la fuerza en el apoyo actúa como distribuida. De ahí que resulte un abanico cuya componente vertical en el borde inferior es recogida por los estribos. La componente horizontal se transmite a la armadura longitudinal a través de tensiones de adherencia. Partiendo de la hipótesis de una distribución constante de la fuerza en los estribos y como consecuencia de la dirección variable de las tensiones principales en los abanicos, resulta una distribución no lineal de la fuerza en la armadura longitudinal. Hay que destacar que para el sistema I no se dispone de la altura total de la viga, ya que la zona superior queda reservada para el sistema II. La altura de las bielas de compresión horizontales (cordón comprimido), así como el esfuerzo total en los estribos, comunes a ambos sistemas en el centro del vano, aparecen recogidos en la fig. 2.16, en la que también se representa el conjunto del campo de tensión con todas las medidas y fuerzas.

La fig. 2.17.a presenta una posible solución de armadura para esta viga. Tres barras garantizan el cambio de dirección de la reacción del apoyo y quedan anclados por detrás de él. Las cuatro barras restantes están solicitadas en toda su longitud por las tensiones de adherencia. La fig. 2.17.b ofrece una comparación entre la fuerza existente en la armadura longitudinal y la fuerza que ésta es capaz de soportar. El diagrama de esta última puede ser fácilmente deducido suponiendo que su gradiente se corresponde con el de la capacidad resistente a la adherencia

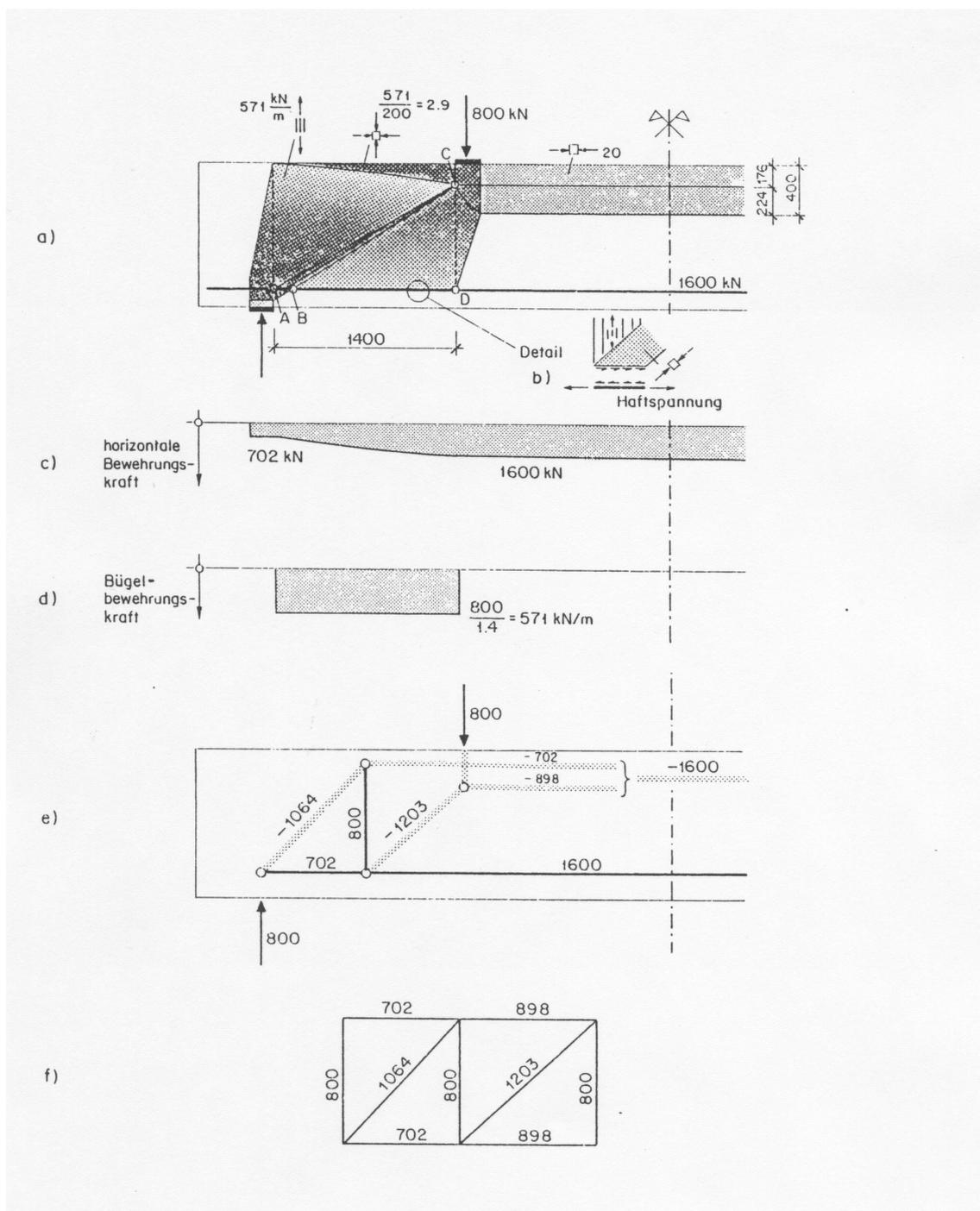


Figura 2.16: Campo de tensiones (apoyo indirecto; fuerzas en la armadura, resultantes del campo de tensiones; diagrama de Cremona)

de la armadura. Se deduce también de esa gráfica que las cuatro armaduras longitudinales no tienen que quedar necesariamente ancladas por detrás del apoyo.

La fig. 2.16.a muestra que los dos abanicos se superponen con la zona ABC, lo que conduce a una ligera violación de la condición de plasticidad ( $|\sigma| > f_{ce}$ ). Aunque esta solución es

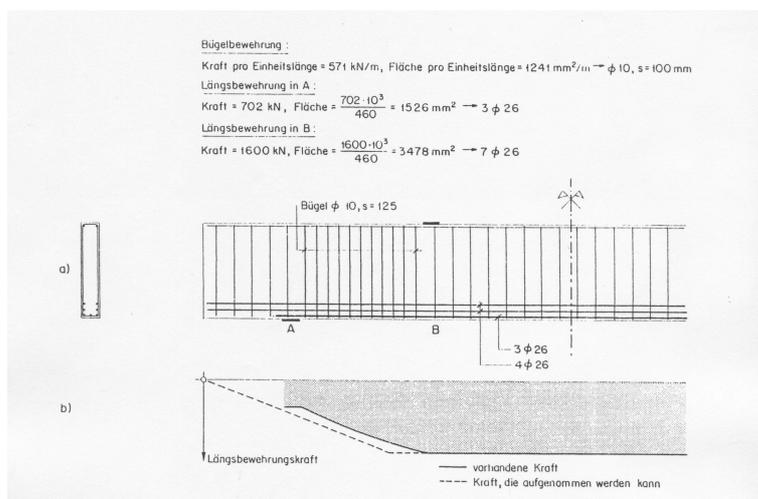


Figura 2.17: Croquis de armado y fuerzas en la armadura horizontal

aceptable en la práctica, se puede proponer fácilmente un campo de tensión alternativo sin zona de superposición ABC. La armadura de estribos se reparte sobre el nuevo tramo BD produciéndose un ligero desplazamiento de su resultante, con lo cual el punto C cambia de posición y en consecuencia también el punto B, lo que implica una solución iterativa del problema. El campo de tensión definitivo queda representado en la fig. 2.18.

La superposición de los abanicos también habría podido ser evitada, tal como se representa en la fig. 2.8.b, transmitiendo las componentes horizontales de los abanicos en el apoyo de la armadura a través de tensiones de adherencia.

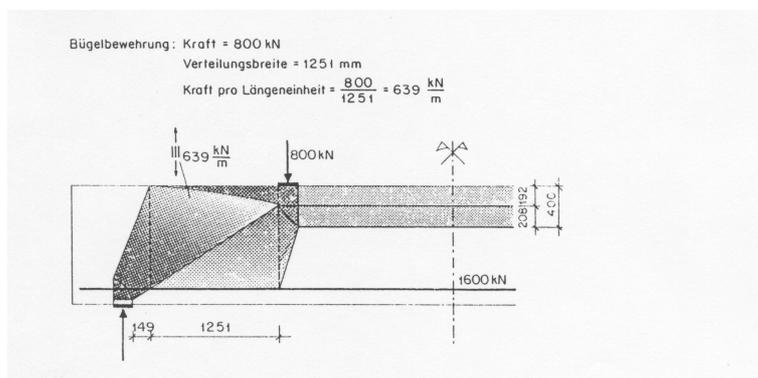


Figura 2.18: Campo de tensiones

### 2.2.5. Gran esbeltez, cargas concentradas

Mantenemos una vez más constantes las cargas, las características del material y las medidas, a excepción de la luz que ahora se duplica. Si prescindimos de la variación del brazo interno, que es pequeña en general, se puede considerar que la fuerza en el cordón de compresión aumenta proporcionalmente con la luz.

En consecuencia, y dado que en el ejemplo anterior habíamos llegado a utilizar el 40% de la

altura útil de la viga como área de compresión, la sección debe ser ensanchada en esta zona. Paralelamente a la fuerza de compresión, la fuerza de la armadura longitudinal se incrementa también, por lo que, para que el aumento de la sección de la armadura no conlleve un problema constructivo, la sección debe ser incrementada también en la zona de tracción (fig. 2.19.a).

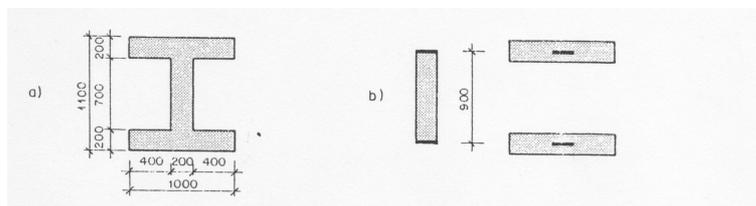


Figura 2.19: Sección transversal acotada y separación en alma y alas de compresión y tracción

Se supone que las resultantes horizontales de compresión y tracción actúan en el centro de gravedad de ambas placas, que se asimilan a los cordones de compresión y tracción, con lo que la viga queda constituida por tres elementos diferenciados (fig. 2.19.b). El estudio de fuerzas en los cordones se lleva a cabo más adelante.

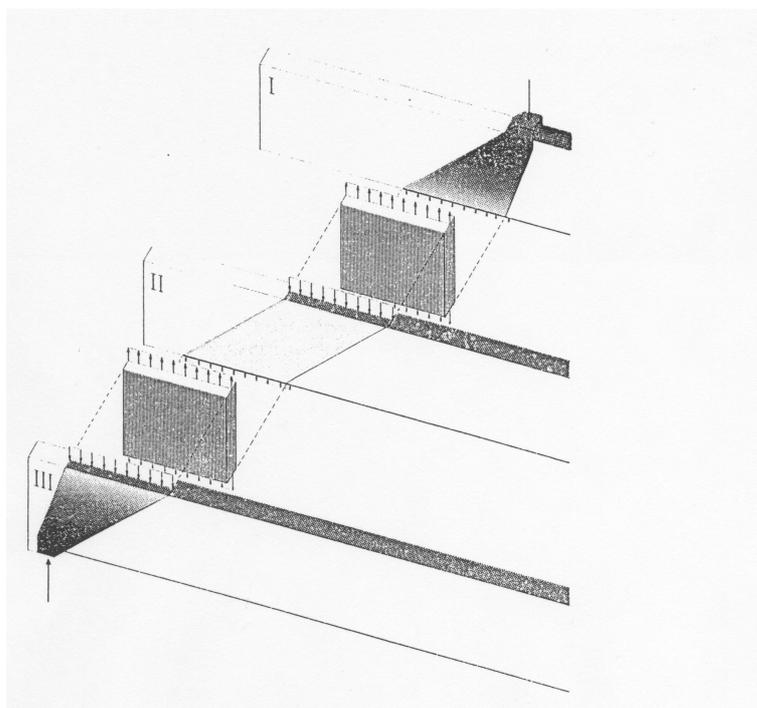


Figura 2.20: Combinación de los tres sistemas portantes

La sollicitación del alma puede quedar definida mediante un campo de tensión análogo al de la fig. 2.15. El aumento de la luz queda considerado al combinar tres, en lugar de dos, sistemas de transmisión, de los que resulta una inclinación del campo de tensión en el alma no excesivamente pequeña (fig. 2.20).

Se destaca el hecho de que la altura útil de los tres sistemas de transmisión permanece constante. La fuerza horizontal de compresión se expande dentro del ala, que actúa como cordón comprimido.

La fig. 2.21 representa el campo de tensión resultante de la superposición de los tres sistemas de transmisión. El campo de tensión en el hormigón se compone de dos abanicos y de una biela de compresión situada entre ellos. La tensión en esta biela de compresión se determina dividiendo la resultante entre el producto de la anchura por el espesor. Análogamente a lo que ocurría en la fig. 2.16, se observa una superposición de campos en el dimensionamiento práctico. El problema se podría solucionar igual que en la fig. 2.18.

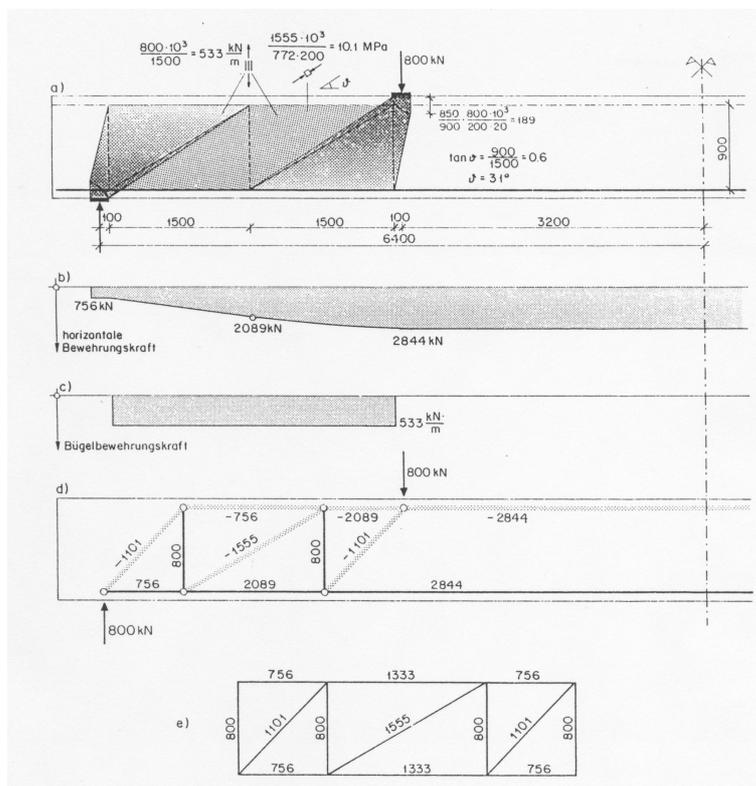


Figura 2.21: Campo de tensiones, fuerzas en la armadura; resultantes del campo de tensiones y diagrama de Cremona

La disposición de la armadura se determina una vez conocidos los campos de tensión en ambos cordones o placas.

Como solución alternativa, se puede mantener un campo de tensión con suspensión triple (combinación de cuatro sistemas de transmisión), lo que representa, para igual luz, una variación del ángulo de la diagonal de compresión. Este campo de tensión aparece representado en la fig. 2.22.

Las resultantes del campo de tensión se pueden obtener sistemáticamente a partir de las soluciones de los ejemplos para esbeltez pequeña, según queda reflejado en la fig. 2.23.

Es interesante notar que el equilibrio vertical en la zona central (fig. 2.22.a) se alcanza mediante la superposición de dos campos: el de compresión en el hormigón y el de tracción en los estribos (fig. 2.24.a). La componente vertical del campo de compresión inclinado se equilibra con la fuerza de la armadura de los estribos. En el borde superior e inferior estas componentes se transmiten a las placas que actúan como cordones.

El elemento representado en la fig. 2.24.b puede desarrollarse con independencia del ángulo  $\vartheta$  y de la longitud AB. En la fig. 2.25 se muestra un campo de tensión con  $\tan \vartheta = 0,75$ .

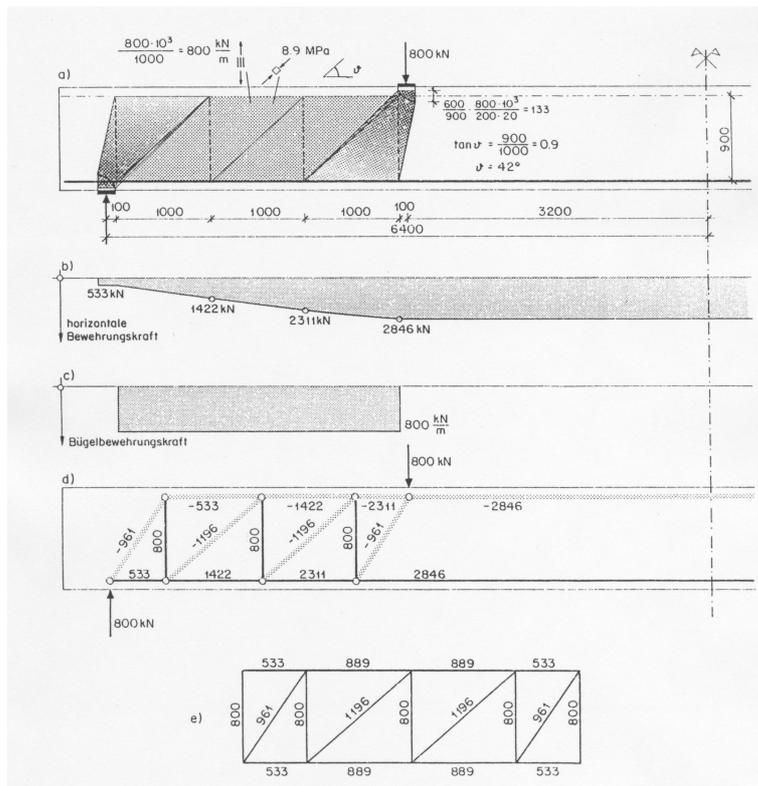


Figura 2.22: Campo de tensiones, fuerzas en la armadura; resultantes del campo de tensiones

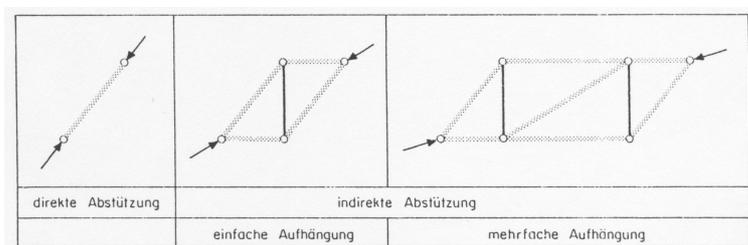


Figura 2.23: Esquemas del comportamiento resistente del ejemplo en estudio

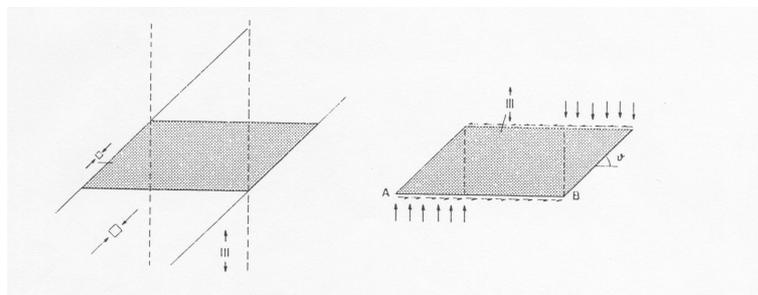


Figura 2.24: Activación de los cercos debido al apoyo indirecto

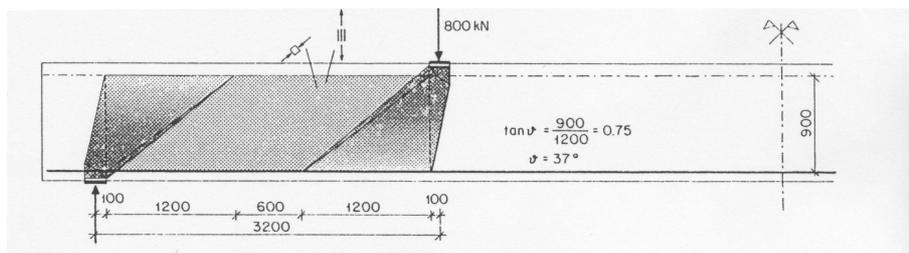


Figura 2.25: Campo de tensiones

Las resultantes correspondientes a este campo de tensión no pueden representarse ya de una forma sencilla. Sin embargo, esto no es condición necesaria para un dimensionamiento práctico, puesto que las fuerzas internas pueden ser calculadas en las líneas de discontinuidad mediante consideraciones de equilibrio (fig. 2.26).

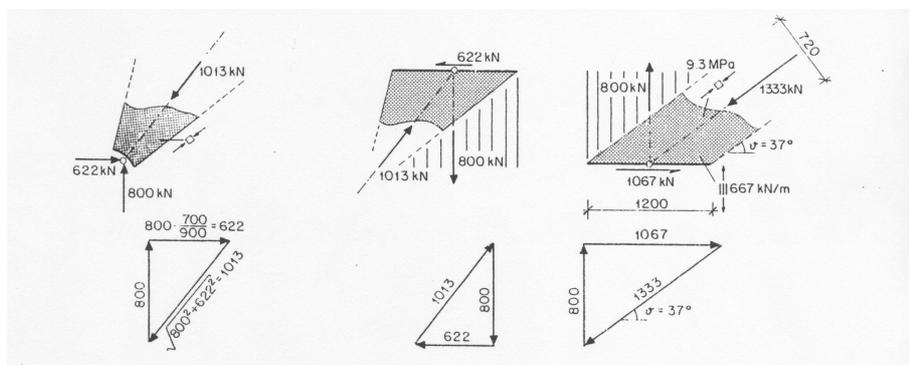


Figura 2.26: Análisis del equilibrio en las líneas de discontinuidad

La elección de la inclinación del campo de compresión tiene una apreciable influencia sobre las fuerzas internas, tal como lo demuestran los tres casos tratados. Las magnitudes más importantes quedan resumidas en la fig. 2.27.

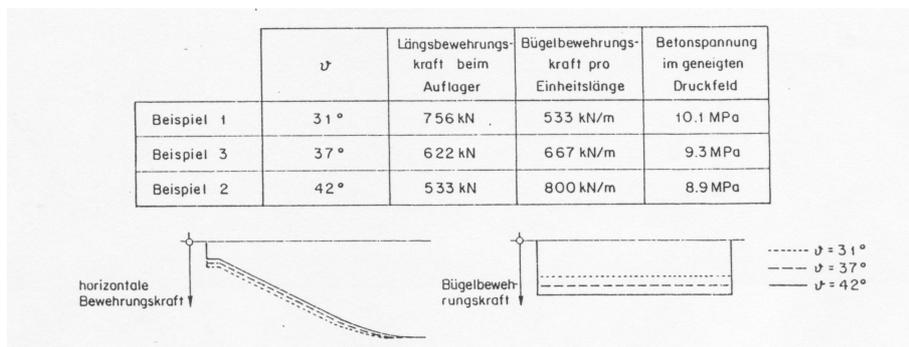


Figura 2.27: Comparación de las fuerzas internas para diferentes ángulos del campo de compresiones

A medida que aumenta la inclinación del campo de compresión, se va reduciendo la fuerza en la armadura horizontal, mientras aumenta la fuerza en los cercos. En el capítulo 1 se demostró

que la elección del reparto de las fuerzas internas en un sistema estáticamente indeterminado tiene influencia sobre el comportamiento en estado de servicio. Análogamente, la elección de la inclinación del campo de compresión también influye sobre el comportamiento. La fig. 2.28 muestra cualitativamente la función carga-deformación para dos inclinaciones del campo de compresión.

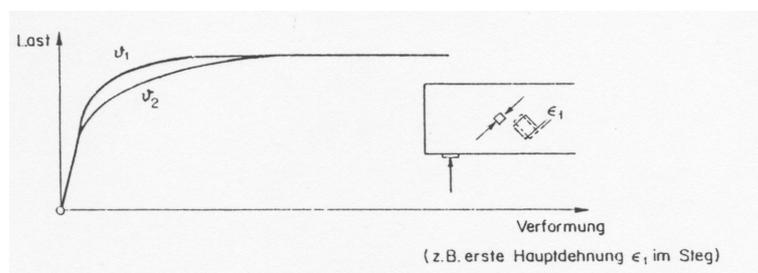


Figura 2.28: Diagrama carga-deformación

La inclinación del campo de compresión para un comportamiento óptimo en servicio depende de muchos parámetros (tensiones residuales, presencia de pretensado o esfuerzo normal, cuantías, rigidez del cordón de compresión, etc.) y es difícil de deducir. Tal como se mostró en el capítulo 1, las discrepancias no demasiado grandes de estas soluciones no influyen sobre la funcionalidad en servicio. Sin embargo, deben evitarse soluciones con inclinaciones del campo de compresión muy pequeñas o muy grandes. En las normas se suele dar un rango posible de variación dentro del cual aquélla puede ser elegida libremente (por ejemplo entre 30 y 60°). En la fig. 2.27 se observa que el ángulo del campo de compresión también influye en la intensidad de la sollicitación del hormigón. En almas con sollicitación muy alta se debe elegir  $\vartheta$  de manera que la resistencia efectiva del hormigón no sea superada. Debe tenerse presente que la resistencia  $f_{ce}$  en este caso es considerablemente más baja que la resistencia en probeta cilíndrica. El estado de deformación en el alma (deformación transversal resultante de la deformación de las armaduras) y otras interacciones con la armadura son los responsables de esta reducción. Estos factores se describirán con más detalle en el capítulo 3.

### 2.2.6. Gran esbeltez, carga uniforme

Consideremos una viga con iguales medidas que la tratada en el apartado 2.2.2. Las dos cargas concentradas de 800 kN se reparten sobre la longitud total de la viga, resultando así una carga uniformemente repartida de 125 kN/m.

El campo de tensión empleado para describir las sollicitaciones internas puede ser tomado de la fig. 2.23.a. En este caso, tal como se muestra en la fig. 2.29, resulta una variación escalonada de la intensidad del campo de compresión inclinado en el hormigón y, correspondientemente, de las fuerzas en los estribos a lo largo de la viga.

En la fig. 2.30 se representan el campo de tensión completo, las fuerzas en los estribos y la resultante del campo de tensión junto con el diagrama de Cremona.

La parte de la carga (120 kN) que corresponde a los 10 cm de la placa de apoyo (fig. 2.30.a y d) se transmite directamente, con lo cual aparece en esta zona un pequeño abanico adicional sin significación para el dimensionamiento. El ángulo del campo de compresión puede ser variado en cada caso a lo largo de la viga. La fig. 2.31 muestra cualitativamente una solución general.

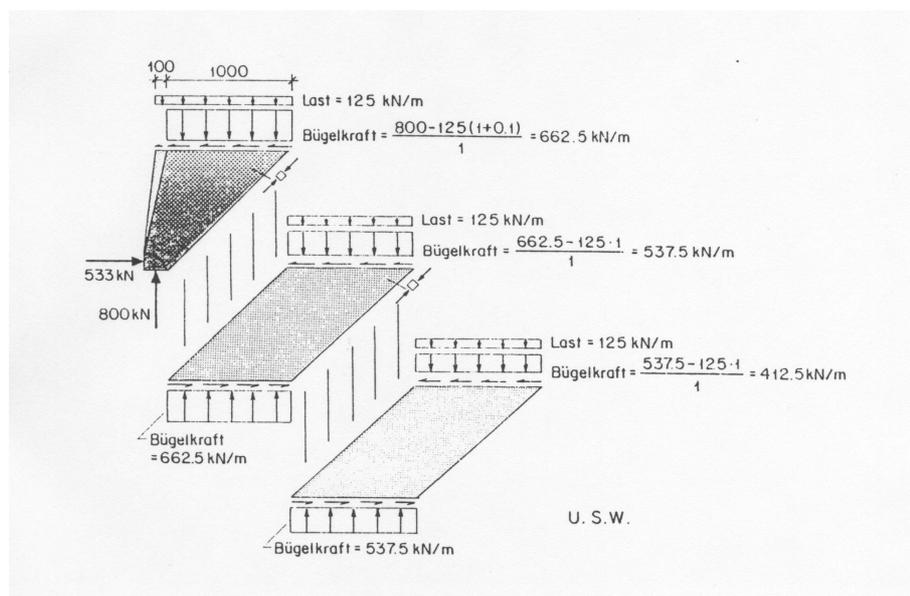


Figura 2.29: Desarrollo del campo de tensiones

En la solución representada en la fig. 2.30.a se ha tomado  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_{n-1}$  mientras que  $\vartheta_n$  es algo mayor.

La sollicitación de las placas que constituyen los cordones, así como un esquema de la armadura de la viga en conjunto, se representan más adelante.

### 2.2.7. Caso general, dimensionamiento

Se supone la viga representada en la fig. 2.32 sometida a carga general. Todas las cargas han sido multiplicadas por el factor de seguridad. El brazo interno resulta de la hipótesis de que las resultantes de las fuerzas en el cordón de compresión y en el cordón de tracción actúan en el centro de gravedad de las placas que actúan como cordones. El campo de tensión puede ser desarrollado de forma cualitativa utilizando consecuentemente elementos de las soluciones ya conocidas (fig. 2.33).

