

Sur quelques foncteurs de bi-ensembles

THÈSE N° 6753 (2015)

PRÉSENTÉE LE 11 NOVEMBRE 2015
À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE
CHAIRE DE THÉORIE DES GROUPES
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Rosalie Françoise CHEVALLEY

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. Krieger, président du jury
Prof. J. Thévenaz, directeur de thèse
Prof. S. Bouc, rapporteur
Dr R. Stancu, rapporteur
Prof. K. Hess Bellwald, rapporteuse



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2015

Résumé

Cette thèse se place dans le contexte de la théorie des représentations des groupes finis. Plus particulièrement, dans l'étude des foncteurs de bi-ensembles. L'exemple classique d'un foncteur de bi-ensembles est le foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$. Pour un groupe fini G , on définit $B(G)$ comme étant le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de G -ensembles et $\mathbb{C}B(G) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$. Les applications standards de restriction, induction, inflation ou déflation induisent des applications du genre $\mathbb{C}B(\text{Res}_H^G) : \mathbb{C}B(G) \rightarrow \mathbb{C}B(H)$ (si $H \leq G$). C'est en généralisant ce processus qu'on arrive à la définition de foncteur de bi-ensembles. Formellement, on considère la catégorie $\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont tous les groupes finis et $\text{Hom}_{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(G, H) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, G)$ où $B(H, G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphismes de (H, G) -bi-ensembles. Un foncteur de bi-ensembles est alors un foncteur \mathbb{C} -linéaire de $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$ vers $\mathbb{C}\text{-Vect}$.

Dans cette thèse, je m'intéresse en particulier à deux foncteurs de bi-ensembles : le foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$ et le foncteur des modules de p -permutation $\mathbb{C}pp_k$. Pour le foncteur de Burnside, un premier résultat porte sur une caractérisation de certains B -groupes ; les B -groupes étant l'élément essentiel de la classification des facteurs de composition de $\mathbb{C}B$. Un second résultat porte sur le lien entre le foncteur $\mathbb{C}B$ et le foncteur des modules libres $\mathbb{C}\text{Free}_k$. Ce dernier n'est pas un foncteur de bi-ensembles car l'inflation d'un module libre n'est pas nécessairement libre. Pour comparer $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\text{Free}_k$ on travaillera sur une adjonction entre la catégorie des foncteurs de bi-ensembles et celle des foncteurs qui ne savent pas faire d'inflation.

Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire. Un aspect du travail effectué sur le foncteur des modules de p -permutation consiste à comparer $\mathbb{C}pp_k$ et $\mathbb{C}R_K$, le foncteur des représentations ordinaires. Ceci dans le but d'étudier les facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$ en utilisant le fait que les facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}R_K$ sont connus. Même si via cette méthode on ne trouve pas de nouveaux facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}pp_k$ par rapport à ceux connus, on comprend mieux comment ils apparaissent. D'autre part, de par la classification des modules de p -permutation, on cherche à exprimer le foncteur $\mathbb{C}pp_k$ en termes du foncteur des modules projectifs $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ (qui n'est pas un foncteur de bi-ensembles). On utilisera une adjonction entre la catégorie des foncteurs de bi-ensembles et une catégorie de foncteurs qui contient $\mathbb{C}\text{Proj}_k$.

C'est dans le but d'utiliser les deux adjonctions citées ci-dessus qu'on trouve dans cette thèse une preuve de l'existence d'un adjoint à gauche et à droite du foncteur

$$\begin{aligned} \theta^* : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}) &\longrightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \\ F &\longmapsto F \circ \theta, \end{aligned}$$

lorsque R est un anneau unitaire, \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux petites catégories enrichies sur $R\text{-Mod}$ et $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$.

Mots clés. Foncteurs de bi-ensembles, modules de p -permutation, foncteur de Burnside, adjonctions entre catégories de foncteurs enrichis.

Abstract

This thesis is in the context of representation theory of finite groups. More specifically, it studies biset functors. The classical example of a biset functor is the Burnside functor $\mathbb{C}B$. For a finite group G , we denote $B(G)$ the Grothendieck group of isomorphism classes of G -sets and $\mathbb{C}B(G) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$. The standard applications of restriction, induction, inflation or deflation induce applications like $\mathbb{C}B(\text{Res}_H^G) : \mathbb{C}B(G) \rightarrow \mathbb{C}B(H)$ (if $H \leq G$). Generalizing this process, we get the definition of a biset functor. Formally, we consider the category $\underline{\text{GrB}}$ whose objects are finite groups and $\text{Hom}_{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(G, H) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, G)$ where $B(H, G)$ is the Grothendieck group of isomorphism classes of (H, G) -bisets. A biset functor is a \mathbb{C} -linear functor from $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$ vers $\mathbb{C}\text{-Vect}$.

In this thesis, I focus on two biset functors : the Burnside functor $\mathbb{C}B$ and the functor of p -permutation modules $\mathbb{C}pp_k$. For the Burnside functor we first give a result that characterize some B -groups ; B -groups being the essential ingredient in the classification of composition factors of $\mathbb{C}B$. The second result compare $\mathbb{C}B$ and the functor of free modules $\mathbb{C}\text{Free}_k$. Note that $\mathbb{C}\text{Free}_k$ is not a biset functor since the inflation of a free module is not necessarily free. To compare $\mathbb{C}B$ and $\mathbb{C}\text{Free}_k$ we will work on a adjunction between the category of biset functors and the category of functors that do not have inflation.

Let (K, \mathcal{O}, k) be a p -modular system. An aspect of the work done on the functor of p -permutation modules is to compare $\mathbb{C}pp_k$ and $\mathbb{C}R_K$, the functor of ordinary representations. The goal is to study the composition factors of $\mathbb{C}pp_k$ knowing that those of $\mathbb{C}R_K$ are classified. Even though this method does not give new composition factors of $\mathbb{C}pp_k$, we understand better where they lie. On the other hand, because of the classification of p -permutation modules, we try to express the functor $\mathbb{C}pp_k$ in terms of the functor of projective modules $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ (which is not a biset functor). We will use an adjunction between the category of biset functors and a category that contains $\mathbb{C}\text{Proj}_k$.

In the interest of the two adjunctions mentioned above, we find here the proof of the existence of a left and right adjoint to the functor

$$\begin{aligned} \theta^* : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}) &\longrightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \\ F &\longmapsto F \circ \theta, \end{aligned}$$

whenever R is a commutative ring, \mathcal{C} and \mathcal{D} are two small categories enriched over $R\text{-Mod}$ and $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ is a functor enriched over $R\text{-Mod}$.

Keywords. Biset functors, p -permutation modules, Burnside functor, adjunctions between enriched functors categories.

Table des matières

I Foncteurs de bi-ensembles, foncteur des modules de p-permutation et relations de Brauer	11
1 Foncteurs de bi-ensembles	13
1.1 Bi-ensembles	13
1.1.1 Composition de bi-ensembles	14
1.1.2 Décomposition d'un bi-ensemble transitif	17
1.1.3 Bi-ensembles p -libres à gauche ou à droite	19
1.2 Foncteurs de bi-ensembles, catégories admissibles et foncteurs simples	19
1.2.1 Catégories enrichies	19
1.2.2 Définition des foncteurs de bi-ensembles et autres catégories	20
1.2.3 Foncteurs simples	21
1.2.4 Facteurs de composition	23
1.3 Foncteur de Burnside	23
1.3.1 Définition du foncteur de Burnside	24
1.3.2 Classification et B-groupes	25
1.4 Foncteurs des représentations et des modules projectifs	25
1.4.1 Définition du foncteur des représentations ordinaires	25
1.4.2 Définition du foncteur des modules projectifs	26
1.4.3 Lien entre le foncteur de Burnside et le foncteur des représentations	27
1.4.4 Changement de corps	28
1.4.5 Classification des facteurs de composition du foncteur des représentations	30
2 Foncteur des modules de p-permutation	31
2.1 Définition et propriétés usuelles	31
2.1.1 Foncteur des modules de permutation	31
2.1.2 Définition des modules de p -permutation et du foncteur $\mathbb{C}pp_k$	31
2.1.3 Classification des modules de p -permutation	32
2.1.4 Système p -modulaire	33
2.2 Application $f : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$	33
2.2.1 Définition de l'application $f : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$	33
2.2.2 Restriction à la catégorie des p -groupes	35
2.2.3 Restriction à la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$	36
2.2.4 Résultats	42
3 B-groupes et relations de Brauer	45
3.1 Résultats préliminaires	45
3.1.1 Des \mathbb{Z} -modules aux espaces vectoriels	45
3.1.2 Idempotents comme relations	46
3.2 Résultat principal	47

3.2.1	Théorème principal	47
3.2.2	Contribution au foncteur de Burnside d'un groupe avec relation primitive	48
3.2.3	B-groupes et relations primitives	49
3.2.4	Théorème d'Artin et quotients cycliques	50
3.2.5	Groupes résolubles	54
3.2.6	Preuve du théorème principal	55
II Adjonctions entre catégories de foncteurs et applications		57
4	Adjonctions entre catégories de foncteurs	59
4.0.7	Situation	59
4.1	Adjoint à gauche	60
4.1.1	Le foncteur φ sur les objets	60
4.1.2	Le foncteur φ sur les morphismes	62
4.1.3	Adjonction entre φ et θ^*	64
4.1.4	Propriétés d'exactitude	68
4.2	Adjoint à droite	68
4.2.1	Le foncteur ψ sur les objets	68
4.2.2	Le foncteur ψ sur les morphismes	71
4.2.3	Adjonction entre ψ et θ^*	72
5	Applications des formules d'adjonction	77
5.1	Application aux foncteurs sans inflation	77
5.1.1	Le foncteur $\varphi(F)$ sur les objets	77
5.1.2	Le foncteur $\varphi(F)$ sur les morphismes	82
5.2	Application aux foncteurs avec inflation p'	85
5.2.1	Le foncteur $\varphi(F)$ sur les objets	85
5.2.2	Le foncteur $\varphi(F)$ sur les morphismes	90
5.3	Application aux foncteurs sans déflation	92
5.3.1	$\psi(F)$ sur les objets	93
5.3.2	$\psi(F)$ sur les morphismes	97
6	Exemples d'adjoints	101
6.1	Foncteur adjoint du foncteur des modules projectifs	101
6.1.1	Surjection de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ vers $\mathbb{C}pp_k$	101
6.1.2	Comparaison entre $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ et $\mathbb{C}pp_k$	102
6.2	Foncteur adjoint du foncteur des modules libres	111
6.2.1	Définition du foncteur des modules libres	111
6.2.2	Propriétés du foncteur des modules libres	113
6.2.3	Adjoint du foncteur des modules libres	113

Introduction

Les foncteurs de bi-ensembles sont un outil moderne de la théorie des représentations des groupes finis, autrement dit de l'étude des actions de groupes. En théorie des représentations, le travail direct sur les modules, la théorie des caractères, la théorie de Brauer ou encore la théorie des blocs ont apporté beaucoup de résultats. Cependant, il reste encore beaucoup de questions ouvertes et c'est pour cela que les mathématiciens ne cessent d'introduire de nouveaux outils dans ce sujet. Avant l'utilisation des foncteurs de bi-ensembles, les mathématiciens ont découvert l'utilité des foncteurs de Mackey. On peut citer, par exemple, "*Two Classification of Simple Mackey Functors with Application to Group Cohomology and the Decomposition of Classifying Spaces*" de P. Webb ([Web93]) ou "*A Mackey functor version of a conjecture of Alperin*" de J. Thévenaz et P. Webb ([TW90]). Ces foncteurs ont été étudiés en particulier par J. Thévenaz et P. Webb ([TW95] ou [Web93]), jusqu'à l'introduction des foncteurs de Mackey globaux ([Web93]). Proposant une autre approche sur le même objet, S. Bouc décrit alors les *foncteurs d'ensembles munis d'une double action* ([Bou96]). Dans cette article on trouve une description de l'utilité de ces méthodes :

La théorie des foncteurs de Mackey peut-être vue comme une axiomatisation des procédés d'induction et de restriction.

Dans le cas des foncteurs de bi-ensembles, on peut reformuler la citation ci-dessus et dire que la théorie des foncteurs de bi-ensembles peut-être vue comme une axiomatisation des procédés d'induction, de restriction, d'inflation et de déflation.

Plus précisément, si on note \mathbb{C} le corps des nombres complexes, on note $\mathbb{C}\text{GrB}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis et $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(G, H) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, G)$ (définition 1.2.7), où $B(H, G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de (H, G) -bi-ensembles finis. Un foncteur de bi-ensembles est alors un foncteur \mathbb{C} -linéaire de $\mathbb{C}\text{GrB}$ dans $\mathbb{C}\text{-Vect}$ (définition 1.2.9). Notons que la catégorie des foncteurs de bi-ensembles est une catégorie abélienne. On peut donc parler de facteurs de composition d'un foncteur de bi-ensembles. Un facteur de composition d'un foncteur F est un foncteur simple S tel qu'il existe des sous-foncteurs $F_2 \subseteq F_1 \subseteq F$ dont le quotient F_1/F_2 est isomorphe à S . La question naturelle qui se pose donc lors de l'étude des foncteurs de bi-ensembles est, pour un foncteur donné, de déterminer ses facteurs de composition. Par exemple, dans [Bou96], S. Bouc donne la classification des facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}B$, le foncteur de Burnside. La définition de ce foncteur se trouve dans le paragraphe 1.3.1. Essentiellement, si G est un groupe fini, on considère $B(G)$ le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphismes de G -ensembles finis. On a alors $\mathbb{C}B(G) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$. Cette classification nécessite l'introduction d'une nouvelle "famille" de groupes : les B-groupes. On peut dire qu'il s'agit exactement des groupes qui interviennent dans la classification des facteurs de composition de $\mathbb{C}B$. Dans [Bou10], S. Bouc donne la classification des facteurs de composition du foncteur des représentations ordinaires $\mathbb{C}R_K$ (définition dans la section 1.4.1). Cette classification est donnée dans le cas où K est un corps de caractéristique zéro avec toutes les racines de l'unité. Par ailleurs, M. Baumann ([Bau12] et [Bau13]) a étudié le foncteur des modules de p -permutation,

$\mathbb{C}pp_k$. Pour un groupe fini G et k un corps de caractéristique p (avec p un nombre premier), un kG -module de génération finie est dit de p -permutation si c'est un facteur direct d'un module de permutation. L'intérêt de cette famille de modules et d'être "assez simple" puisque proche de la famille des modules de permutation, tout en étant fermée pour la prise de facteurs directs. On définit alors $pp_k(G)$ comme étant le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme des kG -modules de p -permutation et $\mathbb{C}pp_k(G) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} pp_k(G)$ (pour la structure de foncteur voir 2.1.2). Dans ses travaux, M. Baumann donne certains facteurs de composition. Les outils utilisés sont divers : restriction à des sous-catégories de $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$, évaluations dans de petits groupes, etc. Cela a permis de déterminer certains facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$, mais ils se sont pas tous classifiés pour autant. C'est cela qui a donné lieu à la première question de cette thèse : la classification des facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$.

Malheureusement la question reste encore sans une réponse complète. Je propose cependant dans ce travail deux nouveaux outils qui pourraient permettre d'atteindre cette classification. Le premier outil a été le relèvement des modules de p -permutations (voir chapitre 2). On se place dans le cas où on a un système p -modulaire (K, \mathcal{O}, k) , en particulier k est un corps de caractéristique p , on a un application surjective $\mathcal{O} \rightarrow k$ et K un corps de caractéristique zéro tel que $\mathcal{O} \subseteq K$. Pour un groupe fini G , si M est un kG -module de p -permutation, on peut le relever en un $\mathcal{O}G$ -module de p -permutation, puis on étend les scalaires pour obtenir un KG -module. Ce procédé permet de définir un morphisme de foncteurs $\mathfrak{f} : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$ (voir la section 2.2). Tout ceci permettra de montrer que les foncteurs simples S_{C_m, \mathbb{C}_ξ} (1.2.3), pour C_m un groupe cyclique d'ordre m , $\xi : C_m^* \rightarrow \mathbb{C}$ un caractère primitif et $(m, p) = 1$, sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$. On savait déjà grâce à M. Baumann que ces foncteurs simples entrent dans la composition de $\mathbb{C}pp_k$. On sait à présent comment puisqu'ils sont exactement les facteurs de composition de $\text{im}(\mathfrak{f} : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K)$.

Une autre méthode pour aborder la classification des facteurs de composition du foncteur des modules de p -permutation consiste à utiliser la classification des modules de p -permutation. En effet, dans son article de 1985 ([Bro85]), M. Broué donne une classification détaillée des modules de p -permutation. Cette classification dit essentiellement que tout kG -module de p -permutation indécomposable M est un facteur direct du module $\text{Indinf}_{N_G(P)/P}^G(M(P))$ pour P un p -sous-groupe de G et $M(P)$ un $kN_G(P)/P$ -module projectif indécomposable. Cela a donné l'idée de décrire le foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}pp_k$ à l'aide des modules projectifs. Pour un groupe fini G on construit $\mathbb{C}Proj_k := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Proj}_k(G)$ où $\text{Proj}_k(G)$ est le groupe de Grothendieck des kG -modules projectifs. La classification décrite ci-dessus se traduit alors en un isomorphisme

$$\mathbb{C}pp_k(G) \cong \bigoplus \mathbb{C} \text{Proj}_k(N_G(P)/P)$$

où P parcourt les p -sous-groupes de G à conjugaison près. On voudrait que cet isomorphisme soit d'une manière ou d'une autre rendu fonctoriel pour apporter des informations sur le foncteur $\mathbb{C}pp_k$ et pas simplement ses évaluations. Le problème est que $\mathbb{C} \text{Proj}_k$ n'est pas un foncteur de bi-ensembles. En effet, si G est un groupe fini et N est un sous-groupe normal dont l'ordre est divisible par p , on ne peut pas définir

$$\mathbb{C} \text{Proj}_k \left(\left[\text{Inf}_{G/N}^G \right] \right) : \mathbb{C} \text{Proj}_k(G/N) \rightarrow \mathbb{C} \text{Proj}_k(G).$$

En effet, dans ce contexte, l'inflation d'un kG/N -module projectif ne reste pas nécessairement projectif. Il s'avère que $\mathbb{C} \text{Proj}_k$ est un foncteur \mathbb{C} -linéaire sur la catégorie $\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$ à valeur dans $\mathbb{C}\text{-Vect}$ (section 1.4.2). Explicitement, $\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$ est la sous-catégorie de $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont aussi tous les groupes finis, où $\text{Hom}_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}(G, H) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B_{p\text{-lg}}(H, G)$ et où $B_{p\text{-lg}}(H, G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de (H, G) -bi-ensembles p -libres à

gauche (définition 1.1.23). On se retrouve donc à vouloir comparer $\mathbb{C}pp_k : \mathbb{C}\underline{\text{GrB}} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Vect}$ et $\mathbb{C}\text{Proj}_k : \mathbb{C}_{\text{p-lg}}\underline{\text{GrB}} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Vect}$ sachant qu'on a une inclusion $\mathbb{C}_{\text{p-lg}}\underline{\text{GrB}} \rightarrow \mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$. C'est cette question qui a donné lieu à la partie II, bien que les résultats du chapitre 4 puissent avoir d'autres applications. Au vu de la problématique ci-dessus, j'ai dû développer des arguments de théorie des catégories. En effet, à priori je pensais pouvoir utiliser la théorie des extensions de Kan pour résoudre ma question. L'élément de cette théorie que je souhaitais utiliser ici est le théorème suivant.

Théorème 0.0.1. *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux petites catégories et soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur. Pour une catégorie \mathcal{C} , on peut alors considérer le foncteur*

$$F^* : \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

qui précompose par F . Si \mathcal{C} est co-complète, le foncteur F^* a un adjoint à gauche.

La preuve de ce théorème est donnée comme preuve de [Bor94a, Theorem 3.2.7, p. 123] (bien que la terminologie utilisée soit un peu différente). Dans la preuve, la construction du foncteur adjoint à F^* est explicite et relativement facile à calculer dans des cas pratiques. Au départ, je souhaitais appliquer ce théorème avec $\mathcal{A} = \mathbb{C}_{\text{p-lg}}\underline{\text{GrB}}$, $\mathcal{B} = \mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$, F l'inclusion et $\mathcal{C} = \mathbb{C}\text{-Vect}$. On aurait alors obtenu une situation

$$\text{Fun}(\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \begin{array}{c} \xrightarrow{F^*} \\ \xleftarrow{\varphi} \end{array} \text{Fun}(\mathbb{C}_{\text{p-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$$

où F^* est le foncteur oubli et où φ serait son adjoint. On pourrait alors comparer $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ et $\mathbb{C}pp_k$ qui sont à ce moment dans la même catégorie de foncteurs. Mais le gros problème est que l'adjonction ci-dessus se fait entre deux catégories de foncteurs non nécessairement enrichis, alors que par définition un foncteur de bi-ensembles est un foncteur \mathbb{C} -linéaire. Donc, avec les notations ci-dessus, $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ n'est pas un foncteur de bi-ensembles. C'est pour cela qu'il a fallu d'abord dans le chapitre 4 donner une version du théorème ci-dessus dans le cas où les catégories sont enrichies sur $\mathbb{C}\text{-Vect}$. Il faut noter qu'il existe une version de la théorie de Kan enrichie ([Bor94b, §6.7, p.340]). Le théorème ci-dessus a été généralisé dans le cas d'un enrichissement sur une catégorie bien plus générale que $\mathbb{C}\text{-Vect}$. Le problème de cette version plus générale est que la preuve est nettement moins explicite et qu'il est très difficile de calculer l'adjoint dans un cas particulier. D'où la nécessité du chapitre 4 qui donne le théorème suivant.

