

Pour donner un ordre d'idée, l'espace articulaire a une dimension, notée N , de l'ordre de trente à quarante pour un squelette avec une colonne vertébrale simplifiée et sans les mains. Ces dernières rajoutent à elles seules environ cinquante autres degrés de mobilité. De l'autre côté l'ensemble des contraintes possède une dimension notée M . Chaque contrainte contrôle de une à trois dimensions de la position et/ou de l'orientation d'une partie du corps appelée dorénavant effecteur. Le système articulé est redondant si le nombre de degrés de liberté N est supérieur à la dimension des contraintes M . Dans l'exemple de la *Figure 1* le système est pleinement redondant puisque le nombre de degrés de mobilité est 43 tandis que la dimension totale des contraintes est 15 répartie sur quatre niveaux de priorités.

La non-linéarité du problème et la redondance du système nous amène naturellement à adopter l'approche de la cinématique inverse variationnelle qui consiste à linéariser le système et à rechercher une solution sous forme d'une variation de l'état courant du système [Boulic et Baerlocher, 00], [Boulic et Baerlocher, 01]. Une structure de boucle permet de converger, sous certaines conditions, vers une solution globale à ce problème de positionnement et d'optimisation de posture au sens large. Dans le cas général, la cinématique inverse variationnelle s'exprime sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte qui est résolu par des méthodes de programmation non-linéaire. Pour des applications interactives comme celle qui nous intéresse ici, une optimisation locale est bien moins coûteuse qu'une optimisation globale même si le risque d'obtenir un minimum local de la fonction de coût ne peut pas être complètement écarté. En optimisation de posture [Zhao et Badler, 94] minimize une fonction non-linéaire décrivant le degré de satisfaction des contraintes en prenant en compte un ensemble de contraintes égalité et inégalité pour modéliser les couplages et les limites articulaires.

Nous rappelons les bases de la cinématique inverse variationnelle dans la section suivante puis nous présentons la généralisation du calcul des projecteurs pour la mise en oeuvre de priorités relatives entre les contraintes. Une méthode plus efficace de calcul des projecteurs est décrite ouvrant la voie à une plus large utilisation de l'approche variationnelle.

2. Cinématique Inverse garantissant P niveaux de priorités

2.1. Pondération ou priorité ?

La cinématique inverse variationnelle se prête bien aux cas redondants. Si on veut optimiser plusieurs contraintes simultanément, deux approches sont possibles pour relativiser leur influence respective: il s'agit soit de pondérer chaque contrainte (*Figure 2.a*), soit de leur attribuer une priorité (*Figure 2.b*). La première solution est connue depuis longtemps, elle présente l'avantage de la simplicité [Badler et al., 93]. Cependant, à moins d'attribuer un poids infini à une contrainte donnée il n'est pas possible d'imposer sa réalisation par rapport aux autres. C'est pourquoi nous avons travaillé sur l'approche complémentaire des priorités. Dans la suite de cette section nous rappelons brièvement la formule générale et l'approche à deux niveaux de priorité de [Hanafusa et al., 81] avant d'introduire la formulation récursive de l'architecture à plusieurs niveaux de priorités. Pour une introduction plus détaillée on se reportera à [Boulic et Baerlocher, 01], [Baerlocher 01].

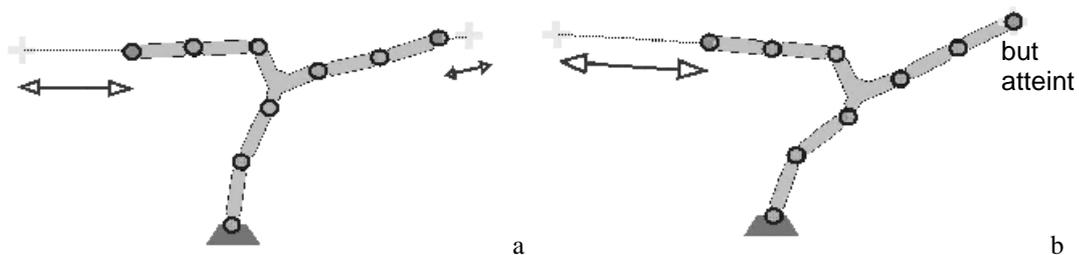


Figure 2: Solution avec pondération (a) ou priorité (b)