El campo de tensión se desarrolla bajo las siguientes consideraciones:

- Todas las vigas tratadas en los apartados anteriores muestran, tanto en la geometría como en la carga, una simetría respecto al centro del vano. Los campos de tensión son en consecuencia simétricos, por lo que en el centro del vano las bielas diagonales de compresión en el alma experimentan un cambio en su dirección. En el caso más general, esto sucede en el punto de esfuerzo cortante nulo.
- Se considera de forma aproximada que la mitad del peso propio actúa en el borde superior de la viga y la otra mitad en el borde inferior.
- La distancia hasta el apoyo de la carga concentrada de 200 kN que actúa sobre la zona de voladizo es suficientemente pequeña para que ésta pueda “apoyarse” directamente hacia aquél. Por el contrario, la carga de 280 kN que actúa en el vano tiene que “transmitirse” indirectamente. El campo de tensión por debajo de esta carga se va ensanchando de

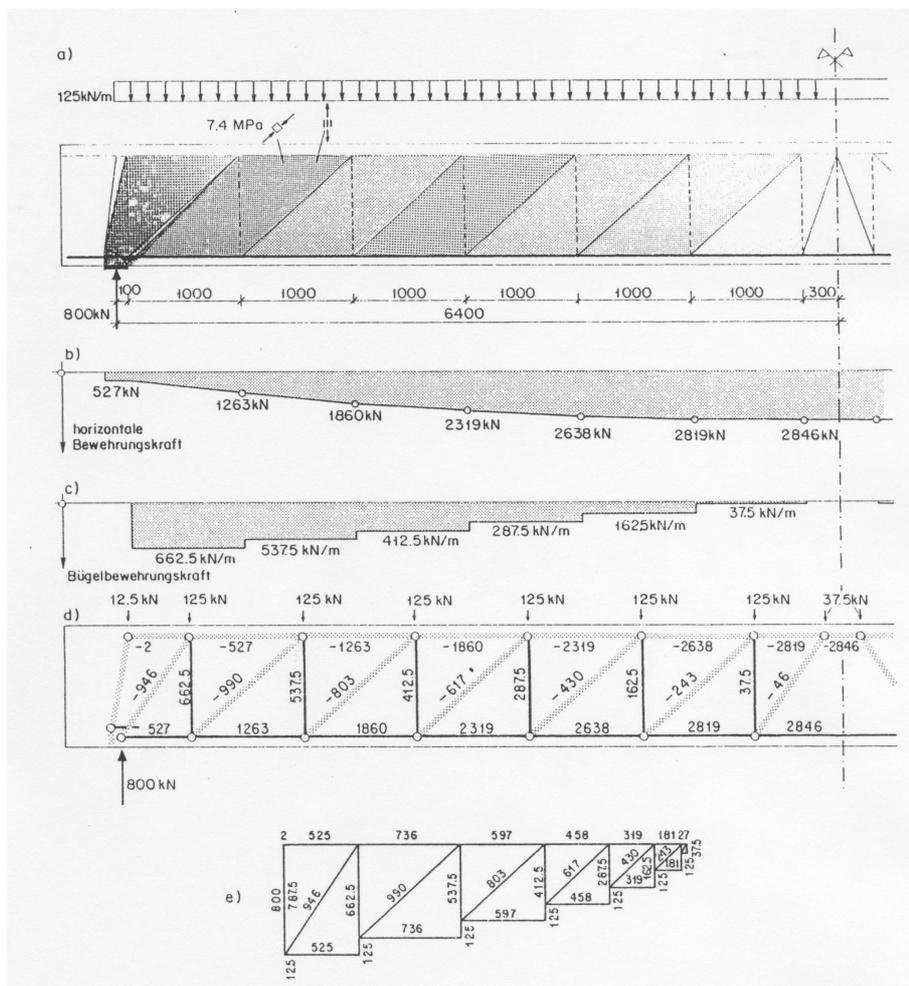


Figura 2.30: Campo de tensiones, fuerzas en las armaduras, resultantes del campo de tensiones y diagrama de Cremona

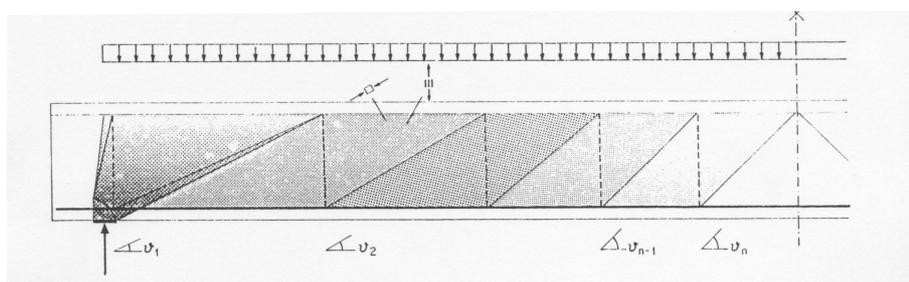


Figura 2.31: Campo de tensiones con ángulo variable

modo que la armadura de los estribos se mantiene constante, tal como se observa en la fig. 2.34.

- Una solución similar es igualmente aplicable a la zona del vano cercana al apoyo, con lo que para carga variable resulta también una armadura de cercos constante por zonas.

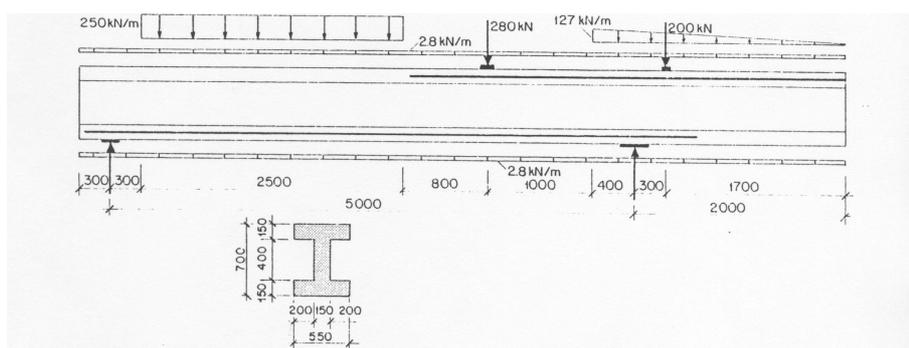


Figura 2.32: Viga y cargas

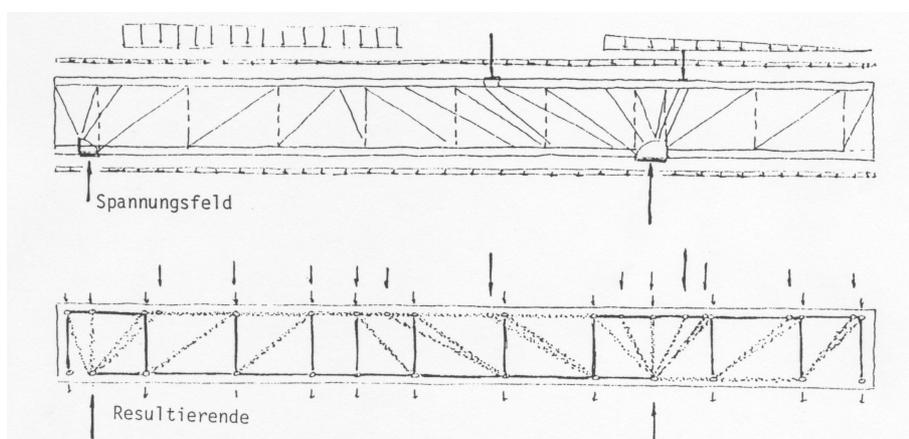


Figura 2.33: Croquis del campo de tensiones y sus resultantes

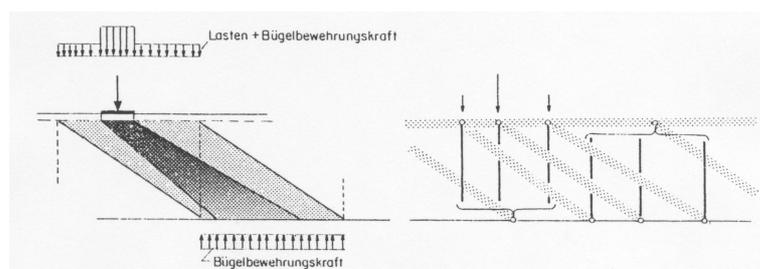


Figura 2.34: Introducción de una carga concentrada

El dimensionamiento definitivo de una viga puede llevarse a cabo según dos métodos diferentes. El primer método consiste en desarrollar el campo de tensión en conjunto, incluyendo un análisis cuantitativo (modelización integral, fig. 2.35).

Tal como muestran los ejemplos tratados, las resultantes del campo de tensión forman un sistema en abanico. Las solicitaciones de los elementos del campo de tensión resultan de calcular las fuerzas en las bielas del abanico, que se determinan sucesivamente a partir de las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos.

En el dimensionamiento de sistemas estructurales sencillos no es necesario determinar todas



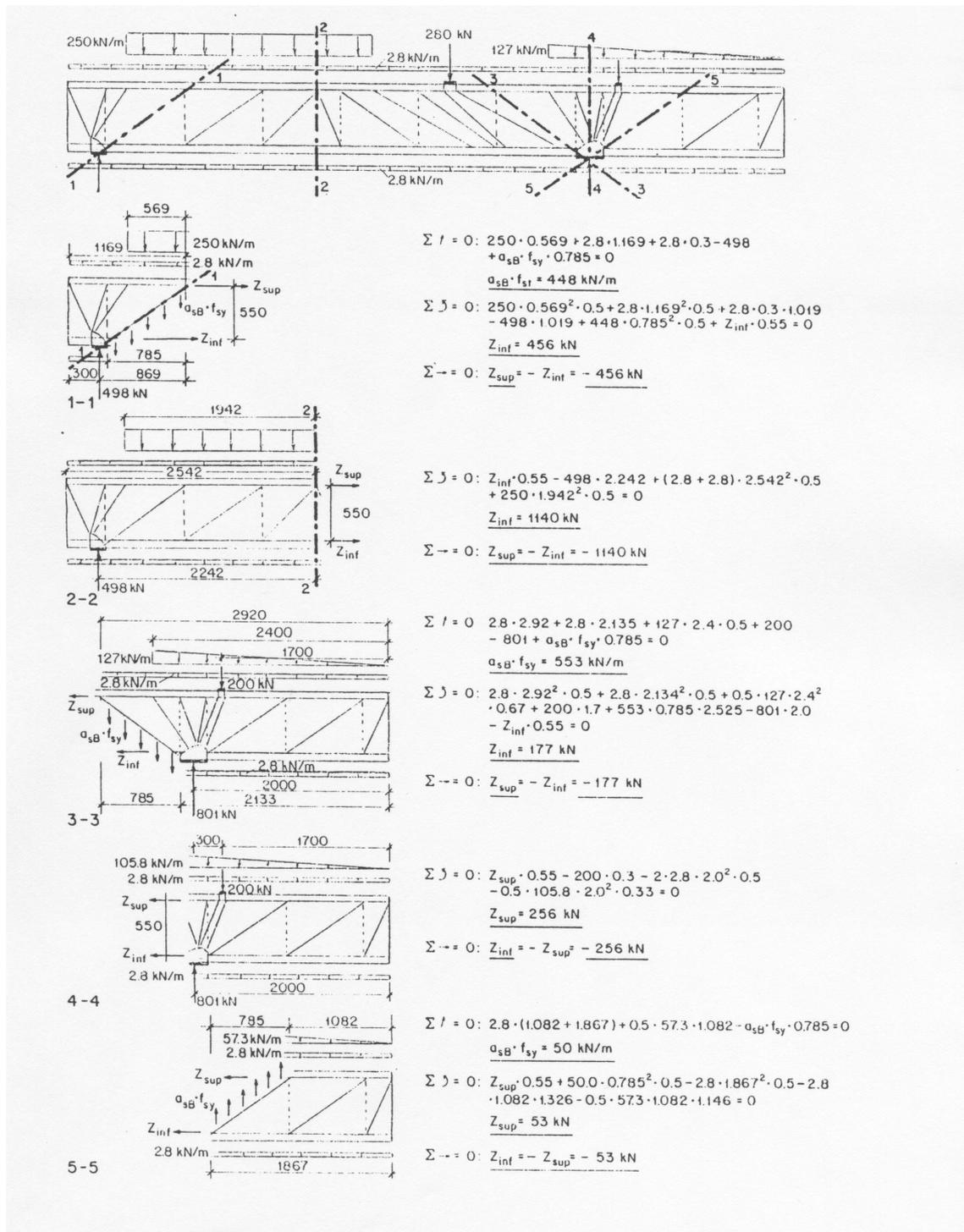


Figura 2.36: Análisis mediante secciones

del alma (fig. 2.29). La abertura de esta fuerza en el ala de compresión puede describirse mediante campos de tensión sencillos (fig. 2.38). Para la elección del ángulo de expansión son aplicables los mismos criterios que en la elección de la inclinación del campo de compresión en el alma.

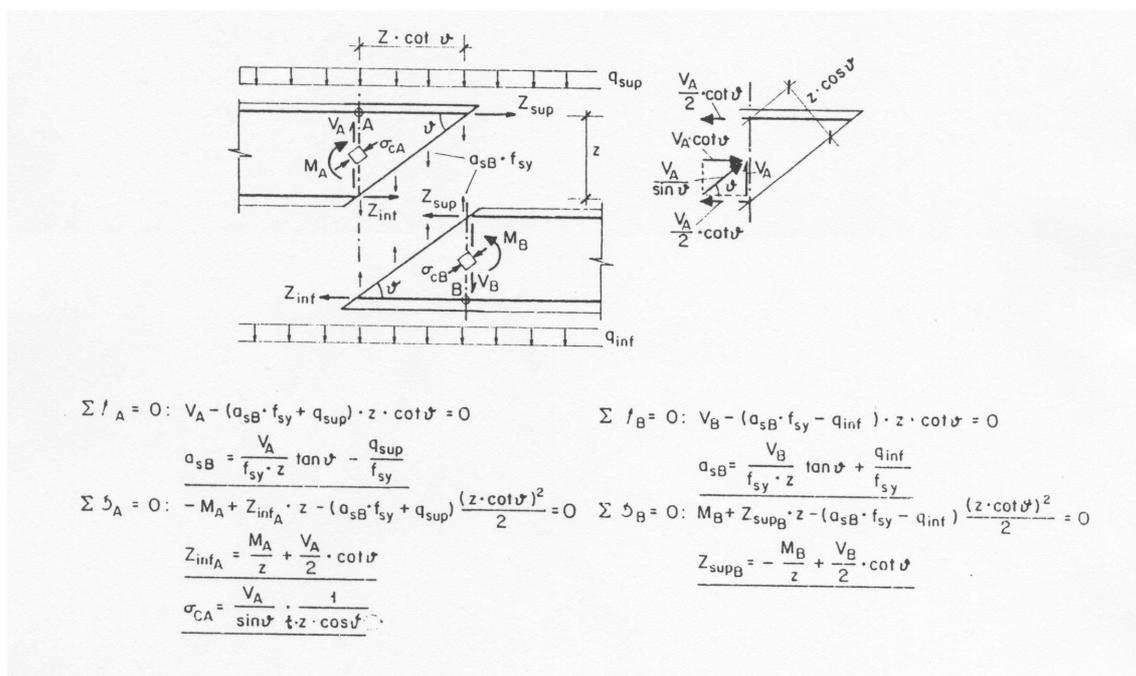


Figura 2.37: Determinación de las fuerzas internas mediante secciones

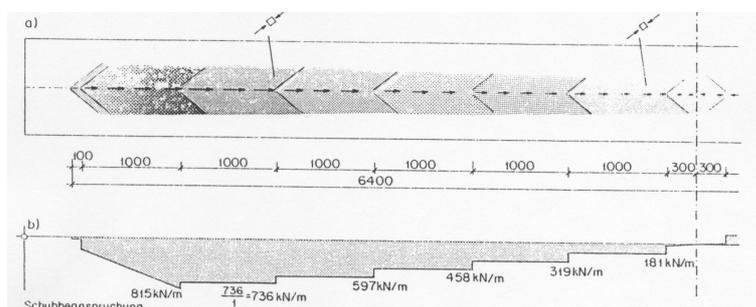


Figura 2.38: Abertura de fuerzas en la cabeza de compresión

Los campos de tensión inclinados pueden experimentar una reorientación (cambio a dirección longitudinal) mediante una armadura transversal.

En esta solución, la fuerza de desvío correspondiente a la armadura transversal actúa sobre la línea de discontinuidad entre ambas bielas de compresión. La fuerza en la armadura tiene que anclarse a partir de esa línea de discontinuidad (fig. 2.39).

Se debe destacar el hecho de que esta solución representa el caso general de reorientación de una biela de compresión mediante una armadura, en el que los tres elementos del campo de tensión presentan unas medidas discretas.

En el apartado 2.2.1 (fig. 2.8.a) y en el apartado 2.2.4 (fig. 2.16.b) se tratan algunos casos especiales de este tipo de solución en los que la armadura o una biela de compresión actúan concentradamente.

La anchura de las bielas de compresión horizontales oblicuas resulta de las medidas de las bielas de compresión en el alma (es decir, del espesor del alma) y del ángulo de apertura.

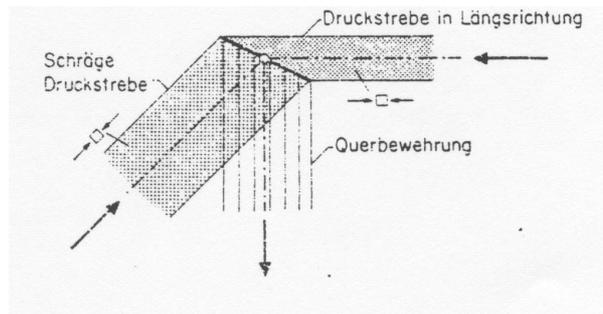


Figura 2.39: Detalle del desvío del campo de compresiones

A su vez, la anchura de las bielas de compresión longitudinales en el alma depende de la distribución supuesta para la compresión en el centro del vano.

Si se admite que esa distribución es constante, las anchuras son entonces proporcionales a la fuerza longitudinal y, por tanto, a la sollicitación de cortante entre alma y ala de compresión. En la fig. 2.40 se representa el campo de tensión completo incluyendo el esfuerzo de la armadura transversal y las resultantes.

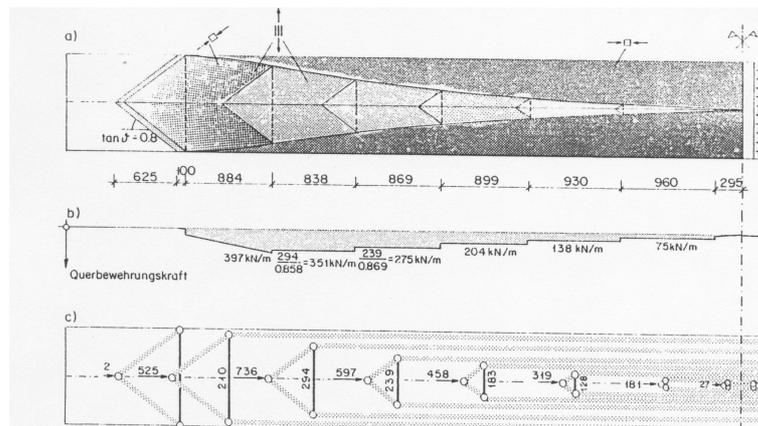


Figura 2.40: Campo de tensiones, armadura transversal y resultantes

En sentido estricto, esta solución es sólo válida para almas infinitamente estrechas. La consideración de la anchura del alma conduce a campos de tensión con esfuerzos menores en la armadura transversal.

### 2.3.2. Ala traccionada

Para el ala traccionada son de aplicación las mismas reglas que para la placa comprimida. La fig. 2.41 muestra el tipo de sollicitación y su consiguiente expansión en el ala.

Al igual que en el caso del ala comprimida, la componente de las bielas de compresión en la dirección transversal puede ser recogida mediante una armadura transversal. Mientras que la componente longitudinal se recoge por medio de una armadura longitudinal, tal como aparece en la fig. 2.42.

Se hace notar que tanto la armadura transversal como la longitudinal han de quedar ancladas

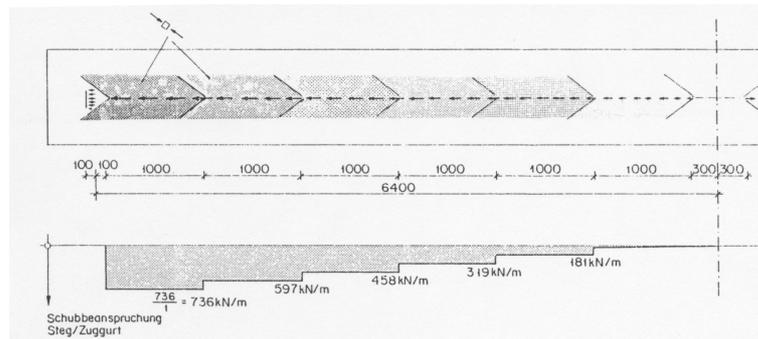


Figura 2.41: Abertura de fuerzas en la cabeza de tracción

por detrás de la línea de discontinuidad AB.

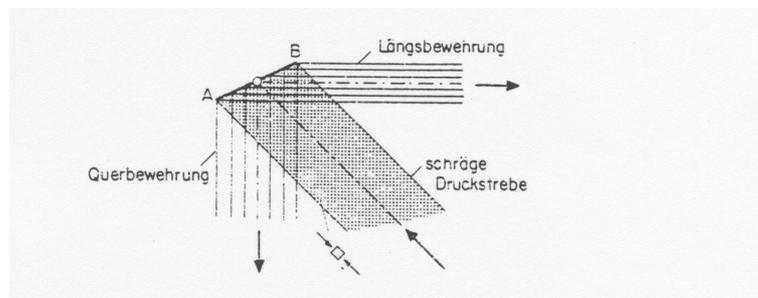


Figura 2.42: Equilibrio en el ala traccionada

Como en el caso del ala comprimida, la anchura de las bielas oblicuas de compresión queda determinada a partir de las dimensiones de las bielas de compresión en el alma y del ángulo de apertura supuesto, mientras que la anchura de los diferentes campos de tracción resulta de la distribución de la sollicitación de tracción considerada en el vano.

Además de las fuerzas de apertura, que aparecen representadas en la fig. 2.41, se observa una componente horizontal correspondiente a la fuerza de la biela de compresión que actúa concentrada en el apoyo (ver fig. 2.29). En este caso, esta fuerza se recoge mediante una armadura longitudinal localizada en la zona del alma sin que se produzca una introducción en el ala traccionada (ver fig. 2.44). Para las otras fuerzas longitudinales se eligió una distribución constante en el sentido transversal. La fig. 2.43 muestra el campo de tensión completo del ala traccionada, así como la fuerza en la armadura transversal y todas las resultantes.

En la fig. 2.44 se representa un esquema de una posible disposición de la armadura para las tres placas (alma, ala comprimida y ala traccionada).

## 2.4. Viga en torsión

### 2.4.1. Introducción

Los ejemplos abordados en el apartado 2.2 presentan la particularidad de que las cargas actúan en el plano de la viga. En general, se puede soportar una carga siempre que existan como mínimo tres placas en la dirección longitudinal de la viga que no se corten en una línea

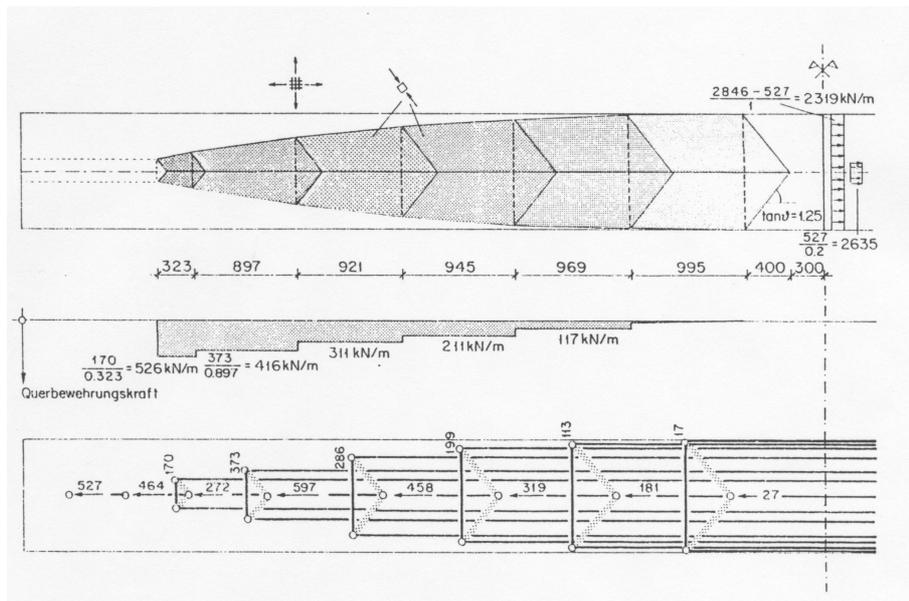


Figura 2.43: Campo de tensiones, armadura transversal y resultantes

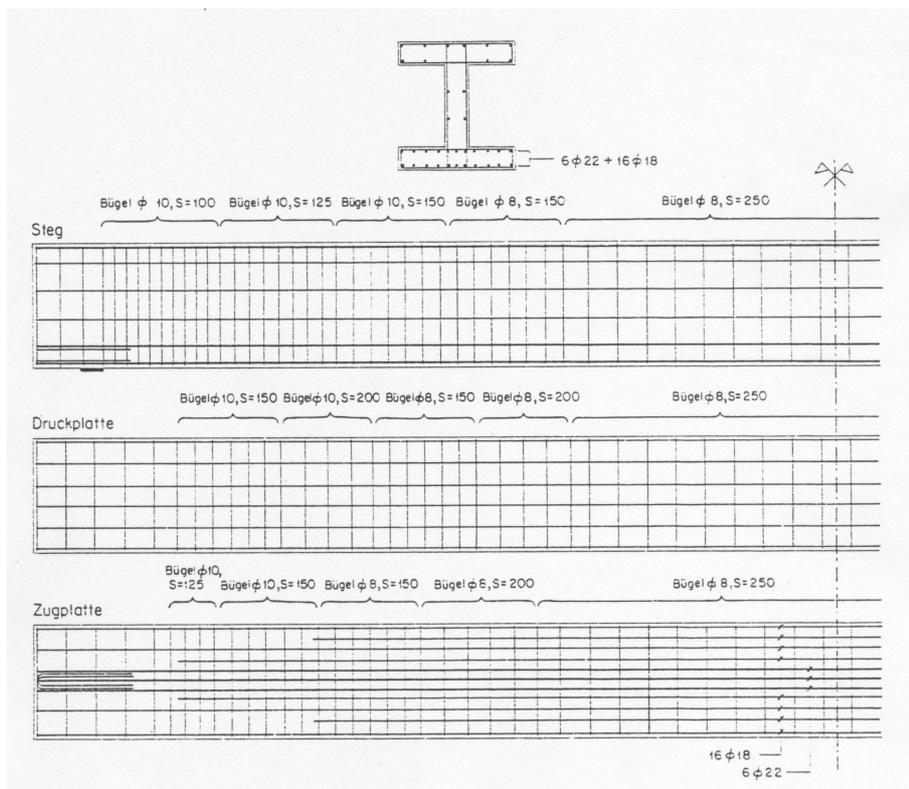


Figura 2.44: Croquis de armado

común. La carga puede ser sustituida al menos por tres cargas estáticamente equivalentes, cada una de las cuales actúa en el plano de la respectiva laja resistente. A continuación, los campos de tensión desarrollados se aplican a cada una de las placas por separado.

Las vigas de sección maciza pueden tratarse de manera análoga. Las cargas se descomponen adecuadamente en diferentes placas y se considera que el material de relleno no colabora y está libre de tensiones.

### 2.4.2. Torsión de alabeo (sección abierta)

Como aplicación del procedimiento descrito en el apartado anterior, se considera la viga representada en la fig. 2.45.

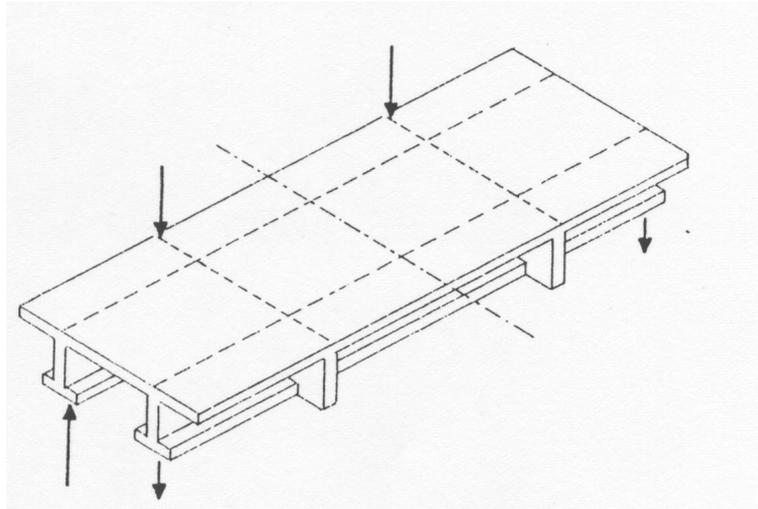


Figura 2.45: Viga sometida a torsión con sección abierta

En este caso, sólo es preciso considerar dos láminas, puesto que las líneas de actuación de las cargas son paralelas a los planos de las almas. La transmisión de la carga en las dos almas tiene lugar mediante flexión transversal de la placa superior, o bien, por medio de un diafragma transversal, tal como aparece representado en la fig. 2.46.

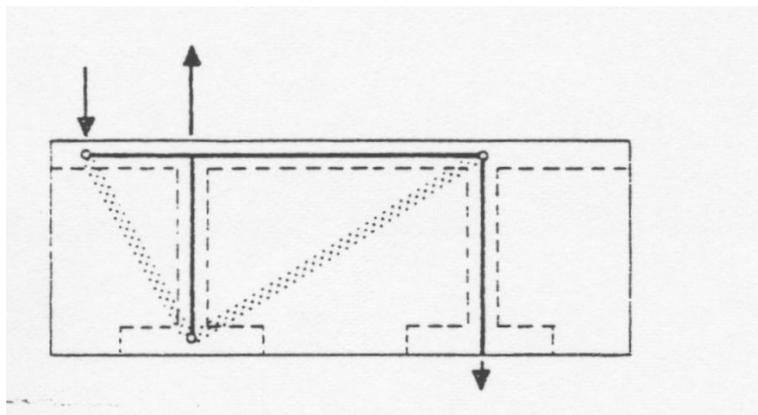


Figura 2.46: Cargas y respuesta del diafragma

Los campos de tensión para las dos almas (fig. 2.47) y para las alas superior e inferior pueden tomarse de los apartados 2.2 y 2.3.

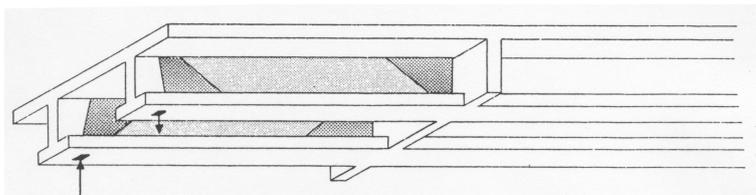


Figura 2.47: Campo de tensiones

### 2.4.3. Torsión uniforme (sección cerrada)

En el apartado anterior se ha considerado que la sollicitación de torsión se sustenta a través de las almas, mientras que las placas horizontales sólo están sollicitadas por las fuerzas de expansión que se producen en los cordones.

En el caso de una viga de sección cerrada sometida a torsión pura, todas las placas están sollicitadas transversalmente de manera que los gradientes de las fuerzas en los cordones de dos placas contiguas se compensen exactamente.

Esto es lo que ocurre cuando la sollicitación de cortante (flujo de cortante) es igual en todas las placas. Esta forma de transmisión se denomina torsión uniforme y aparece representada en el ejemplo de la fig. 2.48.

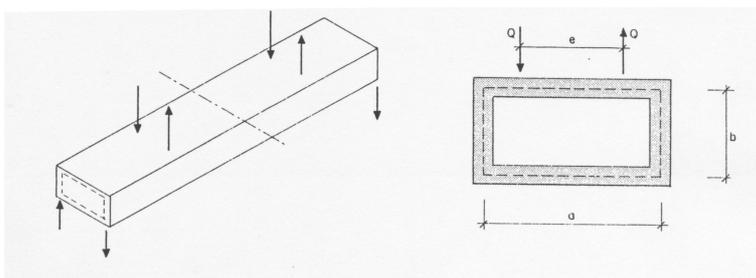


Figura 2.48: Sección cerrada; sistema y cargas

Los esfuerzos cortantes en las placas son proporcionales a la altura de las mismas. La transmisión de las cargas en cada una de las placas puede tener lugar, tal como se ha mencionado, mediante flexión transversal (funcionamiento como tal placa) o a través de un diafragma transversal (fig. 2.49).

La distribución de las fuerzas internas en el diafragma transversal se calcula mediante los campos de tensión que se estudian en el apartado 2.5.

Las fuerzas que actúan sobre cada una de las placas y los correspondientes campos de tensión aparecen representados en la fig. 2.50.

Las sollicitaciones de cortante de dos lajas colindantes no quedan compensadas en las zonas de borde y son necesarios unos “stringers” que están sollicitados sólo a tracción y que garantizan el equilibrio de la componente longitudinal del campo de compresión inclinado.

Las placas longitudinales pueden dimensionarse por separado. En consecuencia, las fórmulas deducidas en la fig. 2.37 son también de aplicación en este caso. En la fig. 2.51 se representan las expresiones mencionadas para el caso de una sección en general.

Consideramos el caso de una viga sollicitada por un momento torsor constante (fig. 2.52).