Théorème 0.0.2. *Soit R un anneau unitaire. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux petites catégories enrichies sur $R\text{-Mod}$. Soit $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$. Alors, θ induit un foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \theta^* : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}) & \longrightarrow & \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \\ F & \longmapsto & F \circ \theta. \end{array}$$

Il existe alors un foncteur

$$\varphi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$$

qui est un adjoint à gauche de θ^* .

Le chapitre 5 consiste ensuite à expliciter au maximum l'adjoint φ dans le cas où $\mathcal{D} = \mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$, $\mathcal{C} = \mathbb{C}_{\text{p-lg}}\underline{\text{GrB}}$ et θ est l'inclusion. Dans le chapitre 5, j'ai profité des formules générales du chapitre 4 pour donner des formules explicites dans d'autres cas utiles à la théorie des foncteurs de bi-ensembles.

Pour retourner à la question de $\mathbb{C}pp_k$ et $\mathbb{C}\text{Proj}_k$, on peut dire qu'on a une non-réponse. Si on

applique le théorème 0.0.2 au cas $\mathcal{D} = \mathbb{C}\text{GrB}$ et $\mathcal{C} = \mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}$, on obtient que $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$, l'adjoint du foncteur des projectifs, est bien un foncteur de bi-ensembles. Par contre, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}pp_k$. On trouve un morphisme $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ qui est surjectif mais pas injectif. Les détails se trouvent dans la section 6.1.

Finalement, dans cette thèse se trouve aussi deux thèmes qui ne sont pas en lien avec le foncteur des modules de p -permutation. Tout d'abord, le chapitre 3 est dédié au foncteur de Burnside et étudie le lien entre les B -groupes et les relations de Brauer primitives. Il est inspiré d'un article de Bartel et Dokchitser "*Brauer relations and finite groups*" ([BD12]) qui classifie les relations de Brauer. L'idée principale est de faire un lien entre cette classification générale de propriétés de $B(G)$ et la structure du foncteur de Burnside. Dans les faits, je donne une classification des B -groupes dont les quotients sont cycliques.

Pour sa part, la section 6.2 traite quant à elle également indirectement du foncteur de Burnside. Dans cette section j'ai utilisé le théorème 0.0.2 dans le cas où $\mathcal{D} = \mathbb{C}\text{GrB}$ et $\mathcal{C} = \mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}$ est la catégorie des bi-ensembles libres à gauche (définition 1.2.11). La catégorie

$$\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$$

contient alors le foncteur $\mathbb{C}\text{Free}_k$, le foncteur des modules libres (définition dans la section 6.2.1). Son image par l'adjonction du théorème 0.0.2 est un foncteur de bi-ensembles. Son étude m'a permis de démontrer qu'il s'agit en fait du foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$ (théorème 6.2.8).

Première partie

Foncteurs de bi-ensembles, foncteur des modules de p -permutation et relations de Brauer

Chapitre 1

Foncteurs de bi-ensembles

On commence par donner les bases de la théorie des foncteurs de bi-ensembles. Il s'agit d'énoncer certains faits généraux dont nous aurons besoin plus tard, fixer des notations et donner les exemples principaux.

1.1 Bi-ensembles

Cette section est dédiée aux bi-ensembles. Premièrement, on rappelle la définition et les propriétés élémentaires. Dans la section 1.1.1, on donne les résultats classiques pour la composition de bi-ensembles. On donne également les preuves. Finalement dans la section 1.1.3, on décrit les bi-ensembles libres à gauche ou à droite.

Définition 1.1.1. [Bou10, Définition 2.3.1, p. 18] Soient G et H deux groupes finis. Un (H, G) -bi-ensemble U est un ensemble U muni d'une action à gauche de H et d'une action à droite de G telles que

$$(h \cdot u) \cdot g = h \cdot (u \cdot g),$$

pour tout $g \in G$, $u \in U$ et $h \in H$.

Remarque 1.1.2. [Bou10, Remarque 2.3.2, p. 18-19] Cela est équivalent à un $(H \times G^{op})$ -ensemble. Donc toutes les notions qui s'appliquent pour les G -ensembles sont aussi valables pour les (H, G) -bi-ensembles. En particulier, si U est un (H, G) -bi-ensemble, on note $H \backslash U / G$ l'ensemble des (H, G) -orbites et $[H \backslash U / G]$ un ensemble de représentants des (H, G) -orbites.

Lemme 1.1.3. [Bou10, Lemme 2.3.4, p. 19] Soient G et H des groupes finis.

1. Soit L un sous-groupe de $H \times G$, alors l'ensemble $(H \times G) / L$ est un (H, G) -bi-ensemble transitif pour l'action définie par :

$$h \cdot (b, a)L \cdot g = (hb, g^{-1}a)L,$$

pour tout $h \in H$, pour tout $(b, a)L \in (H \times G) / L$ et pour tout $g \in G$.

2. Si U est un (H, G) -bi-ensemble, alors il existe un isomorphisme de (H, G) -bi-ensembles

$$U \cong \bigsqcup_{u \in [H \backslash U / G]} (H \times G) / L_u$$

où L_u est le stabilisateur de u dans $H \times G$, c.-à-d. le sous-groupe de $H \times G$ défini par

$$\text{Stab}_{H \times G}(u) = \{(h, g) \in H \times G \mid h \cdot u = u \cdot g\}.$$

En particulier, tout (H, G) -bi-ensemble transitif est isomorphe à $(H \times G) / L$, pour un certain sous-groupe L de $H \times G$.

1.1.1 Composition de bi-ensembles

Définition 1.1.4. [Bou10, Définition 2.3.11, p. 21] Soient G , H et K des groupes finis. Si U est un (H, G) -bi-ensemble et V un (K, H) -bi-ensemble, la *composition* de V et U est l'ensemble des H -orbites sur le produit cartésien $V \times U$, où l'action à droite de H est définie par :

$$(v, u) \cdot h = (v \cdot h, h^{-1} \cdot u),$$

pour tout $(v, u) \in V \times U$ et pour tout $h \in H$. Il est noté par $V \times_H U$. La H -orbite de $(v, u) \in V \times U$ est dénotée par $(v, {}_H u)$. L'ensemble $V \times_H U$ est un (K, G) -bi-ensemble pour l'action définie par :

$$k \cdot (v, {}_H u) \cdot g = (k \cdot v, {}_H u \cdot g)$$

pour tout $k \in K$, pour tout $(v, {}_H u) \in V \times_H U$ et pour tout $g \in G$.

Notation 1.1.5. Soient G , H et K des groupes. Si U est un (H, G) -bi-ensemble et V un (K, H) -bi-ensemble, on simplifie en notant

$$V \times U = V \times_H U$$

la composition de V et U , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 1.1.6. [Bou10, Exemples 2.3.3 et 2.3.9, p. 19-20] Soit G un groupe fini.

- L'ensemble G est un (G, G) -bi-ensemble pour l'action à gauche (respectivement à droite) définie par la multiplication à gauche (resp. à droite) par G . Ce bi-ensemble est noté Id_G .
- Soit H un sous-groupe de G . Alors l'ensemble G est un (H, G) -bi-ensemble, noté Res_H^G , pour les actions données par la multiplication à gauche par H et à droite par G .
- Soit H un sous-groupe de G . Alors l'ensemble G est un (G, H) -bi-ensemble, noté Ind_H^G , pour les actions données par la multiplication à gauche par G et à droite par H .
- Soit N un sous-groupe normal de G et $H = G/N$. Alors l'ensemble H est un (G, H) -bi-ensemble, noté Inf_H^G , pour les actions données par la projection dans H suivie de la multiplication à gauche par H et la multiplication à droite par H .
- Soit N un sous-groupe normal de G et $H = G/N$. Alors l'ensemble H est un (H, G) -bi-ensemble, noté Def_H^G , pour les actions données par la multiplication à gauche par H et la projection dans H suivie de la multiplication à droite par H .
- Si $f : G \rightarrow H$ est un isomorphisme de groupes finis. Alors l'ensemble H est un (H, G) -bi-ensemble, noté $\text{Iso}(f)$, pour la multiplication à gauche par H et l'image par f suivie de la multiplication à droite par H .

Les bi-ensembles de cet exemple sont appelés les bi-ensembles *élémentaires*.

On présente quelques résultats sur la composition des bi-ensembles élémentaires. Ces résultats sont classiques, ils sont en particulier énoncés dans [Bou10, Pages 2 et 3].

Définition 1.1.7. [Bou10, Définition 2.3.12, p. 21] Soit G un groupe fini. Une *section* (T, S) de G est une paire (T, S) de sous-groupes de G telle que $S \trianglelefteq T$.

Proposition 1.1.8 (Formule de Mackey généralisée). *Soient (W, X) et (Y, Z) deux sections d'un groupe fini G , c.-à-d. des sous-groupes de G tels que $Z \trianglelefteq Y$ et $X \trianglelefteq W$. On a alors*

$$\text{Defres}_{Y/Z}^G \times \text{Indinf}_{W/X}^G \cong \sum_{x \in [Y \backslash G / W]} \text{Indinf}_{(Y \cap {}^x W)Z / (Y \cap {}^x X)Z}^{Y/Z} \times \text{Iso}(d_x) \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Defres}_{(Y \cap {}^x W)X / (Z \cap {}^x W)X}^{W/X}$$

où c_x est l'isomorphisme de conjugaison par x et

$$d_x : (Y \cap {}^x W)^x X / (Z \cap {}^x W)^x X \rightarrow (Y \cap {}^x W)Z / (Y \cap {}^x X)Z$$

est l'isomorphisme du lemme de Zassenhaus.

Démonstration. Cette proposition est démontrée dans [BT08, Proposition 7.1, p.17] dans le cas où G est un p -groupe (pour p un nombre premier). Mais le cas général se démontre de manière identique. \square

Lemme 1.1.9 (Formule de Mackey). *Soit G un groupe fini et soient H et K deux sous-groupes. On a alors*

$$\text{Res}_H^G \times \text{Ind}_K^G \cong \sum_{x \in [H \backslash G / K]} \text{Ind}_{H \cap x K}^H \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{H^x \cap K}^K.$$

Démonstration. On applique la proposition 1.1.8 pour $(W, X) = (K, 1)$ et $(Y, Z) = (H, 1)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \text{Res}_H^G \times \text{Ind}_K^G \\ & \cong \sum_{x \in [Y \backslash G / W]} \text{Indinf}_{(H \cap x K)1 / (H \cap 1)1}^H \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{(H^x \cap K)1 / (1^x \cap K)1}^{K/1} \end{aligned}$$

où c_x est l'homomorphisme de conjugaison par x et d_x est l'isomorphisme de lemme de Zassenhaus. Dans ce cas, il est facile de voir que d_x est l'identité. On obtient alors

$$\text{Res}_H^G \times \text{Ind}_K^G \cong \sum_{x \in [H \backslash G / K]} \text{Ind}_{H \cap x K}^H \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{H^x \cap K}^K. \quad \square$$

Lemme 1.1.10. *Soit G un groupe fini et soient M et N deux sous-groupes normaux de G . On a alors*

$$\text{Def}_{G/N}^G \times \text{Inf}_{G/M}^G \cong \text{Inf}_{G/NM}^{G/N} \times \text{Def}_{G/NM}^{G/M}.$$

Démonstration. On applique la proposition 1.1.8 pour $(W, X) = (G, M)$ et $(Y, Z) = (G, N)$ et on obtient

$$\begin{aligned} & \text{Def}_{G/N}^G \times \text{Inf}_{G/M}^G \\ & \cong \sum_{x \in [G \backslash G / G]} \text{Indinf}_{(G \cap x G)N / (G \cap x M)N}^{G/N} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{(G^x \cap G)M / (N \cap x G)M}^{G/M} \end{aligned}$$

où c_x est l'homomorphisme de conjugaison par x et d_x est l'isomorphisme de lemme de Zassenhaus. Dans ce cas, il est facile de voir que $d_x = \text{Id}$. De plus, il n'y a pas de somme, car $[G \backslash G / G] = \{1_G\}$. On obtient donc

$$\text{Def}_{G/N}^G \times \text{Inf}_{G/M}^G \cong \text{Inf}_{G/NM}^{G/N} \times \text{Def}_{G/NM}^{G/M}. \quad \square$$

Lemme 1.1.11. *Soit G un groupe fini, soit $H \leq G$ et $N \trianglelefteq G$. On a alors*

$$\text{Def}_{G/N}^G \times \text{Ind}_H^G \cong \text{Ind}_{HN/N}^{G/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{H/H \cap N}^H$$

où $d : H/H \cap N \rightarrow HN/N$ est l'isomorphisme standard.

Démonstration. On applique la proposition 1.1.8 pour $(Y, Z) = (G, N)$ et $(W, X) = (H, 1)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} & \text{Def}_{G/N}^G \times \text{Ind}_H^G \\ & \cong \sum_{x \in [G \backslash G / H]} \text{Indinf}_{(G \cap x H)N / (G \cap x 1)N}^{G/N} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{(G^x \cap H)1 / (N^x \cap H)1}^{H/1} \end{aligned}$$

où c_x est l'homomorphisme de conjugaison par x et d_x est l'isomorphisme de lemme de Zassenhaus. Dans ce cas, on a $[G \setminus G/H] = \{1_G\}$. De plus, l'isomorphisme

$$d_{1_G} : \begin{array}{ccc} H/N \cap H & \longrightarrow & HN/N \\ h(N \cap H) & \longmapsto & hN \end{array}$$

est l'isomorphisme du deuxième théorème d'isomorphisme. On obtient donc

$$\text{Def}_{G/N}^G \times \text{Ind}_H^G \cong \text{Ind}_{HN/N}^{G/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{H/H \cap N}^H. \quad \square$$

Lemme 1.1.12. *Soit G un groupe fini, soit $H \leq G$ et $N \trianglelefteq G$. On a alors*

$$\text{Res}_H^G \times \text{Inf}_{G/N}^G \cong \text{Inf}_{H/H \cap N}^H \times \text{Iso}(d) \times \text{Res}_{HN/N}^{G/N}$$

où $d : HN/N \rightarrow H/H \cap N$ est l'isomorphisme standard.

Démonstration. On applique la proposition 1.1.8 pour $(W, X) = (G, N)$ et $(Y, Z) = (H, 1)$ et on répète la même preuve que ci-dessus. \square

Lemme 1.1.13. *Soit G un groupe fini, soient $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ tels que $N \leq H$. On a alors*

$$\text{Res}_{H/N}^{G/N} \times \text{Def}_{G/N}^G \cong \text{Def}_{H/N}^H \times \text{Res}_H^G.$$

Démonstration. Par définition, on a $\text{Res}_{H/N}^{G/N} = G/N$ le $(H/N, G/N)$ -bi-ensemble avec actions par multiplication à gauche et à droite par H/N et G/N respectivement. On a $\text{Def}_{G/N}^G = G/N$ le $(G/N, G)$ -bi-ensemble avec action à gauche par multiplication à gauche et action à droite par projection puis multiplication à droite. Ces définitions se trouvent dans l'exemple 1.1.6. On pose alors

$$f : \begin{array}{ccc} \text{Def}_{H/N}^H \times_H \text{Res}_H^G & \longrightarrow & \text{Res}_{H/N}^{G/N} \times_{G/N} \text{Def}_{G/N}^G \\ (hN, {}_H g) & \longmapsto & (N, {}_{G/N} hgN) \end{array}.$$

Il est facile de vérifier que cette application est bien définie. Montrons qu'elle est bien injective. Soient $h, h' \in H$ et $g, g' \in G$ tels que $f((hN, {}_H g)) = f((h'N, {}_H g'))$, c.-à-d. on a l'égalité $(N, {}_{G/N} hgN) = (N, {}_{G/N} h'g'N)$. Alors, il existe $xN \in G/N$ tel que $(NxN, x^{-1}NhgN)$ est égal à $(N, h'g'N)$. Donc, cela implique $xN = N$, d'où $x \in N$ et donc $hgN = h'g'N$. Il existe donc $n \in N$ tel que $hg = h'g'n$ ou de manière équivalente $g = h^{-1}h'g'n$. Par conséquent $gN = h^{-1}h'g'N$, mais comme N est normal dans G , cela donne $Ng = Nh^{-1}h'g'$. Donc on a $Nhg = Nh'g'$, i.e. il existe $m \in N$ tel que $hg = mh'g'$, qui implique

$$(hN, {}_H g) = (N, {}_H hg) = (N, {}_H mh'g') = (mh'N, {}_H g') = (h'N, {}_H g')$$

où la troisième égalité découle du fait que $N \leq H$. On a alors bien que f est injective, montrons que cette application est surjective. Soit $(gN, {}_{G/N} g'N) \in \text{Res}_{H/N}^{G/N} \times_{G/N} \text{Def}_{G/N}^G$. Or $(gN, {}_{G/N} g'N) = (N, {}_{G/N} gg'N) = f((N, {}_H gg'))$.

Il reste alors à vérifier que f est un morphisme de $(H/N, G)$ -bi-ensembles. Soient $g, g' \in G$ et $h, h' \in H$, on a alors

$$\begin{aligned} hN \cdot f((h'N, {}_H g')) \cdot g &= hN \cdot (N, {}_{G/N} h'g'N) \cdot g \\ &= (hN, {}_{G/N} h'g'gN) \\ &= (N, {}_{G/N} hh'g'gN) \\ &= f((hh'N, {}_H g'g)) \\ &= f(hN \cdot (h'N, {}_H g') \cdot g). \end{aligned}$$

Donc f est bien un isomorphisme de bi-ensembles. \square

Lemme 1.1.14. Soit G un groupe fini et soient $H \leq G$ et $N \trianglelefteq G$ tels que $N \leq H$. On a alors

$$\text{Ind}_H^G \times \text{Inf}_{H/N}^H \cong \text{Inf}_{G/N}^G \times \text{Ind}_{H/N}^{G/N}.$$

Démonstration. On utilise les définitions de l'exemple 1.1.6. pour décrire Ind et Inf. On pose alors

$$\begin{aligned} f : \text{Ind}_H^G \times_H \text{Inf}_{H/N}^H &\longrightarrow \text{Inf}_{G/N}^G \times_{G/N} \text{Ind}_{H/N}^{G/N} \\ (g, {}_H hN) &\longmapsto (ghN, {}_{G/N} N). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette application est bien définie. Montrons qu'elle est bien injective. Soient $g, g' \in G$, $h, h' \in H$ tels que $f((g, {}_H hN)) = f((g', {}_H h'N))$, c.-à-d. on a l'égalité $(ghN, {}_{G/N} N) = (g'h'N, {}_{G/N} N)$. Donc il existe $xN \in G/N$ tel que $(ghxN, x^{-1}N) = (g'h'N, N)$. En particulier, $x^{-1}N = N$, c.-à-d. $x \in N$. Donc $ghN = g'h'N$, c.-à-d. il existe $n \in N$ tel que $gh = g'h'n$. Donc, on a

$$(g, {}_H hN) = (gh, {}_H N) = (g'h'n, {}_H N) = (g'h', {}_H N) = (g', {}_H h'N)$$

puisque $N \leq H$ d'où on déduit l'injectivité de f .

Soit $(g_1N, {}_{G/N} g_2N) \in \text{Inf}_{G/N}^G \times_{G/N} \text{Ind}_{H/N}^{G/N}$, alors

$$(g_1N, {}_{G/N} g_2N) = (g_1g_2N, {}_{G/N} N) = f((g_1g_2, {}_H N)).$$

Donc f est surjective.