2.2. Architecture à deux niveaux de priorités

C'est le contexte le plus simple ; Le Jacobien \mathbf{J} rassemble les dérivées partielles de toutes les contraintes cartésiennes \mathbf{x} par rapports aux degrés de libertés θ : c'est une matrice $M \times N$. Le calcul du Jacobien dépend du type de contrainte (position, orientation, autres...) et du paramétrage retenu pour les articulations [WAT92],[BAE01]. Sa pseudo-inverse \mathbf{J}^+ fournit la variation $\Delta\theta$ de norme minimale pour une variation désirée $\Delta\mathbf{x}$. La forme générale de la solution est:

$$\Delta\theta = J^+ \Delta x + P_{N(J)} \Delta\alpha \quad (1)$$

où $P_{N(J)}$ est l'opérateur de Projection sur le Noyau de J , noté $N(J)$. On a :

$$P_{N(J)} = I - J^+ J \quad (2)$$

Le vecteur $\Delta\alpha$ est en général le gradient d'une fonction de coût $g(\theta)$ exprimée dans l'espace articulaire. La projection de $\Delta\alpha$ sur $N(J)$ enlève la composante susceptible de perturber la contrainte sur x (**Figure 3b**). De nombreuses fonctions de coût ont été proposées pour l'optimisation de postures [Boulic et al., 97] [Monzani et al., 00].

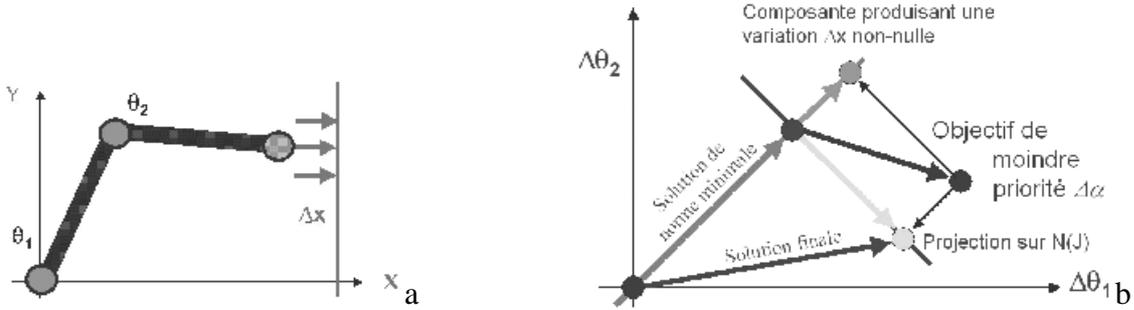


Figure 3: système redondant à optimiser possédant deux degrés de mobilité pour une seule dimension contrôlée notée x (a), partition de l'espace des solutions variationnelles entre le Noyau de J et son complémentaire l'espace image de J^+ (b)

Par construction, la solution (1) présente l'inconvénient de réaliser imparfaitement $\Delta\alpha$ du fait de la projection sur $N(J)$. Une approche plus intéressante a été proposée [Hanafusa et al., 81] pour l'optimisation de deux contraintes cartésiennes Δx_1 et Δx_2 à deux niveaux de priorités distincts. La solution globale comporte les contributions de chaque niveau de priorité, notées respectivement $\Delta\theta_1$ et $\Delta\theta_2$, sous la forme :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$$

$$\Delta\theta = J_1^+ \Delta x_1 + [J_2(I - J_1^+ J_1)]^+ (\Delta x_2 - J_2(J_1^+ \Delta x_1)) \quad (3)$$