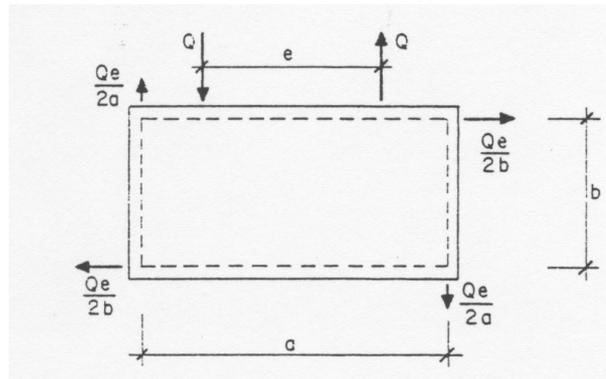


Figura 2.49: Cargas en el diafragma

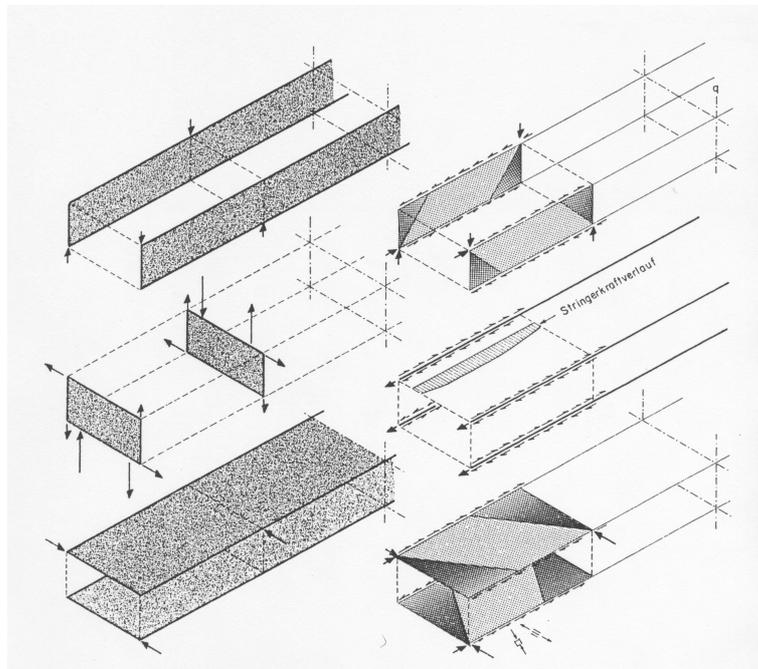


Figura 2.50: Cargas y campos de tensiones en las lajas

Dado que las cargas se descomponen en fuerzas que actúan en el plano de las placas y puesto que sólo hay un número determinado de diafragmas transversales, las placas longitudinales quedan sometidas a una flexión transversal suplementaria.

En la fig. 2.53 se representan las fuerzas que actúan sobre las diferentes placas así como los correspondientes campos de tensión.

De la fig. 2.53 se deduce que las placas están solicitadas adicionalmente a flexión. En el capítulo 5 se demostrará que la combinación de flexión transversal y cortante en las distintas placas no altera el campo de tensión propuesto aquí.

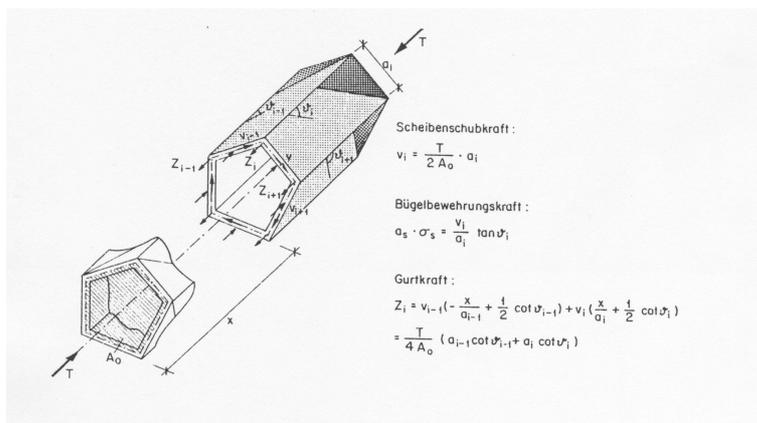


Figura 2.51: Ecuaciones de dimensionamiento

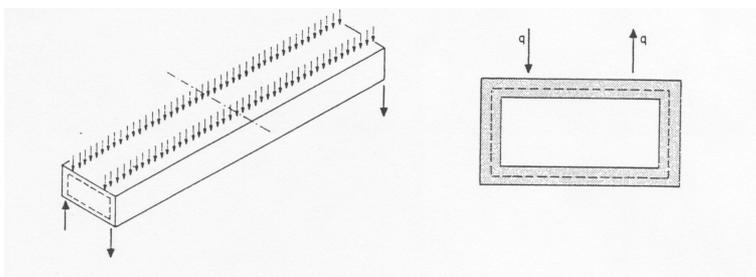


Figura 2.52: Sección cerrada; sistema y cargas

## 2.5. Ménsulas cortas

Las ménsulas cortas, en general, se caracterizan por una esbeltez (relación luz/canto) muy pequeña que permite la transmisión directa de la carga desde el punto de aplicación hasta el apoyo. En la fig. 2.54 se dan soluciones para ménsulas cortas, tanto para carga concentrada como para carga repartida.

El conocimiento de la distribución cualitativa de los campos de tensión es una vez más suficiente para un dimensionamiento práctico. Con las fórmulas de dimensionamiento deducidas pueden calcularse la sección y la disposición de la armadura estáticamente necesaria. Esta armadura tiene que anclarse por detrás del punto de aplicación de la carga en el caso de carga concentrada (fig. 2.54.a), o a lo largo de la zona de aplicación de la misma a través de tensiones de adherencia, en el caso de carga repartida (fig. 2.54.b).

## 2.6. Vigas de unión

Las vigas de unión son vigas solicitadas predominantemente en sus extremos (fig. 2.55).

El caso especial correspondiente a  $N = 0$  y  $M_1 = 0$  se corresponde con los ejemplos tratados en el apartado 2.2.

En el caso de pequeñas esbelteces, el esfuerzo cortante puede transmitirse directamente (fig. 2.56.b). El caso general puede ser fácilmente desarrollado introduciendo adicionalmente es-

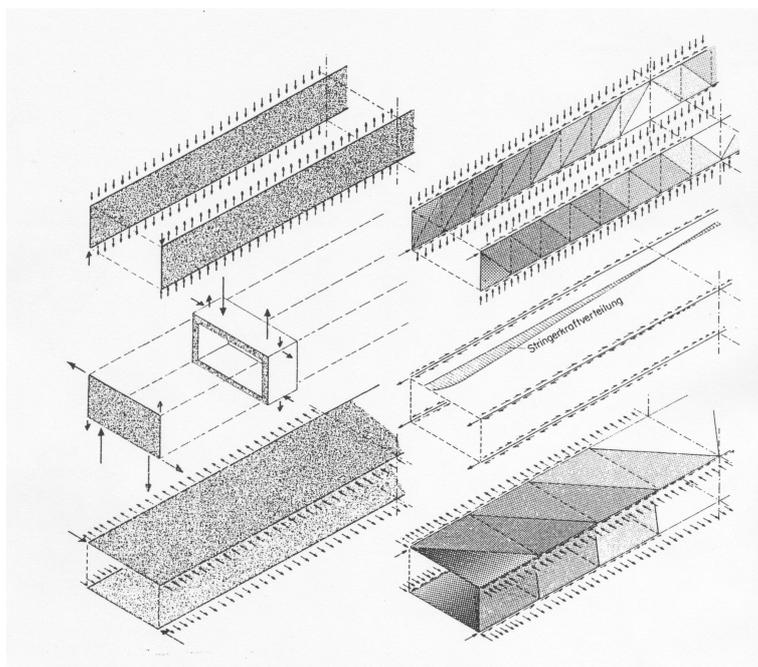


Figura 2.53: Cargas y campos de tensiones en las lajas

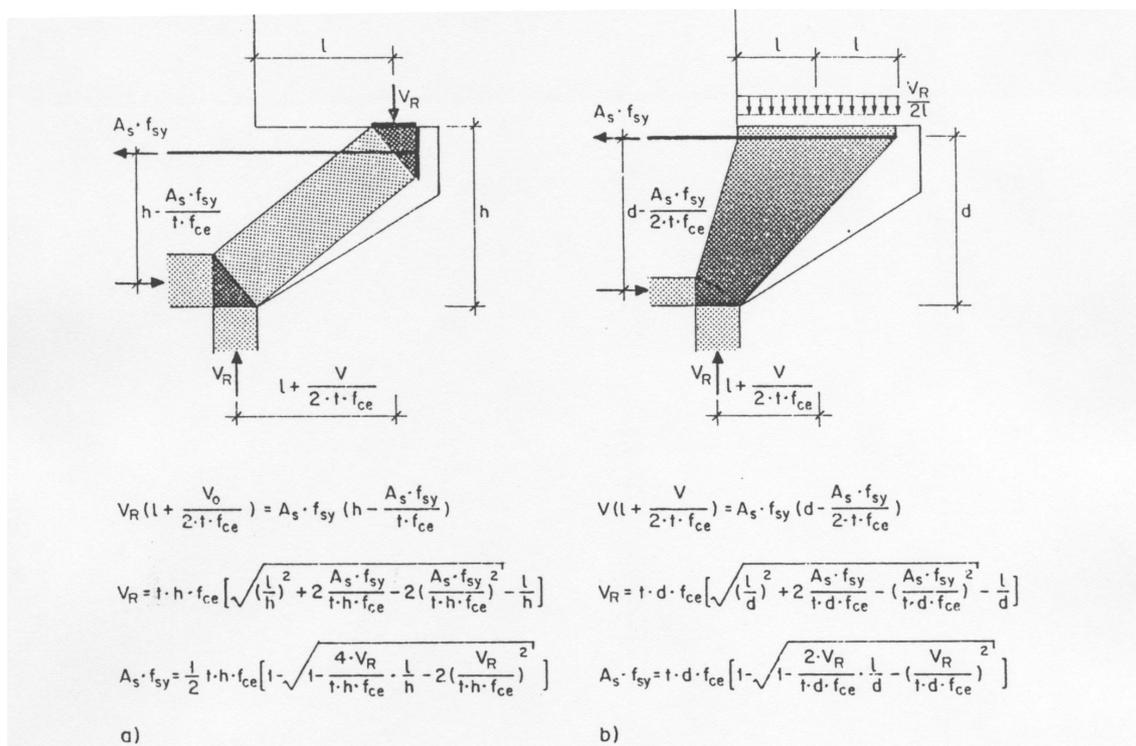


Figura 2.54: Campos de tensiones con ecuaciones para el dimensionamiento de las ménsulas

fuerzas horizontales de tracción y de compresión (fig. 2.56.c).

Tal como se muestra en la fig. 2.57.a, la geometría de estos campos puede construirse fácil-

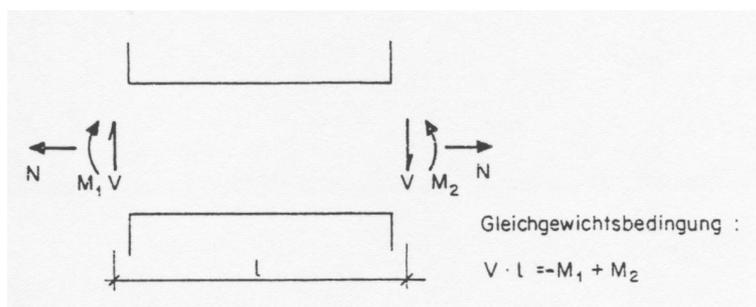


Figura 2.55: Sistema y cargas

mente. Como la biela de compresión inclinada es rectangular, los puntos B y D caen sobre un círculo que también pasa por A y C. En consecuencia, el esfuerzo cortante puede calcularse analíticamente en función de las fuerzas horizontales (fig. 2.57.b).

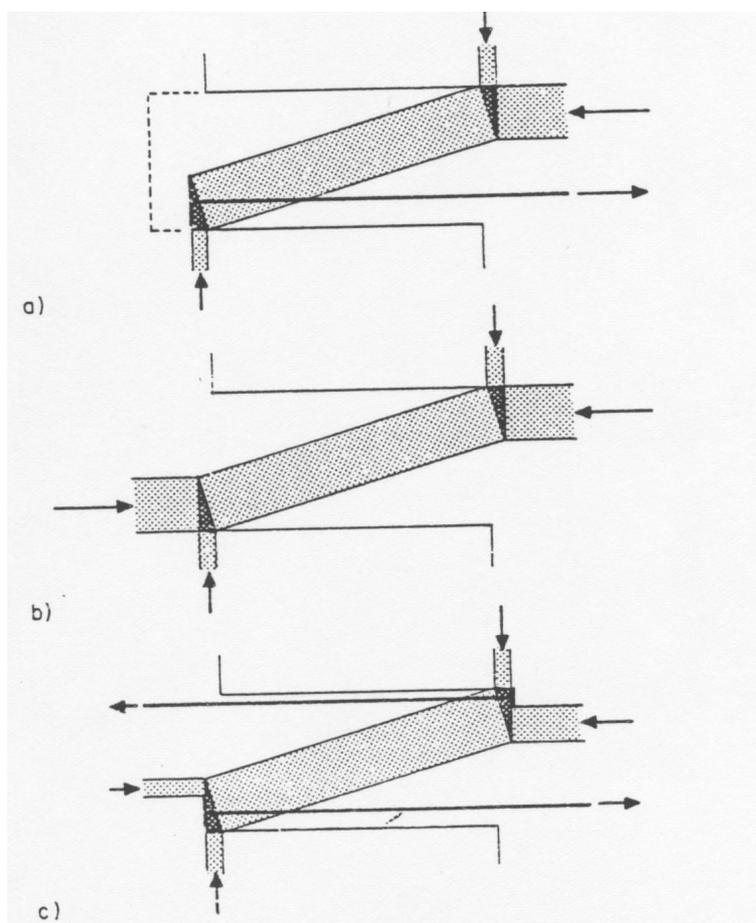


Figura 2.56: Campo de tensiones

En grandes esbelteces, la biela de compresión adopta una inclinación pequeña. Si no existe armadura longitudinal solicitada a tracción (fig. 2.56.b), el campo de tensión puede formarse. Por el contrario, si la biela de compresión se extiende sobre un trayecto grande en las proxi-

midades de una armadura horizontal de tracción (figs. 2.56.a y c), la transmisión del esfuerzo al hormigón resulta problemática (ver capítulos 3 y 4). En estos casos, la carga tiene que transmitirse indirectamente (fig. 2.58.a) tal como se demostró en el apartado 2.2.4. En el caso de vigas con esbeltez media pueden combinarse las dos formas de transmisión (fig. 2.58).

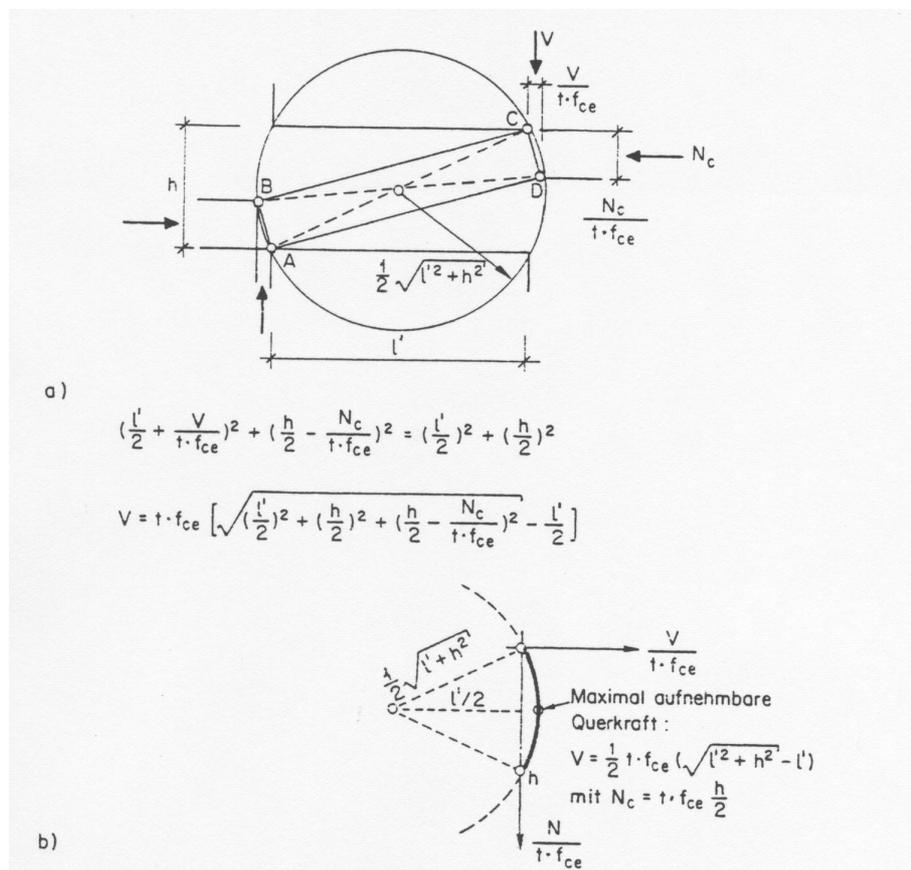


Figura 2.57: Construcción geométrica del campo de tensiones e interacción  $V - N_c$

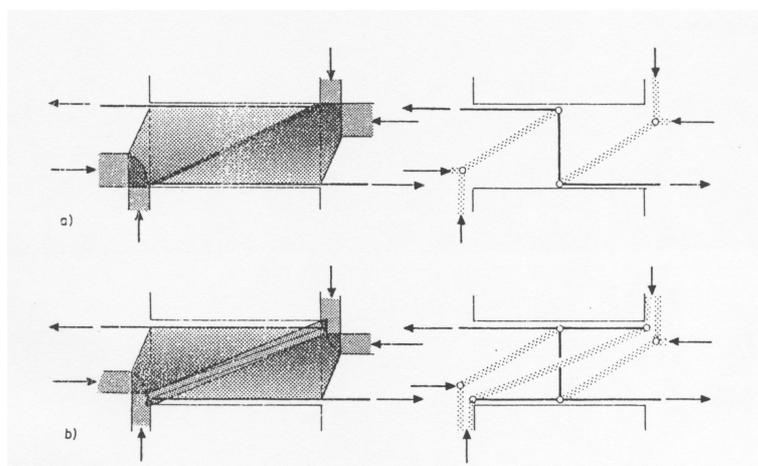


Figura 2.58: Campos de tensiones y posición de resultantes

## 2.7. Nudos de pórticos

### 2.7.1. Esquina de pórtico, compresión en el interior

Supongamos la esquina de pórtico representada en la fig. 2.59 en la que el nudo está solicitado en flexión pura.

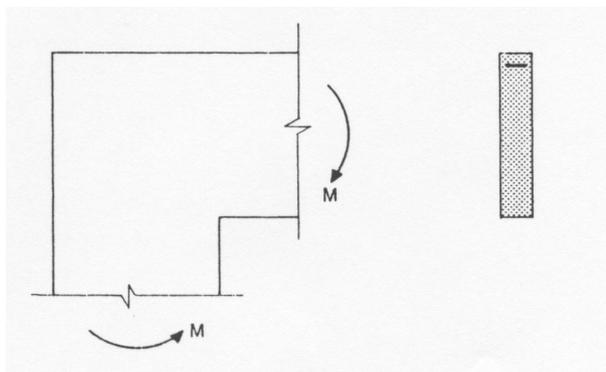


Figura 2.59: Geometría y acciones

Al final de este capítulo se tratarán casos similares con presencia de esfuerzo cortante y de esfuerzo normal. Las medidas del cordón de compresión, así como el esfuerzo de la armadura en cada una de las vigas pueden calcularse mediante un simple dimensionamiento a flexión (fig. 2.60.a).

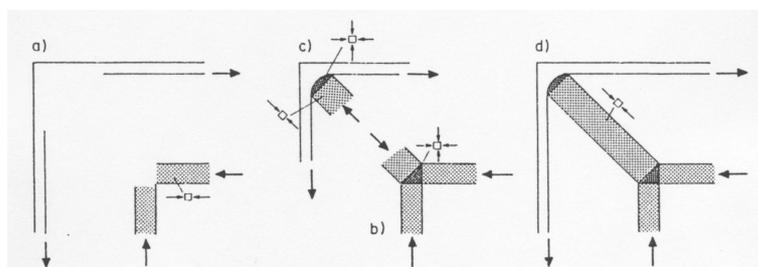


Figura 2.60: Construcción del campo de tensiones

En la zona del nudo concurren ambos cordones de compresión, siendo necesaria una biela de compresión diagonal para el establecimiento del equilibrio (fig. 2.60.a). Lo mismo ocurre con el esfuerzo de la armadura que experimenta un cambio de dirección con aparición de una biela de compresión inclinada (fig. 2.60.c).

Como las magnitudes de las fuerzas de tracción y compresión son idénticas, también resultan las mismas magnitudes en ambos extremos de las bielas de compresión inclinadas. El campo de tensión completo está representado en la fig. 2.60.d, mientras que la fig. 2.61 reproduce un detalle del cambio de dirección en el esfuerzo en la armadura.

La zona situada entre la armadura y la biela de compresión tiene teóricamente una sollicitación biaxial al presentar la armadura una curvatura circular. Sin embargo, esto carece de trascendencia en el dimensionamiento práctico.

Se destaca el hecho de que las deducciones anteriores son válidas no sólo para casos simétricos,

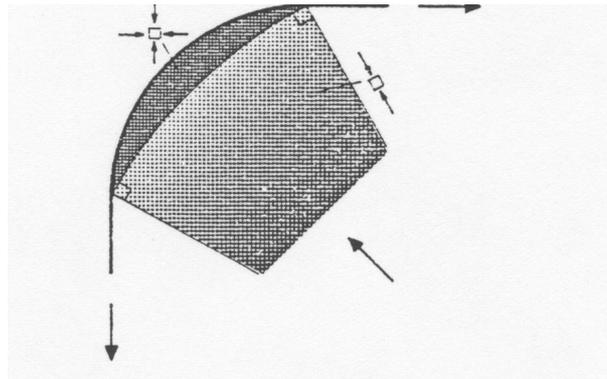


Figura 2.61: Desvío de la fuerza en la armadura

sino que, tal como se observa en la fig. 2.62, son extensivas a campos de tensión en esquinas de pórticos para vigas de diferente canto.

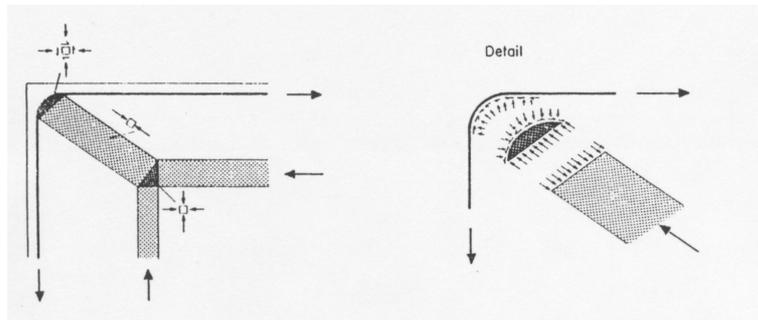


Figura 2.62: Campo de tensiones para vigas con canto desigual

En la zona de desvío se producen también tensiones de adherencia entre las bielas de compresión y la armadura. En sentido estricto, el equilibrio sólo puede ser satisfecho para una determinada disposición de la armadura, precisamente no circular, en la zona de desvío. Ello podría causar problemas en el caso de relaciones geométricas extremas (pendientes pequeñas de la biela de compresión y radios de curvatura de la armadura grandes en comparación con el canto útil).

El campo de tensión que estamos estudiando, relativo a una esquina de pórtico, puede generalizarse introduciendo adicionalmente esfuerzos normales y cortantes. La fig. 2.63 nos muestra cualitativamente estos casos.

Una vez más, recordamos que las armaduras estáticamente necesarias pueden calcularse también en estos casos mediante consideraciones a nivel de sección.

### 2.7.2. Esquina de pórtico, tracción en el interior

El campo de tensión para esquinas de pórticos solicitadas de este modo puede ser retomado del apartado 2.7.1. Los tirantes han de ser sustituidos por bielas de compresión y viceversa (fig. 2.64.a).

En la fig. 2.64.b se presenta una solución alternativa con doble desvío de las bielas de com-

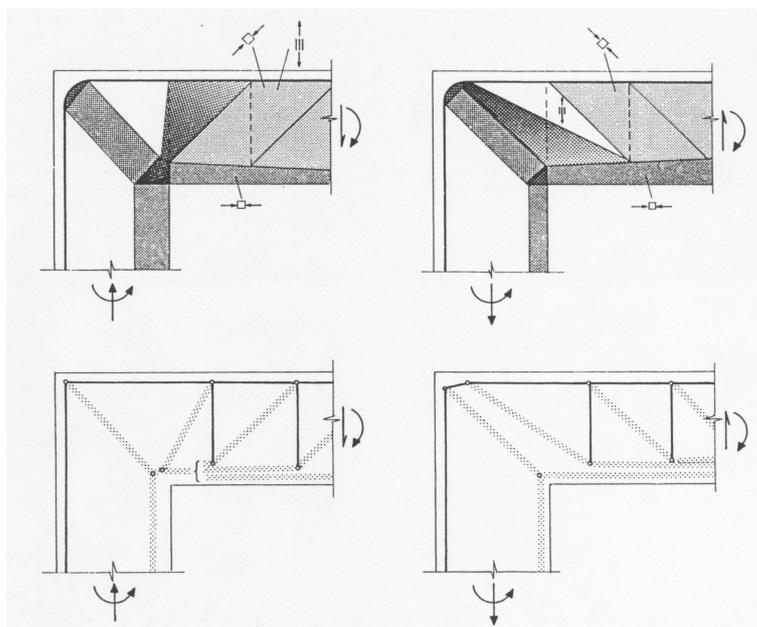


Figura 2.63: Campo de tensiones considerando fuerzas axiales y cortantes

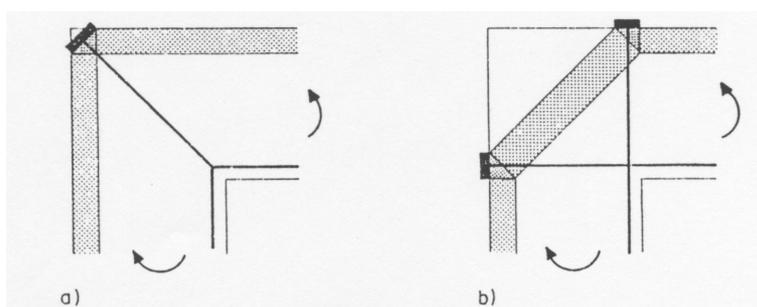


Figura 2.64: Desvío sencillo y desvío doble

presión. Se debe notar que el desvío afecta hasta la superficie del hormigón. Esto sólo puede conseguirse con placas de anclaje colocadas externamente. Los estudios experimentales muestran que, prácticamente, cualquier otra disposición de armadura (sin colaboración de barras adicionales) conduce a resultados insatisfactorios debido a las problemáticas condiciones del anclaje. En el capítulo 3 se discute la influencia de la disposición de la armadura sobre algunos detalles constructivos. Este problema se reduce si sólo una parte del acodamiento de las bielas de compresión tiene lugar en el borde extremo del nudo. La fig. 2.65 muestra una solución de este tipo con un desvío de las bielas de compresión por medio de una armadura inclinada.

El desvío en el detalle A se produce análogamente, y queda reflejado en la fig. 2.39.

Una posibilidad adicional para tratar de evitar la problemática del acodamiento concentrado consiste en disponer una armadura de cercos bien distribuida, con lo que se consigue un acodamiento continuo de las bielas de compresión (fig. 2.66.a).

Los esfuerzos en los estribos tienen que transmitirse a la armadura principal (fig. 2.66.b). El campo de tensión definitivo y las correspondientes resultantes aparecen representados en las

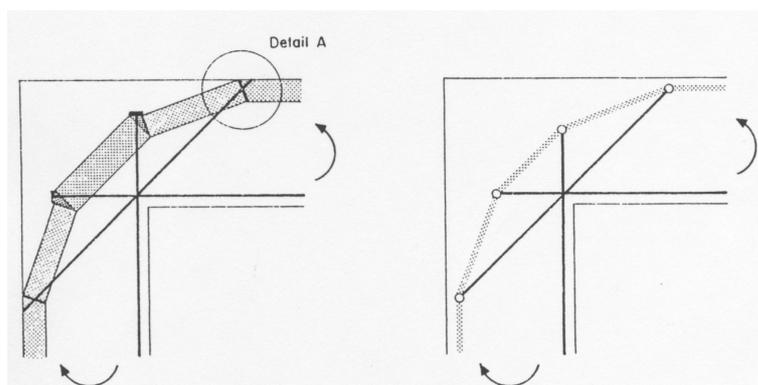


Figura 2.65: Campo de tensiones y resultantes (desvío múltiple)

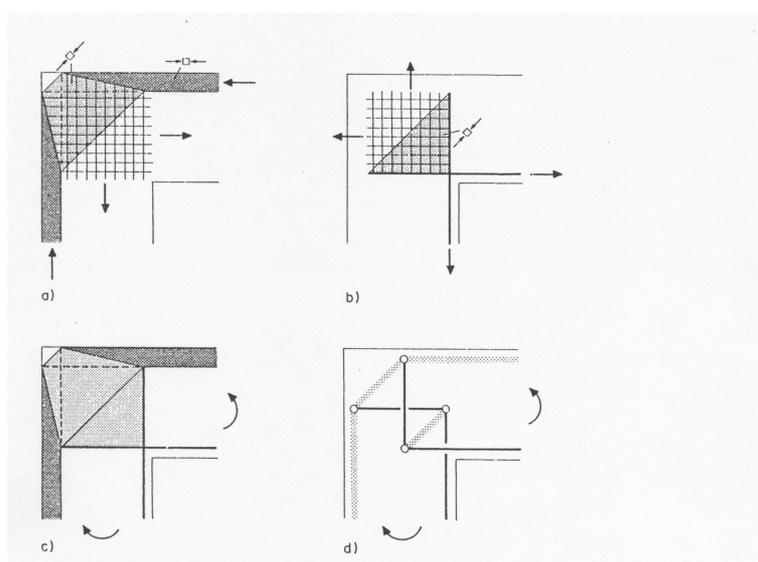


Figura 2.66: Armadura de cercos y configuración de nudos

figs. 2.66.c y d.

En la fig. 2.67 se muestra una posible combinación de los campos de tensión según las figs. 2.64.b y 2.66.

Una posible adaptación del campo de tensión de la fig. 2.65 cuando hay presencia de esfuerzos normales y cortantes queda recogida en la fig. 2.68.

Por último, en la fig. 2.69 se representan soluciones constructivas correspondientes a campos de tensión de las figs. 2.64.b, 2.65 y 2.66.

### 2.7.3. Nudos de pórticos con confluencia de tres vigas

Los casos tratados en este capítulo se limitan a nudos de pórticos sometidos a flexión pura. La posible presencia de esfuerzos normales y cortantes modifica los campos de tensión en una forma análoga a la de las esquinas de los pórticos tratadas anteriormente. Los tres tipos posibles de sollicitación aparecen representados en la fig. 2.70.