Il reste à montrer que f est un morphisme de bi-ensembles. Soient $g, g' \in G$ et $h, h' \in H$, on a alors

$$\begin{aligned} g \cdot f((g', {}_H h'N)) \cdot hN &= g \cdot (g'h'N, {}_{G/N} N) \cdot hN \\ &= (gg'h'N, {}_{G/N} hN) \\ &= (gg'h'hN, {}_{G/N} N) \\ &= f((gg', {}_H h'hN)) \\ &= f(g \cdot (g', {}_H h'N) \cdot hN). \end{aligned}$$

Donc f est bien un isomorphisme de bi-ensembles. □

Lemme 1.1.15. Si G est un groupe fini, alors on a

$$\text{Res}_G^G = \text{Id}_G, \text{Ind}_G^G = \text{Id}_G, \text{Def}_{G/1}^G = \text{Id}_G, \text{Inf}_{G/1}^G = \text{Id}_G.$$

1.1.2 Décomposition d'un bi-ensemble transitif

Notation 1.1.16. [Bou10, Notation 2.3.21, p.24] Si G et H sont des groupes finis et L est un sous-groupe de $H \times G$, on note

$$\begin{aligned} p_1(L) &= \{h \in H \mid \exists g \in G, (h, g) \in L\} \\ p_2(L) &= \{g \in G \mid \exists h \in H, (h, g) \in L\} \\ k_1(L) &= \{h \in H \mid (h, 1) \in L\} \\ k_2(L) &= \{g \in G \mid (1, g) \in L\} \\ q(L) &= L/k_1(L) \times k_2(L). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.17. Si G et H sont des groupes finis et L est un sous-groupe de $H \times G$, on a des isomorphismes

$$p_1(L)/k_1(L) \cong q(L) \cong p_2(L)/k_2(L).$$

Lemme 1.1.18. [Bou10, Lemme 2.3.25, p. 26] Soient G et H deux groupes finis.

1. Si (D, C) est une section de H et (B, A) une section de G telles qu'il existe un isomorphisme de groupes $f : B/A \rightarrow D/C$, alors

$$L_{(D,C),f,(B,A)} = \{(h, g) \in H \times G \mid h \in D, g \in B, hC = f(gA)\}$$

est un sous-groupe de $H \times G$.

2. Réciproquement, si L est un sous-groupe de $H \times G$, il existe une unique section (D, C) de H , une unique section (B, A) de G et un unique isomorphisme de groupes $f : B/A \rightarrow D/C$ tels que $L = L_{(D,C),f,(B,A)}$.

Démonstration. La preuve dans les détails se trouve dans [Bou10, Lemme 2.3.25, p. 26]. L'élément essentiel dans la deuxième partie est de poser

$$D = p_1(L), \quad C = k_1(L), \quad B = p_2(L), \quad \text{et} \quad A = k_2(L).$$

□

Lemme 1.1.19. Soient G et H des groupes finis. Soient (D, C) une section de H et (B, A) une section de G telles qu'il existe un isomorphisme de groupes $f : B/A \rightarrow D/C$. On pose $L = L_{(D,C),f,(B,A)}$. Alors il existe un isomorphisme de (H, G) -bi-ensembles

$$(H \times G)/L \cong \text{Ind}_D^G \times_D \text{Inf}_{D/C}^D \times_{D/C} \text{Iso}(f) \times_{B/A} \text{Def}_{B/A}^B \times_B \text{Res}_B^G.$$

Ainsi tout bi-ensemble transitif se décompose en produit d'induction, inflation, isomorphisme, déflation et restriction.

Remarque 1.1.20. Soient G et H deux groupes finis. Soit U un (H, G) -bi-ensemble transitif. Par unicité dans l'énoncé du lemme 1.1.18(2), la décomposition

$$U \cong \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^G$$

est unique à conjugaison près. Explicitement, si on a aussi

$$U \cong \text{Indinf}_{D'/C'}^G \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H,$$

alors il existe $g \in G$ et $h \in H$ tels que ${}^g D' = D$, ${}^g C' = C$, ${}^h B' = B$, ${}^h A' = A$ et $f = c_g \circ f' \circ c_{h^{-1}}$.

Définition 1.1.21. [Bou10, Définition 2.4.9, p. 30] Soient G et H deux groupes finis. Alors on note $B(H, G)$ le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de (H, G) -bi-ensembles finis pour l'union disjointe. Pour U un (H, G) -bi-ensemble, on note $[U]$ sa classe d'isomorphisme dans $B(H, G)$.

Remarque 1.1.22. Soient G, H et K des groupes finis. Il existe une unique application bilinéaire

$$\times_H : B(K, H) \times B(H, K) \rightarrow B(K, G)$$

telle que $[V] \times_H [U] = [V \times_H U]$ pour tout (K, H) -bi-ensemble V et tout (H, G) -bi-ensemble U (voir [Bou10, Notation 2.4.10, p. 30]).

Cette multiplication est associative (lorsque cela fait sens), distributive par rapport à l'addition et la multiplication par l'identité est triviale (voir [Bou10, Proposition 2.4.11, p. 30]). On obtient donc que $B(G, G)$ est alors muni d'une structure d'anneau.

1.1.3 Bi-ensembles p -libres à gauche ou à droite

Soit p un nombre premier. Un groupe fini G est dit d'ordre p' si son ordre n'est pas divisible par p .

Définition 1.1.23. Soient G et H deux groupes finis. Un (H, G) -bi-ensemble U est p -libre à gauche si pour tout $u \in U$ l'ordre du stabilisateur de u dans H n'est pas divisible par p .

Lemme 1.1.24. Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble transitif. On suppose

$$U = (H \times G)/L \cong \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^G.$$

Alors, U est p -libre à gauche si et seulement si C est d'ordre p' .

Démonstration. Rappelons tout d'abord qu'on a $C = k_1(L)$ (voir [Bou10, Notation 2.3.21, p.24]). Soit $u = (x, y)L \in U$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \text{Stab}_H(u) &= \{h \in H \mid h(x, y)L = (x, y)L\} \\ &= \{h \in H \mid (hx, y)L = (x, y)L\} \\ &= \{h \in H \mid (x^{-1}hx, 1)L = L\} \\ &= \{h \in H \mid x^{-1}hx \in k_1(L)\} \\ &= \{h \in H \mid h \in {}^x k_1(L)\} \\ &= {}^x k_1(L) = {}^x C. \end{aligned}$$

Donc on a bien que U est p -libre à gauche si et seulement si $|C|$ est p' . \square

Définition 1.1.25. Soient G et H deux groupes finis. Un (H, G) -bi-ensemble U est p -libre à droite si pour tout $u \in U$ l'ordre du stabilisateur de u dans G n'est pas divisible par p .

Lemme 1.1.26. Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble transitif. On suppose

$$U = (H \times G)/L \cong \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^G.$$

Alors, U est p -libre à droite si et seulement si A est d'ordre p' .

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme 1.1.24. \square

1.2 Foncteurs de bi-ensembles, catégories admissibles et foncteurs simples

Dans cette section, on donne la définition des foncteurs de bi-ensembles. On va également considérer la catégorie des foncteurs de bi-ensembles et ses propriétés. On notera que cette catégorie est une catégorie abélienne. On pourra donc parler de foncteurs simples ou de facteurs de composition d'un foncteur de bi-ensembles.

1.2.1 Catégories enrichies

Soit R un anneau unitaire. On note $R\text{-Mod}$ la catégorie des R -modules et $R\text{-mod}$ la catégorie des R -modules de génération finie.

Définition 1.2.1. On dit qu'une catégorie \mathcal{C} est *enrichie sur* $R\text{-Mod}$, si \mathcal{C} est une catégorie et si pour tous les objets C et C' de \mathcal{C} , l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ a une structure de R -module compatible avec la composition.

Notation 1.2.2. Pour simplifier l'écriture, on écrit simplement $C \in \mathcal{C}$ lorsque C est un objet de la catégorie \mathcal{C} .

Définition 1.2.3. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories enrichies sur $R\text{-Mod}$. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un *foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$* si pour tout $C, C' \in \mathcal{C}$, $f, g : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} et $\lambda \in R$ on a

$$F(\lambda f + g) = \lambda F(f) + F(g).$$

Notation 1.2.4. On note $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs enrichis sur $R\text{-Mod}$ de \mathcal{C} vers \mathcal{D} .

Remarque 1.2.5. La catégorie $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$ est une catégorie abélienne R -linéaire (voir [Bou10, Proposition 3.2.8, p. 44-45]).

1.2.2 Définition des foncteurs de bi-ensembles et autres catégories

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.2.6. [Bou10, Définition 3.1.1, p. 41] On définit $\underline{\text{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont les groupes finis. De plus, si G et H sont des groupes finis, alors $\text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}}(G, H) = B(H, G)$. Pour G, H et K des groupes finis, alors la composition $v \circ u$ du morphisme $u \in \text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}}(G, H)$ et du morphisme $v \in \text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}}(H, K)$ est égale à $v \times_H u$. Finalement, pour tout groupe fini G , le morphisme identité de G dans $\underline{\text{GrB}}$ est $[\text{Id}_G]$.

Pour G, H deux groupes finis, $\text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}}(G, H)$ est un groupe abélien fini. En fait, $\underline{\text{GrB}}$ est une catégorie pré-additive. Nous allons définir une catégorie similaire qui sera elle enrichie sur $R\text{-mod}$.

Définition 1.2.7. [Bou10, Définition 3.1.6, p.s 42-43] On définit $R\underline{\text{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont les groupes finis. De plus, si G et H sont des groupes finis, on définit

$$\text{Hom}_{R\underline{\text{GrB}}}(G, H) = R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, G).$$

La composition est étendue à partir de celle de $\underline{\text{GrB}}$. Finalement, pour tout groupe fini G , le morphisme identité de G dans $R\underline{\text{GrB}}$ est $1_R \otimes [\text{Id}_G]$.

Remarque 1.2.8. 1. La catégorie $R\underline{\text{GrB}}$ est enrichie sur $R\text{-mod}$ (voir [Bou10, p. 43]).

2. Un morphisme $u : G \rightarrow H$ de $R\underline{\text{GrB}}$ sera écrit $\sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ pour $\lambda_i \in R$ et U_i des (H, G) -bi-ensembles.

Définition 1.2.9. Les objets de la catégorie $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\underline{\text{GrB}}, R\text{-Mod})$ s'appellent les *foncteurs de bi-ensembles sur $R\underline{\text{GrB}}$* .

La proposition suivante nous permettra par la suite de travailler plus facilement avec la catégorie des foncteurs de bi-ensembles. Elle spécifie en particulier la structure de catégorie enrichie de $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\underline{\text{GrB}}, R\text{-Mod})$.

Proposition 1.2.10. [Bou10][Proposition 3.2.8, p. 44-45] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie pré-additive de $\underline{\text{GrB}}$.

– La catégorie $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ est une catégorie abélienne R -linéaire : si $\mu : F \rightarrow F'$ est un morphisme de foncteurs de bi-ensembles, alors pour tout objet G de \mathcal{D}

$$\begin{aligned} \ker(\mu)(G) &= \ker(\mu_G) \\ \text{coker}(\mu)(G) &= \text{coker}(\mu_G). \end{aligned}$$

- Une suite $0 \rightarrow F \xrightarrow{\mu} F' \xrightarrow{\nu} F'' \rightarrow 0$ est une suite exacte dans $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ si et seulement si pour tout objet G de \mathcal{D} , la suite

$$0 \rightarrow F(G) \xrightarrow{\mu_G} F'(G) \xrightarrow{\nu_G} F''(G) \rightarrow 0$$

est une suite exacte dans $R\text{-mod}$.

Définition 1.2.11. On définit plusieurs sous-catégories de $\underline{\text{GrB}}$ que nous utiliserons plus tard. Soit p un nombre premier.

1. On note ${}_{\text{lg}}\underline{\text{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis. Pour G et H deux groupes finis, on définit $\text{Hom}_{{}_{\text{lg}}\underline{\text{GrB}}}(G, H)$ comme étant le sous-groupe de $B(H, G)$ des (H, G) -bi-ensembles libres à gauche (i.e. sans inflation).
2. On note $\underline{\text{GrB}}_{\text{ld}}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis. Pour G et H deux groupes finis, on définit $\text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}_{\text{ld}}}(G, H)$ comme étant le sous-groupe de $B(H, G)$ des (H, G) -bi-ensembles libres à droite (i.e. sans déflation).
3. On note ${}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis. Pour G et H deux groupes finis, on définit $\text{Hom}_{{}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}(G, H)$ comme étant le sous-groupe de $B(H, G)$ des (H, G) -bi-ensembles p -libres à gauche.
4. On note $\underline{\text{GrB}}_{p\text{-ld}}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis. Pour G et H deux groupes finis, on définit $\text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}_{p\text{-ld}}}(G, H)$ comme étant le sous-groupe de $B(H, G)$ des (H, G) -bi-ensembles p -libres à droite.
5. On note \mathcal{P} la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont tous les p -groupes finis.
6. On note \mathcal{Q} la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont tous les groupes finis d'ordre p' , c.-à-d. d'ordre premier à p .

Remarque 1.2.12. De manière similaire à la définition 1.2.7, on peut définir $R_{{}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}$, $R_{\underline{\text{GrB}}_{p\text{-ld}}}$, $R_{{}_{\text{lg}}\underline{\text{GrB}}}$, $R_{\underline{\text{GrB}}_{\text{ld}}}$, $R\mathcal{P}$ et $R\mathcal{Q}$.

Définition 1.2.13. [Bou10][Définition 4.1.7, p. 55] Une classe \mathcal{D} de groupes finis est dite *fermée pour la prise de sous-quotients* si tout groupe isomorphe à un sous-quotient d'un élément de \mathcal{D} est un élément de \mathcal{D} .

Une sous-catégorie \mathcal{D} de $\underline{\text{GrB}}$ est dite *replète* si c'est une sous-catégorie pleine dont la classe des objets est fermée pour la prise de sous-quotients.

Remarque 1.2.14. Les catégories \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont deux sous-catégories replètes de $\underline{\text{GrB}}$.

1.2.3 Foncteurs simples

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.2.15. Un foncteur est dit *simple* s'il est non-nul et ne possède pas d'autre sous-foncteur que lui-même et le foncteur nul.

Définition 1.2.16. Une sous-catégorie \mathcal{D} de $\underline{\text{GrB}}$ est dite *admissible* si elle contient les isomorphismes de groupes, et si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Si G et H sont des objets de \mathcal{D} , alors il existe un sous-ensemble $S(H, G)$ de l'ensemble des sous-groupes de $H \times G$, invariant par $(H \times G)$ -conjugaison, tel que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(G, H)$ est le sous-groupe de $\text{Hom}_{\underline{\text{GrB}}}(G, H)$ engendré par les éléments $[H \times G/L]$, pour $L \in S(H, G)$.
2. Si G et H sont des objets de \mathcal{D} , et si $L \in S(H, G)$, alors $q(L)$ est un objet de \mathcal{D} . De plus, $\text{Defres}_{p_2(L)/k_2(L)}^G$ et $\text{Indint}_{p_1(L)/k_1(L)}^H$ sont des morphismes de \mathcal{D} .

Définition 1.2.17. [Bou10, Definition 3.2.2, p. 43] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie pré-additive de la catégorie GrB . Si F est un objet non-nul de $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$, alors un *groupe minimal* pour F est un objet H de \mathcal{D} tel que $F(H) \neq 0$, mais $F(K) = 0$ pour tout objet K de \mathcal{D} avec $|K| < |H|$.

Dans la catégorie $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ pour \mathcal{D} une sous-catégorie admissible de GrB , les objets simples sont entièrement classifiés. La classification peut être consultée dans [Bou96, Section 4] ou [Bou10, Chapter 4]. On définit un foncteur R -linéaire $L_{H,V}^{R\mathcal{D}} : R\mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ pour tout objet H de \mathcal{D} et tout $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module V . On pose

$$L_{H,V}^{R\mathcal{D}}(G) = \text{Hom}_{R\mathcal{D}}(H, G) \otimes_{\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)} V$$

pour tout objet G de \mathcal{D} . De plus, pour $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme de \mathcal{D} , on a

$$\begin{aligned} L_{H,V}^{R\mathcal{D}}(\varphi) : L_{H,V}^{R\mathcal{D}}(G) &\longrightarrow L_{H,V}^{R\mathcal{D}}(G') \\ \psi \otimes v &\longmapsto \varphi \circ \psi \otimes v. \end{aligned}$$

La construction de $L_{X,V}$ n'est en fait pas anodine. Pour n'importe quel objet H de \mathcal{D} , l'anneau $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ est une R -algèbre. On considère alors le foncteur évaluation E_H de la catégorie $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ vers la catégorie $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)\text{-mod}$. Ce foncteur est défini, pour un foncteur F de $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ par $E_H(F) := F(H)$. Pour $u \in \text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ on définit l'action de u sur $m \in F(H)$ par $u \cdot m := F(u)(m)$. Le foncteur E_H a un adjoint à gauche qui à un $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module V associe le foncteur $L_{H,V}^{R\mathcal{D}}$.

Pour tout foncteur $F \in \text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ et pour tout $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module V , on a alors des isomorphismes

$$\text{Hom}_{\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})}(L_{H,V}^{R\mathcal{D}}, F) \cong \text{Hom}_{\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)}(V, F(H))$$

naturels en F et V .

Pour trouver les foncteurs simples, on démontre que si V est un $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module simple alors $L_{H,V}^{R\mathcal{D}}$ a un unique sous-foncteur maximal, noté $J_{H,V}^{R\mathcal{D}}$. Le quotient $S_{H,V}^{R\mathcal{D}} = L_{H,V}^{R\mathcal{D}}/J_{H,V}^{R\mathcal{D}}$ est donc simple, il vérifie de plus $S_{H,V}^{R\mathcal{D}}(H) = V$ (voir [Bou96, Lemme 1, p. 668]).

D'autre part, on démontre que tout foncteur simple S de la catégorie $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ est de cette forme, i.e. $S = S_{H,V}^{R\mathcal{D}}$ pour H un groupe minimal de S sur \mathcal{D} et $V = S(H)$ un $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module simple.

Finalement, si S est un foncteur simple avec groupe minimal H tel que $S(H) = V$, on peut identifier le $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$ -module simple V à un $R\text{Out}(H)$ -module simple (via une décomposition de $\text{End}_{R\mathcal{D}}(H)$), voir [Bou10, §4.3.5, Page 60].

Par conséquent, on obtient que tous les foncteurs de la forme $S_{H,V}^{R\mathcal{D}}$, pour H un objet de \mathcal{D} et V un $R\text{Out}(H)$ -module simple, sont simples et tous les foncteurs simples de $\text{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ sont de cette forme.

Lemme 1.2.18. [Bou10, Lemma 4.3.9] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie admissible de GrB . Soit $S_{H,V}^{R\mathcal{D}}$ le foncteur simple associé au groupe fini H et au $R\text{Out}(H)$ -module simple V . Si G est un objet de \mathcal{D} tel que $S_{H,V}^{R\mathcal{D}}(G) \neq 0$, alors H est isomorphe à un sous-quotient de G .

Proposition 1.2.19. Soit G un groupe fini. Alors $\dim_{\mathbb{C}} S_{1,\mathbb{C}}^{\text{CGrB}}(G)$ est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G .

Démonstration. Ce résultat est une version plus faible de [Bou10, Proposition 4.4.8, p. 71]. \square

Proposition 1.2.20. [BST14, Proposition 7.1, p.13] Pour G et H deux groupes finis, on note $\Sigma_H(G)$ l'ensemble de toutes les section (T, S) de G telles que $T/S \cong H$. Supposons que $\Sigma_H(G)$ contienne une unique section (T, S) à conjugaison près. Alors

$$S_{H,V}(G) \cong \mathrm{Tr}_1^{N_G(T,S)/T}(V).$$

En particulier, $S_{H,V}(G) = 0$ si et seulement si l'action de

$$\sum_{g \in N_G(T,S)/T} \mathrm{conj}_g$$

sur V est zéro.

1.2.4 Facteurs de composition

Définition 1.2.21. [Bau13, Définition 11] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie admissible de $\underline{\mathrm{GrB}}$. Soit F un objet de $\mathrm{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$.

Alors un foncteur simple S sur $R\mathcal{D}$ est un *facteur de composition* de F s'il existe des sous-foncteurs $F' \subseteq F'' \subseteq F$ tels que $F''/F' \cong S$.

Restriction des foncteurs simples aux sous-catégories pleines

On donne ici une proposition qui permettra par la suite de trouver les facteurs de composition d'un foncteur donné.

Proposition 1.2.22. [Bou10, Proposition 4.2.2, p. 56] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{GrB}}$ contenant les isomorphismes de groupes et soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} .

Si F est un objet simple de $\mathrm{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$, et si $\mathrm{Res}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(F) \neq \{0\}$, alors $\mathrm{Res}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(F)$ est un objet simple de $\mathrm{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{C}, R\text{-mod})$.