Le sens de cette formule apparaît mieux avec la **Figure 4a**. Tout d'abord le terme de droite est une compensation de la contrainte de moindre priorité Δx_2 . En effet, comme dans la **Figure 3b**, la pseudo-inverse J_1^+ associée à la contrainte prioritaire fournit une variation de norme minimale $J_1^+ \Delta x_1$. Cette variation a une influence sur l'autre contrainte, influence que nous pouvons quantifier en la projetant sur l'espace image de J_2^+ (vecteur *Effet sur Δx_2* dans la **Figure 3b**). Cette influence de Δx_1 sur Δx_2 est soustraite de Δx_2 et le résultat est alors projeté dans l'espace des variations articulaires par un nouveau projecteur. Il s'agit de la pseudo-inverse de la restriction de J_2 au Noyau de J_1 (obtenue en multipliant J_2 par $P_{N(J_1)}$). En d'autres termes, cette pseudo-inverse ramène une variation articulaire appartenant au noyau de J_1 , plus précisément celle qui, projetée sur l'espace image de J_2^+ , réalise la compensation de Δx_2 . Ceci explique la projection oblique sur $N(J_1)$ dans la **Figure 4**. La solution finale accumule simplement les deux contributions.

L'équation (3) présente cependant une singularité, appelée singularité algorithmique, qui apparaît lorsque les deux contraintes Δx_1 et Δx_2 agissent dans la même direction. Dans ce contexte la norme de la solution calculée pour Δx_2 croît vers l'infini (**Figure 4b**). Ce problème peut être traité de manière élégante par une technique de régularisation limitant la norme de $\Delta\theta_2$. Pour cela, un paramètre λ défini par l'utilisateur, amortit le comportement des valeurs singulières d'un jacobien J dans le voisinage de la singularité [MAC 90] (détails en annexe I). Dans la suite de cet article nous notons ce type de pseudo-inverse $J^{+\lambda}$ pour le distinguer des pseudo-inverses classiques qui sont toujours requises pour calculer les projecteurs $P_{N(J)}$.

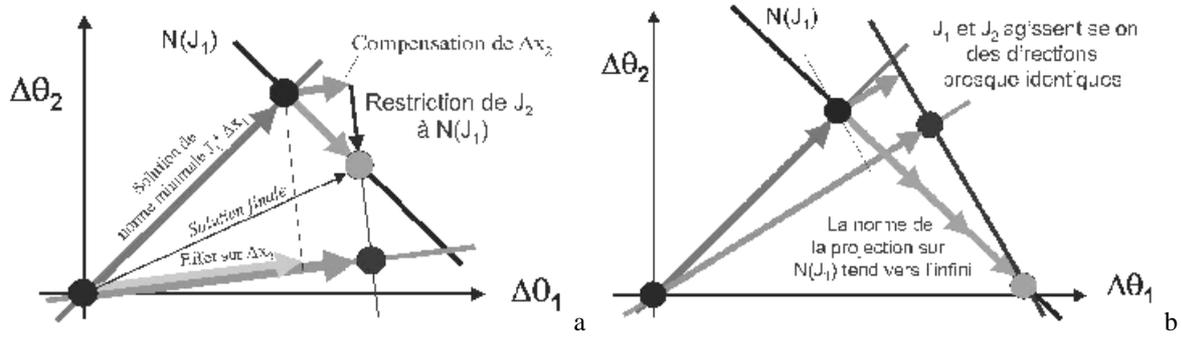


Figure 4: Construction de la solution selon l'approche de [Hanafusa et al., 81](a), Comportement de la solution au voisinage de la singularité algorithmique liée à cette approche (b)

2.3. Architecture à plusieurs niveaux de priorités

Les concepts détaillés à la section précédente se généralisent à un nombre arbitraire de priorité [Siciliano et Slotine, 91]. Pour mieux présenter cette généralisation, nous pouvons réécrire la contribution de moindre priorité $\Delta\theta_2$ en faisant apparaître explicitement la solution prioritaire $\Delta\theta_1$:

$$\Delta\theta_2 = (J_2 P_{N(J_1)})^{+\lambda} (\Delta x_2 - J_2 \Delta\theta_1) \quad (4)$$

Pour achever la généralisation à plus de deux niveaux, nous devons introduire le *Jacobien augmenté de niveau k* J_k^A qui empile tous les Jacobiens partiels J_k du niveau 1 jusqu'au niveau k. Par exemple, un Jacobien partiel peut contrôler une position et/ou une orientation d'effecteur [Watt et Watt, 92], tandis qu'un autre Jacobien partiel contraint la position du centre de masse [Boulic et al., 97].