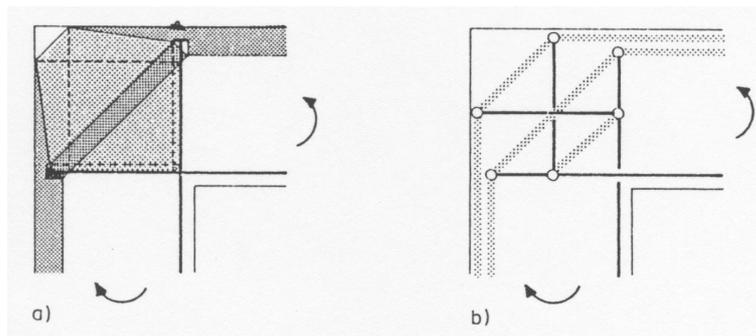


Figura 2.67: Campo de tensiones y resultantes

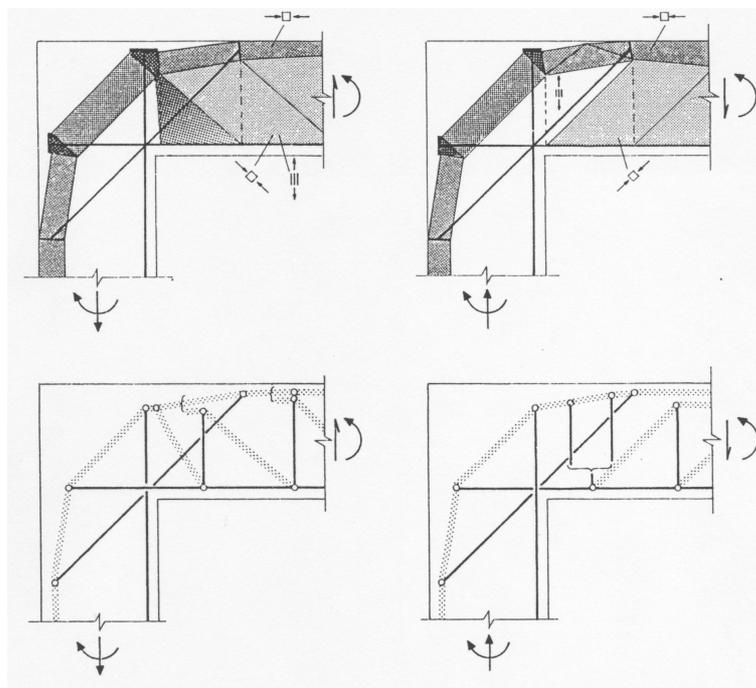


Figura 2.68: Campo de tensiones considerando esfuerzos normales y cortantes

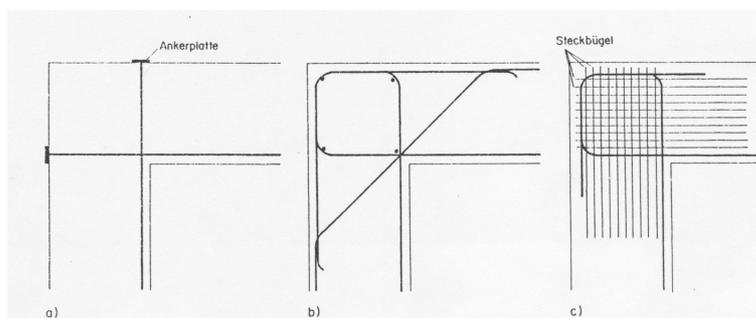


Figura 2.69: Croquis de armaduras

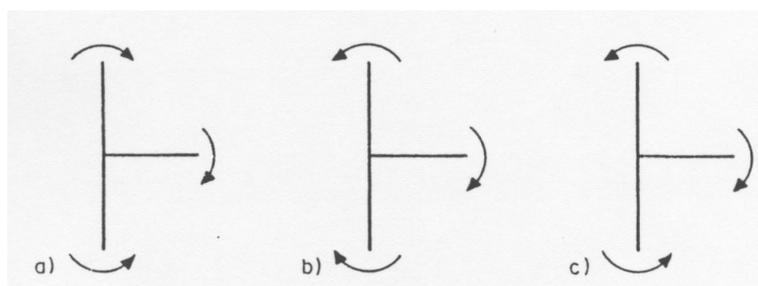


Figura 2.70: Modos de carga

El estudio cualitativo de las fuerzas internas por medio de resultantes lleva a las soluciones apuntadas en la fig. 2.71.

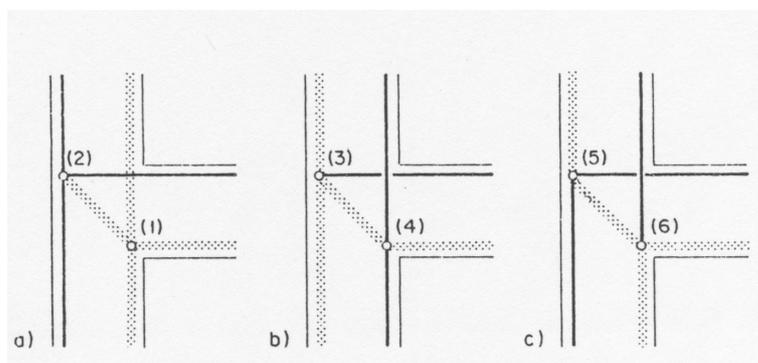


Figura 2.71: Resultantes

Una vez fijadas las medidas de las bielas de compresión, el desarrollo de los campos de tensión se limita a la definición de los nudos entre las bielas. En la fig. 2.72 se recogen algunas posibles soluciones.

Las soluciones correspondientes a los nudos 1, 2 y 4 de la fig. 2.72 no presentan problemas desde el punto de vista estático, mientras que en los nudos 3 y 5 aparecen las mismas dificultades de anclaje que en las esquinas de los pórticos con tracción en el lado interior, tratados en el apartado 2.7.2. En el nudo 5, parte del esfuerzo de la biela inclinada se transmite a través del desvío de la armadura. En consecuencia, la tensión se reduce en la prolongación de la biela de compresión hasta alcanzar el valor  $\lambda f_{ce}$ . De este modo, en la zona superior, con sollicitación biaxial, una de las tensiones principales es menor que  $f_{ce}$ . En el nudo 6, la armadura vertical o, en su caso, la biela de compresión (en el supuesto de que la intensidad del campo sea igual a  $f_{ce}$ ) deben desplazarse hacia la izquierda, puesto que de lo contrario se superaría la tensión de rotura en la zona sollicitada biaxialmente. El campo de tensión completo aparece representado en la fig. 2.73.

En los nudos de pórtico b y c se puede mitigar el problema de anclaje en la barra horizontal disponiendo, como en el caso de la esquina de pórtico con tracción en el intradós, una capa de armaduras inclinadas o una armadura de estribos (figs. 2.65 y 2.66). Tal como muestra el campo de tensión para el nudo de pórtico c, la infrautilización del canto útil en la viga inferior tiene una influencia tan sumamente pequeña sobre las armaduras de cálculo que este efecto puede ser despreciado en un dimensionamiento práctico.

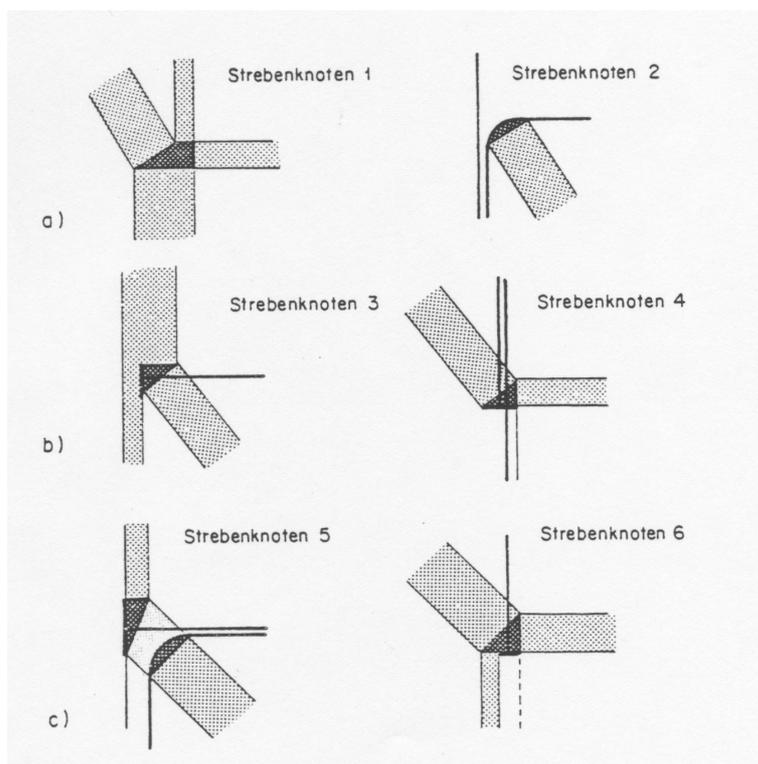


Figura 2.72: Tipos de nodos

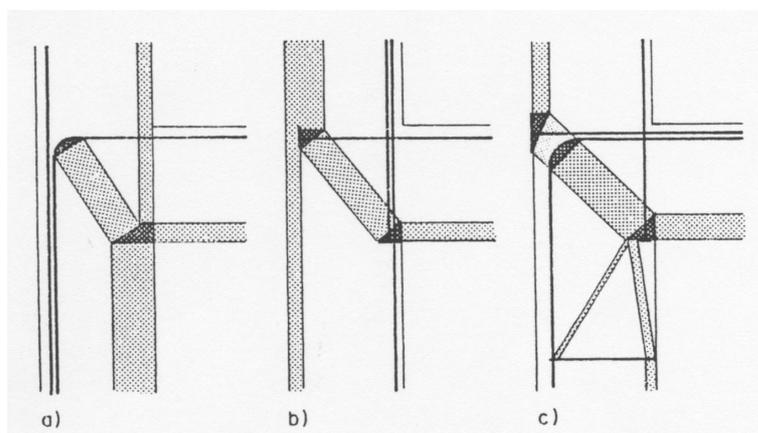


Figura 2.73: Campo de tensiones

#### 2.7.4. Nudo de pórtico con confluencia de cuatro vigas

Para este tipo de pórtico son igualmente de aplicación los razonamientos expuestos para los casos de confluencia de dos y tres vigas. En la fig. 2.74 se representan los tres tipos de sollicitación y las resultantes de los esfuerzos internos. En el dimensionamiento general de esquinas de pórticos y de nudos de pórticos puede procederse como sigue:

- Estudio de la distribución de los esfuerzos internos con ayuda de las resultantes.

- Cálculo de las secciones necesarias de las armaduras. (Los esfuerzos en las armaduras pueden obtenerse normalmente de las vigas adyacentes.)
- Estudio de los detalles constructivos (nudos de bielas) con campos de tensión.
- Soluciones constructivas para la armadura.

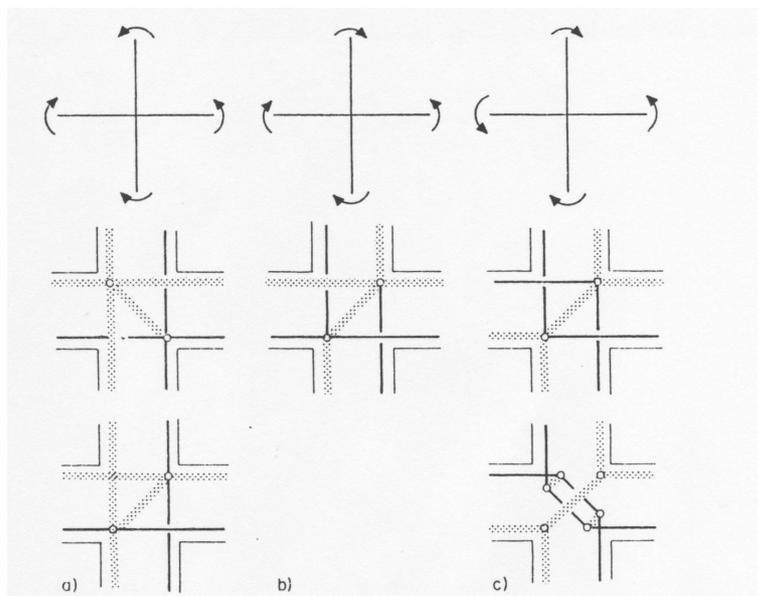


Figura 2.74: Modos de sollicitación y resultantes de las fuerzas internas

## 2.8. Vigas de gran canto

En este capítulo nos limitamos al estudio de algunos problemas típicos en vigas de gran canto. En el apartado 2.2, las vigas pared con carga única vertical se trataron como vigas cortas, algunos de cuyos ejemplos aparecen recogidos en la fig. 2.75.

En el caso de vigas pared unidas monolíticamente a los forjados, éstos pueden considerarse como cordones del tipo placa.

A continuación se estudian algunos casos típicos de dimensionamiento de vigas pared. En edificación, estos elementos están normalmente solicitados por fuerzas horizontales (viento, sismo) y por fuerzas verticales (peso propio, carga de uso). La fig. 2.76 presenta vigas pared que están sólo solicitadas a cortante. En principio, la armadura vertical se puede disponer repartida o concentrada, pero incluso en el primer caso se precisa de una armadura horizontal (cordón) en el borde superior (fig. 2.76.c).

La presencia de una fuerza vertical puede compensar parcial o totalmente a la armadura vertical (fig. 2.77).

La fig. 2.77.b representa un caso límite en el que no se precisa armadura vertical alguna. La posición de la resultante de las fuerzas exteriores en el borde inferior ha sido determinada de modo que en esa zona se alcanza justamente la resistencia del hormigón. En la viga pared correspondiente a la fig. 2.77.a, se influye sobre la resultante interna a través del esfuerzo de

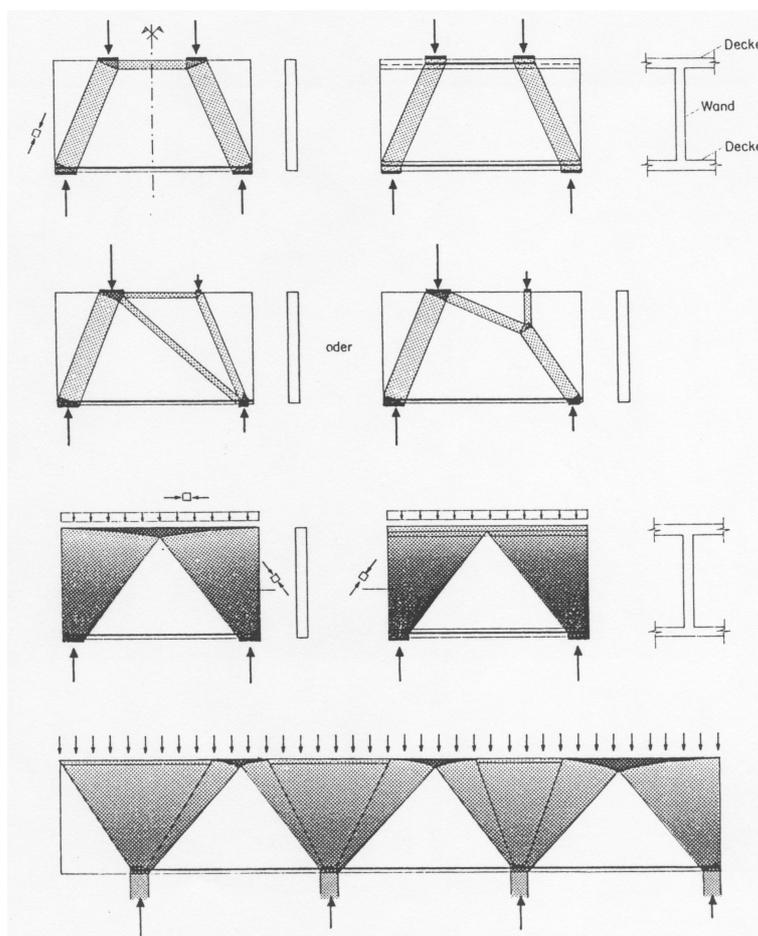


Figura 2.75: Vigas de gran canto y esquemas de carga

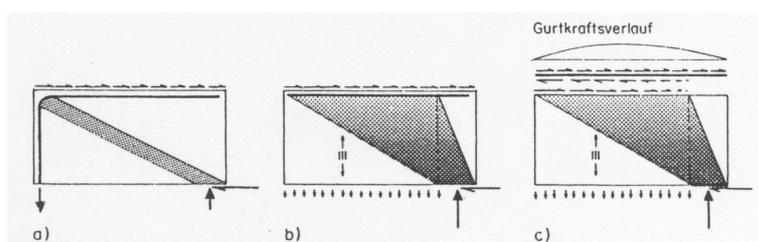


Figura 2.76: Viga pared sometida a cortante sin carga vertical

la armadura vertical de modo que se alcanza el estado ahí descrito. Las mismas reflexiones son válidas para vigas pared en edificios de varios pisos, tal como se muestra en la fig. 2.78.

En el apartado 2.4 se trataron vigas en torsión en las que tanto las vigas como las fuerzas de apoyo se transmiten a través de diafragmas. En la fig. 2.79 se representan las fuerzas internas de estos elementos juntamente con los campos de tensión.

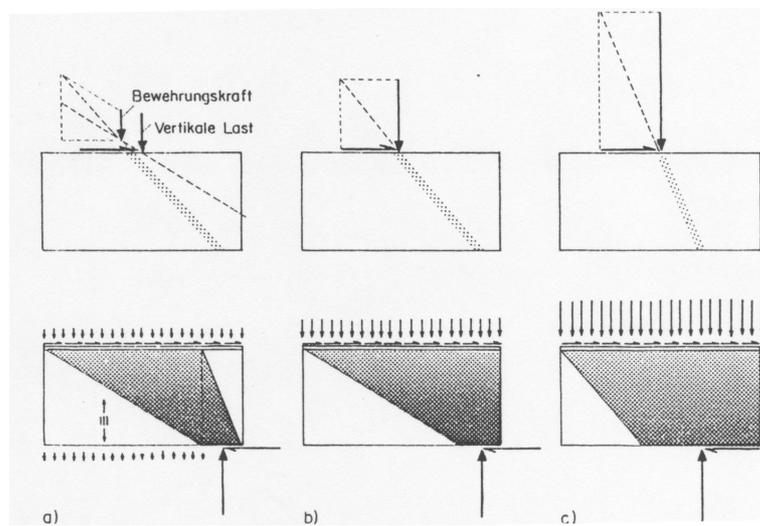


Figura 2.77: Viga pared sometida a cortante con carga vertical

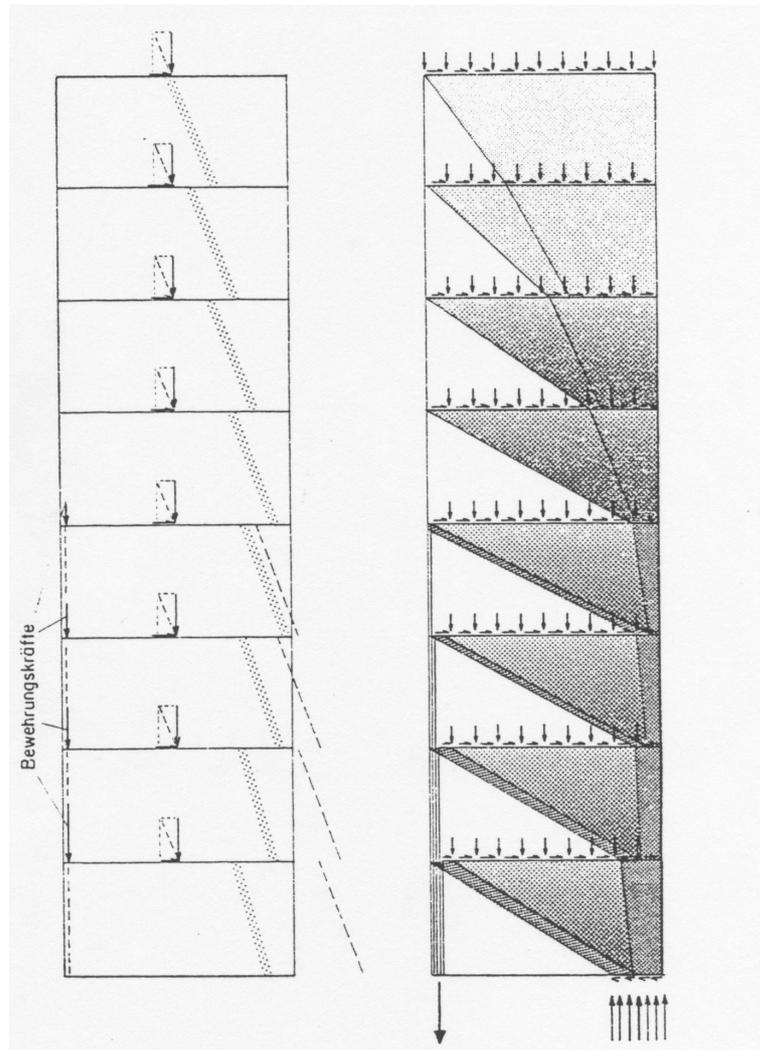


Figura 2.78: Núcleo de varias plantas: resultantes y campos de tensiones

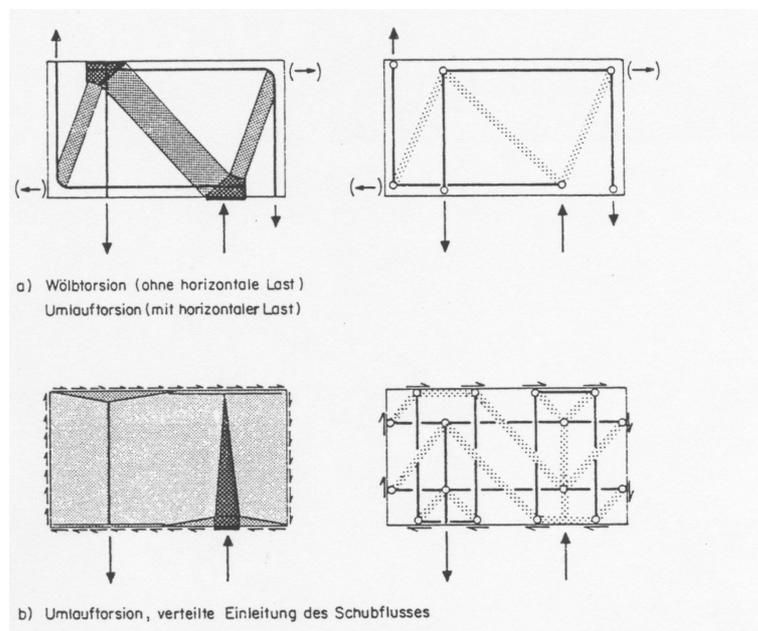


Figura 2.79: Diafragmas



## Capítulo 3

# Propiedades y características resistentes de los materiales

### 3.1. Acero

En la fig. 3.1.a se representan las curvas tensión-deformación para los tipos habituales de acero de armar.

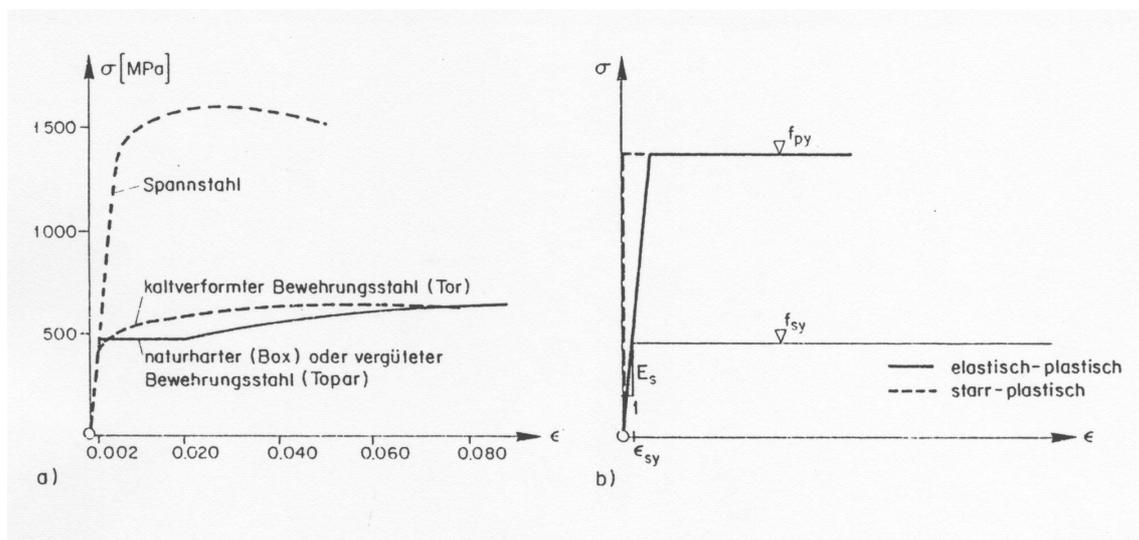


Figura 3.1: Diagramas tensión-deformación reales y simplificados de las armaduras

En general se pueden distinguir tres dominios diferentes:

1. Dominio elástico (la distancia entre átomos aumenta proporcionalmente con la solici-tación de tracción).
2. Dominio plástico (deformación de la malla cristalina con deslizamientos en las disloca-ciones).
3. Dominio de endurecimiento (combinación de los dos fenómenos anteriores).

A efectos de dimensionamiento pueden utilizarse los diagramas tensión-deformación simplificados de la fig. 3.1.b. Las grandes deformaciones en el dominio plástico comparadas con la deformación de plastificación  $\varepsilon_{sy}$ , permiten la aplicación de la teoría de la plasticidad. Si se admite que las barras sólo son capaces de transmitir fuerzas en sentido longitudinal, resulta innecesaria la consideración de estado general de tensión multiaxial para la definición de la plastificación en las armaduras.

## 3.2. Hormigón

Dado que la sollicitación del hormigón es en general multiaxial, se deduce que debe establecerse una condición de plasticidad que contemple un estado tensional general. Puesto que las deformaciones inelásticas no vienen condicionadas por las deformaciones plásticas de la malla cristalina, sino por la microdestrucción progresiva y irreversible de la estructura interna, la resistencia del hormigón resulta también afectada por diferentes fenómenos tales como fisuración, historia de la carga e interacción con la armadura.

A pesar de que un material de tales características no puede ser definido como ideal-plástico, la teoría de la plasticidad es en general aplicable, siempre que se adopte para el hormigón un valor de la resistencia efectiva  $f_{ce}$  que tome en consideración estos fenómenos. Se debe notar que en elementos estructurales de bajas cuantías, el valor de  $f_{ce}$  no tiene prácticamente influencia sobre la carga de agotamiento.

### 3.2.1. Estado de tensión uniaxial

En la práctica se presentan numerosos elementos de hormigón sometidos a sollicitación uniaxial, como por ejemplo, zonas de compresión de vigas en flexión y placas, apoyos o bielas de compresión en vigas cortas. El correspondiente estado tensional puede ser inducido experimentalmente en la zona media de una probeta cilíndrica o prismática cargada según su eje.

Los resultados de un ensayo de este tipo con control de deformación están representados en la fig. 3.2 para tres tipos de hormigones.

En los diagramas tensión-deformación pueden distinguirse tres dominios:

1. Un dominio más o menos elástico ( $0 \leq |\sigma_3| \leq 0,8f_c$ ). Las divergencias respecto del comportamiento elástico lineal vienen condicionadas, entre otros, por la apertura de microfisuras entre el árido y la matriz de cemento. La relación entre deformaciones transversales y longitudinales (coeficiente de Poisson) es aproximadamente constante en este dominio y vale alrededor de 0,15.
2. Un dominio con grandes deformaciones transversales que presenta endurecimiento. Se forman fisuras en la matriz de cemento que, partiendo de las microfisuras entre matriz de cemento y granos de árido, se extienden paralelamente a la dirección de la sollicitación (fig. 3.3). El aplastamiento longitudinal y, sobre todo, la deformación transversal aumentan de forma más que proporcional.
3. Un dominio con grandes deformaciones transversales en el que se produce un ablandamiento. El hormigón se va dividiendo en láminas, algunas de las cuales se vuelven inestables. La tensión disminuye a medida que crece la deformación.

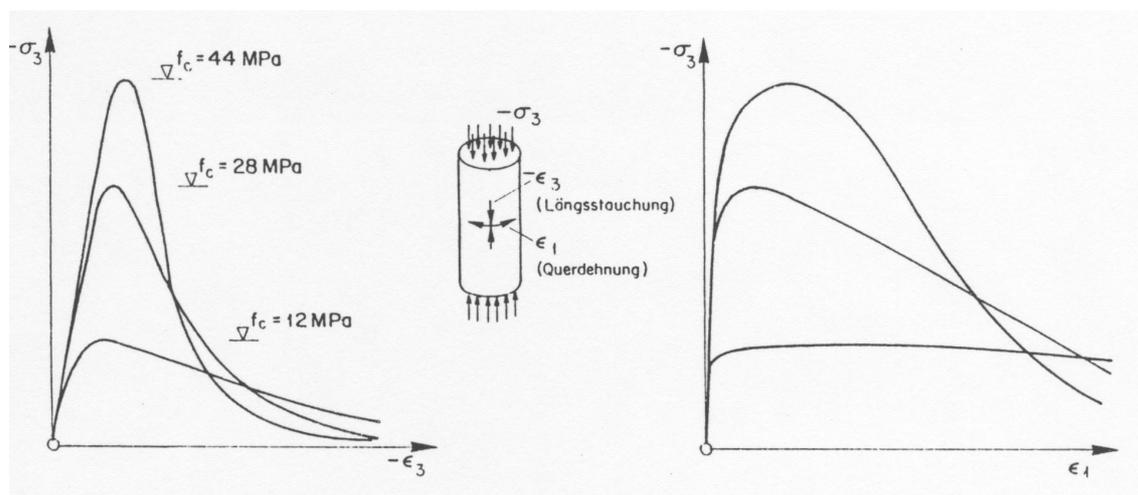


Figura 3.2: Tensión como función de la deformación en la dirección de la carga y transversal a la misma para hormigón bajo carga uniaxial

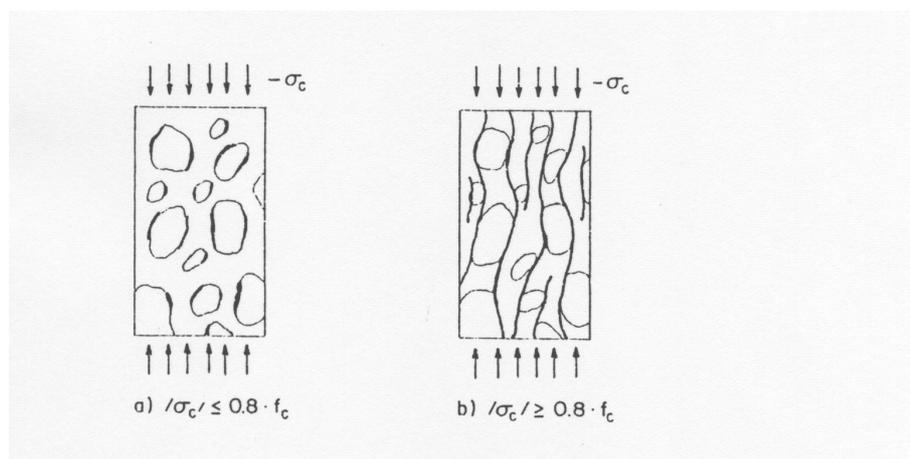


Figura 3.3: Patrón de fisuración para un cilindro en compresión uniaxial

Para que la carga de agotamiento de un sistema pueda ser determinada mediante la teoría de la plasticidad, la resistencia del hormigón debe reducirse a un valor efectivo  $f_{ce}$ . Tal como se muestra en la fig. 3.4.a, esta reducción depende del tipo del sistema (isostático o hiperestático). En la fig. 3.4.a se representa a título de ejemplo un sistema isostático, para el que se puede tomar  $f_{ce} = f_c$ , ya que la carga de agotamiento del sistema se produce al alcanzarse la resistencia cilíndrica.