Remarque 1.2.23. Soit \mathcal{D} une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{GrB}}$ contenant les isomorphismes de groupes et soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} . Soit H un objet de \mathcal{D} et soit V un $\mathrm{Out}(H)$ -module simple. Notons que si $\mathrm{Res}_{R\mathcal{C}}^{R\mathcal{D}}(S_{H,V}^{R\mathcal{D}}) \neq 0$, on a $\mathrm{Res}_{R\mathcal{C}}^{R\mathcal{D}}(S_{H,V}^{R\mathcal{D}}) = S_{H,V}^{R\mathcal{C}}$.

Proposition 1.2.24. [Bau12, Proposition 2.4.3, p. 22] Soit \mathcal{D} une sous-catégorie admissible de $\underline{\mathrm{GrB}}$ et soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} .

Soit F un objet de $\mathrm{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$. Soient V un objet de \mathcal{D} et V un $R\mathrm{Out}(G)$ -module simple. Si $S_{H,V}^{R\mathcal{C}}$ est un facteur de composition de $\mathrm{Res}_{R\mathcal{C}}^{R\mathcal{D}}(F)$ sur $R\mathcal{C}$, alors $S_{H,V}^{R\mathcal{D}}$ est facteur de composition de F sur $R\mathcal{D}$.

La proposition ci-dessus sert d'argument central pour plusieurs résultats de [Bau12].

Remarque 1.2.25. Pour $F \in \mathrm{Fun}_{R\text{-mod}}(R\mathcal{D}, R\text{-mod})$ et \mathcal{C} un sous-catégorie de \mathcal{D} , on note souvent F pour $\mathrm{Res}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(F)$.

1.3 Foncteur de Burnside

On donne, dans cette section, la définition d'un foncteur de bi-ensembles bien particulier : le foncteur de Burnside.

1.3.1 Définition du foncteur de Burnside

La définition du foncteur de Burnside peut être trouvée dans [Bou10, Chapter 5] ou [Bou96, §7].

Soit A un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.3.1. Soit G un groupe fini. Le *groupe de Burnside* $B(G)$ de G est le groupe de Grothendieck de la catégorie des G -ensembles finis, avec la loi d'addition donnée par

$$[X \sqcup Y] = [X] + [Y],$$

où X et Y sont des G -ensembles finis, et $[X]$ dénote la classe d'isomorphisme de X .

On pose $AB(G) := A \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$.

Remarque 1.3.2. Soit G un groupe fini. Le groupe de Burnside $B(G)$ a une structure naturelle d'anneaux, pour le produit défini par $[X][Y] = [X \times Y]$, pour des G -ensembles finis X et Y .

On peut trouver un excellent résumé des propriétés de l'anneau de Burnside dans [Bou00].

Soit G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble. On définit

$$\begin{aligned} B(U) : B(G) &\longrightarrow B(H) \\ [X] &\longmapsto [U \times_G X]. \end{aligned}$$

Premièrement, remarquons que $B(U)$ est bien défini. En effet, si $X \cong Y$ comme G -ensembles alors $U \times_G X \cong U \times_G Y$ comme H -ensembles et

$$U \times_G (X_1 \sqcup X_2) \cong U \times_G X_1 \sqcup U \times_G X_2$$

pour tous G -ensembles X_1 et X_2 .

Remarque 1.3.3. Soient G , H et K trois groupes finis. L'application $B(U) : B(G) \rightarrow B(H)$ vérifie

$$\begin{aligned} U_1 \cong U_2 &\Rightarrow B(U_1) = B(U_2) \\ B(U_1 \sqcup U_2) &= B(U_1) + B(U_2) \\ B(V) \circ B(U) &= B(V \times_H U) \end{aligned}$$

pour tout U , U_1 et U_2 des (H, G) -bi-ensembles et tout V un (K, H) -bi-ensemble.

On a donc

$$AB \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A \underline{\text{GrB}}, A\text{-mod}).$$

Lemme 1.3.4. Les foncteurs $\mathbb{C}B$ et $L_{1, \mathbb{C}}^{\text{CGrB}}$ sont isomorphes sur la catégorie $\mathbb{C} \underline{\text{GrB}}$.

Démonstration. Soit G un groupe fini, on a alors

$$L_{1, \mathbb{C}}^{\text{CGrB}}(G) = \text{Hom}_{\mathbb{C} \underline{\text{GrB}}}(1, G) \otimes_{\text{End}_{\mathbb{C} \underline{\text{GrB}}}(1)} \mathbb{C} = \mathbb{C}B(G, 1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathbb{C}B(G, 1).$$

On peut donc définir un isomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha_G : L_{1, \mathbb{C}}^{\text{CGrB}}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}B(G) \\ [X] &\longmapsto [X] \end{aligned}$$

où tout $(G, 1)$ -bi-ensemble X est vu comme un G -ensemble. Cette application est bien définie, \mathbb{C} -linéaire et c'est un isomorphisme. On vérifie également que ces applications définissent une transformation naturelle $L_{1, \mathbb{C}}^{\text{CGrB}} \rightarrow \mathbb{C}B$ puisque les définitions de $L_{1, \mathbb{C}}^{\text{CGrB}}(G)$ et $\mathbb{C}B$ sur les morphismes sont essentiellement les mêmes. \square

1.3.2 Classification et B-groupes

En utilisant les idempotents de l'anneau de Burnside, S. Bouc a classifié les facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}B$ sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$. La classification des facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ est explicitement donnée dans [Bou10, Chapter 5]. Comme mentionné ci-dessus cette classification utilise les propriétés des idempotents de l'anneau de Burnside. Il se trouve que les facteurs de composition simples apparaissant dans $\mathbb{C}B$ sont caractérisés à l'aide des B-groupes (voir [Bou10, Definition 5.4.6, p. 85]).

1.4 Foncteurs des représentations et des modules projectifs

1.4.1 Définition du foncteur des représentations ordinaires

Soit \mathbb{F} un corps quelconque.

Notation 1.4.1. Soit G un groupe fini, on note $R_{\mathbb{F}}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}G$ -modules de dimension finie. C.-à-d. $R_{\mathbb{F}}(G)$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble $\{[V] \mid V \text{ } \mathbb{F}G\text{-module de génération finie}\}$ quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[U] - [V] - [W]$ où $0 \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow W \rightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathbb{F}G$ -modules (et où $[\cdot]$ dénote la classe d'isomorphisme d'un $\mathbb{F}G$ -module).

Lemme 1.4.2. *Supposons que \mathbb{F} soit de caractéristique p (avec p un nombre premier ou $p = 0$). Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble fini. On considère l'application $M \mapsto \mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M$ pour M un $\mathbb{F}G$ -module. Si U est p -libre à droite, alors l'application ci-dessus induit une application $R_{\mathbb{F}}(U) : R_{\mathbb{F}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{F}}(H)$.*

Lemme 1.4.3. *Soit G un groupe fini. Si U est un G -ensemble à droite transitif de la forme $U \cong Q \backslash G$ avec Q un p' -sous-groupe de G , alors $\mathbb{F}U$ est un $\mathbb{F}G$ -module projectif à droite.*

Preuve du lemme 1.4.3. Puisque $U \cong Q \backslash G$, on a $\mathbb{F}U \cong \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}Q} \mathbb{F}G$. On va montrer que \mathbb{F} est un $\mathbb{F}Q$ -module projectif à droite. On considère l'application d'augmentation $\varepsilon : \mathbb{F}Q \rightarrow \mathbb{F} : q \mapsto 1$. On a alors une courte suite exacte de $\mathbb{F}Q$ -modules où IQ dénote l'idéal d'augmentation

$$0 \rightarrow IQ \rightarrow \mathbb{F}Q \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F} \rightarrow 0$$

qui est scindée par l'application $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}Q : 1 \rightarrow \frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} q$. Donc on a $\mathbb{F}Q \cong \mathbb{F} \oplus IQ$ comme $\mathbb{F}Q$ -modules à droite. Donc \mathbb{F} est un facteur direct du module libre $\mathbb{F}Q$, il est donc projectif. Il s'ensuit alors que $\mathbb{F}U \cong \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}Q} \mathbb{F}G$ est un $\mathbb{F}G$ -module projectif à droite. \square

Preuve du lemme 1.4.2. On va montrer que si U est p -libre à droite alors $\mathbb{F}U$ est un $\mathbb{F}G$ -module à droite projectif. Si on a démontré cela, alors le foncteur $\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} -$ est exact. Dans ce cas, l'application $M \mapsto \mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M$ préserve les suites exactes (elle préserve déjà les isomorphismes) et donc induit bien une application $R_{\mathbb{F}}(U) : R_{\mathbb{F}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{F}}(H)$.

Montrons alors que si U est p -libre à droite, $\mathbb{F}U$ est projectif à droite. Comme U est un (H, G) -bi-ensemble, U est en particulier un G -ensemble à droite. Par la définition de p -libre à droite, si $u \in U$, l'ordre du stabilisateur de u dans G n'est pas divisible par p . Autrement dit, on a une décomposition de U en G -ensembles transitifs

$$U \cong Q_1 \backslash G \sqcup \dots \sqcup Q_n \backslash G$$

où Q_i est d'ordre p' pour tout $1 \leq i \leq n$. On applique alors le lemme 1.4.3, ce qui démontre le résultat. \square

Remarque 1.4.4. Soient G , H et K trois groupes finis. L'application $R_{\mathbb{F}}(U) : R_{\mathbb{F}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{F}}(H)$ vérifie

$$\begin{aligned} U_1 \cong U_2 &\Rightarrow R_{\mathbb{F}}(U_1) = R_{\mathbb{F}}(U_2) \\ R_{\mathbb{F}}(U_1 \sqcup U_2) &= R_{\mathbb{F}}(U_1) + R_{\mathbb{F}}(U_2) \\ R_{\mathbb{F}}(V) \circ R_{\mathbb{F}}(U) &= R_{\mathbb{F}}(V \times_H U) \end{aligned}$$

pour tout U , U_1 et U_2 des (H, G) -bi-ensembles p -libres à droite et tout V un (K, H) -bi-ensemble p -libre à droite.

Soit A un anneau commutatif unitaire. On a donc, si \mathbb{F} est de caractéristique $p > 0$,

$$AR_{\mathbb{F}} \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A \underline{\text{GrB}}_{p\text{-ld}}, A\text{-mod}).$$

Remarquons que si \mathbb{F} est de caractéristique zéro, il n'y a pas de condition sur les bi-ensembles, c.-à-d.

$$AR_{\mathbb{F}} \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A \underline{\text{GrB}}, A\text{-mod}).$$

1.4.2 Définition du foncteur des modules projectifs

Soit \mathbb{F} un corps de caractéristique p non nulle.

Notation 1.4.5. Si G est un groupe fini, on note $\text{Proj}_{\mathbb{F}}(G)$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}G$ -modules projectifs de génération finie. C.-à-d. $\text{Proj}_{\mathbb{F}}(G)$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble $\{[P] \mid P \text{ } \mathbb{F}G\text{-module projectif de génération finie}\}$ quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[P \oplus Q] - [P] - [Q]$ pour P et Q des $\mathbb{F}G$ -modules projectifs.

Lemme 1.4.6. Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble fini. On considère $M \mapsto \mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M$ pour M un $\mathbb{F}G$ -module projectif. Si U est p -libre à gauche, alors l'application ci-dessus induit un homomorphisme de groupes $\text{Proj}_{\mathbb{F}}(U) : \text{Proj}_{\mathbb{F}}(G) \rightarrow \text{Proj}_{\mathbb{F}}(H)$.

Démonstration. On démontre de la même manière que dans la preuve du lemme 1.4.2 que $\mathbb{F}U$ est un $\mathbb{F}H$ -module à gauche projectif. Si M est un $\mathbb{F}G$ -module projectif, alors $\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M$ est aussi un $\mathbb{F}H$ -module projectif. En effet, puisque M est projectif, il existe N un $\mathbb{F}G$ -module tel que $M \oplus N \cong \mathbb{F}G^{\oplus n}$ pour un entier n . Alors on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M) \oplus (\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} N) &\cong \mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} (M \oplus N) \\ &\cong \mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} \mathbb{F}G^{\oplus n} \\ &\cong (\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} \mathbb{F}G)^{\oplus n} \\ &\cong (\mathbb{F}U)^{\oplus n}. \end{aligned}$$

Et donc $\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} M$ est facteur d'un module projectif et est donc projectif lui-même. Comme l'application $\mathbb{F}U \otimes_{\mathbb{F}G} -$ préserve les sommes directes, cela induit bien un homomorphisme de groupes $\text{Proj}_{\mathbb{F}}(U) : \text{Proj}_{\mathbb{F}}(G) \rightarrow \text{Proj}_{\mathbb{F}}(H)$. \square

Remarque 1.4.7. Soient G , H et K trois groupes finis. L'application définie dans le lemme 1.4.6 vérifie

$$\begin{aligned} U_1 \cong U_2 &\Rightarrow \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U_1) = \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U_2) \\ \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U_1 \sqcup U_2) &= \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U_1) + \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U_2) \\ \text{Proj}_{\mathbb{F}}(V) \circ \text{Proj}_{\mathbb{F}}(U) &= \text{Proj}_{\mathbb{F}}(V \times_H U) \end{aligned}$$

pour tout U, U_1 et U_2 des (H, G) -bi-ensembles p -libres à droite et tout V un (K, H) -bi-ensemble p -libre à droite.

Soit A un anneau commutatif unitaire. On a donc, si \mathbb{F} est de caractéristique $p > 0$,

$$A \text{Proj}_{\mathbb{F}} \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, A\text{-mod}).$$

Remarquons que si \mathbb{F} est de caractéristique zéro, il n'y a pas de condition sur les bi-ensembles, c.-à-d.

$$A \text{Proj}_{\mathbb{F}} \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A \underline{\text{GrB}}, A\text{-mod}).$$

Théorème 1.4.8. *Soit G un groupe fini. Le nombre de classes d'isomorphisme de kG -modules projectifs indécomposables est égal au nombre de classes de conjugaison de p' -éléments dans G .*

Démonstration. Ce résultat découle directement du fait que le nombre de classes d'isomorphisme de kG -modules projectifs indécomposables est égal au nombre de classes d'isomorphisme de kG -modules simples et de [Ben98, Corollary 5.3.5, p. 177]. \square

Notation 1.4.9. Soit G un groupe fini et p un nombre premier. On note $l_p(G) = l(G)$ le nombre de classes de conjugaison de p' -éléments dans G .

1.4.3 Lien entre le foncteur de Burnside et le foncteur des représentations

Soit \mathbb{Q} le corps des nombres des rationnels. Soit \mathbb{F} un corps quelconque et \mathbb{L} un corps de caractéristique zéro.

Notation 1.4.10. On considère les deux foncteurs de bi-ensembles $\mathbb{F}B$ et $\mathbb{F}R_{\mathbb{L}}$ sur la catégorie $\mathbb{F} \underline{\text{GrB}}$. On dénote $b : \mathbb{F}B \rightarrow \mathbb{F}R_{\mathbb{L}}$ la transformation naturelle définie, pour tout groupe fini G , par $b_G([X]) = [\mathbb{L}X]$ pour tout G -ensemble X (puis étendue par \mathbb{F} -linéarité à $B(G)$).

Il s'agit clairement d'une transformation naturelle au vu des définitions de foncteurs de $\mathbb{F}B$ et $\mathbb{F}R_{\mathbb{L}}$.

Proposition 1.4.11. [Bou10, Proposition 4.4.8] *Si \mathbb{F} est de caractéristique zéro, les foncteurs $\mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}$ et $S_{1, \mathbb{F}}^{\mathbb{F} \underline{\text{GrB}}}$ sont isomorphes sur la catégorie $\mathbb{F} \underline{\text{GrB}}$.*

Démonstration. La preuve consiste à démontrer que la transformation naturelle $b : \mathbb{F}B \rightarrow \mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}$, définie par $b_G([X]) = [\mathbb{Q}X]$ (pour tout groupe fini G et pour tout élément $[X] \in B(G)$) est surjective (par le théorème d'induction d'Artin, c.-à-d. le théorème 1.4.12), que $\mathbb{F}B = L_{1, \mathbb{F}}^{\mathbb{F} \underline{\text{GrB}}}$ et que $\mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}$ est simple. \square

Théorème 1.4.12 (Théorème D'Artin). *Soit G un groupe fini. Chaque caractère rationnel φ de G peut être exprimé de la forme*

$$\varphi = \sum a_C \text{Ind}_C^G(1_C)$$

où 1_C est le caractère trivial sur C , où la somme est prise sur l'ensemble des sous-groupes cycliques de G et où $a_C \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Voir [CR88, p.378]. \square

Théorème 1.4.13. *Les facteurs de compositions de $\mathbb{C}B$ sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$ sont exactement les foncteurs $S_{1, \mathbb{C}}$ et $S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}$.*

Démonstration. Les facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ sur une sous-catégorie pleine \mathcal{D} de $\underline{\text{GrB}}$ sont exactement les foncteurs $S_{G,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$, où G est un objet de \mathcal{D} qui est un B -groupe (voir remarque [Bou10, Remark 5.5.2]). Comme le seul B -groupe non trivial qui est aussi un p -groupe est le groupe $C_p \times C_p$ (voir [Bou10, §5.6.9]), on obtient le résultat. \square

Lemme 1.4.14. *La transformation naturelle $b : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}$ (voir 1.4.10) induit la suite exacte courte de foncteurs*

$$0 \rightarrow S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}B \xrightarrow{\beta} S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$.

Démonstration. On note β la transformation naturelle de "passage au quotient" puisqu'on a $\mathbb{C}B = L_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$. Selon la preuve de la proposition 1.4.11, cette application correspond exactement à b (via $\mathbb{C}R_{\mathbb{Q}} \cong S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$).

Donc on a une application surjective $\beta : \mathbb{C}B \rightarrow S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$. On restreint β sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$ et on a alors $\beta : \mathbb{C}B \rightarrow S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$ (on a bien que la restriction de $S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$ à $\mathbb{C}\mathcal{P}$ est non nulle puisque $1 \in \mathbb{C}\mathcal{P}$ et $S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(1) = \mathbb{C} \neq 0$). Remarquons que $\ker(\beta)$ est un sous-foncteur de $\mathbb{C}B$, donc ses facteurs de composition sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}B$. Or, par la classification des facteurs de composition du foncteur de Burnside (voir section 1.3.2) les facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$ sont $S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$ et $S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$ avec multiplicité un (ceci découle du fait que les seuls p -groupes qui sont des B -groupes sont 1 et $C_p \times C_p$ - voir [Bou10, §5.6.9, p. 94]). Ainsi la seule possibilité est que $\ker(\beta) \cong S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$. \square

1.4.4 Changement de corps

Système p -modulaire

Soit p un nombre premier. Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire. On suppose que K a toute les racines de l'unité et k est algébriquement clos. On note \mathfrak{p} l'unique idéal de \mathcal{O} tel que $\mathcal{O}/\mathfrak{p} \cong k$. Soit G un groupe fini. Pour un $\mathcal{O}G$ -module M , on définit \bar{M} comme étant le kG -module $M/\mathfrak{p}M = k \otimes_{\mathcal{O}} M$.

Lemme 1.4.15. *Soit \mathcal{Q} la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont les p' -groupes (voir la définition 1.2.11). Alors, on a un isomorphisme de foncteurs*

$$\varepsilon : \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$$

sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{Q}$.

Démonstration. On commence par montrer que pour tout p' -groupe fini G , il existe un isomorphisme $\varepsilon_G : \mathbb{C}R_k(G) \rightarrow \mathbb{C}R_K(G)$. La preuve de ce résultat est donnée dans [CR88, §18], plus précisément voire [CR88, Corollary (18.11)]. On trouve également une preuve dans [Ser78, Proposition 43, p. 140]. Pour cette preuve, on utilise les applications c , d et e du triangle de Cartan-Brauer (voir [Ser78, Chapitre 15]).

On montre que l'application de décomposition $d : R_K(G) \rightarrow R_k(G)$ est un isomorphisme. Son inverse est $e : \text{Proj}_k(G) \rightarrow R_K(G)$ (l'application du triangle de Cartan-Brauer), qui est donnée par l'isomorphisme entre $\text{Proj}_k(G)$ et $\text{Proj}_{\mathcal{O}} G$ puis l'extension des scalaires. On utilise l'isomorphisme $\text{Proj}_k(G) \cong R_k(G)$ afin d'obtenir $e' : R_k(G) \rightarrow R_K(G)$. De manière plus précise, supposons que la liste $\{F_1, \dots, F_r\}$ soit une liste des kG -modules simples à isomorphisme près. Cette liste est également une liste des kG -modules projectifs indécomposables à isomorphisme

près. Par le relèvement des projectifs, on peut considérer la liste $\{P_1, \dots, P_r\}$ de $\mathcal{O}G$ -modules projectifs indécomposables tels que $\overline{P_i} = F_i$. Cette liste est une liste génératrice des $\mathcal{O}G$ -modules projectifs (à isomorphisme près). L'isomorphisme entre $\text{Proj}_k(G)$ et $\text{Proj}_{\mathcal{O}}(G)$ se fait alors via $F_i \mapsto P_i$. Si V est un kG -module, on a alors une décomposition $V \cong \bigoplus_{i=1}^r F_i^{n_i}$ (où les n_i sont uniques). On obtient alors

$$e'([V]) = \left[K \otimes_{\mathcal{O}} \left(\bigoplus_{i=1}^r P_i^{n_i} \right) \right].$$

Notation 1.4.16. Soit Q un groupe fini d'ordre premier à p . Soit V un kQ -module. On note $f(V)$ un $\mathcal{O}Q$ -module tel que $e'([V]) = [K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)]$, autrement dit $\overline{f(V)} = V$. Notons que $f(V)$ n'est défini qu'à isomorphisme près.