A ce stade, il est important de remarquer que la minimisation d'une fonction de coût peut aussi s'intercaler entre la minimisation des contraintes cartésiennes habituelles. En effet, il est possible de construire le Jacobien associé à une fonction de coût à minimiser $g(\theta)$ en y rassemblant les dérivées partielles $\delta g / \delta \theta_i$ dans une matrice ligne. La contrainte associée g est purement qualitative (par exemple l'attraction vis à vis d'une posture privilégiée se traduit par une fonction de coût qui est la somme des carrés des erreurs) et sa variation désirée doit prendre la forme :

$$\Delta\theta_2 = -\beta \cdot g(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \beta \ll 1. \quad (5)$$

Le Jacobien augmenté permet de construire le projecteur sur le Noyau $N(J_k^A)$ de l'ensemble des contraintes prioritaires jusqu'au niveau k inclus. La contrainte de moindre priorité de niveau k+1, est réalisée sur la restriction de J_{k+1} au Noyau $N(J_k^A)$. L'expression des solutions $\Delta\theta_k$ devient vite complexe et il est préférable d'exprimer la solution générale sous forme d'une boucle accumulant les solutions partielles, en commençant par la plus haute priorité. On a $\Delta\theta_0 = 0$ et $P_{N(J_0^A)} = I_n$

pour $k=1$ jusqu'à p (nombre de niveaux de priorité) :

$$\Delta\theta_k = (J_k P_{N(J_{k-1}^A)})^{+\lambda_k} (\Delta x_k - J_k \Delta\theta_{k-1}) \quad (6)$$

$$P_{N(J_k^A)} = I_n - J_k^{A+} J_k^A \quad (7)$$

Dans l'approche de [Siciliano et Slotine, 91] le projecteur est recalculé complètement pour chaque niveau de priorité ce qui induit un coût calcul en $O(p^2)$. Nous avons proposé un calcul récursif qui permet de réduire le coût à l'ordre $O(p)$ en adoptant la formule [Baerlocher et Boulic, 98]:

$$P_{N(J_k^A)} = P_{N(J_{k-1}^A)} - (J_k P_{N(J_{k-1}^A)})^+ (J_k P_{N(J_{k-1}^A)}) \quad (8)$$

La structure générale de l'algorithme est indiquée ci-contre à l'aide de 3 boucles imbriquées :

- La boucle interne « *priority loop* » calcule la contribution de chaque niveau de priorité et met à jour les projecteurs (équations (6),(7) et (8))
- La boucle intermédiaire « *clamping loop* » détecte les violations des contraintes inégalité sur les variable articulaires (modélisation des limites articulaires). Eventuellement le calcul de la solution reprend sur détection d'une ou de plusieurs violations (les articulations détectées sont alors forcées à prendre leur valeur de limites articulaires et sont retirées du calcul de la boucle interne pour l'itération en cours) [Baerlocher et Boulic,02].
- La boucle externe « *convergence loop* » progresse vers la réalisation des contraintes en décomposant l'erreur en variations compatibles avec la linéarisation du problème.

Une évaluation comparative des performances de l'algorithme a été réalisée pour quantifier le bénéfice de l'équation (8) par rapport à l'approche précédente [Siciliano et Slotine, 91]. Dans cette comparaison, chaque niveau de priorité ajoute une contrainte de dimension 5 pour un espace articulaire de dimension 50. Le coût calcul de notre approche en $O(p)$ apparaît en noir tandis que celui de l'approche en $O(p^2)$ apparaît en gris. Les mesures ont été effectuée sur une SGI Octane avec un processeur R10000 (195MHz).