En los sistemas estáticamente indeterminados (fig. 3.4.b) las resistencias de agotamiento en los diferentes elementos no se alcanzan simultáneamente, sino para diferentes deformaciones del sistema total. Por tal motivo, la carga de agotamiento no se puede obtener por simple suma de las cargas de agotamiento de los elementos aislados, sino que debe ser determinada con ayuda de la teoría de la plasticidad mediante una reducción de la resistencia del hormigón ( $f_{ce} \leq f_c$ ). Esta reducción depende tanto del tipo del sistema (por ejemplo, de la relaciones  $A_1/A_2$  y  $l_1/l_2$  en el caso de la fig. 3.4.b), como de la resistencia cilíndrica  $f_c$ . El incremento de la

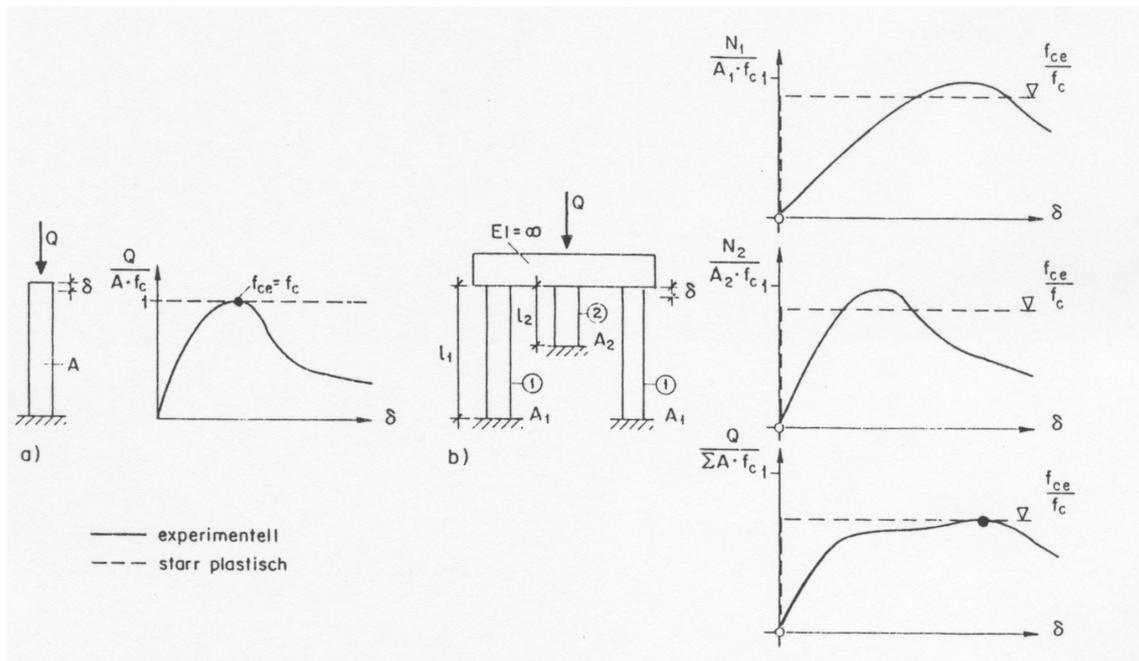


Figura 3.4: Comportamiento de un sistema isostático e hiperestático

fragilidad en función de la resistencia cilíndrica según la fig. 3.2 puede considerarse mediante una reducción adicional de la resistencia para el caso de valores grandes de la resistencia cilíndrica. En sistemas ordinarios se pueden tomar los siguientes valores de cálculo:

$$\begin{aligned} f_{ce} &= f_c & \text{para } f_c \leq 20 \text{ MPa} \\ f_{ce} &= 2,7 \cdot f_c^{\frac{2}{3}} & \text{para } f_c > 20 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Una dependencia similar ha sido deducida por vía teórica por Exner [12]:

$$f_{ce} = 3,2 \cdot f_c^{\frac{1}{3}} \quad (3.2)$$

Estas relaciones son válidas para sistemas cuyos elementos presentan deformaciones del mismo orden. En casos extremos, por el contrario, la resistencia deberá ser reducida todavía más, o incluso deberá despreciarse la resistencia de los elementos no activables.

### 3.2.2. Estado de tensión multiaxial

Consideremos el elemento de hormigón representado en la fig. 3.3, sometido a una deformación transversal en todas las direcciones y sobre el que actúa la fisuración anteriormente descrita. En la fig. 3.5 se muestra el comportamiento de un elemento de hormigón sometido a este tipo de sollicitación. La presión transversal puede proceder de una sollicitación externa o de la coacción a la dilatación lateral (por ejemplo, con un zunchado, o situación dentro de un macizo).

El aumento de resistencia puede describirse mediante la hipótesis de Mohr-Coulomb (fig. 3.6).

Tal como muestra una comparación con los resultados representados en la fig. 3.6.b, se puede contar con  $\varphi = 37^\circ$  para el cálculo, con lo que el incremento de la resistencia debido a la sollicitación triaxial supone  $\Delta f_{ce} = 4 \cdot |\sigma_1|$ .

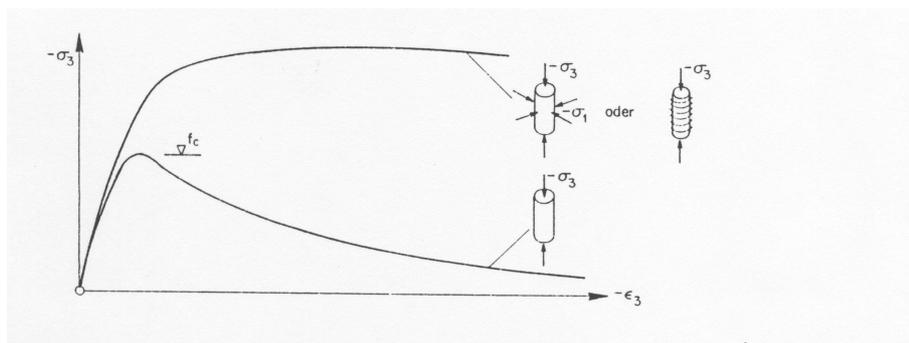


Figura 3.5: Diagramas tensión-deformación en el hormigón bajo carga uniaxial y triaxial

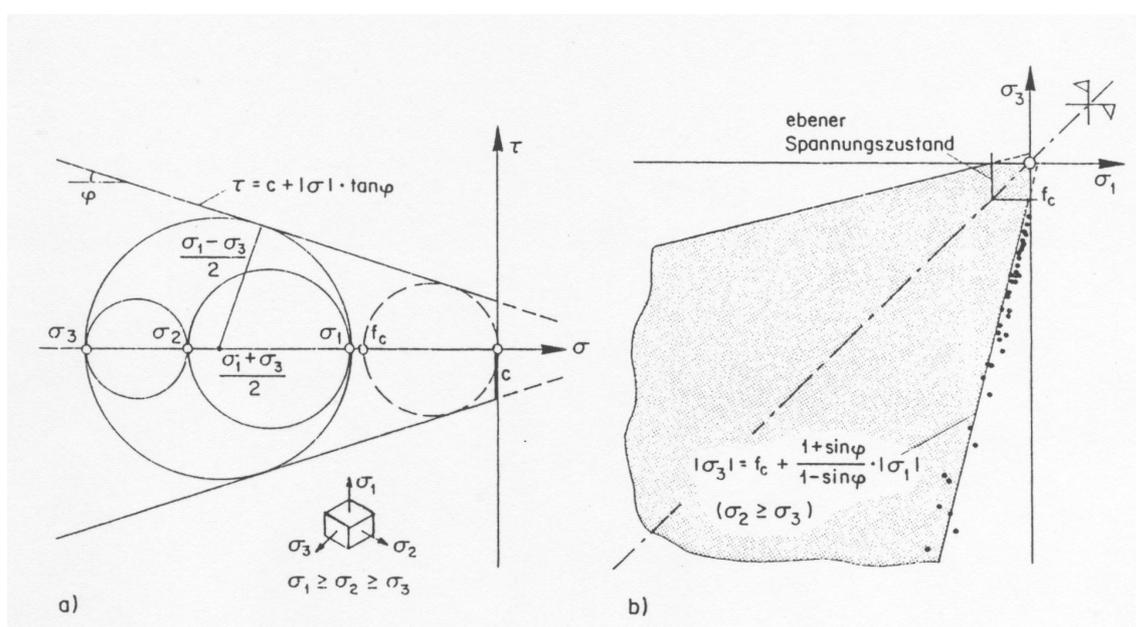


Figura 3.6: Diagramas tensión-deformación reales y simplificados de las armaduras

Se deduce de la fig. 3.5 que la presión transversal se traduce no sólo en un aumento de la resistencia, sino también en una mayor ductilidad. Este fenómeno puede explicarse por las diferencias existentes en los mecanismos de rotura. En el caso de grandes presiones transversales se induce la rotura, en primera instancia, a lo largo de una superficie de deslizamiento inclinada, contrariamente al caso del ensayo de compresión uniaxial, en donde la rotura tiene lugar predominantemente a través de la inestabilidad provocada por el hendimiento longitudinal del cuerpo de ensayo (figs. 3.3 y 3.7).

El incremento de la ductilidad puede ser tenido en cuenta suponiendo, de forma simplificada, que el aumento  $\Delta f_{ce}$  representa un carácter dúctil ideal, con lo que para  $f_{ce}$  resulta:

$$\begin{aligned} f_{ce} &= f_c + 4 \cdot |\sigma_1| & \text{para } f_c \leq 20 \text{ MPa} \\ f_{ce} &= 2,7 \cdot f_c^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot |\sigma_1| & \text{para } f_c > 20 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.3)$$

El estado de tensiones triaxial aparece parcialmente en un ensayo con probeta cúbica (fig. 3.8) como consecuencia de la coacción a la deformación transversal en las dos superficies de

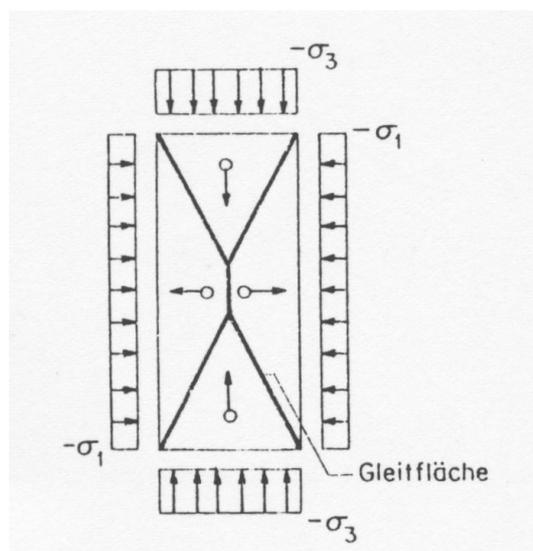


Figura 3.7: Mecanismo de rotura

apoyo de las placas de carga.

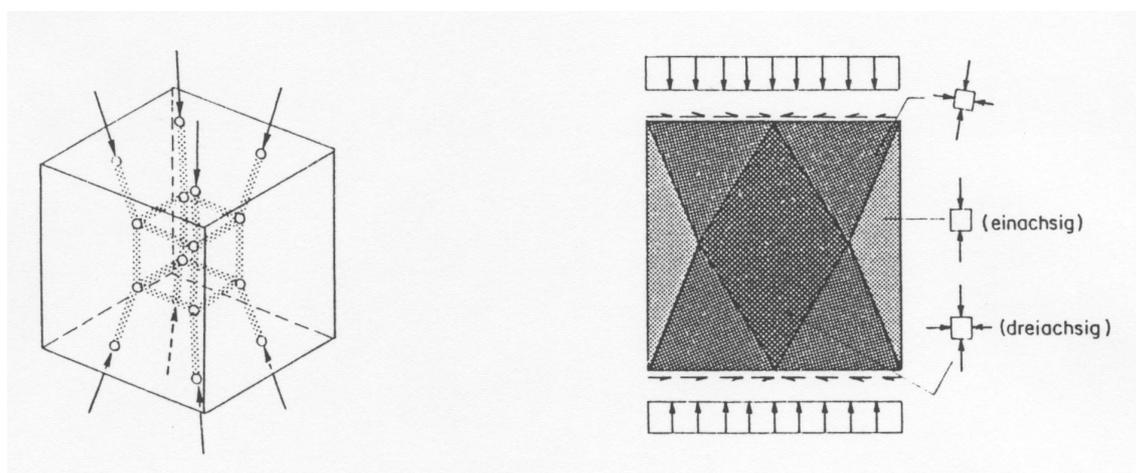


Figura 3.8: Representación esquemática de las fuerzas internas y campo de tensiones

Por las razones mencionadas, los valores de las resistencias obtenidas a partir del ensayo con probeta cúbica son superiores a los obtenidos de las cilíndricas ( $f_{cw} \cong 1,25f_c$ ) y, en consecuencia, no son representativos de la resistencia uniaxial del hormigón.

Lo mismo puede ocurrir en zonas con fuertes sollicitaciones localizadas cuyas medidas son comparables al espesor del elemento (deformación transversal impedida, debida a las zonas colindantes de hormigón no solicitadas) (fig. 3.9). Cuando está presente una armadura de zunchado, la resistencia del hormigón se incrementa notablemente y puede ser mucho mayor que  $f_c$ .

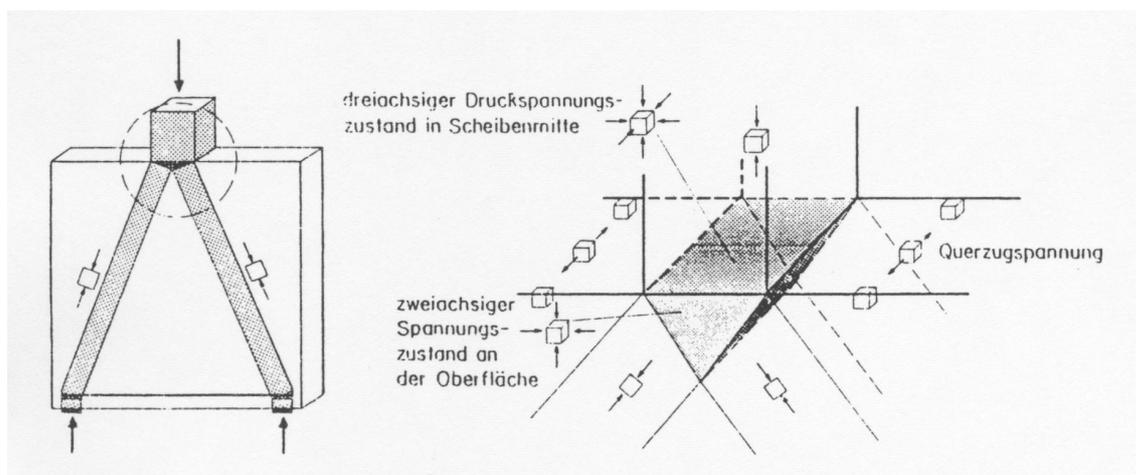


Figura 3.9: Restricción de las deformaciones transversales en una zona local

### 3.2.3. Hormigón con fisuración inducida

En los campos de tensión desarrollados en el capítulo 2, se superponen a menudo campos de tensión uniaxial en el hormigón con el campo de tensión correspondiente a una armadura sometida a tracción, tal como aparece representado en la fig. 3.10, en la que la armadura está dispuesta perpendicularmente al campo de tensión.

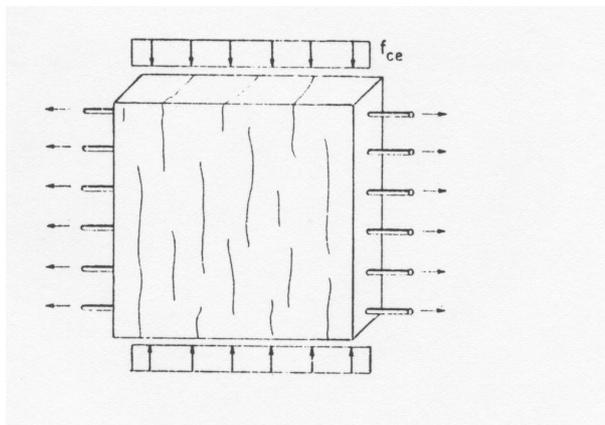


Figura 3.10: Campo de compresiones en el hormigón con armadura transversal traccionada

Las deformaciones de la armadura producen la fisuración del hormigón y, en consecuencia, una disminución de la resistencia de éste. De modo similar al caso de deformación transversal en un elemento de hormigón con sollicitación uniaxial (ver fig. 3.2), en la fig. 3.11 se representa el valor de tensión en el hormigón en función de la deformación transversal de un elemento con o sin armadura transversal.

Como en el dimensionamiento según la teoría de la plasticidad (comportamiento plástico ideal) no se pueden cuantificar las deformaciones, este fenómeno sólo se puede considerar indirectamente, dando a la resistencia efectiva  $f_{ce}$  un valor minorado de  $f_c$ . Con ello se tiene en cuenta que el comportamiento del hormigón no es plástico ideal.

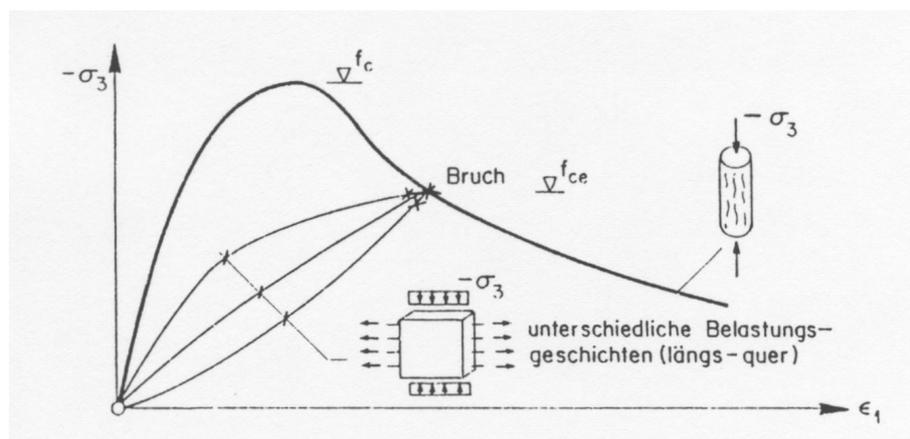


Figura 3.11: Diagrama tensión-deformación en el hormigón con y sin armadura transversal

Tal como se deduce al comparar las curvas tensión-deformación para diferentes valores de la resistencia cilíndrica  $f_c$  (fig. 3.2), la relación  $f_{ce}/f_c$  para una deformación transversal dada depende también de la resistencia cilíndrica  $f_c$ . En el caso de presencia de armadura transversal perpendicular al campo de compresión del hormigón, y para deformaciones transversales no excesivamente grandes ( $\varepsilon_1 < 0,3\%$ ), se pueden utilizar los siguientes valores de cálculo:

$$\begin{aligned} f_{ce} &= 0,8 \cdot f_c & \text{para } f_c \leq 20 \text{ MPa} \\ f_{ce} &= 2,2 \cdot f_c^{\frac{2}{3}} & \text{para } f_c > 20 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si la armadura transversal no es perpendicular al campo de compresión del hormigón, se produce un debilitamiento adicional del hormigón en el caso de fisuración (fig. 3.12).

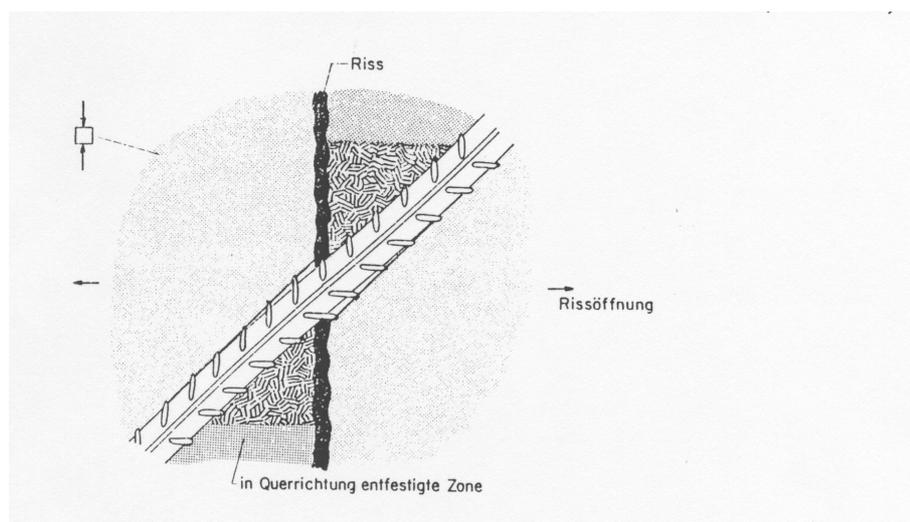


Figura 3.12: Interacción entre el hormigón y la armadura en una fisura

La flexión de las armaduras en la zona fisurada origina una tensión de tracción transversal que, en rotura, provoca desconchamientos en el recubrimiento del hormigón. En condiciones

normales se puede operar con:

$$\begin{aligned} f_{ce} &= 0,6 \cdot f_c & \text{para } f_c \leq 20 \text{ MPa} \\ f_{ce} &= 1,6 \cdot f_c^{\frac{2}{3}} & \text{para } f_c > 20 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.2.4. Transmisión de esfuerzos a través del engranamiento de áridos

Tanto la historia de la carga como la redistribución de las fuerzas internas exigen en ciertos casos una transmisión de esfuerzos a través de fisura abierta. Si el campo de tensión discurre oblicuo al plano de la fisura, esta transmisión de esfuerzo tiene lugar a través del engranamiento de áridos de la fisura.

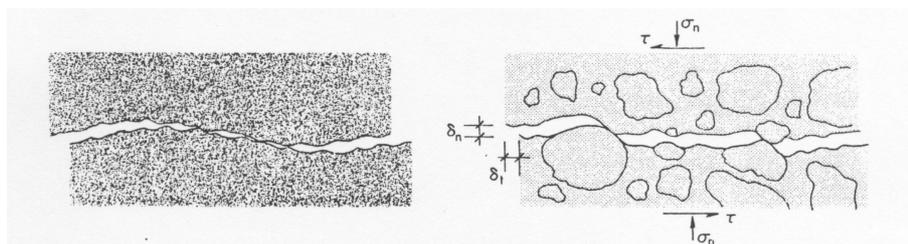


Figura 3.13: (a) Macro-engranamiento (nivel estructural) y micro-engranamiento (nivel árido)

Para pequeñas aberturas de fisura,  $\delta_n$ , y deslizamientos  $\delta_t$  suficientemente grandes, el microdentado actúa sobre la superficie total de la fisura (fig. 3.13.b). Por el contrario, en el caso de fisuras anchas, la transmisión de la fuerza se produce sólo en zonas localizadas (macrodentado), (fig. 3.13.a).

A efectos de dimensionamiento, se destaca el hecho de que en agotamiento sólo se puede hallar una distribución teórica de los esfuerzos internos cuando la presencia de armadura garantice una fisuración de pequeña abertura.

Las resistencias efectivas  $f_{ce}$  para todos los casos anteriormente mencionados quedan resueltas en la fig. 3.14.

## 3.3. Transmisión de fuerza armadura-hormigón

Estas transmisiones de esfuerzos presentan normalmente un tipo de rotura frágil y, en consecuencia, no deberían ser determinantes en el dimensionamiento. En cualquier caso, no se pretende dar aquí unos procedimientos cuantitativos de cálculo, sino simplemente describir cualitativamente el comportamiento en rotura y los factores que influyen de manera más notable sobre la resistencia.

### 3.3.1. Anclaje de barras

Para pequeñas sollicitaciones, la transmisión de esfuerzos cortantes entre armadura y hormigón tiene lugar predominantemente a través de tensiones de adherencia. Para sollicitaciones mayores, la transmisión se produce a partir de las corrugas de las armaduras. Para modelizar la distribución de las fuerzas internas en el estado de rotura, se pueden considerar y desarrollar los campos de tensión utilizados en la abertura de fuerzas del cordón comprimido de vigas I. Los campos de tensión ofrecen una simetría radial y representan una simplificación

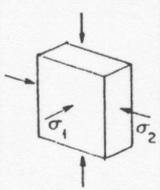
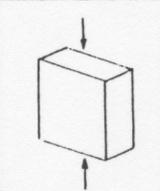
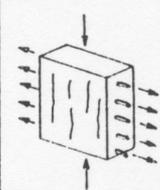
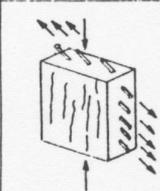
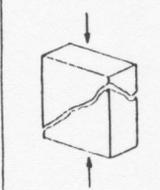
BEANSPRUCHUNG	EFFEKTIVE FESTIGKEIT $f_{ce}$		ANWENDUNGEN
	für $f_c \leq 20 \text{ MPa}$	für $f_c \geq 20 \text{ MPa}$	
homogen, mit Querdruck oder behinderter Querdehnung 	$f_c + 4  \sigma_1 $	$2.7 f_c^{2/3} +  \sigma_1 $	<ul style="list-style-type: none"> <li>- dreiachsiger Druck allgemein</li> <li>- behinderte Querdehnung (Krafteinleitung, umschnürte Stütze, ...)</li> </ul>
homogen, einachsiger Druck 	$f_c$	$2.7 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- reiner Druck (Stützen, ...)</li> <li>- Biegung, Biegung + Normalkraft (Balken und Platten)</li> <li>- Scheiben</li> </ul>
einachsiger Druck im Beton, mit Querdehnung senkrecht dazu 	$0.8 f_c$	$2.2 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Scheiben,</li> <li>- Balken mit Querdehnung</li> <li>- Platten</li> </ul>
einachsiger Druck im Beton, mit schiefer Bewehrung 	$0.6 f_c$	$1.6 f_c^{2/3}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Balken unter Querkraft</li> <li>- Balken unter Torsion</li> <li>- Scheiben</li> <li>- Platten mit hoher Drillbeanspruchung</li> </ul>
breite Risse, möglich 	Plastizitätstheorie nicht anwendbar, siehe Kap. 4		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Balken und Scheiben mit ungenügender minimaler Bewehrung</li> <li>- Platten bei hoher Schubbeanspruchung (Durchstanzen)</li> </ul>

Figura 3.14: Resistencia del hormigón dependiendo de su estado

del estado real de tensión. Tal como se observa en la fig. 3.15.a, el desvío del campo de compresión diagonal se produce mediante un campo de tracción radial en el hormigón, mientras que en la fig. 3.15.b tiene lugar mediante una armadura de zunchado.

Cuando el anillo de hormigón traccionado falla o cuando plastifica la armadura de zunchado se puede llegar a producir una rotura prematura (rotura en zona de anclaje). El hormigón próximo a las armaduras no suele ser determinante (campo de compresión diagonal en el hormigón) puesto que en realidad está sometido a sollicitación triaxial al estar impedida por simetría axial su expansión lateral.

Cuando no hay armadura de zunchado, la carga de rotura depende de la longitud del anclaje

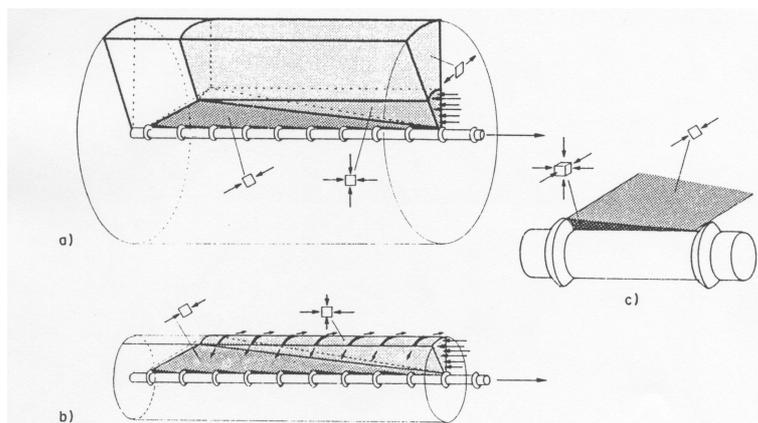


Figura 3.15: Campo de tensiones para la descripción del estado tensional en una situación de anclaje: (a) desvío de las fuerzas de anclaje mediante la formación de un anillo de tensión; (b) desvío de las fuerzas de anclaje mediante una armadura de zunchado; y (c) detalle

y, adicionalmente, de la resistencia a tracción del hormigón y del espesor del anillo traccionado de hormigón. La evaluación teórica del campo de tensión, según la fig. 3.15.a, prueba que existe una relación lineal entre la resistencia de adherencia y el espesor del anillo traccionado de hormigón (recubrimiento del hormigón). Los resultados experimentales [14, 15, 16] representados en la fig. 3.16 confirman esta relación. Es destacable que la existencia de una fisura en la zona del anillo traccionado influye negativamente en la resistencia de adherencia.

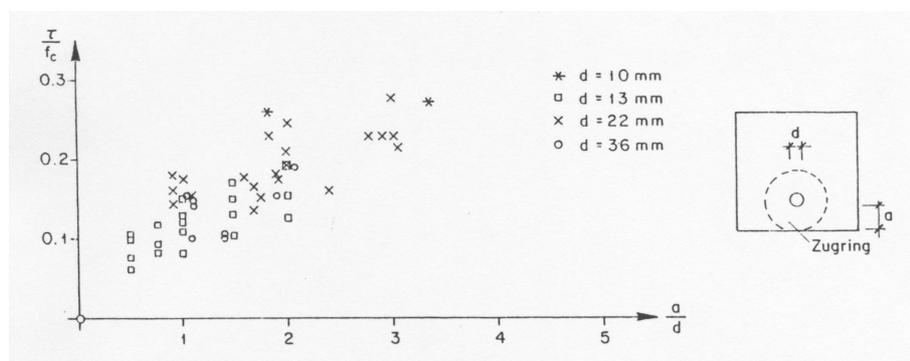


Figura 3.16: Tensión máxima de adherencia en función del recubrimiento según [14, 15, 16] ( $\tau = N_s / (\pi \cdot d \cdot l)$ ;  $N_s$  = Fuerza en la armadura;  $l$  = longitud de anclaje)

La presencia de una armadura de zunchado o de una fuerza de compresión exterior tiene la misma influencia sobre la resistencia de adherencia. Para que una armadura de zunchado sea plenamente eficaz tiene que rodear a toda la barra en la zona de anclaje a una distancia suficientemente grande.

Normalmente, el campo de tensión no suele presentar simetría radial ya que es corriente disponer una armadura transversal cercana a la superficie del hormigón que está en contacto con la barra a anclar, lo que rompe la simetría axial. En este caso se puede adoptar el campo de tensión representado en la fig. 2.38, que fue utilizado para describir la distribución de las fuerzas en el ala comprimida de las vigas I (fig. 3.17).

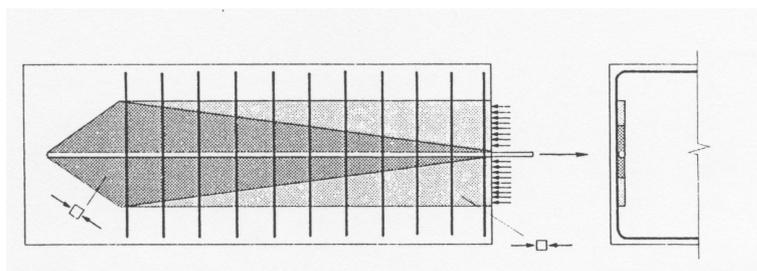


Figura 3.17: Campo de tensiones plano

La fig. 3.18 muestra la dependencia experimental obtenida entre la resistencia de adherencia y la cuantía de la armadura transversal (resultados de ensayos tomados de [17]). Para grandes cuantías de la armadura transversal, el hormigón del campo de compresión inclinado es determinante (estado tensional uniaxial).