On a alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon_G : \mathbb{C}R_k(G) &\longrightarrow \mathbb{C}R_K(G) \\ [V] &\longmapsto [K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)] \end{aligned}$$

qui est bien un isomorphisme.

Il faut à présent vérifier que cette application est une transformation naturelle. Soient G et H deux groupes finis, soit U un (H, G) -bi-ensemble et soit V un kG -module. On a

$$\begin{aligned} \varepsilon_H(\mathbb{C}R_k([U]))([V]) &= \varepsilon_H([kU \otimes_{kG} V]) \\ &= [K \otimes_{\mathcal{O}} f(kU \otimes_{kG} V)]. \end{aligned}$$

Or, on peut démontrer que $f(kU \otimes_{kG} V) \cong \mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} f(V)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} f(V)} &= k \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} f(V)) \\ &\cong (k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}U) \otimes_{kG} (k \otimes_{\mathcal{O}} f(V)) \\ &= kU \otimes_{kG} V. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_H(\mathbb{C}R_k([U]))([V]) &= [K \otimes_{\mathcal{O}} f(kU \otimes_{kG} V)] \\ &= [K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} f(V)] \\ &= [KU \otimes_{KG} (K \otimes_{\mathcal{O}} f(V))] \\ &= \mathbb{C}R_K([U]) \circ \varepsilon_G([V]). \end{aligned} \quad \square$$

Lien entre R_K et $R_{\mathbb{Q}}$ pour K de caractéristique zéro

Soit K un corps de caractéristique zéro. On a alors une injection $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$.

Définition 1.4.17. Soit $\iota : R_{\mathbb{Q}} \rightarrow R_K$ la transformation naturelle définie comme suit. Soit G un groupe fini, on définit alors

$$\begin{aligned} \iota_G : R_{\mathbb{Q}}(G) &\longrightarrow R_K(G) \\ [M] &\longmapsto [K \otimes_{\mathbb{Q}} M]. \end{aligned}$$

Lemme 1.4.18. La transformation naturelle ι est bien définie et c'est en effet une transformation naturelle. On a de plus que ι est injective.

Démonstration. Premièrement, pour tout groupe fini G , ι_G est bien définie. En effet, si $M \cong N$ comme $\mathbb{Q}G$ -modules, on a alors bien que $K \otimes_{\mathbb{Q}} M \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} N$ comme KG -modules. De plus, le fait que ι est une transformation naturelle découle directement de la structure de foncteur du foncteur des représentations.

Pour tout groupe fini G , l'injectivité de ι_G est démontrée dans [Ser78, §14.6], donc ι est injective. \square

1.4.5 Classification des facteurs de composition du foncteur des représentations

Soit K un corps de caractéristique zéro contenant toutes les racines de l'unité.

Théorème 1.4.19. [Bou10, Corollary 7.3.5, p. 133] *Le foncteur $\mathbb{C}R_K$ est un objet semi-simple de $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Plus précisément,*

$$\mathbb{C}R_K \cong \bigoplus_{(m,\xi)} S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}},$$

où (m, ξ) parcourt l'ensemble des paires composées d'un entier positif m et d'un caractère primitif $\xi : C_m^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

On note

$$\sigma : \mathbb{C}R_K \longrightarrow \bigoplus_{\substack{(m,\xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$$

l'isomorphisme sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$.

Restriction à la catégorie des p' -groupes

Lemme 1.4.20. *L'isomorphisme σ du théorème 1.4.19 induit un isomorphisme*

$$\mathbb{C}R_K \cong \bigoplus_{\substack{(m,\xi) \\ (m,p) = 1}} S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}}$$

sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{Q}$.

Démonstration. Par le théorème 1.4.19 on connaît déjà l'écriture de $\mathbb{C}R_K$ sur $\mathbb{C}\text{GrB}$. Il reste à savoir ce qu'il se passe lorsqu'on restreint à la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{Q}$ les facteurs $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$. On a deux possibilités, ou bien $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}} = 0$ sur $\mathbb{C}\mathcal{Q}$, ou $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}} \neq 0$ et $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}}$ est un foncteur simple sur $\mathbb{C}\mathcal{Q}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir la section 1.2.4.

Supposons que $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ soit non nul en restriction à $\mathbb{C}\mathcal{Q}$, alors il existe H un p' -groupe fini tel que $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(H) \neq 0$. Alors, par le lemme 1.2.18, C_m est isomorphe à un sous-quotient de H . Donc m divise $|H|$. Donc m est premier à p puisque $|H|$ n'a pas de facteur p . Réciproquement, si $(m, p) = 1$, C_m est un objet de la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{Q}$. Comme $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(C_m) = \mathbb{C}_\xi \neq 0$, la restriction de $S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ à $\mathbb{C}\mathcal{Q}$ est non nulle. D'où le résultat. \square

Chapitre 2

Foncteur des modules de p -permutation

Ce chapitre est dédié au foncteur des modules de p -permutation. Il n'y a pas encore de classification des facteurs de composition de ce foncteur. Ici on donne la définition de ce foncteur, certaines de ses propriétés et un résultat sur ses facteurs de composition.

2.1 Définition et propriétés usuelles

2.1.1 Foncteur des modules de permutation

Soit k un corps.

Définition 2.1.1. Soient G un groupe fini et M un kG -module. Alors M est un module de *permutation* s'il existe un G -ensemble X tel que $M = kX$ (c.-à-d. M possède une k -base qui est G -stable).

Notation 2.1.2. On note Π_k le foncteur des modules de permutation sur le corps k .

La définition et les propriétés de ce foncteur sont données dans [Bau13].

Notation 2.1.3. On considère les deux foncteurs de bi-ensembles $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\Pi_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$. On dénote $b' : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}\Pi_k$ la transformation naturelle définie, pour tout groupe fini G , par $b'_G([X]) = [kX]$ pour tout G ensemble X (puis étendue par \mathbb{C} -linéarité à $B(G)$). Il s'agit clairement d'une transformation naturelle au vu des définitions de foncteurs de $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\Pi_k$.

2.1.2 Définition des modules de p -permutation et du foncteur $\mathbb{C}pp_k$

Soit p un nombre premier et soit k un corps de caractéristique p .

Définition 2.1.4. Soient G un groupe fini et M un kG -module. Alors M est un module de *p -permutation* si c'est un facteur direct d'un module de permutation.

Les modules de p -permutation sont aussi appelé les modules de source triviale. Ces modules sont décrits dans [Ben98, §3.11, p. 84].

Définition 2.1.5. [Bau13, Definition 31, p.11] On note $pp_k(G)$ le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de kG -modules de p -permutation.

Remarquons qu'il s'agit d'un \mathbb{Z} -module de type fini et l'ensemble des kG -modules de p -permutation indécomposables en est une base.

Proposition 2.1.6. [Bau12, Proposition 2.24, p.19] Soient G et H deux groupes finis et U un (H, G) -bi-ensemble fini. Si M est un kG -module de p -permutation, alors $kU \otimes_{kG} M$ est une kH -module de p -permutation.

Définition 2.1.7. Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble fini. Alors, on définit une application \mathbb{Z} -linéaire

$$\begin{aligned} pp_k([U]) : \quad pp_k(G) &\longrightarrow pp_k(H) \\ [M] &\longmapsto [kU \otimes_{kG} M]. \end{aligned}$$

Soit $u \in B(H, G)$. Alors $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ où $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ et U_i est un (H, G) -bi-ensemble. Alors, on définit une application \mathbb{Z} -linéaire

$$pp_k(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i pp_k([U_i]).$$

Théorème 2.1.8. [Bau12, Théorème 2.26, p.19] La définition ci-dessus muni pp_k d'une structure de foncteur de bi-ensembles sur $\underline{\text{GrB}}$.

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Définition 2.1.9. Pour tout groupe fini G , on note $Rpp_k(G) := R \otimes_{\mathbb{Z}} pp_k(G)$. Pour $u \in \text{Hom}_R \underline{\text{GrB}}(G, H)$, on pose $Rpp_k(u) = \text{Id}_R \otimes pp_k(u)$.

Théorème 2.1.10. [Bau12, Théorème 2.28, p.20] Avec la définition ci-dessus on a $Rpp_k \in \text{Fun}_{R\text{-mod}}(R \underline{\text{GrB}}, R\text{-mod})$.

2.1.3 Classification des modules de p -permutation

Les modules de p -permutation sont classifiés dans [Bro85]. Soit G un groupe fini. La classification consiste à dire, pour P un p -sous-groupe de G , qu'il existe une bijection entre les kG -modules de p -permutation indécomposables de vortex P et les $kN_G(P)/P$ -modules projectifs indécomposables. Le lemme suivant présente une conséquence de la classification que nous utiliserons plus tard.

Lemme 2.1.11. Soit G un groupe fini. On considère l'ensemble \mathcal{B} des classes d'isomorphisme des modules de la forme $\text{Indinf}_{N_G(P)/P}^G(M(P))$ où $M(P)$ parcourt les classes d'isomorphisme de $kN_G(P)/P$ -modules projectifs indécomposables et P parcourt les p -sous-groupes de G à conjugaison près. Alors \mathcal{B} est une \mathbb{Z} -base de $pp_k(G)$.

Démonstration. La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [Pui88, Lemma 3.8 (ii)] ou [Bou91, Corollaire de la Proposition 13]. \square

Corollaire 2.1.12. Soit G un groupe fini. Le nombre de classes d'isomorphisme de kG -modules de p -permutation indécomposables est égal à

$$\sum_D l_p(N_G(D)/D)$$

où D parcourt les p -sous-groupes de G à conjugaison près.

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 2.1.11 et du théorème 1.4.8. \square

2.1.4 Système p -modulaire

Soit p un nombre premier. Soit (K, \mathcal{O}, k) un système p -modulaire. On note \mathfrak{p} l'unique idéal de \mathcal{O} tel que $\mathcal{O}/\mathfrak{p} \cong k$. Supposons de plus que K soit un corps contenant toutes les racines de l'unité.

Soit G un groupe fini. Pour un $\mathcal{O}G$ -module M , on définit \overline{M} comme étant le kG -module

$$\overline{M} = M/\mathfrak{p}M = k \otimes_{\mathcal{O}} M.$$

Lemme 2.1.13. *Il existe une transformation naturelle*

$$\mathfrak{h} : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C}pp_k$$

qui est un isomorphisme de foncteurs sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$. Pour G un groupe fini, on a de plus

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_G : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}pp_k(G) \\ [M] &\longmapsto [\overline{M}] \end{aligned}$$

pour tout $\mathcal{O}G$ -module M .

Démonstration. Soit G un groupe fini. Puisqu'un module de p -permutation sur kG peut être relevé en un module de p -permutation sur $\mathcal{O}G$, voir [Ben98, Corollary, 3.11.4] (découle du relèvement des idempotents), \mathfrak{h}_G est un isomorphisme.

De plus, l'isomorphisme ci-dessus s'étend en un isomorphisme de foncteurs. En effet, pour tous G et H des groupes finis et tout (H, G) -bi-ensemble U , on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_G \circ \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}([U])([M]) &= \mathfrak{h}_G([\mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}([U])([M])]) \\ &= \mathfrak{h}_G([\mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} M]) \\ &= [\overline{\mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} M}] \\ &= [kU \otimes_{kG} \overline{M}] \\ &= \mathbb{C}pp_k([U]) \circ \mathfrak{h}_G([M]), \end{aligned}$$

pour tout $\mathcal{O}G$ -module M . □

2.2 Application $f : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$

Soit k un corps de caractéristique p . Le but est ici d'étudier plus en détail le foncteur $\mathbb{C}pp_k$. En particulier, on souhaite connaître ses facteurs simples de composition. Les premières étapes de cette classification ont été accomplies dans [Bau11], [Bau12] et [Bau13]. Le prochain paragraphe apporte une autre perspective. On suppose que (K, \mathcal{O}, k) est un système p -modulaire. On veut alors profiter de cette hypothèse pour étudier les kG -modules de p -permutation en passant en caractéristique zéro. Autrement dit, on va comparer $\mathbb{C}pp_k$ avec $\mathbb{C}R_K$.

2.2.1 Définition de l'application $f : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$

Définition 2.2.1. On définit une transformation naturelle

$$f' : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C}R_K$$

où, pour G un groupe fini, on a

$$\begin{aligned} f'_G : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} &\longrightarrow \mathbb{C}R_K \\ [M] &\longmapsto [K \otimes_{\mathcal{O}} M]. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2. *L'application ci-dessus \mathfrak{f}'_G est bien définie pour tout groupe fini G , de plus, \mathfrak{f}' est bien une transformation naturelle.*

Démonstration. Soit G un groupe fini. Si M est un $\mathcal{O}G$ -module de p -permutation, le module $\widehat{M} := K \otimes_{\mathcal{O}} M$ est un KG -module de p -permutation, donc en particulier un KG -module. De plus, si $[M] = [N]$ dans $pp_{\mathcal{O}}(G)$, alors M et N ont les mêmes facteurs indécomposables (rapelons que les classes d'isomorphisme de modules de p -permutation indécomposables forment une \mathbb{Z} -base de $pp_{\mathcal{O}}(G)$). Ainsi $M \cong N$ via le théorème de Krull-Schmidt, et donc $\widehat{M} \cong \widehat{N}$, ce qui implique $[\widehat{M}] = [\widehat{N}]$ dans $R_K(G)$. Cela induit donc (par \mathbb{C} -linéarité) une application $\mathfrak{f}'_G : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(G) \rightarrow \mathbb{C}R_K(G)$.

Nous allons à présent vérifier que $\mathfrak{f}' : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C}R_K$ est une transformation naturelle. Pour cela, on considère G et H des groupes finis et U un (H, G) -bi-ensemble et on va vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(G) & \xrightarrow{\mathfrak{f}'_G} & \mathbb{C}R_K(G) \\ \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(U) \downarrow & & \downarrow \mathbb{C}R_K(U) \\ \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(H) & \xrightarrow{\mathfrak{f}'_H} & \mathbb{C}R_K(H) \end{array}$$

commute. Or, cela découle simplement du fait qu'on a un isomorphisme de KH -modules

$$K \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}U \otimes_{\mathcal{O}G} M) \cong KU \otimes_{KG} (K \otimes_{\mathcal{O}} M)$$

pour tout $\mathcal{O}G$ -module M . □

On rappelle que par le lemme 2.1.13, on a un isomorphisme $\mathfrak{h} : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ comme foncteurs, où

$$\mathfrak{h}_G : \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}}(G) \rightarrow \mathbb{C}pp_k(G) : [M] \mapsto [\widehat{M}]$$

pour tout groupe fini G .

Définition 2.2.3. On définit la transformation naturelle

$$\mathfrak{f} : \mathbb{C}pp_k \xrightarrow{\mathfrak{h}^{-1}} \mathbb{C}pp_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\mathfrak{f}'} \mathbb{C}R_K.$$

Lien avec le foncteur de Burnside

Notation 2.2.4. On considère les deux foncteurs de bi-ensembles $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}pp_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$. On dénote $\mathfrak{b} : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ la transformation naturelle définie, pour tout groupe fini G , par $\mathfrak{b}_G([X]) = [kX]$ pour tout G ensemble X (puis étendue par \mathbb{C} -linéarité à $B(G)$). Il s'agit clairement d'une transformation naturelle au vu des définitions de foncteurs de $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}pp_k$.

Lemme 2.2.5. *Avec les notations 1.4.17 et 1.4.10, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}B & \xrightarrow{\mathfrak{b}} & \mathbb{C}pp_k \\ \mathfrak{b} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{f} \\ \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C}R_K, \end{array} \tag{2.1}$$

commute.

Démonstration. Le diagramme (2.1) commute si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}B(G) & \xrightarrow{b_G} & \mathbb{C}pp_k(G) \\ b_G \downarrow & & \downarrow f_G \\ \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}(G) & \xrightarrow{\iota_G} & \mathbb{C}R_K(G), \end{array}$$

commute pour tout groupe fini G . Soit X un G -ensemble fini. On a

$$f_G \circ b_G([X]) = [K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}X]$$

(car kX est envoyé sur $\mathcal{O}X$ par l'isomorphisme $pp_k(G) \cong pp_{\mathcal{O}}(G)$). Puisque $K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}X \cong KX$, on a $f_G \circ b_G([X]) = [KX]$. D'autre part $\iota_G \circ b_G([X]) = [K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}X] = [KX]$. Comme $\mathbb{C}B(G)$ est engendré par les classes d'isomorphisme de G -ensembles indécomposables, ceci termine la preuve. \square

2.2.2 Restriction à la catégorie des p -groupes

Soit \mathcal{P} la sous-catégorie pleine de \mathbf{GrB} dont les objets sont les p -groupes finis (voir notation 1.2.11).

Lemme 2.2.6. *La transformation naturelle \mathbf{b} , définie au paragraphe 2.2.4, induit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}pp_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que si P est un p -groupe et Q est un sous-groupe de P , le module $k[P/Q]$ est indécomposable comme kP -module (voir [Ben98, p. 92]). Cela implique que tous les modules de p -permutation sont des modules de permutation (voir [Ben98, Lemma 3.11.2, p. 84] ou [Bau12, Corollaire 1.16]). Ainsi, $\mathbb{C}\Pi_k = \mathbb{C}pp_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$. Remarquons que l'application $b' : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}\Pi_k$ (voir 2.1.3) est surjective par définition des modules de permutation. De plus b' est injective, en effet, pour tout p -groupe fini P , $\mathbb{C}B(P)$ et $\mathbb{C}\Pi_k(P)$ ont la même dimension. En effet, la liste $\{[P/Q] \mid Q \leq_P P\}$ est une base de $\mathbb{C}B(P)$. Et comme $k[P/Q]$ est indécomposable comme kP -module, la liste $\{k[P/Q] \mid Q \leq_P P\}$ est une base de $\mathbb{C}\Pi_k$. D'où le résultat. \square

Théorème 2.2.7. [Bau13, Theorem 10, §4] *Les foncteurs simples $S_{1,\mathbb{C}}$ et $S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}$ sont exactement les facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$ sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$ et ont chacun multiplicité un.*

Démonstration. Le résultat découle du lemme 2.2.6 et du lemme 1.4.14. \square

Proposition 2.2.8. *Sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$, on a*

$$\mathrm{im}(f) \cong S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \text{ et } \ker(f) \cong S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$$

Démonstration. En restreignant le diagramme (2.1) à la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}B & \xrightarrow[\cong]{b} & \mathbb{C}pp_k \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C}R_K. \end{array}$$

Par le lemme 2.2.6, l'application $\mathbf{b} : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ est un isomorphisme. Comme ι est injective (voir 1.4.17), on obtient

$$\ker(f) \cong \ker(f \circ \mathbf{b}) = \ker(\iota \circ b) = \ker(b : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}})$$

Or, $b : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}$ induit la suite exacte courte de foncteurs

$$0 \rightarrow S_{\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}B \rightarrow S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$ (voir lemme 1.4.14). Ainsi $\ker(f) \cong S_{\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$.

De manière similaire on a,

$$\mathrm{im}(f) \cong \mathrm{im}(f \circ b) = \mathrm{im}(\iota \circ b) \cong \mathrm{im}(b : \mathbb{C}B \rightarrow \mathbb{C}R_{\mathbb{Q}}) \cong S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}. \quad \square$$

2.2.3 Restriction à la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$

Soit $\mathcal{C}_{p \times p'}$ la sous-catégorie pleine de \mathbf{GrB} dont les objets sont les groupes de la forme $P \times Q$ où P est un p -groupe et Q est un p' -groupe.

Dans ce qui suit nous allons utiliser une notion de produit tensoriel de foncteurs de bi-ensembles adaptée à la catégorie $\mathcal{C}_{p \times p'}$. La définition se trouve dans [Bau13, §3].