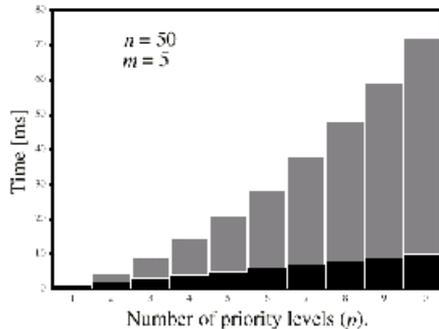


Figure 5: comparaison des coûts calculs

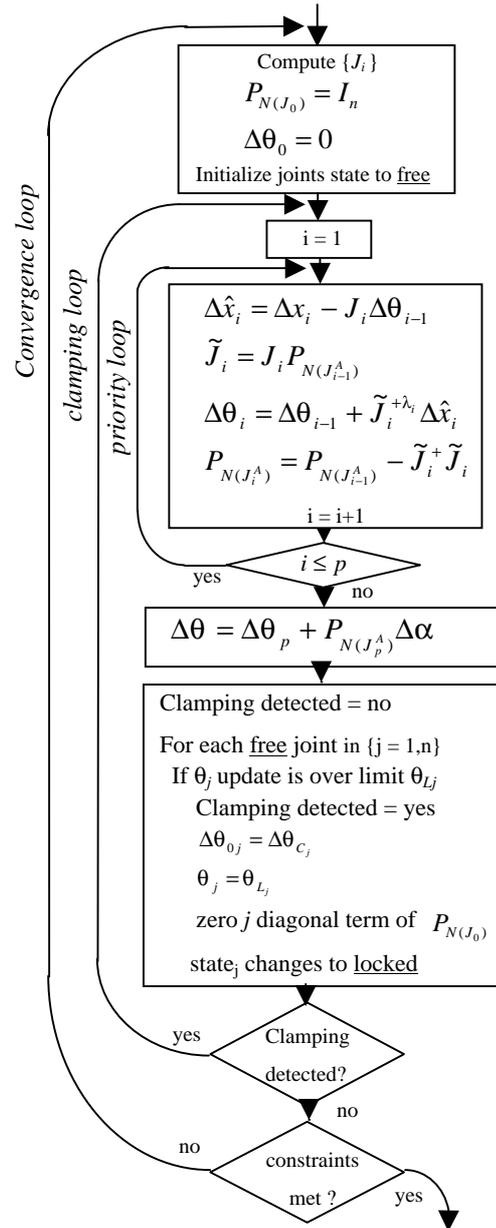


Figure 6: Structure de l'algorithme de Cinématique inverse avec p niveaux de priorités

2.4. Résultats

Notre évaluation de la cinématique inverse avec un nombre arbitraire de niveaux de priorités s'est concentrée sur l'édition interactive de postures de systèmes articulés quelconques (interface partielle de l'application test ci-contre) avec une préférence pour les humains virtuels [Baerlocher, 01].

La ci-dessous montre les configurations initiales et finales des postures d'un personnage en simple support, pour deux ensembles de contraintes différents. Dans les deux cas, le centre de masse est contraint de rester sur la ligne verticale, et ceci avec la plus haute priorité ce qui garantit l'équilibre des postures finales.



Figure 7: contexte de l'édition interactive de posture sur une chaîne articulée à 20 degrés de mobilité