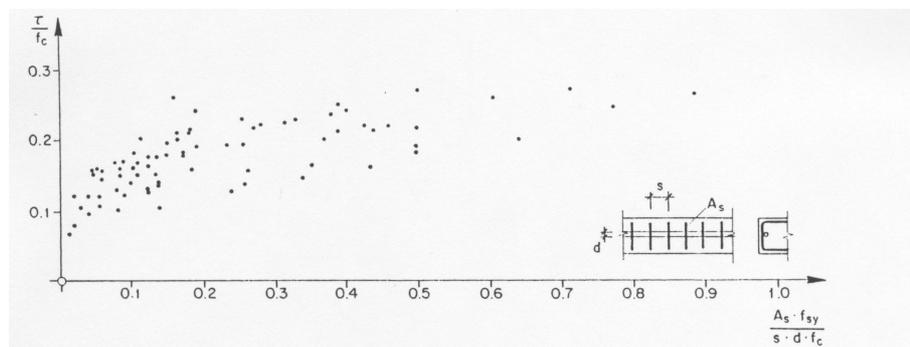


Figura 3.18: Tensión máxima de adherencia en función de la cuantía de armadura transversal

### 3.3.2. Solapes

El estado tensional en la zona de solape de armaduras queda descrito de manera simplificada mediante los campos de tensión representados en la fig. 3.19. Entre ambas armaduras puede desarrollarse un campo de compresión diagonal cuya componente transversal puede ser recogida mediante un campo radial de tracción en el hormigón (fig. 3.19.a) o con una armadura de zunchado. En ambos casos resulta un campo de tensiones tridimensional.

Sin embargo, si se dispone una armadura transversal cercana a la superficie del hormigón y en contacto con las barras a solapar, la distribución de fuerzas internas corresponde al campo de tensión plano representado en la fig 3.19.b.

Tal como se desprende de la fig.3.20.a, la carga de rotura, en el caso de solape de redondos sin armadura de zunchado, depende en primera instancia, igual que en el anclaje de barras, de la longitud de anclaje, pero sobre todo del espesor del anillo traccionado de hormigón (es decir, del recubrimiento) y de la resistencia del hormigón. En el caso de armadura transversal plana, la dependencia de la resistencia de adherencia respecto de la cuantía de la armadura transversal (fig. 3.20.b) es similar al caso de anclaje de barras.

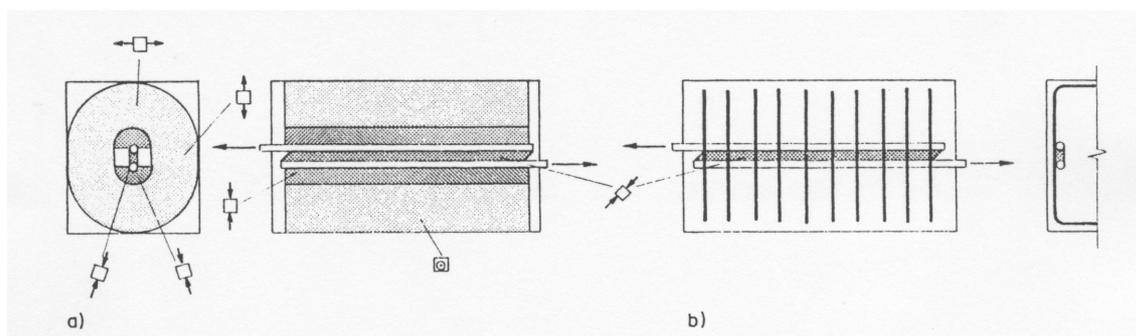


Figura 3.19: Campo de tensiones para la descripción de estados tensionales en solapes: (a) campo con anillo de tracciones en el hormigón; (b) campo de tensiones plano

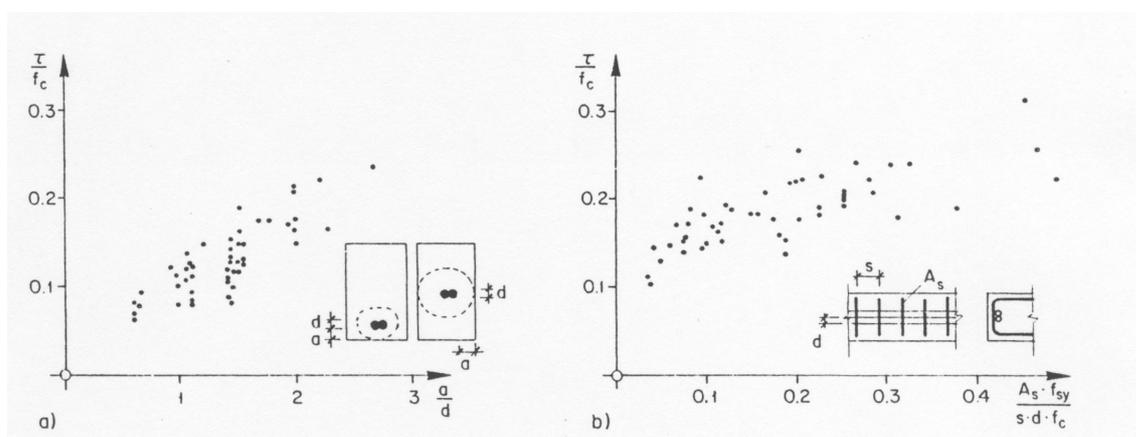


Figura 3.20: Tensión máxima de adherencia medida experimentalmente como función de: (a) recubrimiento; (b) armadura transversal (resultados de ensayos de [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24])

### 3.3.3. Desvíos

En los campos de tensión tratados en el capítulo 2, aparecen los llamados desvíos, en los que los esfuerzos de las bielas de compresión están en equilibrio con los esfuerzos de las armaduras. La fig. 3.21 muestra dos desvíos típicos cuyo comportamiento en rotura y resistencia van a ser tratados en este capítulo.

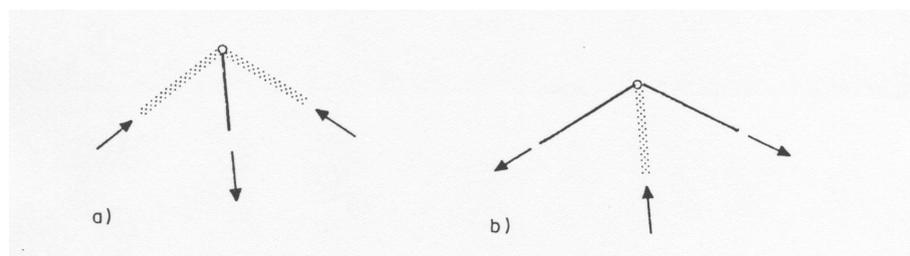


Figura 3.21: Resultantes de las fuerzas en el nudo

En el desvío de la fig. 3.21.a, la biela de compresión cambia de dirección merced a la presencia

de una armadura. Dependiendo de que haya o no espacio suficiente, el esfuerzo de la armadura es inducido dentro o fuera del nudo (fig. 3.22).

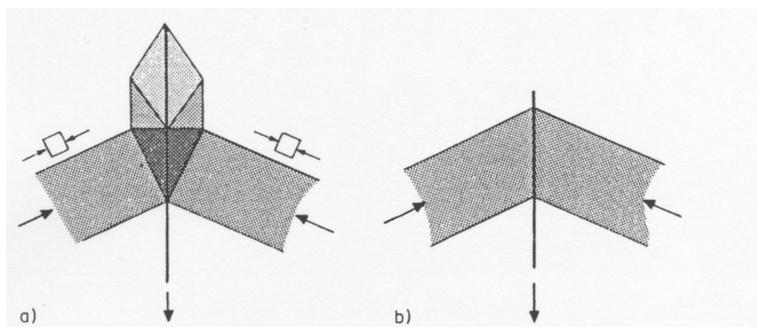


Figura 3.22: Transmisión de fuerzas entre el acero y el hormigón (a) fuera y (b) dentro del nudo

Estas dos variantes de desvío ya han sido presentadas en el capítulo 2 (figs. 2.8 y 2.9). En el primer caso, en el que la transmisión de esfuerzos entre hormigón y armaduras se efectúa fuera de la zona del codo, el comportamiento a rotura y la resistencia pueden ser tratados análogamente al caso del anclaje de barras.

Por el contrario, si la transmisión de esfuerzos tiene lugar dentro del nudo, el comportamiento a rotura depende sobre todo de la geometría del propio nudo, así como de la disposición de la armadura.

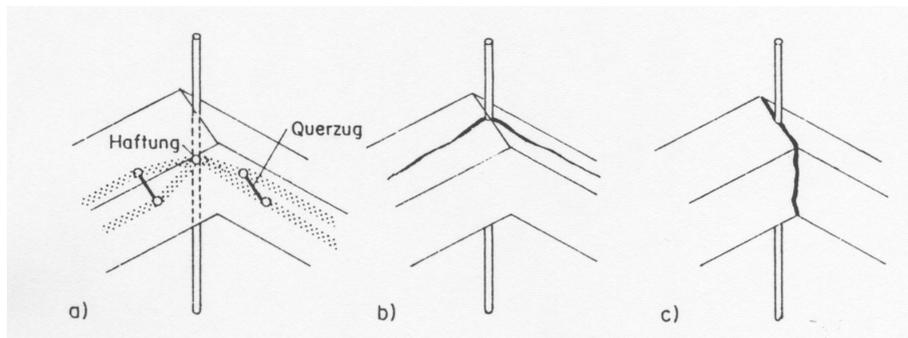


Figura 3.23: Resultantes de las fuerzas internas y posibles modos de rotura

La fig. 3.23 muestra las resultantes de los esfuerzos internos, así como las posibles formas de rotura, para un simple nudo con una barra recta.

El tipo de rotura expuesto en la fig. 3.23.b corresponde a un fallo de la zona sometida a tracción transversal. La resistencia en este caso depende en primera línea de la posible armadura transversal a compresión lateral.

El otro tipo de rotura (fig. 3.23.c), por el contrario, debe atribuirse a un fallo de la adherencia entre hormigón y armadura. Como anteriormente, la forma de trabajo está relacionada con la discutida en el apartado 3.3.1.

Las componentes de las bielas de compresión que actúan normalmente a la armadura producen una presión lateral que favorece la forma de trabajo aquí expuesta. Esta relación puede ser comprobada claramente en los resultados de ensayos representados en la fig. 3.24 (obtenidos

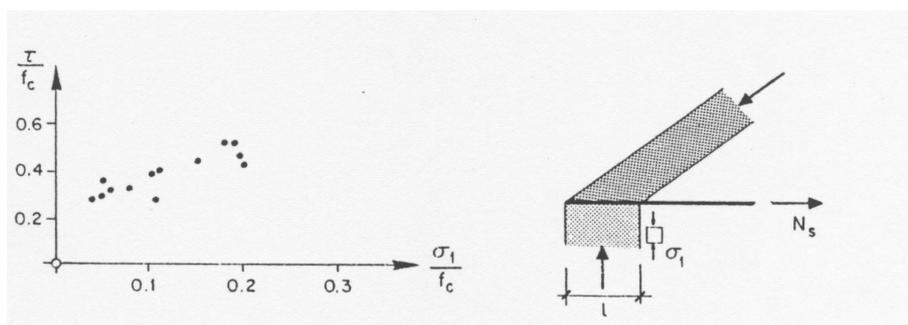


Figura 3.24: Dependencia de la resistencia con la presión transversal [25] ( $\tau = N_s/(\pi \cdot d \cdot l)$ ,  $d$  = diámetro de la barra)

de [25]) y ha sido verificada por Hess con ayuda del método cinemático de la teoría de la plasticidad.

En la fig. 3.25 se exponen otras disposiciones de armadura junto con la distribución de las fuerzas internas.

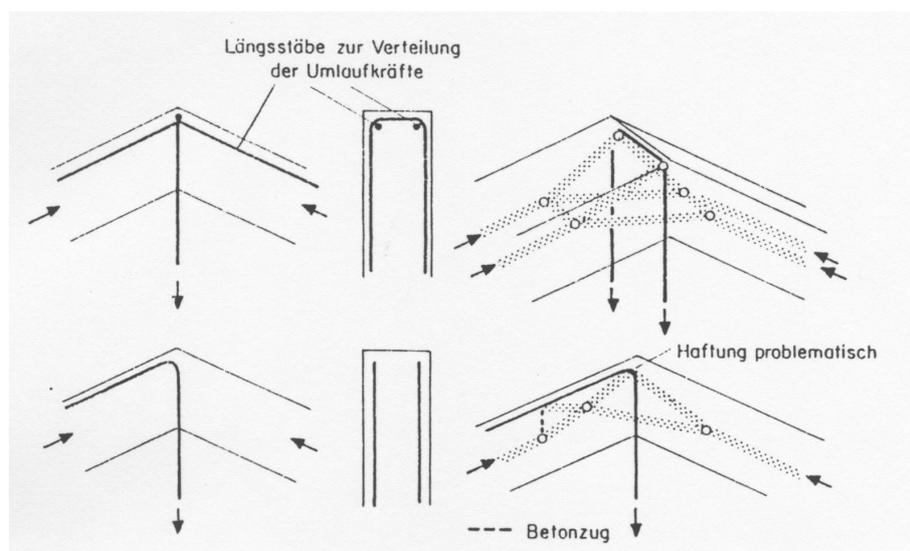


Figura 3.25: diferentes patrones de armado y resultantes del flujo de fuerzas

Cuando se cuenta con la presencia de cercos (fig. 3.25.a), la transferencia de la fuerza entre hormigón y armadura tiene lugar fundamentalmente a través de las fuerzas en los desvíos de las barras dobladas y no por efecto de la adherencia. Como estas fuerzas actúan de manera relativamente concentrada, la forma de rotura determinante puede ser la representada en la fig. 3.23.c. Cuando las barras longitudinales tienen un diámetro apreciable, éstas distribuyen las fuerzas en los desvíos e impiden una separación del hormigón en la zona del nudo.

En la zona de anclaje de una barra doblada, el comportamiento a rotura de una de las bielas resulta influido favorablemente, mientras que el de la otra lo es desfavorablemente, en comparación con la solución de barras rectas (fig. 3.22.b). La fig. 3.25.b muestra que la transferencia de la fuerza entre el hormigón y la armadura se produce sobre todo en la zona curvada. En el lado izquierdo esto sucede sin problemas a través de las fuerzas de acodamiento,

mientras que en el lado derecho la transferencia de fuerzas tiene lugar concentradamente por adherencia bajo un ángulo desfavorable entre la barra doblada y la biela de compresión.

La forma de trabajo en las soluciones representadas en la fig. 3.25 depende en buena medida de la disposición de la armadura. En la fig. 3.26 se muestran otras disposiciones de la armadura similares para el caso de grandes radios de curvatura en las barras en comparación con la dimensión de la biela de compresión.

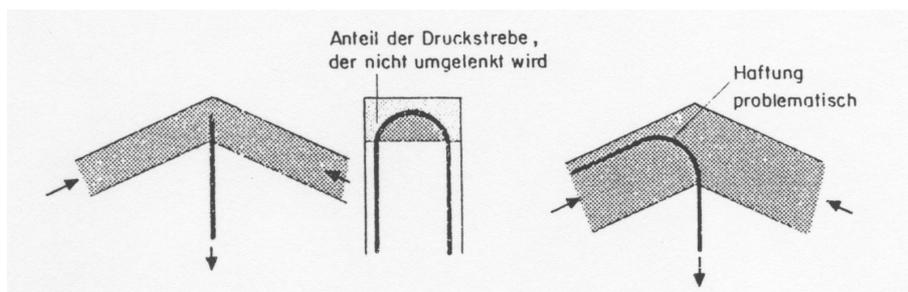


Figura 3.26: Desvío problemático para radios de curvatura importantes

En los nudos de pórticos con compresión en la parte exterior y con tracción en la interior, las dimensiones de la biela de compresión suelen ser tan pequeñas que no es posible un desvío total concentrado para las disposiciones de la armadura arriba mencionadas (ver apartado 2.7.2), de modo que aquél sólo puede conseguirse con ayuda de placas de anclaje fijadas exteriormente.

Todas estas consideraciones son también aplicables para nudos con dos fuerzas de tracción y una fuerza de compresión, tal como se ve en la fig. 3.21.b. En el caso de nudos simétricos, la transmisión de esfuerzos se produce únicamente mediante desvío. La fig. 3.27 muestra un campo de tensiones plano tratado en el capítulo 2 y una representación tridimensional de la distribución cualitativa de las fuerzas internas.

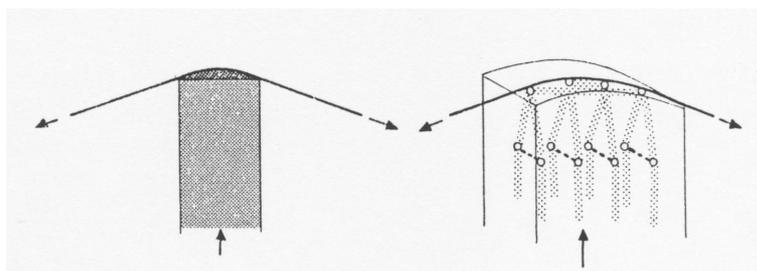


Figura 3.27: Campo de tensiones plano y resultantes

En la fig. 3.27 se observa que la zona inmediatamente por debajo de la barra doblada está sometida a compresión triaxial. La resistencia local es, por tanto, mayor que la resistencia cilíndrica y no suele ser determinante, sino que es la sollicitación de tracción en la dirección transversal la responsable de la rotura. La resistencia del conjunto del nudo depende, sobre todo, de la dimensión transversal de la biela de compresión (recubrimiento del hormigón), de la eventual existencia de una armadura transversal y de la compresión lateral.

En la fig. 3.28 se representa la resistencia local del hormigón en función del recubrimiento de la barra (tomado de [27]). De ella se puede deducir ya sea la resistencia del conjunto

del nudo o el radio de curvatura mínimo de la armadura para una tensión en el acero y un recubrimiento dados.

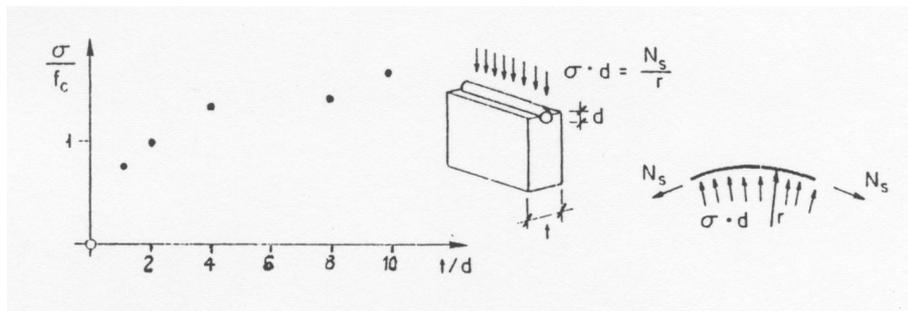


Figura 3.28: Influencia del recubrimiento

En nudos no simétricos, el esfuerzo de la biela se puede dividir en dos componentes de modo que una de ellas quede compensada por las fuerzas de desvío y la otra se equilibre con las tensiones de adherencia de la armadura (fig. 3.29.a). Cuando la resistencia en la zona del nudo no es suficiente, la transmisión de la fuerza puede producirse en la zona próxima (fig. 3.29.b).

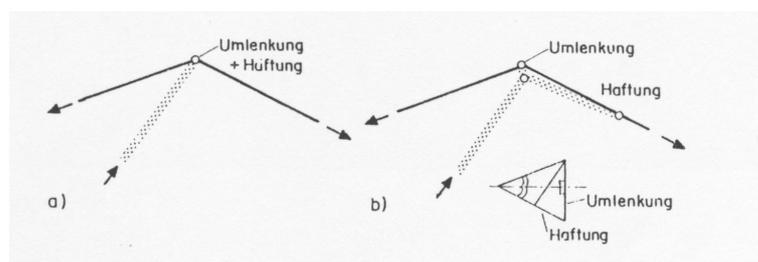


Figura 3.29: Esquema de la transmisión de fuerzas



## Capítulo 4

# Consideraciones cinemáticas para la obtención de campos de tensiones satisfactorios

### 4.1. Introducción

Los elementos estructurales de hormigón armado son sistemas estáticamente indeterminados a nivel interno. Por ello, en el dimensionamiento es necesario reconocer las diferentes formas de transmisión y determinar las resistencias de los subsistemas resultantes. Aunque teóricamente hay infinitos subsistemas posibles (infinitas formas de transmisión interna), sólo se pueden considerar aquellos subsistemas que garanticen un correcto comportamiento del elemento estructural tanto en estado de servicio como en el de rotura. En este capítulo se ilustra cómo la utilización de consideraciones cinemáticas permite desarrollar aquellos subsistemas dignos de interés.

Los subsistemas considerados no tienen que mostrar necesariamente la misma resistencia. En el capítulo 1 quedó claro este reparto por medio de ejemplos. De hecho, se formuló un principio cualitativo para garantizar el funcionamiento en servicio: “Cuanto mayor sea la deformación unitaria de un elemento (subsistema), tanto mayor será su armadura.” Por otro lado, se debe contar con una resistencia mínima de la armadura a fin de garantizar un buen reparto de las deformaciones (fisuras).

### 4.2. Procedimiento para el desarrollo de subsistemas

A partir del sistema representado en la fig. 4.1 se deduce cómo se pueden desarrollar campos de tensión adecuados. El procedimiento está esquematizado en la fig. 4.2.

En primer lugar se elige libremente una posible forma de transmisión. Seguidamente se estudian las correspondientes deformaciones. Para que en el cálculo se puedan considerar los elementos como cuerpos rígidos, se supone que, en las zonas no armadas, las deformaciones se concentran en fisuras abiertas. Pero para evitar deformaciones concentradas se introducen subsistemas adicionales en esas zonas. Este procedimiento se repite sucesivamente hasta que se obtiene un campo de deformaciones satisfactorio.

En el ejemplo representado, por razones didácticas, se introducen sucesivamente los cuatro subsistemas, aun cuando consideraciones de simetría permitirían obviar los dos pasos inter-

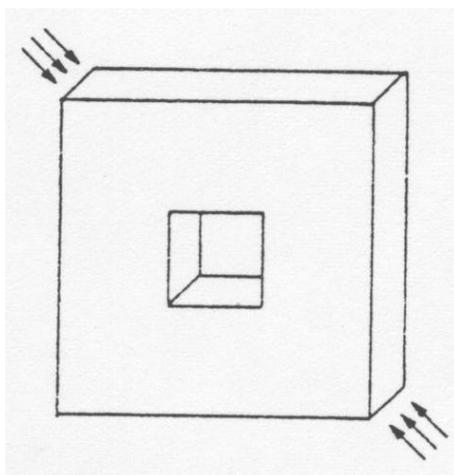


Figura 4.1: Laja de hormigón armado y cargas

medios.

En el dimensionamiento de este sistema hay que determinar adicionalmente la magnitud y disposición de la armadura. Tal como se muestra en la fig. 4.2, cada subsistema puede asumir una parte de la carga, pudiendo deducirse este reparto del principio formulado en el capítulo 1. Dado que las deformaciones de los diferentes subsistemas son del mismo orden, la fracción de carga asignada a cada uno de los subsistemas debería ser aproximadamente igual.

### 4.3. Ejemplos adicionales. Transmisión de la carga en una laja

#### 4.3.1. Laja solicitada a tracción

El elemento que vamos a estudiar aparece representado junto con su carga en la fig. 4.3.

Como primer subsistema se elige un tirante en tracción según la fig. 4.4. El cuadro de deformaciones resultante (cuadro de fisuración) se caracteriza por una distribución homogénea de las fisuras limitada únicamente a la zona de la armadura.

Para evitar las fisuras concentradas de gran tamaño en la zona de borde, debemos introducir un subsistema adicional que incluya también el reparto de fuerzas en la zona de borde (transmisión indirecta de fuerzas, fig. 4.5).

Las zonas de borde pueden armarse más débilmente puesto que las barras de tracción del subsistema 2 están menos deformadas que las del subsistema 1. En general, en esta zona bastaría con una armadura lo suficientemente grande como para repartir las fisuras.

#### 4.3.2. Laja solicitada a compresión

En la fig. 4.6 aparece representada la laja en estudio.

Como en el caso de la laja sometida a tracción, la transmisión en la laja de compresión puede realizarse directamente (fig. 4.7.a). Para este campo de tensión, no se necesita armadura desde el punto de vista estático. En la fig. 4.7.b se representa un posible cuadro de fisuración con una fisura longitudinal de grandes dimensiones (tracción por hendimiento). La laja se separa prácticamente en dos partes, cada una de las cuales queda sometida a compresión excéntrica

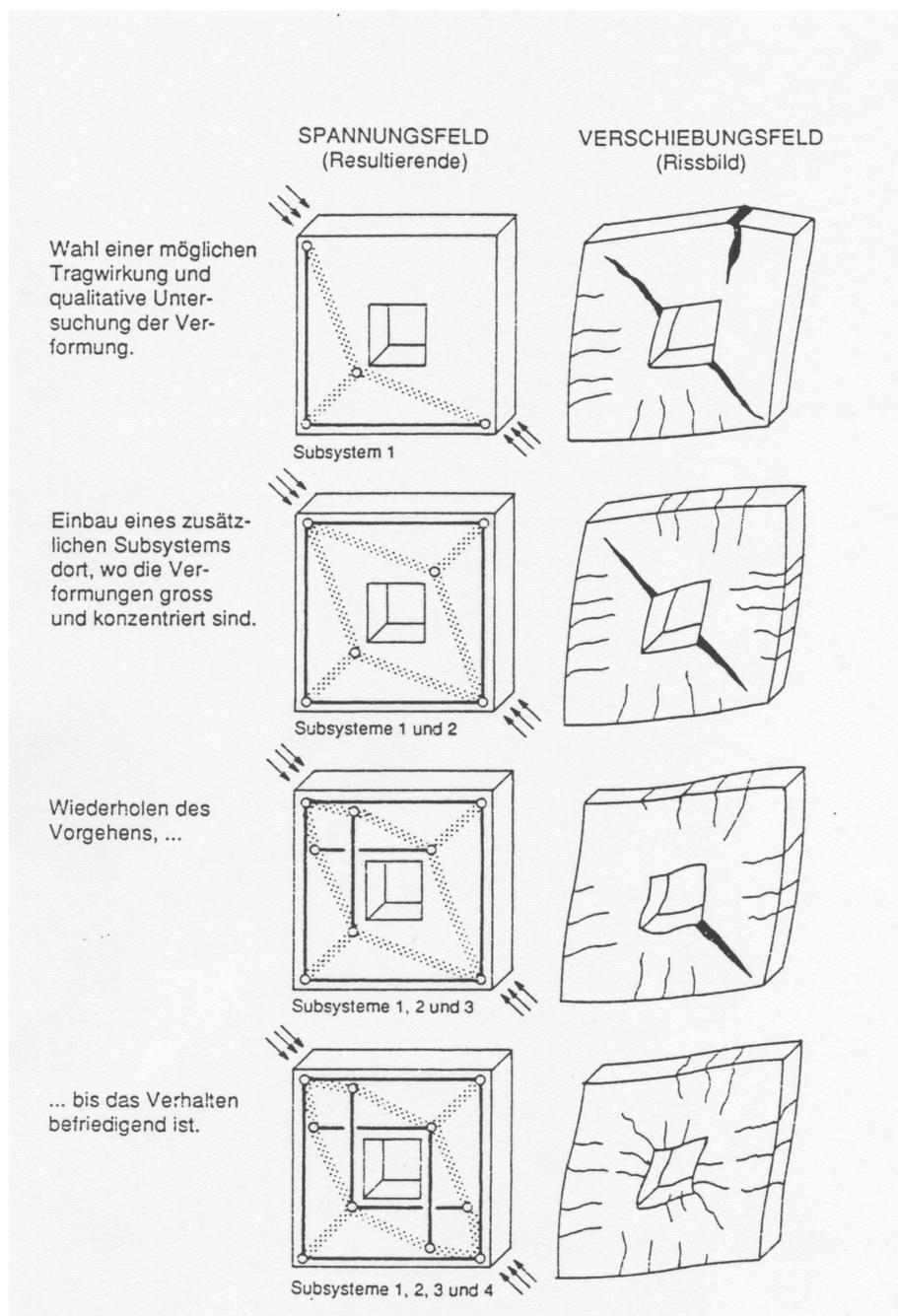


Figura 4.2: Procedimiento para el desarrollo de campos de tensiones satisfactorios

(ver fig. 3.3).

Esta solicitación excéntrica conlleva una curvatura de las dos lajas, de la que se deriva una gran abertura de grieta.

Los dos trozos de la laja separados pueden mantenerse unidos mediante una armadura transversal. Una parte del esfuerzo de compresión longitudinal puede expandirse y experimentar un cambio de dirección por medio de la armadura transversal (fig. 4.8).