Théorème 2.2.9. *Le foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}pp_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$ est isomorphe au foncteur $\mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k$, où $\mathbb{C}B$ est considéré comme un foncteur sur $\mathbb{C}\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}R_k$ comme un foncteur sur $\mathbb{C}\mathcal{Q}$.*

Démonstration. Cette démonstration est donnée dans [Bau13, Théorème 38]. La démonstration consiste à montrer que l'application μ , définie par

$$\begin{aligned} \mu_{(P \times Q)} : \mathbb{C}B(P) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k(Q) &\longrightarrow \mathbb{C}pp_k(P \times Q) \\ [X] \otimes [V] &\longmapsto [kX \otimes_k V] \end{aligned}$$

(pour P un p -groupe fini et Q un p' -groupe fini) est un isomorphisme de foncteurs. \square

Définition de $\mathfrak{l} : \mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$

On va définir une application $\mathfrak{l} : \mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$ telle que $\mathfrak{f} \circ \mu = \mathfrak{l}$, où μ est la transformation naturelle dans la preuve du théorème 2.2.9. Autrement dit \mathfrak{l} est la même application que \mathfrak{f} via l'isomorphisme $\mu : \mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$.

Définition 2.2.10. On définit la transformation naturelle $\mathfrak{l} : \mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$ dans la catégorie $\mathrm{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Soit $G = P \times Q \in \mathcal{C}_{p \times p'}$. Soit X un P -ensemble et V un kQ -module. On pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_G : \mathbb{C}B(P) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k(Q) &\longrightarrow \mathbb{C}R_K(G) \\ [X] \otimes [V] &\longmapsto [KX \otimes_K K \otimes_{\mathbb{O}} f(V)] \end{aligned}$$

où $f(V)$ est la notation 1.4.16, et où $G = P \times Q$ agit sur $KX \otimes_K K \otimes_{\mathbb{O}} f(V)$ via l'action de P sur KX et l'action de Q sur $K \otimes_{\mathbb{O}} f(V)$. Cette application est bien définie puisqu'on considère toujours tout à isomorphisme près. L'application \mathfrak{l}_G est donné par l'expression ci-dessus étendue ensuite par \mathbb{C} -linéarité.

Remarque 2.2.11. Jusqu'à présent, on n'a pas démontré que \mathfrak{l} est une transformation naturelle. Ceci découle directement du lemme suivant puisque \mathfrak{f} et μ sont des transformations naturelles.

Lemme 2.2.12. *Pour tout groupe fini G dans la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$, on a $\mathfrak{l}_G = \mathfrak{f}_G \circ \mu_G$.*

Démonstration. Supposons $G = P \times Q$. Soit X un P -ensemble et V un kQ -module. De part la définition 2.2.3, on a

$$f_G \circ \mu_G([X] \otimes [V]) = f_G([kX \otimes_k V]) = f'_G \circ h_G^{-1}([kX \otimes_k V]).$$

Par définition de h_G , $h_G^{-1}([kX \otimes_k V])$ est un $\mathcal{O}(P \times Q)$ -module de p -permutation M tel que $\overline{M} = kX \otimes_k V$. C.-à-d. M est un relèvement de $kX \otimes_k V$. On rappelle que par définition $f(V)$ est un $\mathcal{O}Q$ -module tel que $\overline{f(V)} \cong V$. On peut alors choisir $M = \mathcal{O}X \otimes_{\mathcal{O}} f(V)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \overline{\mathcal{O}X \otimes_{\mathcal{O}} f(V)} \\ &= kX \otimes_k \overline{f(V)} \\ &= kX \otimes_k V. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} f_G \circ \mu_G([X] \otimes [V]) &= f'_G \circ h_G^{-1}([kX \otimes_k V]) \\ &= f'_G([M]) \\ &= f'_G([\mathcal{O}X \otimes_{\mathcal{O}} f(V)]) \\ &= [K \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}X \otimes_{\mathcal{O}} f(V))]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$l_G([X] \otimes [V]) = [kX \otimes_k K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)] = [K \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}X \otimes_{\mathcal{O}} f(V))].$$

Donc on déduit

$$f_G \circ \mu_G([X] \otimes [V]) = l_G([X] \otimes [V]).$$

Comme $l_G = f_G \circ \mu_G$ sur les générateurs de $\mathbb{C}B(P) \otimes \mathbb{C}R_k(Q)$, les applications sont égales. \square

Image de f

Proposition 2.2.13. *Les foncteurs $\text{im}(f)$ et $\text{im}(l)$ sont égaux comme sous-foncteurs de $\mathbb{C}R_K$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{E}_{p \times p'}$.*

Démonstration. Par ce qui précède, sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{E}_{p \times p'}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}pp_k & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}R_K \\ & \searrow \mu \cong & \nearrow l \\ & \mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k & \end{array}$$

Comme μ est un isomorphisme, l'image de f est égale à l'image de l . \square

Image de l

Dans ce paragraphe, suite à une identification de la transformation naturelle l , nous donnerons les facteurs de composition de $\text{im}(l) \cong \text{im}(f)$. On considère $\mathbb{C}\mathcal{P}$ la catégorie des p -groupes (voir 1.2.11). Premièrement rappelons que $S_{1,\mathbb{C}}^{\mathcal{P}}$ est un quotient du foncteur $L_{1,\mathbb{C}}^{\mathcal{P}}$. Or, pour un p -groupe P , on a

$$L_{1,\mathbb{C}}^{\mathcal{P}}(P) = \text{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{P}}(1, P) \otimes_{\text{End}_{\mathbb{C}\mathcal{P}}(P)} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}B(P, 1).$$

Alors si X est un $(P, 1)$ -bi-ensemble, on note $[X]$ sa classe d'isomorphisme dans $\mathbb{C}B(P, 1)$ et $\overline{[X]}$ son image dans le quotient $S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}(P)$.

Sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{P}$, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}B \xrightarrow{\beta} S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

où β est définie par

$$\begin{aligned} \beta_P : \mathbb{C}B(P) &\longrightarrow S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}(P) \\ [X] &\longmapsto \overline{[X]}. \end{aligned}$$

si P est un p -groupe et X est un P -ensemble (voir le lemme 1.4.14). On tensorise la suite exacte courte ci-dessus avec le foncteur $\mathbb{C}R_k$ afin d'obtenir la suite exacte courte

$$0 \rightarrow S_{C_p \times C_p, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \rightarrow \mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k \xrightarrow{\beta \otimes \text{Id}} S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

La suite (2.2) est exacte par [Bau13, Proposition 24].

Notation 2.2.14. Dans la catégorie $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, on note j la transformation naturelle donnée par, pour $G = P \times Q \in \mathcal{C}_{p \times p'}$,

$$\begin{aligned} j_G : S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}(P) \otimes \mathbb{C}R_k(Q) &\longrightarrow \mathbb{C}R_K(G) \\ \overline{[X]} \otimes [V] &\longmapsto [KX \otimes_K K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)] \end{aligned}$$

pour X un P -ensemble et V un kQ -module et où $G = P \times Q$ agit sur $KX \otimes_K K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)$ via l'action de P sur KX et l'action de Q sur $K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)$.

Essentiellement, la transformation naturelle j est la retranscription de ι après le passage au quotient $\beta : \text{Res}_{\mathbb{C}\mathcal{P}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(\mathbb{C}B) \rightarrow S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}$.

Lemme 2.2.15. *La transformation naturelle j est bien définie. De plus, sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k & \xrightarrow{\beta \otimes \text{Id}} & S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \\ & \searrow \iota & \downarrow j \\ & & \mathbb{C}R_K \end{array} \quad (2.3)$$

commute.

Démonstration. On a clairement $j_G \circ (\beta \otimes \text{Id})_G = \iota_G$ pour tout $G \in \mathcal{C}_{p \times p'}$. Soit $u : G \rightarrow H$ dans $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$, on veut démontrer que

$$\begin{array}{ccc} (S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k)(G) & \xrightarrow{(S_{1, \mathbb{C}} \otimes \mathbb{C}R_k)(u)} & (S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k)(H) \\ j_G \downarrow & & \downarrow j_H \\ \mathbb{C}R_K(G) & \xrightarrow{\mathbb{C}R_K(u)} & \mathbb{C}R_K(H) \end{array}$$

commute. Soit $x \in (S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k)(G)$. Comme $\beta \otimes \text{Id}$ est surjective, il existe $x' \in (\mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k)(G)$ tel que $x = (\beta \otimes \text{Id})_G(x')$. On a alors

$$\begin{aligned} j_H \circ (S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k)(u)(x) &= j_H \circ (S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k)(u) \circ (\beta \otimes \text{Id})_G(x') \\ &= j_H \circ (\beta \otimes \text{Id})_H \circ (\mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k)(u)(x') \\ &= \mathbf{l}_H \circ (\mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k)(u)(x') \\ &= \mathbb{C}R_K(u) \circ \mathbf{l}_G(x') \\ &= \mathbb{C}R_K(u) \circ j_G \circ (\beta \otimes \text{Id})_G(x') \\ &= \mathbb{C}R_K(u) \circ j_G(x) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que \mathbf{l} et $\beta \otimes \text{Id}$ sont des transformations naturelles. Le diagramme (2.3) commute ce qui termine la preuve. \square

Proposition 2.2.16. *Les foncteurs $\text{im}(\mathbf{l})$ et $\text{im}(j)$ sont égaux comme sous-foncteurs de $\mathbb{C}R_K$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$.*

Démonstration. Ceci découle du fait que $\beta \otimes \text{Id}$ est surjective (voir (2.2)) et que le diagramme 2.3 commute. \square

Corollaire 2.2.17. *Les foncteurs $\text{im}(f)$ et $\text{im}(j)$ sont égaux comme sous-foncteurs de $\mathbb{C}R_K$ sur la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$.*

Proposition 2.2.18. *Sur $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$, le sous-foncteur $\text{im}(j)$ de $\mathbb{C}R_K$ est isomorphe à $\bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}$ via l'isomorphisme*

$$\sigma : \mathbb{C}R_K \rightarrow \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}$$

où σ est l'isomorphisme du théorème 1.4.19, restreint à la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$.

Avant de pouvoir démontrer la proposition, nous avons besoin de décrire $j \circ \sigma$.

Lemme 2.2.19. *Dans la catégorie $\text{Func}_{\mathbb{C}}\text{-Vect}(\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}R_K \xrightarrow[\cong]{\sigma} \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} \\ & \searrow \mathbf{m} & \end{array}$$

commute, où \mathbf{m} est la transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k & \xrightarrow[\cong]{\text{Id} \otimes (\sigma \circ \varepsilon)} & S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \left(\bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}} \right) \xrightarrow[\cong]{\tau} \bigoplus_{(m,p)=1} \left(S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}} \right) \\ & & \downarrow \cong \oplus f_{m, \xi} \\ & & \bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} \\ \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} & \xleftarrow{i} & \bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} \end{array}$$

où τ est une application évidente, ε est la transformation naturelle définie au paragraphe 1.4.15 et l'application $f_{m,\xi} : S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}} \rightarrow S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}$ est l'isomorphisme du théorème [Bau13, Theorem 25].

Notation 2.2.20. [Bau13, Remark 22] Il existe un homomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\rho : \mathbb{C}B(G, G') \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}B(H, H') \rightarrow \mathbb{C}B(G \times H, G' \times H')$$

qui devient un isomorphisme si $G \times G'$ et $H \times H'$ sont d'ordres premiers entre eux.

Preuve du lemme. Soit $G = P \times Q$ un objet de $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$. On a

$$(f_{m,\xi})_{P \times Q} : S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}}(P) \otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}}(Q) \rightarrow S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}(P \times Q)$$

donné par

$$f_{m,\xi}(\overline{u_1 \otimes \lambda \otimes u_2 \otimes w}) = \overline{\rho(u_1 \otimes u_2) \otimes \lambda w}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}_\xi$, $u_1 \in \mathbb{C}B(P, 1)$ et $u_2 \in \mathbb{C}B(Q, C_m)$. Soit T le P -ensemble trivial et V un kQ -module. On rappelle qu'on a alors $\varepsilon_Q([V]) = [K \otimes_{\mathcal{O}} f(V)]$. On suppose

$$\sigma_Q \circ \varepsilon_Q([V]) = \sum_{(m,p)=1} \overline{y_{m,\xi} \otimes w_{m,\xi}}$$

avec $\overline{y_{m,\xi} \otimes w_{m,\xi}} \in S_{C_m, \mathbb{C}_\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{Q}}(Q)$, c.-à-d. $y_{m,\xi} \in \mathbb{C}B(Q, C_m)$ et $w_{m,\xi} \in \mathbb{C}_\xi$. On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_G(\overline{[T] \otimes \lambda} \otimes [V]) &= i_G \circ \left(\sum f_{m,\xi} \right) \circ \tau_G \circ (\text{Id} \otimes (\sigma \circ \varepsilon))_G \left(\overline{[T] \otimes \lambda} \otimes [V] \right) \\ &= i_G \circ \left(\sum f_{m,\xi} \right) \circ \tau_G \left(\overline{[T] \otimes \lambda} \otimes \sigma_Q \circ \varepsilon_Q([V]) \right) \\ &= i_G \circ \left(\sum f_{m,\xi} \right) \circ \tau_G \left(\overline{[T] \otimes \lambda} \otimes \sum_{(m,p)=1} \overline{y_{m,\xi} \otimes w_{m,\xi}} \right) \\ &= i_G \left(\sum_{(m,p)=1} f_{m,\xi}(\overline{[T] \otimes \lambda} \otimes \overline{y_{m,\xi} \otimes w_{m,\xi}}) \right) \\ &= i_G \left(\sum_{(m,p)=1} \overline{\rho([T] \otimes y_{m,\xi}) \otimes \lambda w_{m,\xi}} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que pour U un (Q, C_m) -bi-ensemble, on a

$$\rho([T] \otimes [U]) = [T \times U]$$

où $T \times U$ est vu comme $(P \times Q, 1 \times C_m)$ -bi-ensemble. Or

$$T \times U \cong \text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q} \times_Q U$$

puisque l'action de P sur T est triviale. On a donc $\rho([T] \otimes [U]) = [\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q} \circ [U]]$. Alors si on revient au calcul précédent, on a que $\rho([T] \otimes y_{m,\xi}) = [\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q}] \circ y_{m,\xi}$ (par linéarité de ρ). Ainsi, on obtient

$$\mathfrak{m}_G(\overline{[T] \otimes 1} \otimes [V]) = i_G \left(\sum_{(m,p)=1} \overline{[\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q}] \circ y_{m,\xi} \otimes w_{m,\xi}} \right).$$

D'autre part, on a

$$\sigma_G \circ j_G(\overline{[T]} \otimes \overline{1} \otimes [V]) = \sigma_G([KT \otimes_K K \otimes_O f(V)]).$$

Or, puisque σ est une transformation naturelle, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}R_K(Q) & \xrightarrow{\mathbb{C}R_K([\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q}])} & \mathbb{C}R_K(G) \\ \sigma_Q \downarrow & & \downarrow \sigma_G \\ \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}(Q) & \xrightarrow{\bigoplus S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}([\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q}])} & \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}(G) \end{array}$$

commute. Donc si on regarde l'image de $\varepsilon_Q([V]) = [K \otimes f(V)] \in \mathbb{C}R_K(Q)$ on obtient d'une part

$$\sigma_G([KT \otimes_K K \otimes_O f(V)])$$

et d'autre part

$$\overline{\sum_{(m, p)=1} [\text{Inf}_{(P \times Q)/P}^{P \times Q}] \circ y_{m, \xi} \otimes w_{m, \xi}}$$

ce qui démontre bien

$$\mathbf{m}_G \left(\overline{[T]} \otimes \overline{1} \otimes [V] \right) = \sigma_G([KT \otimes_K K \otimes_O f(V)]) = \sigma_G \circ j_G(\overline{[T]} \otimes \overline{1} \otimes [V]).$$

pour tout kQ -module V et T le P -ensemble trivial.

Soit à présent X un P -ensemble quelconque. On considère le $(P \times Q, P \times Q)$ -bi-ensemble $X \times S$ où X est vu comme un (P, P) -bi-ensemble avec action de P triviale à droite et S est le (Q, Q) -bi-ensemble trivial. Puisqu'on travaille avec des homomorphismes de foncteurs de bi-ensembles, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \left(S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \right) (G) & \xrightarrow{S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k(X \times S)} & \left(S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \right) (G) \\ \sigma_G \circ j_G \downarrow & & \downarrow \sigma_G \circ j_G \\ \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}(G) & \xrightarrow{\bigoplus S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}(X \times S)} & \mathbb{C} \quad \bigoplus_{\substack{(m, \xi) \\ m \in \mathbb{N} \\ \xi \text{ car. prim.}}} S_{C_m, C_\xi}^{\mathbb{C}\ell_{p \times p'}}(G) \end{array} \quad (2.4)$$

et idem pour \mathbf{m} .

Soit un kQ -module V et $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'élément $\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \in \left(S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \right) (P \times Q)$ (ou T est toujours le P -ensemble trivial). On a alors, par définition du produit tensoriel de foncteurs de bi-ensembles,

$$S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k(X \times S) \left(\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right) = \overline{[X \times T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] = \overline{[X]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V].$$

Par la commutativité du diagramme (2.4) et par le paragraphe précédent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_G(\overline{[X]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V]) &= \mathbf{m}_G \left(\left(S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \right) ([X \times S]) \left(\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right) \right) \\
&= \sum S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} ([X \times S]) \circ \mathbf{m}_G \left(\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right) \\
&= \sum S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} ([X \times S]) \circ (\sigma \circ j)_G \left(\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right) \\
&= (\sigma \circ j)_G \circ \left(\left(S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \right) ([X \times S]) \right) \left(\overline{[T]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right) \\
&= (\sigma \circ j)_G \left(\overline{[X]} \otimes \overline{\lambda} \otimes [V] \right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{m}_G = \sigma_G \circ j_G$ sur une \mathbb{C} -base, donc ils sont égaux. Comme ceci est vrai pour tout P et tout Q , on a le résultat souhaité. \square

Preuve de la Proposition 2.2.18. On a démontré que $\sigma \circ j = \mathbf{m}$ sur $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$. Comme σ est un isomorphisme, $\text{im}(j) \cong \text{im}(\sigma \circ j)$. Donc $\text{im}(j) \cong \text{im}(\mathbf{m})$ via σ . Or la transformation naturelle \mathbf{m} est injective. En effet, il s'agit d'une succession d'isomorphismes suivis par une injection (notons que la transformation $\text{Id} \otimes (\sigma \circ \varepsilon)$ est un isomorphisme car le produit tensoriel de foncteurs est exact). Donc, on a

$$\text{im}(\mathbf{m}) \cong S_{1, \mathbb{C}}^{\mathbb{C}\mathcal{P}} \otimes \mathbb{C}R_k \cong \bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}. \quad \square$$

2.2.4 Résultats

Théorème 2.2.21. *Sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$, l'image de \mathfrak{f} est isomorphe au foncteur*

$$\bigoplus_{(m,p)=1} S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$$

où m parcourt les entiers premiers à p et ξ est un caractère primitif.

Preuve du théorème 2.2.21. Puisque \mathfrak{f} est un morphisme de foncteurs, $\text{im}(\mathfrak{f})$ est un sous-foncteur de $\mathbb{C}R_K$ sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$. Or, on a l'isomorphisme $\mathbb{C}R_K \cong \bigoplus_m S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ (voir le théorème 1.4.19). Donc les facteurs de composition de $\text{im}(\mathfrak{f})$ sont aussi des facteurs de composition de $\mathbb{C}R_K$ (puisque c'est un sous-foncteur, voir [Web93, Proposition 3.1, p.20]). La seule possibilité pour qu'un foncteur du type $S_{H, V}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ soit un facteur de composition simple de $\text{im}(\mathfrak{f})$ est que $H = C_m$ pour un entier m et $V = \mathbb{C}\xi$ pour un caractère primitif ξ . Soit alors $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ un facteur de composition de $\text{im}(\mathfrak{f})$ sur $\mathbb{C}\text{GrB}$. On restreint à $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$. Alors $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}} = \text{Res}_{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}^{\mathbb{C}\text{GrB}} (S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}})$ (restriction qui est non nulle puisque $C_m \in \mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$) est un facteur de composition de $\text{Res}_{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}^{\mathbb{C}\text{GrB}} (\text{im}(\mathfrak{f}))$. Or $\text{Res}_{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}^{\mathbb{C}\text{GrB}} (\text{im}(\mathfrak{f})) = \text{im}(j)$ et donc, par la proposition 2.2.18, $(m, p) = 1$. Réciproquement, comme tout $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}}$ pour $(m, p) = 1$ est un facteur de composition de $\text{im}(\mathfrak{f})$ sur $\mathbb{C}\mathcal{C}_{p \times p'}$, $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ est un facteur de composition sur $\mathbb{C}\text{GrB}$ (voir la proposition 1.2.24). \square

Théorème 2.2.22. *Si $(m, p) = 1$, les foncteurs $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$.*

Le résultat de ce théorème était déjà connu. En effet, il s'agit du résultat [Bau13, Corollary 44, p.17]. Mon résultat et surtout sa preuve apporte cependant un nouvel élément. On ne sait pas seulement que les simples $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ sont des facteurs de composition (lorsque $(m, p) = 1$ et ξ est un caractère primitif), on sait où ils se trouvent. On a démontré dans cette section que les simples $S_{C_m, \mathbb{C}\xi}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ sont exactement dans l'image de la transformation naturelle \mathfrak{f} .