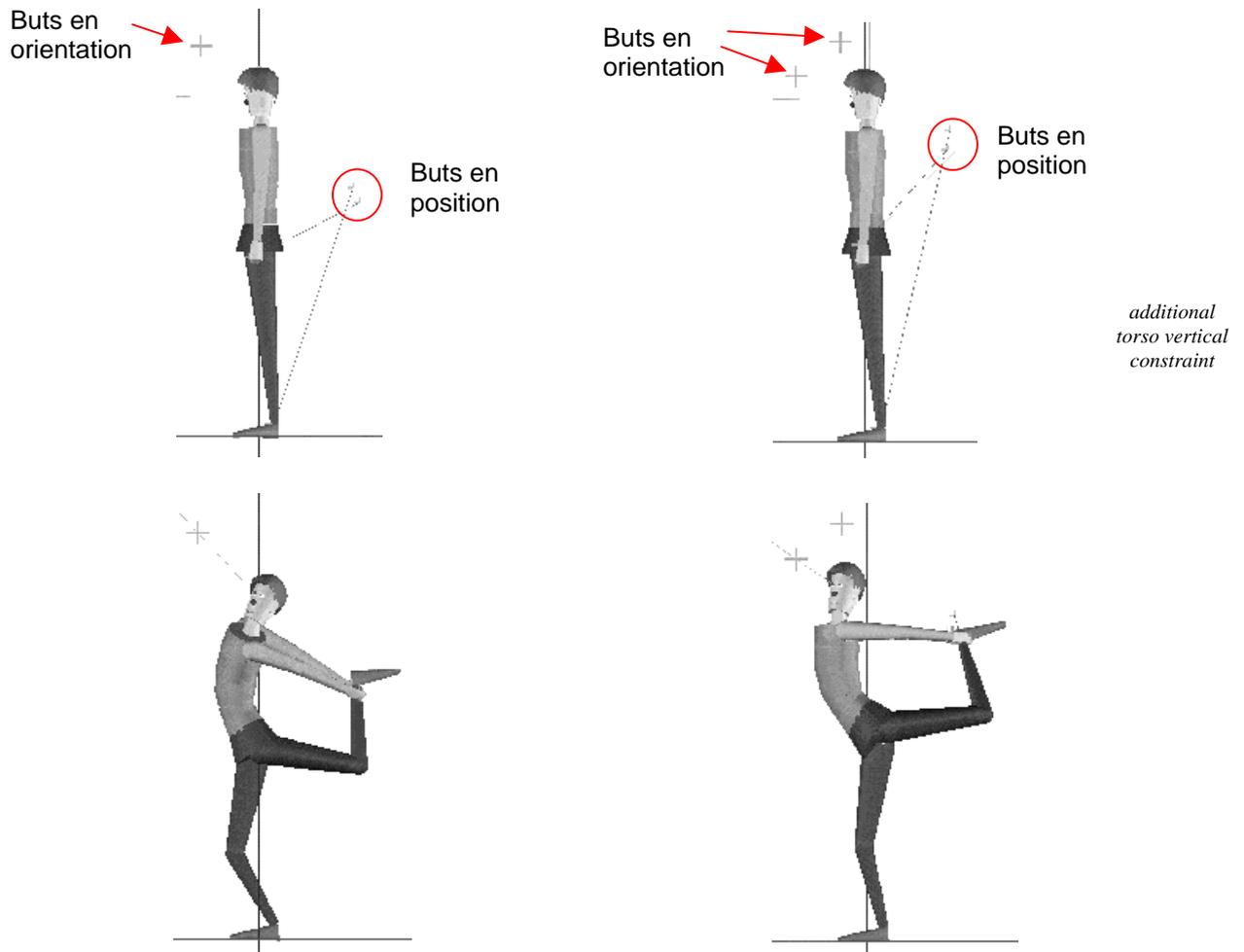


Figure 8: deux exemples d'optimisation d'une posture de danse demandant une grande souplesse d'où l'importance d'une bonne gestion des limites articulaires dans l'algorithme (boucle intermédiaire). L'exemple de droite contient une contrainte d'orientation supplémentaire qui sert à orienter le torse verticalement.

3. Conclusion

Nous avons décrit une extension de la cinématique inverse variationnelle permettant la définition de priorités relatives dans la mise en oeuvre de contraintes multiples pour un système linéarisé. Le calcul des projecteurs garantissant l'indépendance des niveaux de priorité s'effectue avec une complexité $O(P)$, ce qui rend cette technique utilisable dans un contexte d'édition interactive de postures humaines tel qu'un module dédié à la modélisation humaine dans un logiciel de CAO ou d'Ergonomie. Nous soulignons la grande souplesse ainsi offerte pour la résolution de problèmes d'optimisation puisqu'il est possible d'imbriquer la minimisation de fonctions de coût de nature très différentes : minimisation d'erreur en position et/ou orientation, équilibre statique, critère d'ordre qualitatifs (confort, fatigue, attraction vers une posture de référence, etc).