La abertura de la fisura longitudinal depende de la armadura transversal. Si, como consecuen-

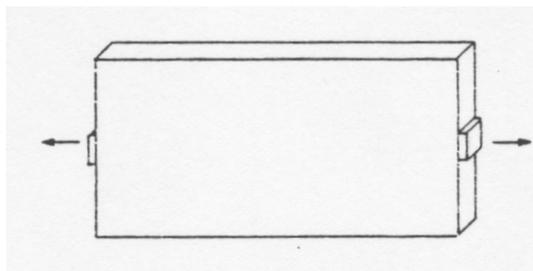


Figura 4.3: Laja sometida a tracción

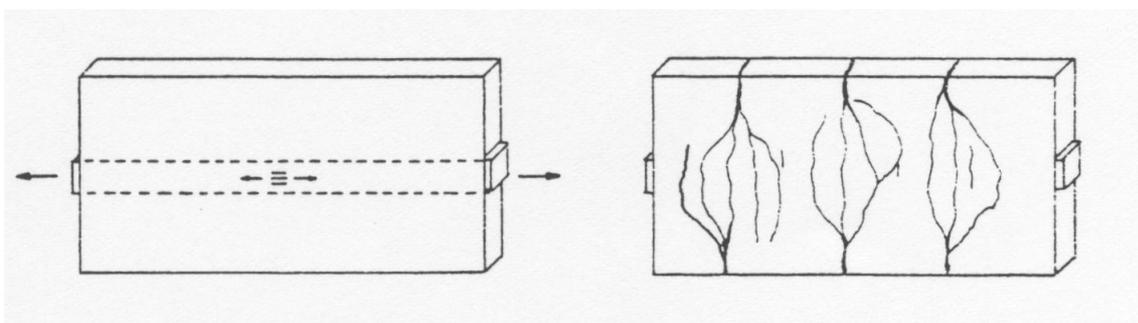


Figura 4.4: Subsistema 1

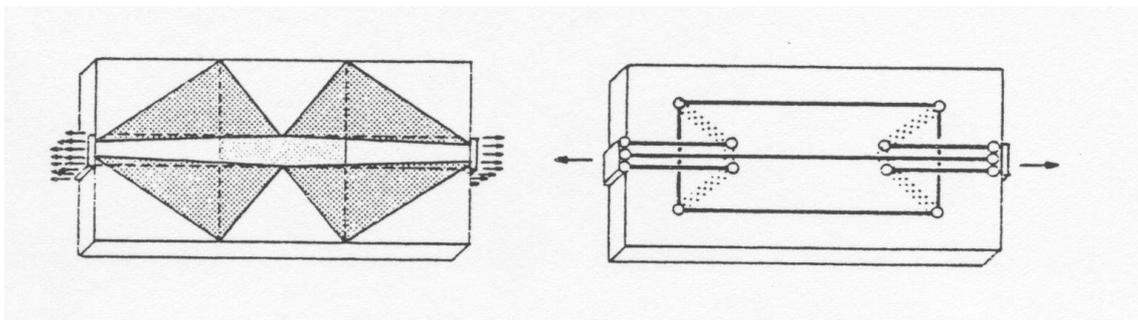


Figura 4.5: Resultante del campo de tensiones

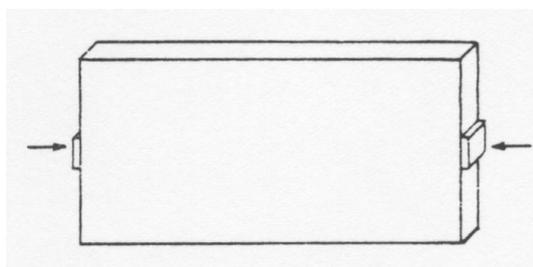


Figura 4.6: Laja en compresión

cia del aumento de la cuantía de la armadura transversal, la fuerza total de compresión puede

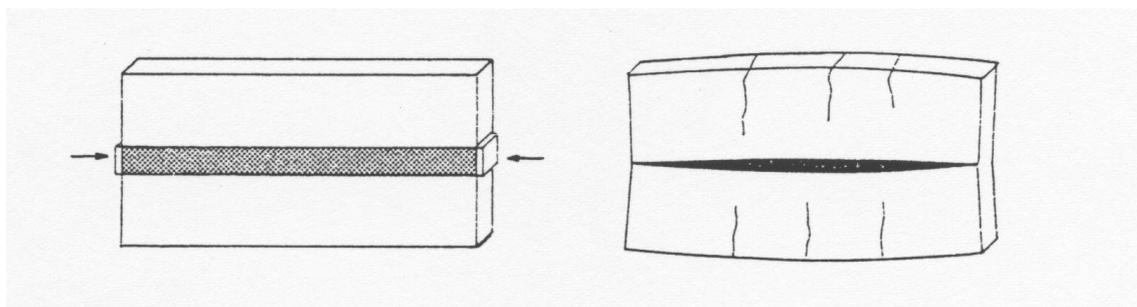


Figura 4.7: Transmisión directa de la fuerza, campo de tensiones y deformaciones en el elemento

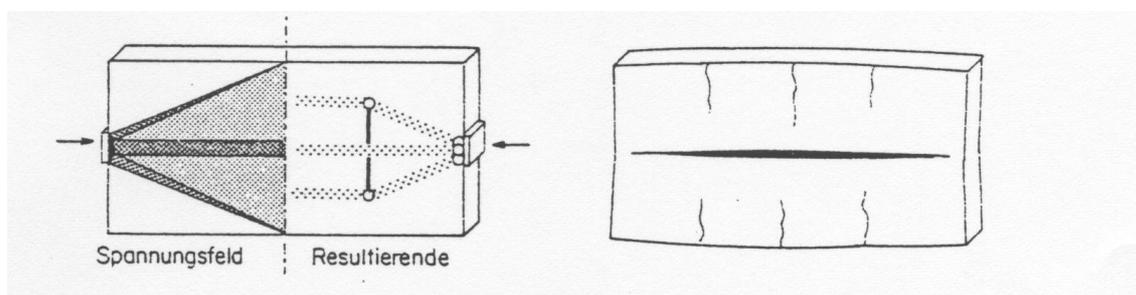


Figura 4.8: Transmisión directa e indirecta de la fuerza, campo de tensiones y deformaciones en el elemento

expandirse, ya no sería necesaria una transmisión directa de la carga y, por tanto, resultaría una abertura menor de fisura (fig. 4.9). En tal caso, el subsistema 1 (transmisión directa de la carga) desaparece prácticamente.

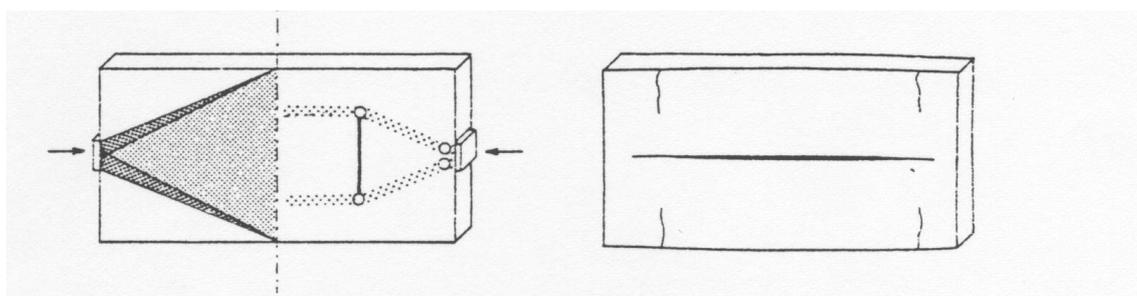


Figura 4.9: Transmisión indirecta de la fuerza, campo de tensiones y deformaciones en el elemento

Si se continúa incrementando la armadura transversal, se consigue que la fisura en la zona central de la laja vuelva a cerrarse. El campo de tensión resultante queda representado en la fig. 4.10.

Se debe tener presente que la armadura transversal sólo se dispone en la zona en la que la fisura permanece abierta. La extensión de esta zona es función de la cuantía y de la geometría de la laja. En el Apéndice A se muestra cómo se pueden estimar mediante hipótesis simplificadas la abertura de la fisura y la extensión de la zona que debe ser armada.

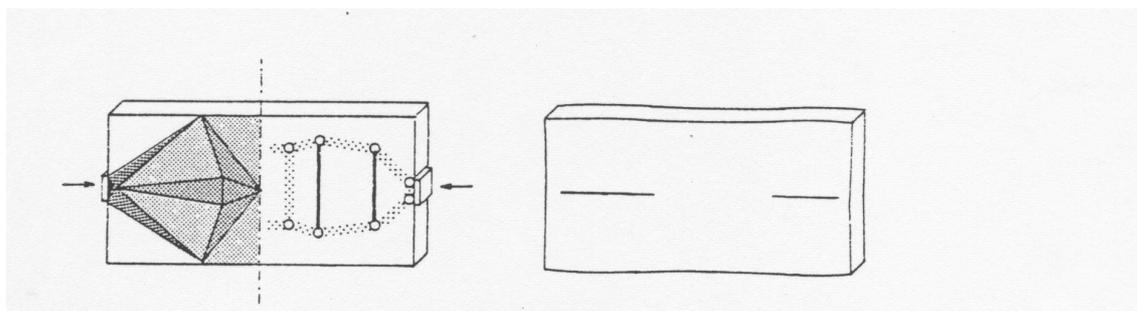


Figura 4.10: Transmisión indirecta de la fuerza con fuerte armadura transversal, campo de tensiones y deformaciones en el elemento

De este modo se satisface sin problema la funcionalidad en condiciones de servicio. Tal como se mencionó en el capítulo 3, una fisura ancha puede ser también problemática, en este caso, con respecto a la carga de rotura. La fig. 4.11 muestra una laja sin armadura transversal sometida a compresión con una fisura longitudinal de abertura importante en su zona central. Como esta fisura no siempre discurre paralelamente a la biela de compresión, una parte del esfuerzo se transmite por engranamiento de los labios de la fisura.

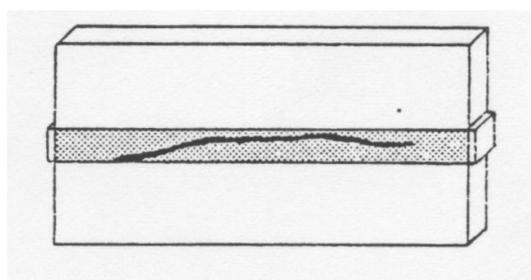


Figura 4.11: Influencia de una fisura de gran abertura sobre la capacidad portante

Para garantizar la seguridad a rotura bastaría un zunchado local de la biela de compresión. Si se dispone de una armadura transversal sobre toda la anchura de la laja (figs. 4.8 y 4.10), quedan garantizadas tanto la funcionalidad en servicio como la seguridad a rotura. Los dos ejemplos tratados en este capítulo presentan una diferencia fundamental sobre cómo se mantienen pequeñas las fisuras:

- En la laja sometida a tracción, la anchura total del conjunto de fisuras queda ya prácticamente fijada por la cuantía de la armadura longitudinal y las fisuras se distribuyen uniformemente.
- Por el contrario, en la laja sometida a compresión, se puede influir sobre la anchura total de las fisuras a través de la armadura transversal.

#### 4.4. Aplicaciones

Los campos de tensión representados en el apartado precedente pueden hacerse análogamente extensivos a todos los casos de dimensionamiento en los que, para un primer diseño del campo

de tensión, se contemplen bielas concentradas.

La fig. 4.12 contiene algunas aplicaciones en las que se muestra el primer diseño del campo de tensión con el cuadro de fisuración estimado y con el campo de tensión definitivo utilizado en el dimensionamiento. Téngase presente que, para el dimensionamiento de estas lajas, es a menudo suficiente un desarrollo cualitativo del campo de tensión. La armadura necesaria para garantizar la funcionalidad en servicio puede ser estimada mediante cálculos aproximados.

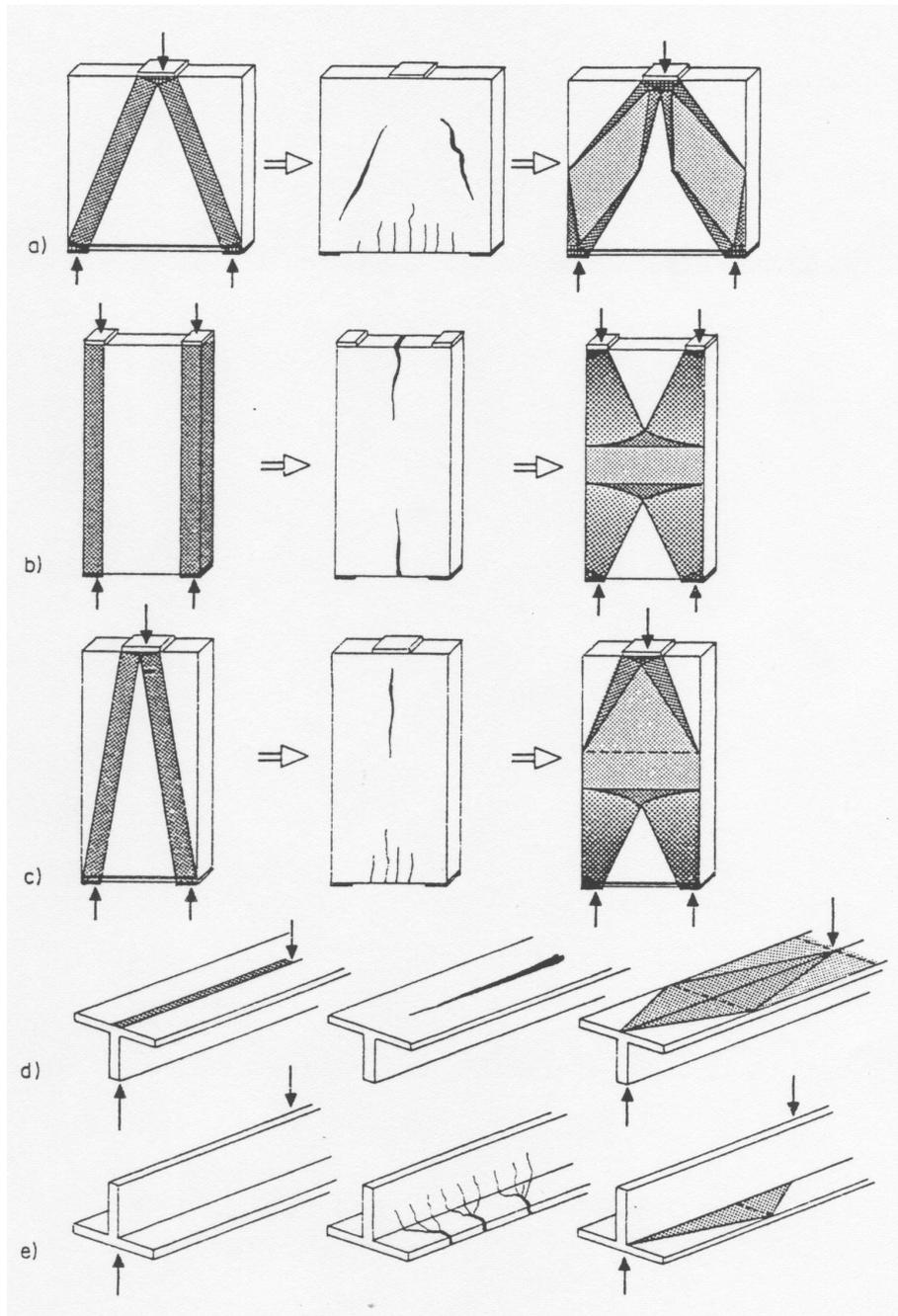


Figura 4.12: Aplicaciones

#### 4.5. Disminución de la resistencia a rotura debido a la presencia de fisuras anchas

En el capítulo 3 se vio que la transmisión total de la carga a través del engranamiento de los labios de la fisura sólo es posible cuando se mantiene la anchura de las fisuras dentro de unos márgenes reducidos.

En casos extremos, puede suceder que en elementos de hormigón armado sin armadura de reparto aparezcan fisuras de gran anchura en la zona en la que debería formarse una biela de compresión. Estas fisuras pueden aparecer como consecuencia de:

- otros modelos previos de transmisión de carga,
- otras cargas previas,
- tensiones residuales.

La redistribución de las fuerzas internas se hace difícil en estos casos, por lo que puede aparecer una rotura prematura. También pueden presentarse problemas cuando una fisura atraviesa una biela de compresión bajo un ángulo pequeño, con lo que la fuerza ha de ser transmitida a través del encaje de los bordes de grieta. Este último caso fue abordado en el apartado 4.3.2 (fig. 4.11).

La fig. 4.13 ofrece un nuevo ejemplo de disminución de la resistencia a rotura como consecuencia de fisuras anchas. Al ir aumentando la carga, el sistema de transmisión va variando. Aparecen en primer lugar unas fisuras más o menos verticales (fisuras de flexión) que tienden a adoptar una dirección horizontal a medida que se encuentran con las fisuras longitudinales de la biela de compresión. Los ensayos realizados con probetas demuestran que no es posible una transmisión total a través de estas fisuras [11].

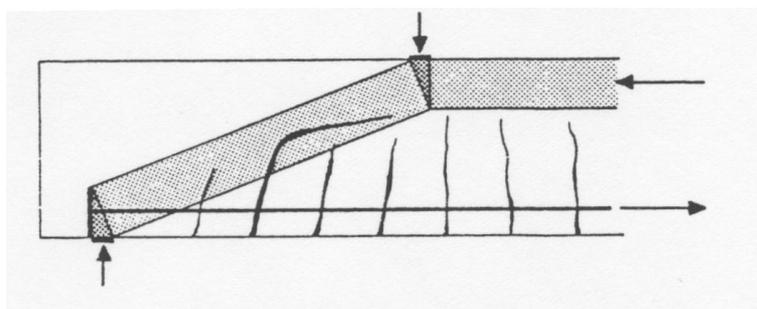


Figura 4.13: Patrón de fisuración y campo de tensiones

Como consecuencia, no se puede formar la biela de compresión representada en la fig. 4.13. Normalmente, tal como se expresó en el capítulo 2, la carga en estas vigas se transmite indirectamente por medio de los estribos. Una transmisión directa sólo sería posible, en este caso, si la anchura de la fisura en la biela inclinada de compresión se mantuviera dentro de unos límites por medio de una armadura de zunchado.

De los dos ejemplos tratados se puede derivar la siguiente conclusión:

Para que la resistencia a rotura no quede afectada por la fisuración, deben evitarse bielas de compresión no zunchadas que se extiendan sobre distancias grandes. El caso más crítico se produce cuando el ángulo entre una biela de compresión y un tirante de tracción es pequeño.

## Capítulo 5

# Campos de tensiones para diferentes elementos y casos de carga

Se presentan a continuación diferentes campos de tensiones (y/o sus resultantes) para diversos problemas comunes en el diseño de estructuras.

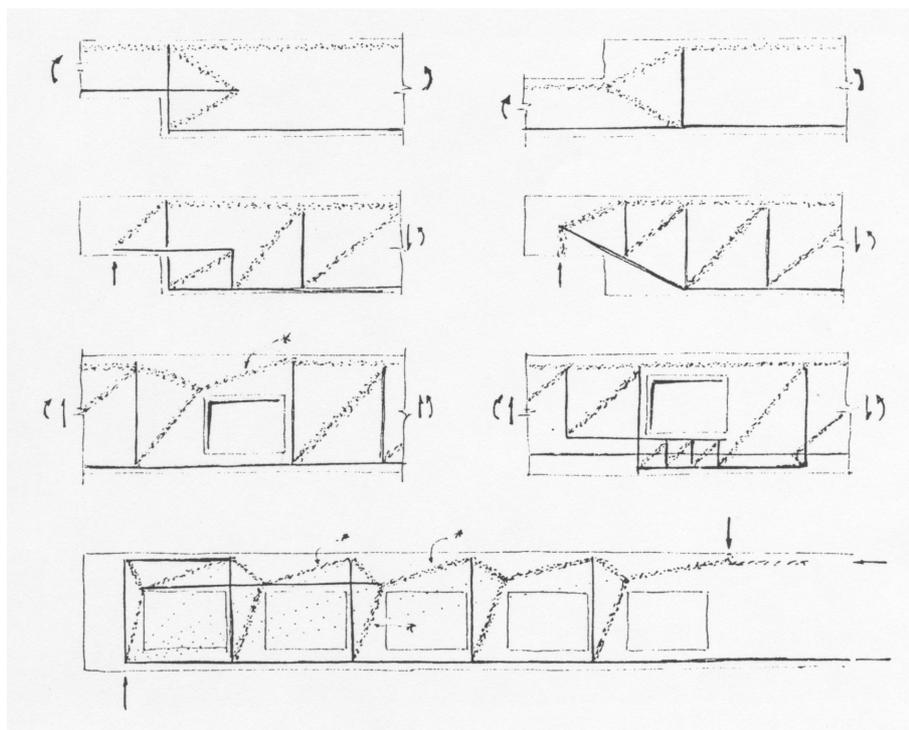


Figura 5.1: Viga con cambios de geometría. Ver capítulos 2 y 4

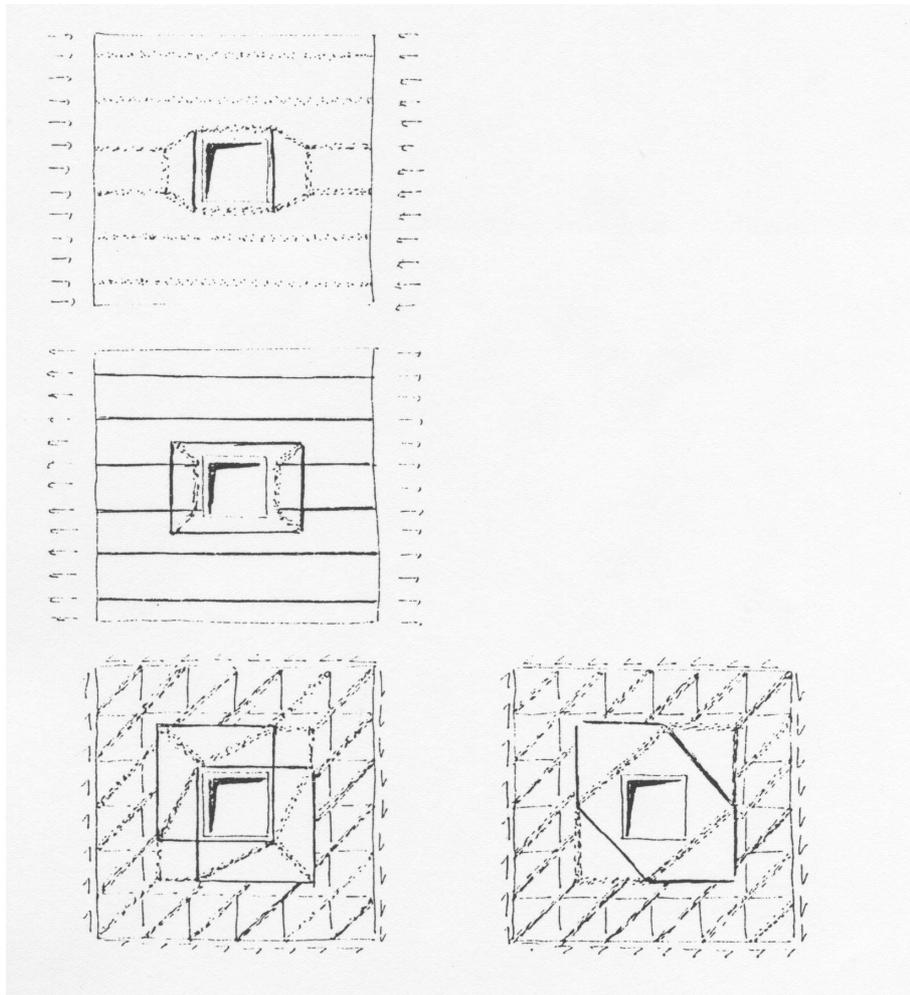


Figura 5.2: Lajas con huecos

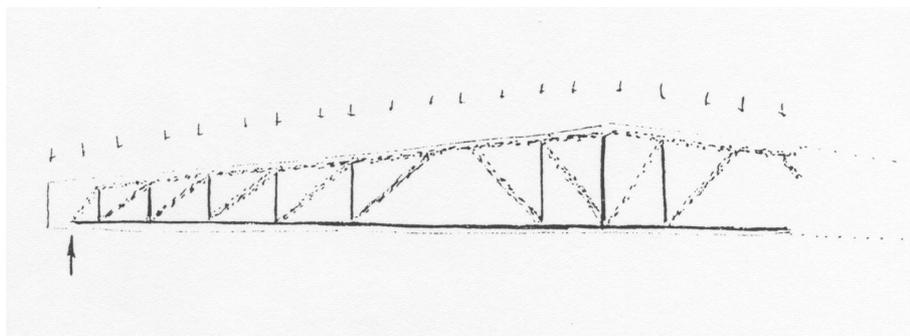


Figura 5.3: Viga con canto variable

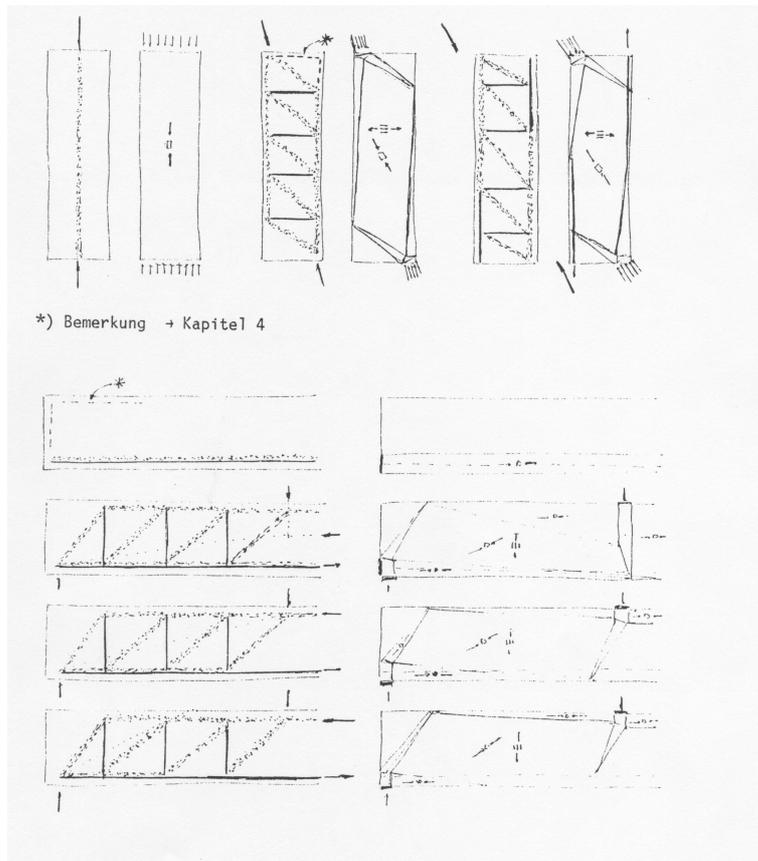


Figura 5.4: Pilares, arcos y vigas pretensadas

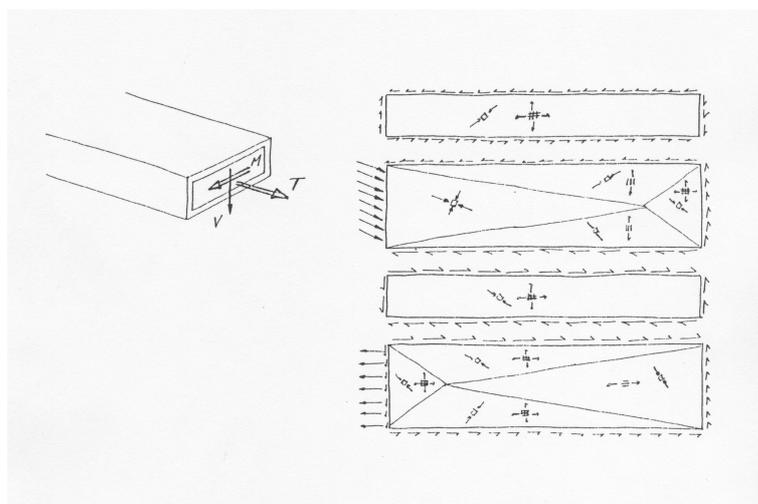


Figura 5.5: Esfuerzos combinados

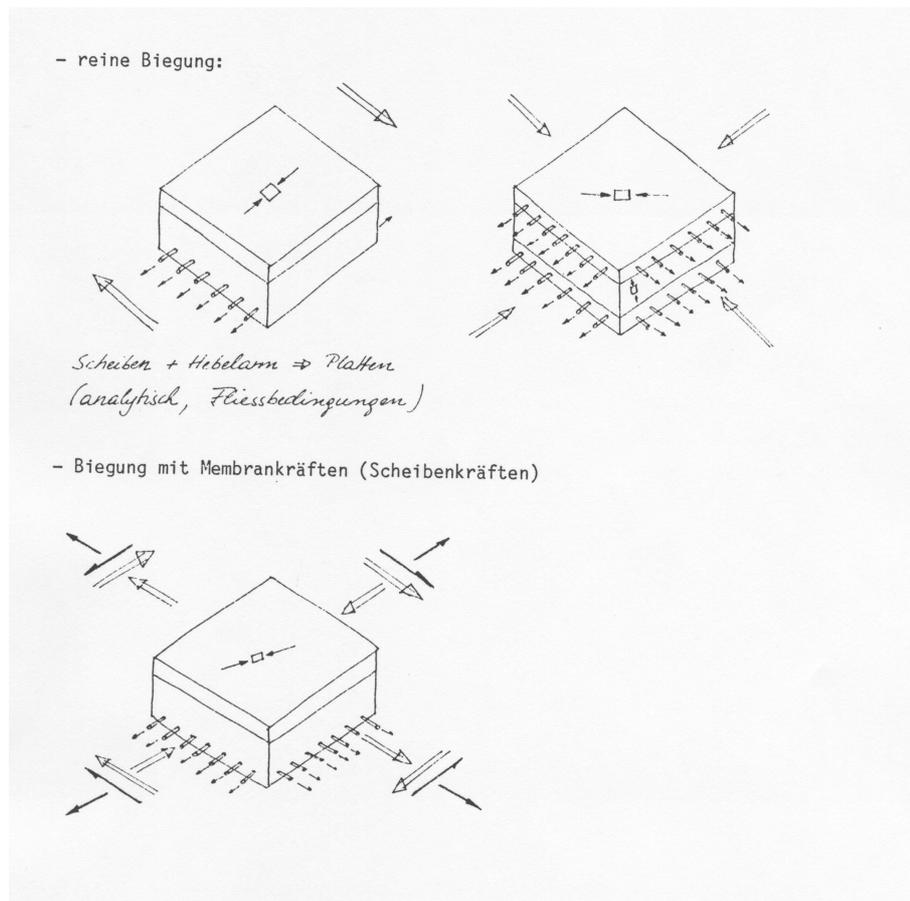


Figura 5.6: Placas y láminas: Flexión pura y flexión compuesta

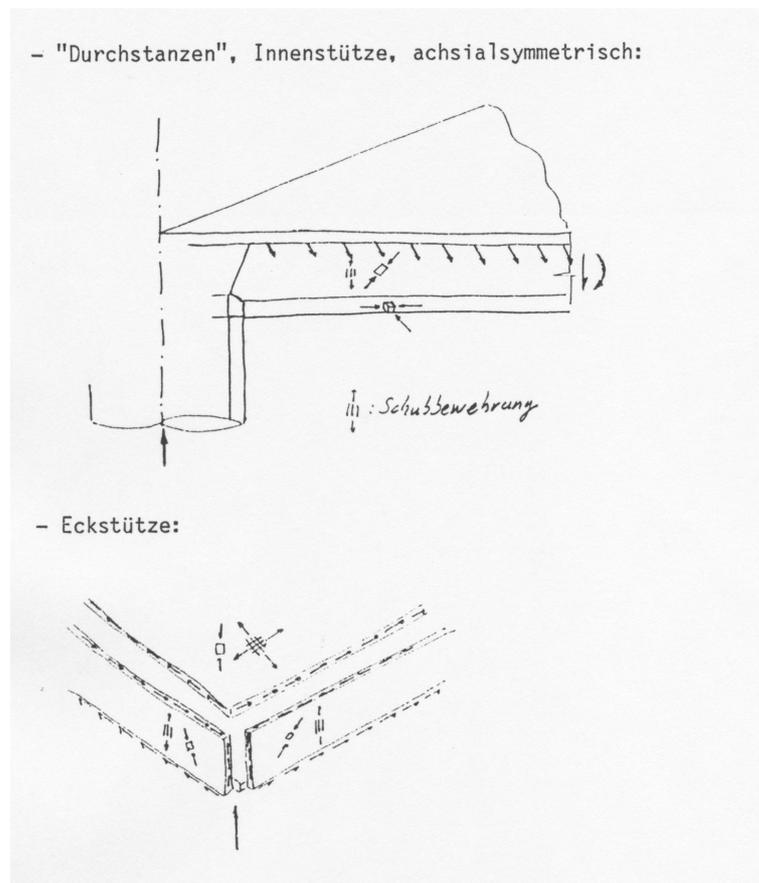


Figura 5.7: Placas con esfuerzos cortantes importantes: Punzonamiento y columna de borde