Preuve du théorème 2.2.22. On a une transformation naturelle $f : \mathbb{C}pp_k \rightarrow \mathbb{C}R_K$ avec la suite

$$\mathbb{C}pp_k \xrightarrow{f} \text{im}(f) \rightarrow 0$$

exacte. Donc les facteurs de composition de $\text{im}(f)$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$. Le résultat découle alors du théorème 2.2.21. \square

Chapitre 3

B-groupes et relations de Brauer

Ce chapitre est dédié au foncteur de Burnside. Plus précisément, on étudie l'article de Bartel et Dokchitser "Brauer relations and finite groups" ([BD12]) avec la perspective des foncteurs de bi-ensembles. Cet article étudie, pour tout groupe fini G , le noyau de l'application

$$b_G : \begin{array}{ccc} B(G) & \longrightarrow & R_{\mathbb{Q}}(G) \\ [X] & \longmapsto & [\mathbb{Q}X], \end{array}$$

c.-à-d. il détermine exactement pour quels G -ensembles, leur linéarisation est triviale. Plus précisément, l'article donne une liste complète des groupes finis pour lesquels ce noyau contient des relations primitives. Une relation primitive est simplement une relation qui ne provient pas d'un groupe d'ordre strictement plus petit. Dans cet article, on trouve également la description des G -ensembles qui sont des relations primitives.

Pour faire le lien avec les foncteurs de bi-ensembles, nous allons considérer la transformation naturelle $b : B \rightarrow R_{\mathbb{Q}}$ induite par b_G . En notant \mathbb{F} un corps de caractéristique zéro, on peut considérer $b : \mathbb{F}B \rightarrow \mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}$. Les facteurs de composition du foncteur $\mathbb{F}B$ sont connus (voir 1.3.2) et sont décrits à l'aide des B-groupes. Seulement, il n'y a encore que peu d'informations sur les B-groupes, la plupart se trouvant dans [Bou10, §5.5]. L'idée est donc ici d'utiliser la description explicite de [BD12] pour décrire certains B-groupes. Dans les faits, je donne une classification des B-groupes dont les quotients propres sont cycliques.

3.1 Résultats préliminaires

3.1.1 Des \mathbb{Z} -modules aux espaces vectoriels

La classification des relations primitives de Bartel et Dokchitser se base sur l'application $b_G : B(G) \rightarrow R_{\mathbb{Q}}(G)$ pour tout groupe fini G . Autrement dit, ils travaillent avec des \mathbb{Z} -modules. C'est une des raisons qui rend leur travail remarquable, il est en général difficile de décrire les éléments de $B(G)$ puisqu'en particulier on a des relations qui sont de torsion. Pour utiliser la théorie des bi-ensembles, en particulier la classification des facteurs de composition de $\mathbb{F}B$, on va tout considérer sur un corps. Soit donc \mathbb{F} un corps de caractéristique zéro. Soit G un groupe fini. Considérons

$$b_G : B(G) \rightarrow R_{\mathbb{Q}}(G) : [X] \mapsto [\mathbb{Q}X].$$

On note $K(G) = \ker(b_G)$ et les éléments de $K(G)$ sont appelés des *relations*. La suite

$$0 \rightarrow K(G) \rightarrow B(G) \rightarrow R_{\mathbb{Q}}(G)$$

est une suite exacte de \mathbb{Z} -modules. De plus, $B(G)$ est un \mathbb{Z} -module libre, donc $K(G)$ est un \mathbb{Z} -module libre (puisque \mathbb{Z} est un anneau principal). On étend b à une application de \mathbb{F} -espaces vectoriels $\text{Id} \otimes b_G : \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \rightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} R_{\mathbb{Q}}(G)$. Il est facile de voir que $\mathbb{F} \otimes K(G) \subseteq \ker(\mathbb{F} \otimes b_G)$. On va démontrer $\mathbb{F} \otimes K(G) = \ker(\mathbb{F} \otimes b_G)$. Le module $R_{\mathbb{Q}}(G)$ est un \mathbb{Z} -module libre (comme sous-module de $R_{\mathbb{C}}(G)$), donc $\text{im}(b_G)$ est un \mathbb{Z} -module libre. On a donc une courte suite exacte de \mathbb{Z} -modules libres

$$0 \rightarrow K(G) \rightarrow B(G) \rightarrow \text{im}(b_G) \rightarrow 0.$$

Comme le terme de droite est un \mathbb{Z} -module libre, la suite est scindée. Donc si on tensorise chaque terme par \mathbb{F} à gauche, on obtient toujours une suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} K(G) \rightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \rightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{im}(b_G) \rightarrow 0.$$

Ceci permet de conclure

$$\ker(\text{Id} \otimes b_G) = \mathbb{F} \otimes K(G).$$

Les éléments de $\mathbb{F} \otimes K(G)$ sont aussi appelé des *relations*. On dit qu'un élément de $\mathbb{F}K(G)$ est imprimitif/primitif comme dans le cas de $K(G)$. C.-à-d. on dit qu'une relation dans $\mathbb{F}K(G)$ est imprimitive si elle est une combinaison linéaire de relations induites depuis des sous-groupes propres ou inflationnées depuis des quotients propres de G . Une relation est primitive si elle n'est pas imprimitive. On veut déterminer quand $\mathbb{F}K(G)$ a des relations primitives.

On doit donc savoir si un relation imprimitive de $\mathbb{F}K(G)$ provient toujours d'une relation imprimitive de $K(G)$.

Remarque 3.1.1. Soit $\xi \in \mathbb{F}K(G)$ une relation primitive. Alors $\xi \in \mathbb{F} \otimes K(G)$, donc $\xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes \theta_i$ pour $\theta_i \in K(G)$ et $\lambda_i \in \mathbb{F}$, on peut de plus supposer $\lambda_i \otimes \theta_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Si $\theta_i \in K(G)$ est imprimitif, θ_i est un combinaison \mathbb{Z} -linéaire de relations induites ou inflationnées depuis plus bas, alors $\lambda_i \otimes \theta_i$ est imprimitif dans $\mathbb{F}K(G)$. Donc si pour tout $1 \leq i \leq n$, θ_i et imprimitif, on aurait que ξ est imprimitif. Ainsi, il existe $1 \leq j \leq n$ tel que θ_j est primitif. Donc $\theta_j \in K(G)$ pour un des groupes G de [BD12, Theorem A]. Donc si $\mathbb{F}K(G)$ a une relation primitive, $K(G)$ a une relation primitive. De plus, si un élément $\theta \in K(G)$ est de torsion, $\lambda \otimes \theta = 0$ dans $\mathbb{F}K(G)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}$. Donc ξ ne peut être primitif que si $K(G)$ a des relations primitives sans torsion. Donc, si $\mathbb{F}K(G)$ a une relation primitive, $K(G)$ a une relation primitive sans torsion.

Notation 3.1.2. On note $\text{Prim}(G)$ le quotient de $K(G)$ par le sous-groupes des relations imprimitives. De manière similaire, on note $\mathbb{F}\text{Prim}(G)$ le quotient de $\mathbb{F}K(G)$ par le sous-espace engendré par les relations imprimitives.

3.1.2 Idempotents comme relations

Pour G un groupe fini et H un sous-groupe de G on note e_H^G l'idempotent de $B(G)$ indexé par H . On trouve dans [Bou10, §3.3, p. 749] la définition précise de e_H^G . On utilisera également [Bou10, Theorem 5.2.4, p. 77] pour les calculs.

Lemme 3.1.3. *Si G est un groupe non-cyclique, $e_G^G \in \mathbb{F}K(G)$. C.-à-d. e_G^G est une relation. De plus, si G est cyclique, G n'a pas de relation non-nulle. Autrement dit, pour un groupe fini G , e_G^G est relation si et seulement si G est non-cyclique.*

Démonstration. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}B(G) & \longrightarrow & \prod_{\substack{H \leqslant_G G \\ H \text{ cyclique}}} \mathbb{F}B(H) \\
 \mathbb{F} \otimes \varphi_G \downarrow & & \downarrow \prod k \otimes \varphi_H \\
 \mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(G) & \longrightarrow & \prod_{\substack{H \leqslant_G G \\ H \text{ cyclique}}} \mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(H)
 \end{array}$$

où on dénote $H \leqslant_G G$ les sous-groupes H de G à conjugaison près et où les applications horizontales sont les produits des applications de restriction. Le diagramme commute car les applications φ sont des transformations naturelles de foncteurs de bi-ensembles. L'application horizontale du bas est injective par la théorie des caractères. A présent, on considère $e_G^G \in \mathbb{F}B(G)$. Comme G n'est pas cyclique, si $H \leqslant G$ est cyclique, $H \neq G$. Cela implique $\text{Res}_H^G(e_G^G) = 0$ (voir [Bou00] ou [Bou10, Theorem 5.2.4, p. 77]). Donc l'image de e_G^G dans $\prod \mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(H)$ est nulle. Ainsi, par l'injectivité de l'application horizontale $\mathbb{F} \otimes \varphi_G(e_G^G) = 0$. D'où e_G^G est une relation.

Soit C un groupe cyclique. Alors $\mathbb{F}B(C)$ a pour base les sous-groupes de C à conjugaison près. On sait que $\mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(C)$ a pour base les classes d'isomorphisme de $\mathbb{Q}C$ -modules simples. Par le théorème d'Artin (en particulier [Ser78, Corolaire 1, §13.1]), le nombre de classes d'isomorphisme de $\mathbb{Q}C$ -modules simples est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de C , donc au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de C . Donc $\mathbb{F}B(C)$ et $\mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(C)$ ont la même dimension sur \mathbb{F} . A nouveau à l'aide du théorème d'Artin (plus précisément [Ser78, Théorème 30, §13.1]), l'application $\text{Id}_{\mathbb{F}} \otimes b_G$ est surjective (puisque tout caractère rationnel est de la forme $\text{Ind}_{C'}^C(1_{C'})$ pour C' un sous-groupe de C). Il n'y a donc pas d'autre possibilité que $\mathbb{F}K(C) = 0$. \square

La partie de ce lemme sur les groupes cycliques est aussi vraie dans le contexte de Bartel et Dokchitser, c.-à-d. $K(C) = 0$ lorsque C est un groupe cyclique (voir [BD12, Example 2.2, p.7]).

3.2 Résultat principal

3.2.1 Théorème principal

Théorème 3.2.1. *Soit G un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \cong \mathbb{F}$,
2. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \neq 0$,
3. e_G^G est une relation primitive,
4. G est non-cyclique et tous ses quotients propres sont cycliques,
5. G est un B -groupe non-trivial, dont tous les quotients propres sont cycliques,
6. G est une extension $1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$ avec Q cyclique, $d \geqslant 1$, S simple, où l'application naturelle est une inclusion $Q \hookrightarrow \text{Out}(S^d)$ et où de plus l'une des conditions suivantes est satisfaite :
 - (a) S est non-cyclique et S^d n'a pas de sous-groupes propres normaux non triviaux dans G .
 - (b) $S^d = C_l \times C_l$ et $Q = 1$ pour l un nombre premier, c.-à-d. $G \cong C_l \times C_l$.
 - (c) $S = C_l$ pour l un nombre premier, $l \nmid |Q|$ (c.-à-d. $G \cong (C_l)^d \rtimes Q$) et Q agit irréductiblement sur le \mathbb{F}_l -espace vectoriel $(C_l)^d$ par conjugaison.

Pour la preuve du théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats intermédiaires.

3.2.2 Contribution au foncteur de Burnside d'un groupe avec relation primitive

Proposition 3.2.2. *Soit G un groupe fini tel que $\mathbb{F}\text{Prim}(G)$ soit non-trivial. Alors G est un B-groupe et de plus e_G^G engendre $\mathbb{F}\text{Prim}(G)$.*

Notation 3.2.3. [Bou10, Notation 5.4.2, p.84] Soit G un groupe fini. On note \mathbf{e}_G le sous-foncteur de $\mathbb{F}B$ engendré par $e_G^G \in \mathbb{F}B(G)$.

Démonstration. Soit G tel que $\mathbb{F}\text{Prim}(G) \neq 0$. Soit $\theta \in \mathbb{F}K(G)$ primitif avec $\theta \neq 0$. Notons T le sous-foncteur de $\mathbb{F}B$ engendré par θ (vu comme élément de $\mathbb{F}B(G)$). C'est-à-dire $T(H) := B(H, G)(\theta)$ pour tout groupe fini H (voir [Bou10, Remarque 3.2.9]). Par la preuve de [Bou10, Theorem 5.4.14], on obtient

$$T = \sum_{\substack{R \text{ B-groupe sur } \mathbb{F} \\ \mathbf{e}_R \subseteq T \\ R \text{ à iso près}}} \mathbf{e}_R.$$

Notons que dans cette somme, $R \neq 1$. En effet, si $R = 1$ on aurait $\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_1 = \mathbb{F}B$. Mais alors, on a $T = \mathbb{F}B$, c.-à-d. $\mathbb{F}B(G)\theta = \mathbb{F}B(G)$. Mais ceci est impossible car dans ce cas on aurait que tout élément de $\mathbb{F}B(G)$ est une relation. En effet, pour $H \leq G$, on a

$$G/H \cdot \theta = \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G(\theta)$$

(voir [Bou00, Proposition 3.1.3, p.747]) qui est une relation puisque θ est une relation. Ainsi $\mathbb{F}B(G) \cdot \theta$ ne contient que des relations, donc $\mathbb{F}B(G)$ aussi. Mais cela est impossible puisque $1_G \in \mathbb{F}B(G)$ n'est jamais une relation.

Donc, on a

$$\mathbb{F}B(G)\theta = T(G) = \sum_{R \dots} \mathbf{e}_R(G) = \sum_{R \dots} B(G, R)e_R^R.$$

Or, puisque $\theta \in \mathbb{F}B(G) = T(G)$, on peut écrire

$$\theta = \sum_{R \dots} \sum_{u \in B(G, R)} \alpha_u u e_R^R$$

pour $\alpha_u \in \mathbb{F}$ et sans perte de généralité, on peut supposer

$$u = \text{Indinf}_{S/T}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^R.$$

Comme les groupes R sont des B-groupes, dès que $|A/B| < |R|$, on a $\text{Defres}_{A/B}^R(e_R^R) = 0$ (voir [Bou10, Proposition 5.4.5, p.84]). On peut donc supposer $u = \text{Indinf}_{S/T}^G \times \text{Iso}(f)$ où $f : R \rightarrow S/T$ est un isomorphisme de groupes. Donc, on a

$$\theta = \sum_{R \dots} \sum_{u \in B(G, R)} \alpha_u \text{Indinf}_{S/T}^G \times \text{Iso}(f) (e_R^R) \quad (3.1)$$

$$= \sum_{R \dots} \sum_{u \in B(G, R)} \alpha_u \text{Indinf}_{S/T}^G \left(e_{S/T}^{S/T} \right) \quad (3.2)$$

Notons que puisque $R \neq 1$ pour les R apparaissant dans la somme, comme R est un B-groupe, R est non-cyclique. Donc, par le lemme 3.1.3, $e_R^R \in \mathbb{F}K(R)$, c.-à-d. e_R^R est une relation. Si on n'a que des inflations ou inductions non-triviales dans la somme (3.1) θ est une combinaison linéaire

de relations induites ou inflationnées depuis plus bas, donc cela contredit la primitivité de θ . Donc il existe un R pour lequel $R \cong S/T = G$. Puisque R est un B-groupe, G aussi. Alors, on a

$$\theta = ce_G^G + \sum_{R, |R| < |G|} \sum_{S, T, S/T \cong R} \alpha_{S, T} \text{Indinf}_{S/T}^G e_{S/T}^{S/T}$$

pour $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ et certains $\alpha_{S, T} \in \mathbb{F}$. Donc $\theta = ce_G^G$ modulo des relations imprimitives. Ainsi e_G^G engendre $\mathbb{F} \text{Prim}(G)$. \square

3.2.3 B-groupes et relations primitives

Lemme 3.2.4. *Soit G un groupe fini. Supposons qu'il existe N un sous-groupe normal non-trivial de G tel que G/N soit un groupe non-cyclique. Alors e_G^G est imprimitif.*

Démonstration. On utilise [Bou10, Theorem 5.2.4] pour calculer les inductions et inflations des idempotents de l'anneau de Burnside. Tout d'abord, on a

$$\text{Inf}_{G/N}^G(e_{G/N}^{G/N}) = \sum_{\substack{X \leq G \\ XN = G}} e_X^G = e_G^G + \sum_{\substack{X \leq G \\ XN = G \\ X \neq G}} e_X^G.$$

De plus, pour $X \leq G$, on a

$$\text{Ind}_X^G(e_X^X) = \frac{|N_G(X)|}{|X|} e_X^G.$$

Ainsi, on obtient

$$e_G^G = \text{Inf}_{G/N}^G(e_{G/N}^{G/N}) - \sum_{\substack{X \leq G \\ XN = G \\ X \neq G}} \frac{|X|}{|N_G(X)|} \text{Ind}_X^G(e_X^X).$$

On a que $N \neq 1$ et $X \neq G$, donc l'écriture ci-dessus est une écriture avec une "vraie" inflation et des "vraies" inductions. De plus, comme G/N est non-cyclique, $e_{G/N}^{G/N}$ est une relation (voir 3.1.3). Finalement, il reste à remarquer que X n'est pas cyclique pour obtenir que e_X^X est une relation. Par l'absurde, supposons que X soit cyclique, alors on aurait que $X/X \cap N$ est cyclique. Mais $G/N = XN/N \cong X/X \cap N$ ce qui contredit l'hypothèse sur N . Donc X est non cyclique et e_X^X est une relation. Par conséquent, e_G^G est une somme d'inductions et d'inflations (non-triviales) de relations, c.-à-d. e_G^G est une relation imprimitive. \square

Lemme 3.2.5. *Soit G un groupe fini pour lequel e_G^G est une relation imprimitive. Alors G a un quotient non-trivial non-cyclique.*

Démonstration. Si e_G^G est une relation imprimitive, on peut écrire

$$e_G^G = \sum_{j=1}^m \text{Indinf}_{A_j/B_j}^G(\theta_j)$$

pour $\theta_j \in \mathbb{F}K(A_j/B_j)$ et $|A_j/B_j| < |G|$. Si θ_j est une relation imprimitive, elle est induite ou inflationnée depuis un groupe d'ordre plus petit, on peut donc la remplacer par une relation imprimitive en modifiant l'induction et l'inflation. Par ailleurs, si θ_j est primitive, $\theta_j = \lambda_j e_{A_j/B_j}^{A_j/B_j}$

modulo des relations imprimitives, pour $\lambda_j \in \mathbb{F}$ (voir Proposition 3.2.2). Sans perte de généralité, on peut donc supposer

$$e_G^G = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{Indinf}_{D_i/C_i}^G (e_{D_i/C_i}^{D_i/C_i}) \quad (3.3)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $e_{D_i/C_i}^{D_i/C_i}$ une relation primitive et $|D_i/C_i| < |G|$. Comme $e_{D_i/C_i}^{D_i/C_i}$ est une relation D_i/C_i est non-cyclique (voir lemme 3.1.3), et comme $e_{D_i/C_i}^{D_i/C_i}$ est primitive, D_i/C_i est un B-groupe. Par (3.3), en appliquant les formules de [Bou10, Theorem 5.2.4] on obtient

$$e_G^G = \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{R_i C_i = D_i \\ R_i \leq_{D_i} D_i}} \lambda_i \frac{|N_G(R_i)|}{|N_{D_i}(R_i)|} e_{R_i}^G. \quad (3.4)$$

Comme $\{e_T^G \mid T \leq_G G\}$ est une \mathbb{F} -base de $\mathbb{F}B(G)$ on doit avoir au moins un cas où $R_i = G$, et donc $D_i = R_i C_i = G$. Sans perte de généralité, on suppose que ceci arrive pour $i = 1$. L'équation (3.3) devient

$$e_G^G = \lambda_1 \text{Inf}_{G/C_1}^G (e_{G/C_1}^{G/C_1}) + \sum_{i=2}^r \lambda_i \text{Indinf}_{D_i/C_i}^G (e_{D_i/C_i}^{D_i/C_i}).$$

Par le lemme 3.1.3, puisque $e_{G/C_1}^{G/C_1}$ est une relation, G/C_1 est non-cyclique. De plus, on ne peut pas avoir $C_1 = 1$ car alors cela contredirait $|G/C_1| < |G|$. Et on ne peut pas avoir $G = 1$ car alors $G/C_1 = 1$ serait cyclique. D'où le résultat. \square

3.2.4 Théorème d'Artin et quotients cycliques

On présente ici les résultats de [BD12] dans notre contexte. Les résultats ci-dessous sont en fait essentiellement une simplification ou une reformulation des résultats de [BD12]. Leurs résultats donnent une classification des relations primitives dans $K(G)$, ici on donne une classification des relations primitives dans $\mathbb{F}K(G)$. Les preuves présentées ci-dessous sont plus faciles que celles de [BD12] puisque tout est linéarisé par \mathbb{F} . En effet la processus de tensorisation par \mathbb{F} annule toutes les relations primitives de torsion. Dans les faits, les preuves sont tout de même très similaires à celles de [BD12].