Annexe : Technique de régularisation au voisinage d'une singularité

Calcul de la pseudo-inverse amortie $J^{+\lambda}$ d'un Jacobien J [Maciejewski, 90]

La décomposition en valeurs singulières de J , de dimension $m \times n$, est [Press et al., 92] :

$$J = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \quad r \leq m$$

Où r est le rang du Jacobien, σ_i sont les valeurs singulières (strictement positives), $\{u_i\}$ et $\{v_i\}$ sont des bases respectivement de l'espace image de J et de l'espace complémentaire du noyau de J . L'expression de la pseudo-inverse amortie pour un facteur λ donné est alors:

$$J^{+\lambda} = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} v_i u_i^T$$

Lorsque λ vaut zéro on retrouve l'expression de la pseudo-inverse J^+ contenant un terme en $1/\sigma_i$ qui tend vers l'infini lorsqu'une valeur singulière devient faible (voisinage d'une singularité). Par contre lorsque λ est supérieur à zéro, le terme d'amortissement tend continuellement vers zéro dans le même contexte.

References

- [Badler et al., 93] Badler N.I., Phillips C.B., Webber B.L., *Simulating Humans*, Oxford University Press 1993.
- [Baerlocher et Boulic, 02] Baerlocher P., Boulic R., *An Inverse Kinematic Architecture Enforcing an Arbitrary Number of Strict Priority Levels*, in the submission process
- [Baerlocher et Boulic, 98] Baerlocher P., Boulic R. « Task-Priority Formulations for the Kinematic Control of Highly Redundant Articulated Structures », *Proc. of IEEE IROS'98*, pp 323-329, November 1998
- [Baerlocher 01] Baerlocher P., « Inverse Kinematics Techniques for the Interactive Posture Control of Articulated Figures », Thèse de doctorat ès Sciences, discipline informatique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, N°2383 (2001).
- [Boulic et Baerlocher, 00] Boulic R., Baerlocher P., "Introduction de Niveaux multiples de controle cinématique pour la simulation de postures humaines" (paper in english), Actes de la Journée INRETS "Mannequin Numérique", March 16th 2000, Lyon, France
- [Boulic et Baerlocher, 01] Boulic R., Baerlocher P., " [Cinématique Inverse pour personnage 3D: solutions analytiques et variationnelles](#)", Revue de CFAO, ISBN-2-7462-0281-6, Vol 16(1/2001), pp 83-99, Hermes, 2001
- [Boulic et al., 97] Boulic R., Mas R., Thalmann D., « Complex Character Positioning Based on a Compatible Flow Model of Multiple Supports », *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 3, n° 3, pp. 245-261, 1997

[Hanafusa et al., 81] H. Hanafusa, T. Yoshikawa, Y. Nakamura, «Analysis and Control of Articulated Robot with Redundancy », *Proc. Of IFAC*, 1981, vol. 4, pp 1927-1932

[Maciejewski 90] Maciejewski A.A. « Dealing with Ill-Conditioned Equations of Motion for Articulated Figures », *IEEE CGA*, vol 10, n°3, pp 63-71, 1990

[Monzani et al., 00] Monzani J.-S., Baerlocher P., Boulic R., Thalmann D. « Using an Intermediate Skeleton and Inverse Kinematics for Motion Retargeting », *Proc. of Eurographics'2000*, Interlaken 2000

[Press et al., 92] Press, S. Teukolsky, W. T. Vetterling, Flannery B.P., *Numerical Recipes in C*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1992

[Siciliano et Slotine, 91] Siciliano B., Slotine J.-J., « A General Framework for Managing Multiple Tasks in Highly Redundant Robotic Systems », *Proc. of ICAR'91*, vol 2, pp 1211-1215, ISBN 0-7803-0078-5, 1991

[Watt et Watt, 92] Watt A., Watt M. *Advanced Animation and Rendering Techniques*, Addison-Wesley, ACM Press, 1992

[Zhao et Badler, 94] Zhao J., Badler N., “Inverse Kinematics Positioning using Nonlinear Programming for Highly Articulated Figures”, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 13, No. 4, pp. 313 - 336, Oct. 1994