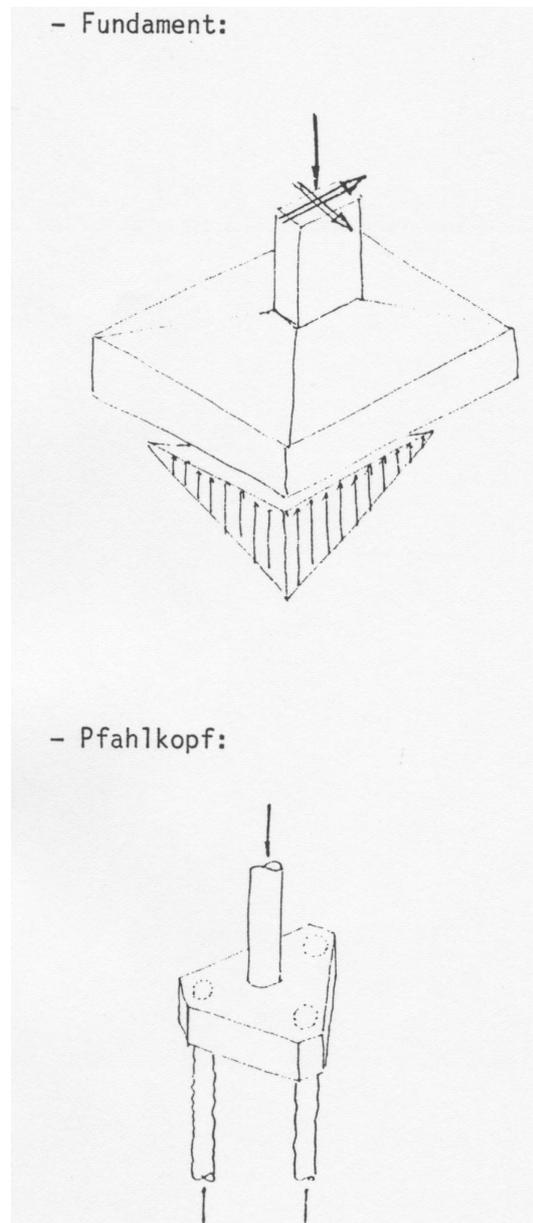


Figura 5.8: Ejemplos tridimensionales: Zapata y encepado

# Bibliografía

- [1] Prager, W., Hodge, P. G., "Theory of Perfectly Plastic Solids", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951
- [2] CEB-FIP, "Code modèle pour les structures en béton", Système international de réglementation technique unifiée des structures. Vol. II, Bulletin d'information N0. 124/125, Paris, 1978
- [3] Ritter, W., "Die Bauweise Hennebique", Schweizerische Bauzeitung 17, 41-43, 49-52, 59-61, 1899
- [4] Mörsch, E., "Der Eisenbetonbau - Seine Theorie und Anwendung", Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, 3. Aufl. 1908, 4. Aufl. 1912, 5. Aufl. 1. Bd., 1. Hälfte, 1920, 2. Hälfte 1922
- [5] Drucker, D. C. "On Structural Concrete and the theorems of Limit analysis", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (IVBH), Zürich, Abhandlungen 21, 49-59, 1961
- [6] Thürlimann, B., Grob, J., Lüchinger, P., "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, April, 1975
- [7] Thürlimann, B., Marti, P., Pralong, J., Zimmerli, B., "Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, April, 1983
- [8] Nielsen, M. P., "Limit Analysis and Concrete Plasticity", Prentice-Hall, New Jersey, 1984
- [9] Chen, W. F., "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1975
- [10] Schlaich, J., Weischede, D., "Ein praktisches Verfahren zum methodischen Bemessen und Konstruieren im Stahlbetonbau", Comité Euro-Internationale du Béton, Bulletin d'Information No. 150, Paris, 1982
- [11] Muttoni, A., "Zur Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1989
- [12] Exner, H., "On the effectiveness Factor in plastic Analysis of Concrete", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (IVBH), Schlussbericht Kolloquium Kopenhagen, Zürich, 1979

- 
- [13] Menne, B., "Zur Traglast der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit Umschnürungsbewehrung", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 285, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1977
- [14] Ferguson, P. M., Thompson, J. N., "Development length of High Strength Reinforcing Bars in bond", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 59, July 1962
- [15] Ferguson, P. M., Thompson, J. N., "Development length for Large High Strength Reinforcing Bars in bond", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 59, July 1962
- [16] Chamberlin S. J., "Spacing of Reinforcement in Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 53, July 1956
- [17] Robinson, J. R., Zsutty, T. C., Guiorgadze, G., Lima, L. J., Jung, H. L., Villatoux, J. P., "La couture des Jonctions par adhérence", annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Sup. N0 318, Paris, 1984
- [18] Chinn, J., Ferguson, P. M., Thompson, J. N., "Lapped splices in Reinforced concrete Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 52, July 1955
- [19] Ferguson, P. M., Breen, J. E., "Lapped splices for High Strength Reinforcing Bars", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 62, July 1965
- [20] Chamberlin, S. J., "Spacing of Spliced Bars in Beams", Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 54, July 1958
- [21] Ferguson, P. M., Briceno, E. A., "Tensile Lap splices - Part 1: Retaining Wall Type, Varying Moment Zone", Research Report 113-2, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, July 1969
- [22] Ferguson, P. M., Krishnaswamy, C. N., "Tensile Lap splices - Part 2: Design Recommendations for Retaining Wall splices and Large Bar Splices", Research Report 113-3, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, April 1971
- [23] Thompson, M. A., Jirsa, J. O., Breen, J. E., Meinheit, D. F., "The Behavior of Multiple Lap Splices in Wide Sections", Research Report 154-1, Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, February 1971
- [24] Tepfers, R., "A theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for deformed bars" Publication 73.2, Division of concrete Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg
- [25] Rathkjen, A., "Forankringsstyrke af armeringsjern ved bjaekeunderstotninger", Rapport 7203, DIAB Aalborg, Ren & Anvendt Mekanik, 1972
- [26] Hess U., "The anchorage of reinforced bars at supports", Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (IVBH), Kolloquium Kopenhagen, 309-316, Zürich, 1979
- [27] Stucki, D., Thürlimann, B., "Eckbereiche von Rahmen und Wänden", Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich
- [28] Muttoni, A., Fernández Ruiz, M., "Dimensionamiento y verificación del hormigón estructural mediante el método de los campos de tensiones", Hormigón y Acero, Madrid, en revisión, 2006

- 
- [29] Muttoni A., Schwartz J., Thürlimann B., “Bemessen und Konstruieren von Stahlbetontragwerken mit Spannungsfeldern”, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1988
- [30] Muttoni A., Schwartz J., Thürlimann B., “Design of Concrete Structures with Stress Fields”, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston and Berlin, 1996
- [31] Muttoni A., Schwartz J., Thürlimann B., “Bemessung von Betontragwerken Mit Spannungsfeldern”, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston and Berlin, 1996

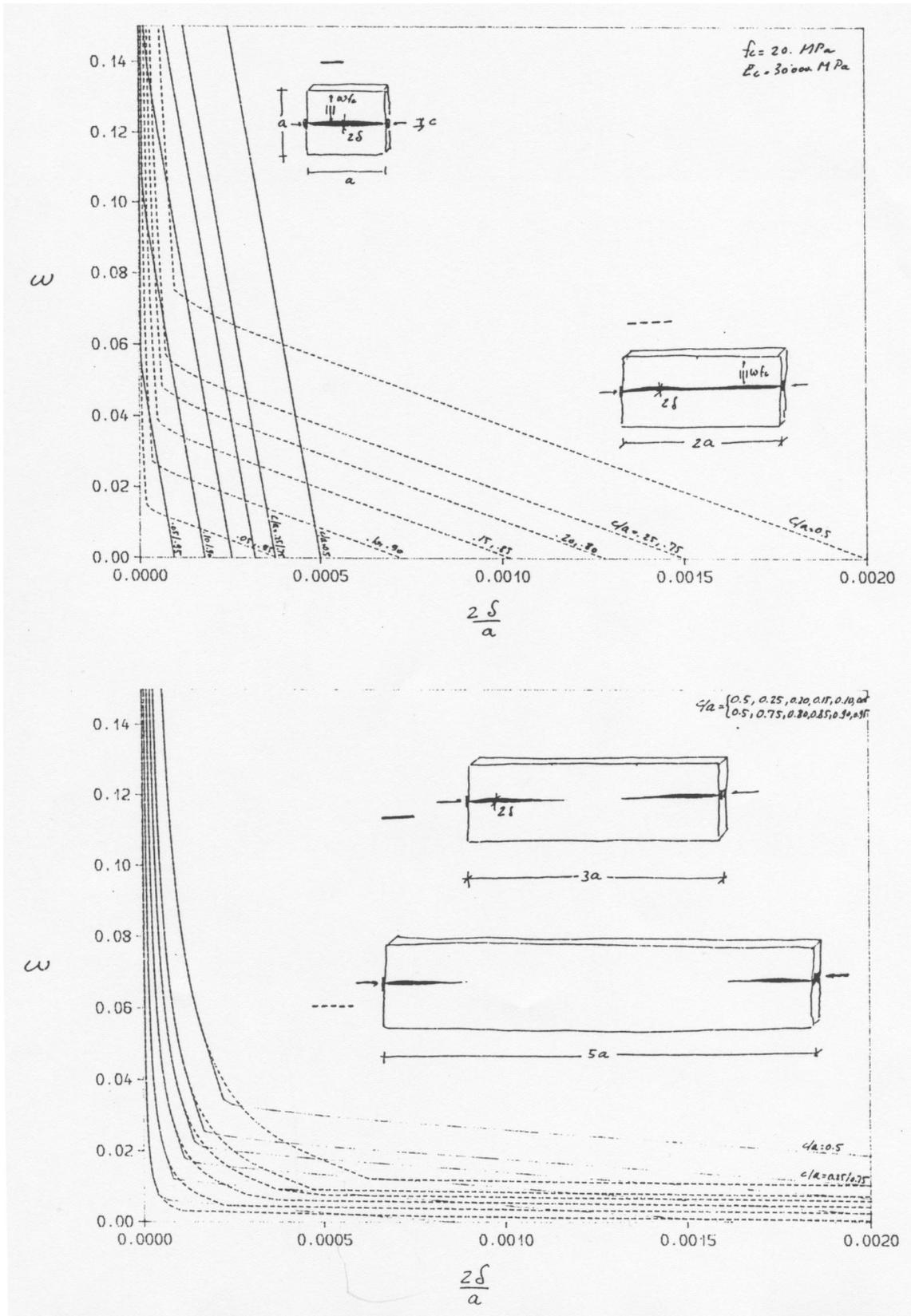


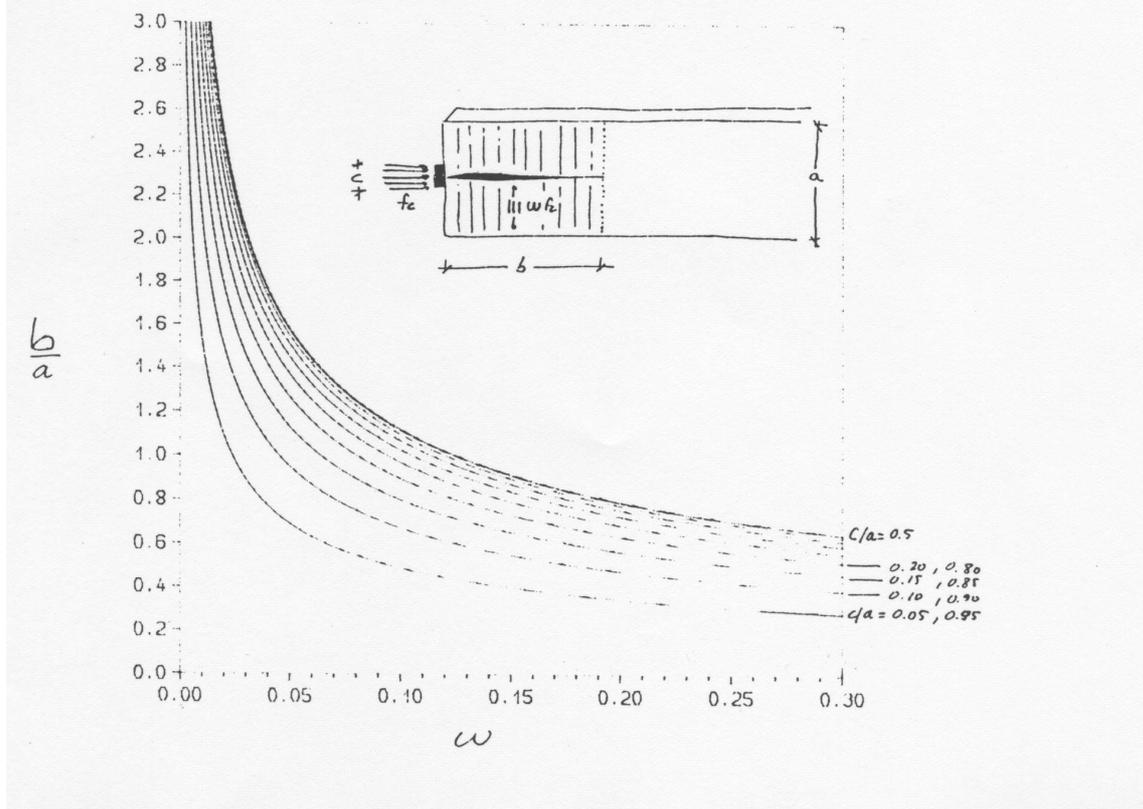
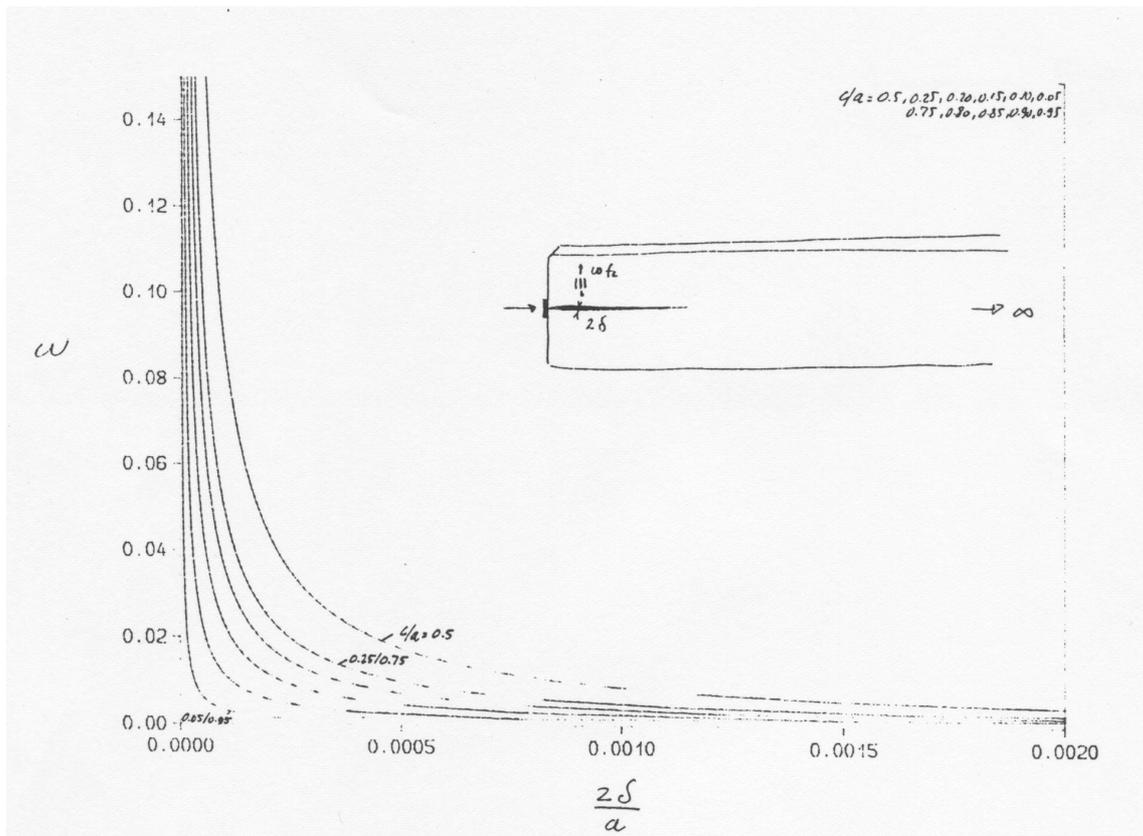
## Apéndice A

# Cuantía de armadura en lajas comprimidas en función de su deformación

En este apéndice se detallan cuatro ábacos mediante los cuales puede estimarse la cuantía de armadura a disponer en una laja comprimida. Los ábacos hacen referencia a diferentes configuraciones geométricas, y responden al criterio expuesto en el apartado 4.3.2.

La determinación de la armadura se realiza limitando la abertura de fisura máxima deseada en la pieza ( $\delta$ ) y seleccionando el caso geométrico pertinente.







## Apéndice B

# Ejemplo de aplicación del método de los campos de tensiones

En este apéndice se presenta la aplicación del método de los campos de tensiones a un caso concreto tomado de la referencia [28].

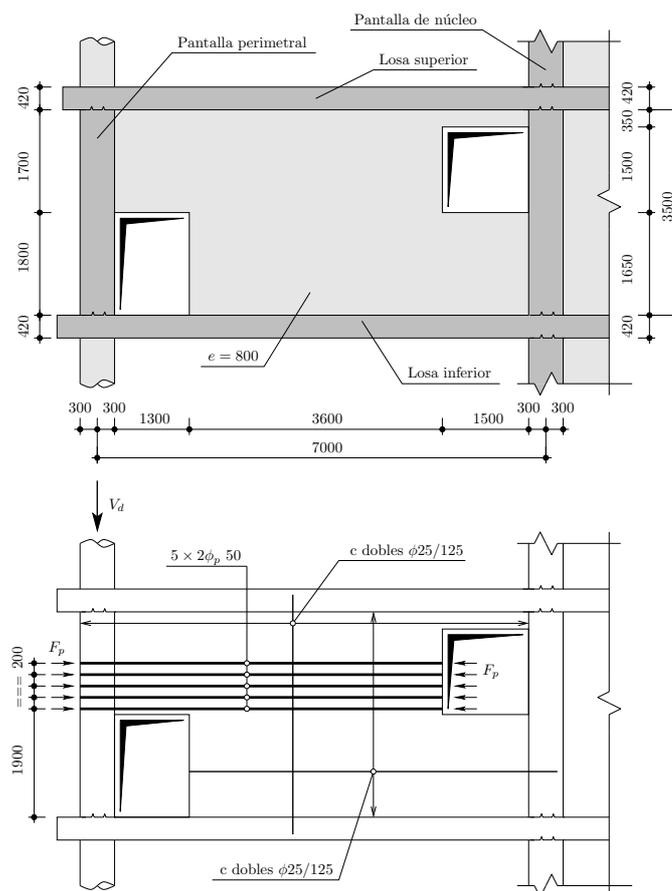


Figura B.1: Geometría y esquema de armado y de acciones sobre la viga cargadero (cotas en mm)

La pieza en estudio representa un elemento que podría corresponder a una viga de transmisión

de carga en un cinturón de rigidez de un edificio con una altura importante. La geometría del elemento se presenta en la fig. B.1. La pieza se supone ejecutada en hormigón HP-70 ( $f_{ce} = 52$  MPa) y armada longitudinal y transversalmente con cercos dobles  $\phi 25$  mm cada 125 mm teniendo además un pretensado compuesto por 10 barras  $\phi 50$  ( $F_{uk} = 2,0$  MN;  $F_{yk} = 1,6$  MN;  $F_{p0} = 1,4$  MN por barra).

Del análisis de cargas de la estructura se obtienen dos casos determinantes, correspondiendo a una fuerza vertical aplicada en el voladizo de la pieza de  $Vd = \pm 13$  MN.

Primeramente se calcula el caso de carga de 13 MN hacia abajo. Se comienza trabajando con una solución de apoyo directo con bielas a una tensión de 35 MPa ( $= f_{ce}/\gamma_c$ ) al encontrarse el hormigón en una situación de compresión uniaxial sin tracciones transversales.

En la fig. B.2 pueden apreciarse los serios problemas de anclaje que se tienen para esta solución en el nudo CCT donde se introduce la carga, lo que requeriría un fuerte pretensado de losa y armadura pasiva correctamente anclada (el resto de nudos son de tipo CCC y por lo tanto no presentan problemas particulares).

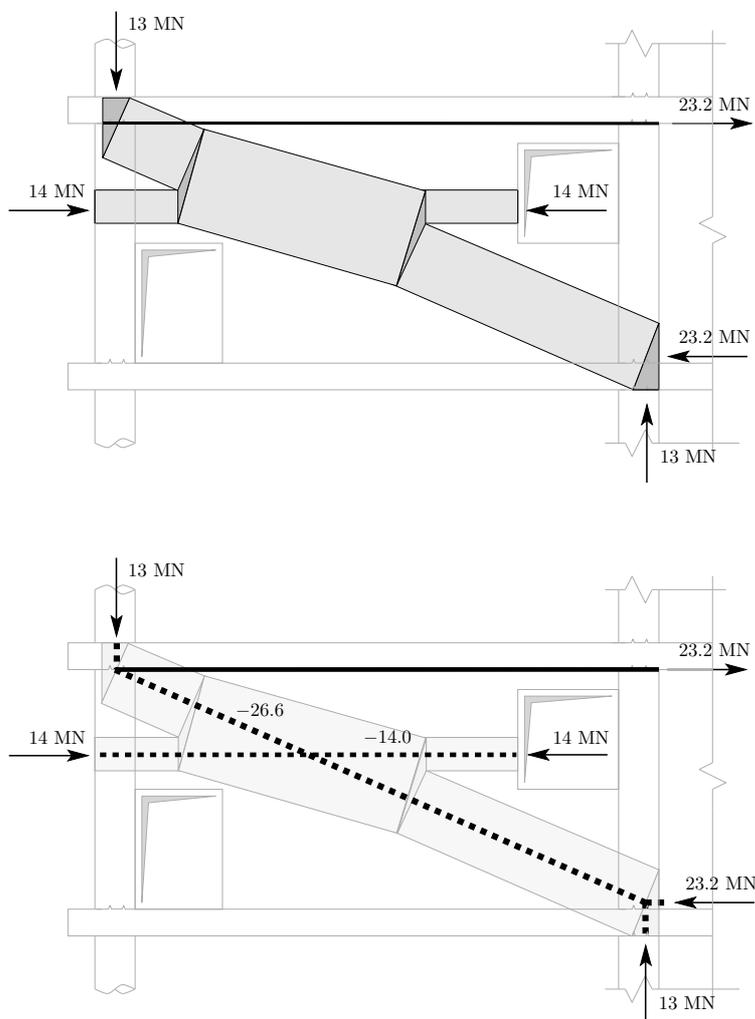


Figura B.2: Modelo de campos de tensiones y modelo equivalente de bielas y tirantes para el caso de carga hacia abajo con apoyo directo

Esta solución puede refinarse suponiendo un apoyo indirecto (fig. B.3) el cual es mucho más

favorable y sencillo para el anclaje de las fuerzas del nudo CCT donde se introduce la carga. En este caso la biela intermedia debe ser verificada con una tensión de  $0,80 \cdot f_{ce}/\gamma_c$  al existir una tracción prácticamente perpendicular a la misma (en el esquema esta verificación se omite al existir espacio suficiente sin utilizar alrededor de la biela).

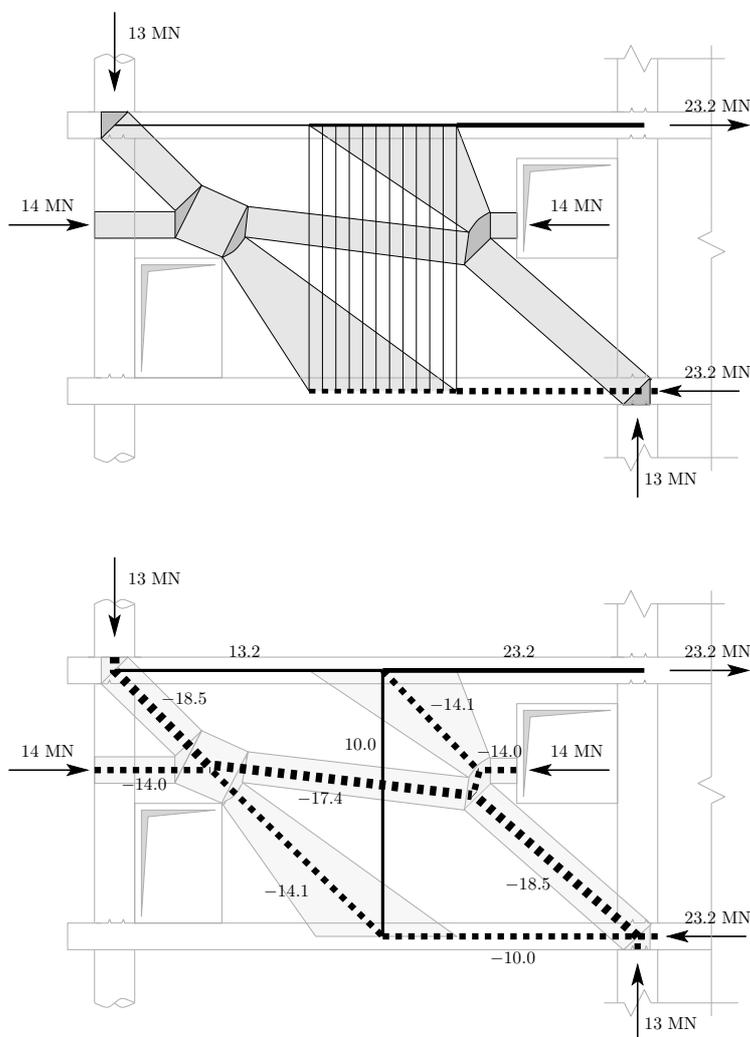


Figura B.3: Modelo de apoyo indirecto de campos de tensiones y modelo equivalente de bielas y tirantes para el caso de carga hacia abajo

En ambos casos, se muestra también el modelo equivalente de celosía obtenido disponiendo la resultante de las tensiones de los diferentes elementos.

En cuanto al caso de carga hacia arriba, la solución es ligeramente más compleja. Un posible modelo de campos de tensiones se detalla en la fig. B.4. En este caso, debido a que los nudos no son hidrostáticos, se obtienen los esfuerzos en los elementos mediante la realización de cortes en la estructura, aislando subsistemas y planteando su equilibrio tal y como se muestra en la fig. B.5. Con este procedimiento puede calcularse tanto las armaduras necesarias como las tensiones en las bielas de hormigón (debiendo ser inferiores a  $0,60f_{ce}/\gamma_c$  al existir armaduras traccionadas en ángulos próximos a  $45^\circ$  respecto de las bielas).

El modelo de celosía es también complejo (ver fig. B.4) y para su elaboración se obtiene una

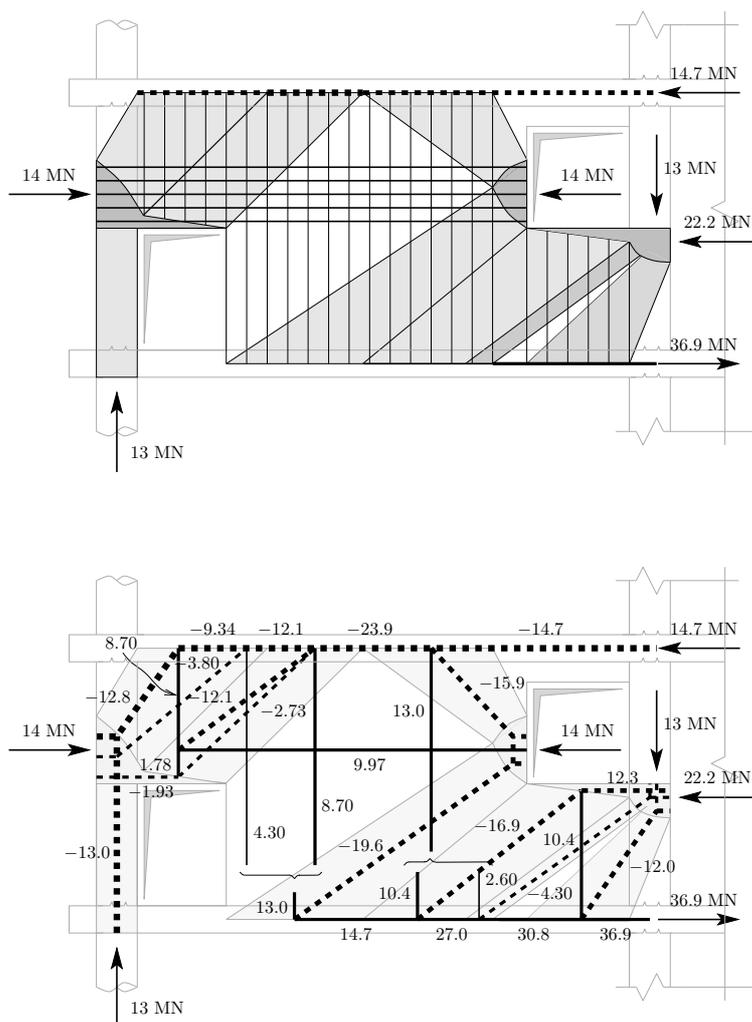


Figura B.4: Modelo de campos de tensiones y modelo equivalente de bielas y tirantes para el caso de carga hacia arriba

buena guía usando el anterior modelo de campos de tensiones.

Puede observarse que la disposición de armaduras inclinadas sería muy eficaz en este caso de carga. Sin embargo, dichas armaduras serían difíciles de activar en el caso de carga hacia abajo, por lo que un esquema de armado ortogonal parece más razonable.

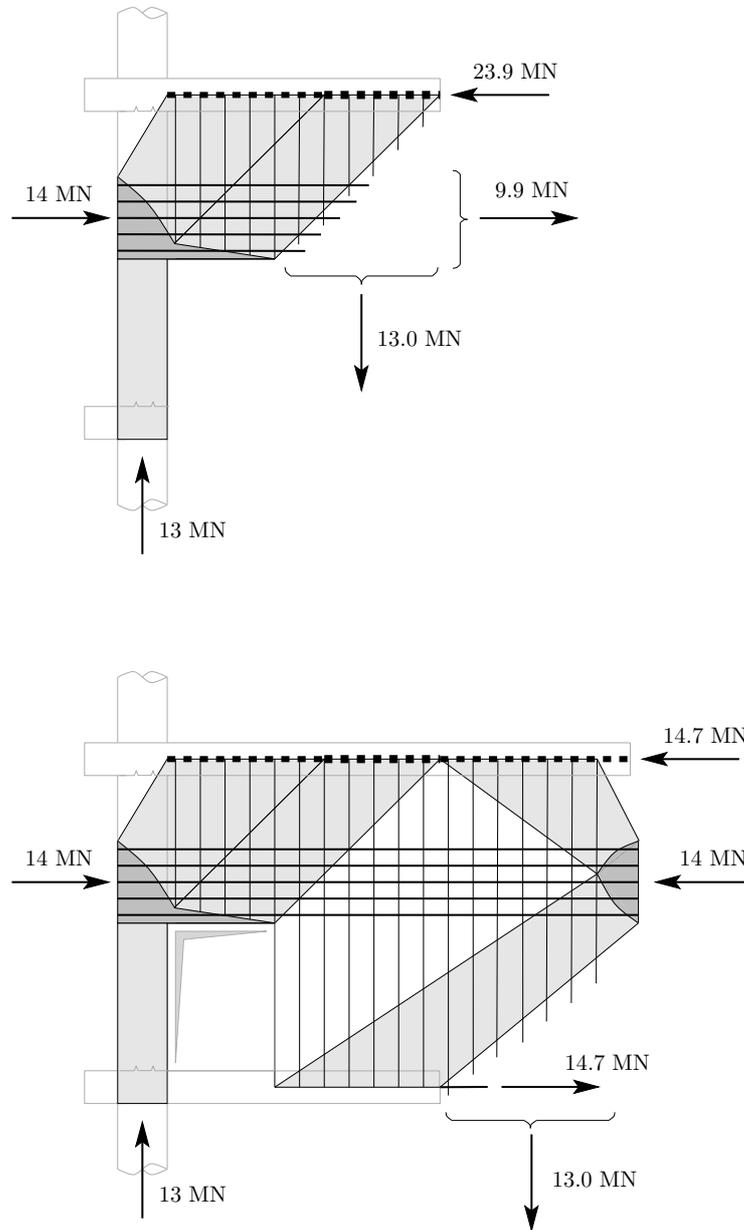


Figura B.5: Obtención de fuerzas en tirantes y bielas mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio en diferentes cortes (resolución seccional)