Théorème 3.2.6 (Théorème d'Artin). *Soit G un groupe fini. Soit χ un caractère rationnel de G . Alors $\chi = \sum \frac{a_H}{|N_G(H):H|} \text{Ind}_H^G(1_H)$, où H parcourt les sous-groupes cycliques de G et $a_H \in \mathbb{Z}$, où 1_H désigne le caractère trivial pour H .*

Démonstration. Voir [Isa76, Theorem 5.21, p.72]. \square

Théorème 3.2.7. *Soit \mathbb{F} un corps de caractéristique zéro. Soit G un groupe fini. Il existe une relation de Brauer (c.-à-d. un élément de $\mathbb{F}K(G)$) de la forme $1_G - \sum_H n_H G/H$ où la somme parcourt les sous-groupes cycliques de G et $n_H \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$, où 1_G désigne ici le G -ensemble trivial.*

Démonstration. Par le théorème d'Artin (3.2.6), il existe $a_H \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1_G = \sum_H \frac{a_H}{|N_G(H):H|} \text{Ind}_H^G(1_H).$$

Alors, dans l'anneau $\mathbb{F}R_{\mathbb{Q}}(G)$, on a

$$[\mathbb{Q}] - \sum_H \frac{a_H}{|N_G(H):H|} [\mathbb{Q}[G/H]] = 0.$$

où on voit $\frac{a_H}{|N_G(H):H|} \in \mathbb{Q}$ comme un élément de \mathbb{F} . Ainsi

$$1_G - \sum_H \frac{a_H}{|N_G(H):H|} G/H \in \mathbb{F}K(G). \quad \square$$

Lemme 3.2.8. *Soit G un groupe fini et soit Ω une relation pour G (c.-à-d. $\Omega \in \mathbb{F}K(G)$). Alors le \mathbb{F} -espace vectoriel I engendré par les relations imprimitives et Ω est un idéal de l'anneau de Burnside $\mathbb{F}B(G)$.*

Démonstration. Soit θ une relation quelconque pour G . Alors

$$G/H \cdot \theta = \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G(\theta)$$

(voir [Bou00, Proposition 3.1.3, p.747]). Donc pour $H \neq G$, $G/H \cdot \theta$ est toujours une relation imprimitive, c.-à-d. $G/H \cdot \theta \in I$. Pour $H = G$, $1_G \cdot \theta = \theta$. Donc pour θ imprimitif, la relation $1_G \cdot \theta = \theta$ est imprimitive, c.-à-d. est un élément de I . Et pour Ω , on a $1_G \cdot \Omega = \Omega \in I$. Comme $\{[G/H \mid H \leq_G G]\}$ est une \mathbb{F} -base de $\mathbb{F}B(G)$, on a bien démontré que I est un idéal de $\mathbb{F}B(G)$. \square

Théorème 3.2.9. *Soit G un groupe non-cyclique, alors*

1. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \cong \mathbb{F}$ si tous les quotients propres de G sont cycliques,
2. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) = 0$ sinon.

Exemple 3.2.10. Les groupes cycliques n'ont pas de relations non nulles (voir lemme 3.1.3).

Démonstration du théorème. Par le théorème 3.2.7, G a une relation de la forme

$$\Omega = 1_G - \sum_{H \neq G} n_H G/H$$

où H parcourt les sous-groupes cycliques de G et $n_H \in \mathbb{F}$. De plus, $H \neq G$ car G est non-cyclique. Considérons le \mathbb{F} -espace vectoriel I engendré par Ω et les relations imprimitives. Par le lemme 3.2.8, on sait que I est un idéal de $\mathbb{F}B(G)$. Nous savons déjà que $I \subseteq \mathbb{F}K(G)$ et nous allons démontrer que $\mathbb{F}K(G) \subseteq I$. On aura ainsi $I = \mathbb{F}K(G)$. Cela nous permettra de dire que si Ω est primitive, $\mathbb{F} \text{Prim}(G)$ est engendré par Ω et est de dimension un, par contre, si Ω est imprimitive, on aura $\mathbb{F} \text{Prim}(G) = 0$ (puisque I est engendré par les relations imprimitives et Ω). Soit θ une relation quelconque. On veut démontrer que $\theta \in I$. On a $\theta = \Omega \cdot \theta + (\theta - \Omega \cdot \theta)$ et $\Omega \cdot \theta \in I$ puisque I est un idéal. De plus,

$$\Omega \cdot \theta = 1_G \cdot \theta - \sum_{H \neq G} G/H \cdot \theta$$

donc

$$\theta - \Omega \cdot \theta = \sum_{H \neq G} n_H (G/H \cdot \theta)$$

Comme $G/H \cdot \theta = \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G(\theta)$ (voir [Bou00, Proposition 3.1.3, p.747]) est une relation imprimitive pour $H \neq G$, $\theta - \Omega \cdot \theta$ est imprimitive. Par définition de I , $\theta - \Omega \cdot \theta \in I$, donc on a $\theta = \Omega \cdot \theta + (\theta - \Omega \cdot \theta) \in I$.

On sait donc maintenant que $\mathbb{F}K(G) = I$ et que puisque I est engendré par les relations imprimitives et Ω , $\mathbb{F} \text{Prim}(G)$ dépend de la primitivité de Ω . On va donc séparer les cas où Ω est primitive et imprimitive. Premièrement, si tous les quotients propres de G sont cycliques on ne peut pas avoir Ω imprimitive. En effet, si on suppose Ω imprimitive, puisque 1_G apparaît dans Ω , Ω ne peut pas être une somme uniquement d'inductions depuis des sous-groupes propres, donc Ω

est une somme dont au moins un terme est l'inflation d'une relation depuis un quotient propre. Mais tous les quotients propres de G sont cycliques et n'ont donc pas de relations non nulles (voir lemme 3.1.3). Ce qui est une contradiction et onc Ω est primitive. Dans ce cas, puisque $I = \mathbb{F}K(G)$, toute relation primitive est de la forme $\lambda\Omega + \theta'$ pour θ' imprimitive et $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Alors $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \cong \mathbb{F}$.

Dans le cas contraire, il existe $1 \neq N \neq G$ normal dans G tel que G/N ne soit pas cyclique. On va montrer que Ω est imprimitive. On applique le théorème 3.2.7 à G/N , et on obtient que G/N a une relation de la forme

$$1_{G/N} - \sum_{\substack{K/N \neq G/N \\ K/N \text{ cyclique}}} m_{K/N} G/N/K/N.$$

pour $m_{K/N} \in \mathbb{F}$. On note $\Omega' \in \mathbb{F}K(G/N)$ la relation ci-dessus. Ensuite, on considère l'inflation de Ω' , et on obtient

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{G/N}^G(\Omega') &= \text{Inf}_{G/N}^G(1_{G/N}) - \sum_{\substack{K/N \neq G/N \\ K/N \text{ cyclique}}} m_{K/N} \text{Inf}_{G/N}^G(G/N/K/N) \\ &= 1_G - \sum_{\substack{N \leq K < G \\ K/N \text{ cyclique}}} m_{K/N} G/K. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Omega - \text{Inf}_{G/N}^G(\Omega') &= 1_G - \sum_{H \neq G} n_H G/H - 1_G + \sum_{\substack{N \leq K < G \\ K/N \text{ cyclique}}} m_{K/N} G/K \\ &= \sum_{J \neq G} r_J G/J, \end{aligned}$$

pour certains $r_J \in \mathbb{Z}$ et J parcourant les sous-groupes propres de G . Mais alors

$$\Omega - \text{Inf}_{G/N}^G(\Omega') = \sum_{J \neq G} r_J \text{Ind}_J^G(1_J),$$

et donc

$$\Omega = \text{Inf}_{G/N}^G(\Omega') + \sum_{J \neq G} r_J \text{Ind}_J^G(1_J),$$

Ainsi Ω est une relation imprimitive et I est simplement l'idéal engendré par les relations imprimitives. Puisque $I = \mathbb{F}K(G)$ toutes les relations pour G sont imprimitives et $\mathbb{F} \text{Prim}(G) = 0$. \square

Théorème 3.2.11. *Pour G un groupe fini non cyclique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tous les quotients propres de G sont cycliques.*
2. *G est une extension $1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$ avec $d \geq 1$, S simple, Q cyclique, l'application canonique $Q \rightarrow \text{Out}(S^d)$ est injective et S^d ne contient pas de sous-groupes propres non-triviaux normaux dans G .*

Démonstration. **1.**⇒**2.** Puisque tous les quotients propres de G sont cycliques, par le théorème 3.2.9, $IF \text{Prim}(G) \neq 0$. On choisit un sous-groupe normal minimal dans G qui est donc de la forme S^d avec S simple et $d \geq 1$. On obtient alors une courte suite exacte

$$1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

L'application $S^d \rightarrow G$ étant l'inclusion. Comme Q est isomorphe à un quotient de G , par le théorème 3.2.9, Q est cyclique.

Cas A Supposons que S ne soit pas cyclique et considérons $c : G \rightarrow \text{Aut}(S^d)$ l'homomorphisme induit par l'action de conjugaison de G sur S^d . Notons que $Z(S^d) = 1$ (puisque S^d n'a pas de sous-groupes caractéristiques et S^d n'est pas abélien). Alors $\ker(c) \cap S^d = 1$. Si $\ker(c) \neq 1$, alors

$$G/\ker(c) \geq S^d \ker(c)/\ker(c) \cong S^d/S^d \cap \ker(c) = S^d$$

est non-cyclique. Ce qui contredit le théorème 3.2.9. Donc $\ker(c) = 1$ et $G \hookrightarrow \text{Aut}(S^d)$, alors on a également $G/S^d \hookrightarrow \text{Aut}(S^d)/\text{Inn}(S^d)$ et on peut conclure $Q \hookrightarrow \text{Out}(S^d)$. Finalement, supposons que S^d contienne un sous-groupe propre N normal dans G . Puisque N est un sous-groupe propre de S^d , on doit avoir $N = S^a$ avec $1 \leq a < d$ (puisque S est simple non abélien). Alors

$$S^{d-a} \cong S^d/N \leq G/N.$$

Or, S^{d-a} n'est pas cyclique puisque $d - a \geq 1$, donc G/N n'est pas cyclique. Mais ceci contredit le théorème 3.2.9. Par conséquent, S^d ne contient pas de sous-groupes propres non-triviaux normaux dans G .

Cas B Supposons que S soit cyclique. Dans ce cas G est résoluble et la preuve se trouve dans la preuve du théorème 3.2.12.

2.⇒**1.** Supposons que G soit une extension de la forme $1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$ avec $d \geq 1$, S simple, Q cyclique et $Q \hookrightarrow \text{Out}(S^d)$. Supposons également que S^d ne contienne aucun sous-groupe propre qui soit normal dans G .

Cas A Supposons de plus que S un groupe simple non-cyclique. Soit N un sous-groupe normal de G (avec $N \neq 1$). Comme $S^d \trianglelefteq G$, on a $N \cap S^d \trianglelefteq G$. Par hypothèse sur les sous-groupes de S^d , on a soit $N \cap S^d = 1$, soit $N \cap S^d = S^d$. Si $N \cap S^d = 1$, alors comme N et S^d sont des sous-groupes normaux de G , N et S^d commutent. Donc l'action de N sur S^d par conjugaison est triviale. Or on a

$$N = N/N \cap S^d \cong NS^d/S^d \leq G/S^d = Q.$$

Puisqu'on a supposé que l'action par conjugaison de Q sur S^d induit une injection $Q \hookrightarrow \text{Out}(S^d)$. Cela contredit $N \neq 1$. Donc ce cas est impossible et on a $N \cap S^d = S^d$, c.-à-d. $S^d \subseteq N$. Donc G/N est un quotient de $G/S^d = Q$ qui est cyclique. Ainsi G/N est cyclique. Comme ceci est vrai pour tous les sous-groupes normaux non-triviaux de G , tous les quotients propres de G sont cycliques.

Cas B Supposons que S soit cyclique. Dans ce cas G est résoluble et la preuve se trouve dans la preuve du théorème 3.2.12.

□

3.2.5 Groupes résolubles

Théorème 3.2.12. *Soit G un groupe fini résoluble non-cyclique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tous les quotients propres de G sont cycliques.*
2. *Le groupe G est de la forme*
 - (a) $C_l \times C_l$ pour l un nombre premier, ou
 - (b) $(C_l)^d \rtimes Q$ où l est un nombre premier, $d \geq 1$, $l \nmid |Q|$, Q est cyclique et agit fidèlement et irréductiblement sur le \mathbb{F}_l -espace vectoriel $(C_l)^d$ par conjugaison où \mathbb{F}_l est le corps fini à l éléments.

Démonstration. On suppose d'abord que tous les quotients propres de G sont cycliques. Par le théorème 3.2.9, on a alors $\mathbb{F} \text{Prim}(G) = \mathbb{F}$. Par la proposition 3.2.2, remarquons que G est un B-groupe. Comme G est résoluble et $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \neq 0$, par le théorème 3.2.11, G est une extension de la forme

$$1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1 \quad (3.5)$$

pour $d \geq 1$, Q cyclique. Comme G est résoluble, S doit être abélien. Puisque S est simple, on peut supposer $S = C_l$ pour l un nombre premier. Si $Q = 1$, on a alors $G \cong (C_l)^d$. Comme G est un B-groupe et G est un l -groupe, on doit avoir $G \cong C_l \times C_l$ (c.-à-d. $d = 2$).

Supposons donc $Q \neq 1$. On note $W = (C_l)^d$ et on considère l'action de Q sur W par conjugaison.

CAS A On suppose $l \nmid |Q|$.

Par le théorème de Schur-Zassenhaus (voir [Rot94]), la suite 3.5 est scindée et $G = W \rtimes Q$ (à isomorphisme près, mais on suppose égalité). On identifie alors Q à un sous-groupe de G . On note N le noyau de l'action de Q sur W . On a que N est normal dans G puisque N est normal dans Q et agit trivialement sur W par conjugaison. Par l'absurde, supposons $N \neq 1$. Par le théorème 3.2.9, G/N est cyclique (puisque $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \neq 0$). Or, $G/N \cong W \rtimes Q/N$, mais G/N est cyclique et donc $Q/N \trianglelefteq G/N$. Ainsi, on a $G/N \cong W \times Q/N$. Par conséquent, Q/N et W commutent et donc Q/N agit trivialement sur W . Mais par hypothèse, N est le noyau de l'action. Donc $Q/N = 1$ ou autrement dit $Q = N$. Donc $Q \trianglelefteq G$, d'où $G = W \times Q$ est abélien. En particulier, G est nilpotent. Comme c'est un B-groupe il est alors de la forme $C_n \times C_n$ pour n un entier sans facteurs carrés. Mais $G = W \times Q = (C_l)^d \times C_r$ pour $l \nmid r$ (puisque Q est cyclique et on a supposé $l \nmid |Q|$). Donc on a une contradiction.

Par conséquent, on a $N = 1$. A présent, supposons par l'absurde que Q agit réductiblement. On regarde W comme un \mathbb{F}_l -espace vectoriel. Comme $l \nmid |Q|$, le $\mathbb{F}_l Q$ -module W est semi-simple. Donc $W = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ pour V_i des $\mathbb{F}_l Q$ -modules simples. Comme V_i est normal dans W (puisque W est abélien) et stable pour l'action de Q par conjugaison, V_i est normal dans G . De même $V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ est normal dans G . Comme $Q \neq 1$ et Q agit fidèlement sur W , Q agit non trivialement sur au moins un des V_i , supposons qu'il s'agisse de V_1 . Considérons $U = G/V_2 \oplus \dots \oplus V_n$, alors $U \cong V_1 \rtimes Q$. De plus comme U est un quotient de G , U est cyclique. Ainsi Q est normal dans U et on obtient $U = V_1 \times Q$. Mais alors Q et V_1 commutent ce qui est une contradiction avec le fait que l'action de Q sur V_1 est non-triviale. Donc Q agit irréductiblement sur $W = (C_l)^d$.

CAS B On suppose $l \mid |Q|$.

Soit \bar{S} un l -sous-groupe de Sylow de $Q = G/W$. Alors \bar{S} est cyclique puisque Q est cyclique et \bar{S} est normal dans Q . On note S le sous-groupe normal de G contenant W tel que $S/W = \bar{S}$. On obtient alors la suite exacte

$$1 \rightarrow S \rightarrow G \rightarrow \tilde{Q} \rightarrow 1 \quad (3.6)$$

où $\tilde{Q} = G/S \cong Q/\overline{S}$. On a $|S| = |W| \cdot |\overline{S}|$, qui est une puissance de l . De plus, comme \overline{S} est un l -sous-groupe de Sylow de Q , \tilde{Q} n'a plus de facteur l . Par Schur-Zassenhaus, la suite ci-dessus est scindée et on a donc $G \cong S \times \tilde{Q}$. Notons que \tilde{Q} est cyclique puisque c'est le quotient d'un groupe cyclique.

On note $\Phi(S)$ le sous-groupe de Frattini de S (voir [Rot94]).

Cas 1 Supposons que $\Phi(S) \neq 1$. Par le théorème 3.2.9, $G/\Phi(S)$ est cyclique. Alors le groupe $S/\Phi(S) \leq G/\Phi(S)$ est cyclique. Alors, comme S est un l -groupe, S est cyclique.

Comme $G/\Phi(S)$ est cyclique, $G/\Phi(S) \cong S/\Phi(S) \times \tilde{Q} = S/\Phi(S) \times \tilde{Q}$. Donc \tilde{Q} agit trivialement sur $S/\Phi(S)$. Par le théorème de Burnside ([Gor07, Theorem 1.4, p.174]), \tilde{Q} agit aussi trivialement sur S . Par conséquent $G = S \times \tilde{Q}$ est abélien comme produit de groupes cycliques. Donc G donc nilpotent. Mais comme S est un l -groupe cyclique et \tilde{Q} est cyclique d'ordre premier à l , ceci est impossible car G est aussi un B-groupe.

Cas 2 Supposons que $\Phi(S) = 1$. Alors on a $S = (C_l)^m$ (voir [Rot94, Theorem 5.48, p.123]). Notons que \tilde{Q} est cyclique avec $l \nmid |\tilde{Q}|$. On peut donc se ramener au cas A. \square

Supposons à présent que $G = C_l \times C_l$ pour l un nombre premier. Il est alors évident que tous les quotients propres de G sont cycliques. On suppose maintenant $G = (C_l)^d \times Q$ pour l un nombre premier, Q agissant fidèlement et irréductiblement sur $W = (C_l)^d$ (par conjugaison), $l \nmid |Q|$ et Q cyclique. On va montrer que tous les quotients propres de G sont cycliques. Soit N un sous-groupe normal non-trivial de G . Alors $W \cap N$ est normal dans G puisque W est normal dans G . Alors $W \cap N$ est un sous- Q -module de W . Mais W est un $\mathbb{F}_l Q$ -module irréductible, on a donc deux possibilités, soit $N \cap W = W$, soit $N \cap W = 1$. Dans le second cas, N et W commutent mais on a aussi $N = N/N \cap W \cong NW/W \leq G/W \cong Q$ et Q agit fidèlement sur W . Donc ce cas est impossible puisque N est non-trivial. Dans le premier cas, où $N \cap W = W$, on a $W \subseteq N$ est G/N est un quotient de $G/W \cong Q$ et est donc cyclique.

3.2.6 Preuve du théorème principal

Théorème 3.2.13. *Soit G un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \cong \mathbb{F}$,
2. $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \neq 0$,
3. e_G^G est une relation primitive,
4. G est non-cyclique et tous ses quotients propres sont cycliques,
5. G est un B-groupe non-trivial, dont tous les quotients propres sont cycliques,
6. G est une extension $1 \rightarrow S^d \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$ avec Q cyclique, $d \geq 1$, S simple, où l'application naturelle $Q \hookrightarrow \text{Out}(S^d)$ est une inclusion et où de plus l'une des conditions suivantes est satisfaite :
 - (a) S est non-cyclique et S^d n'a pas de sous-groupes propres normaux non triviaux dans G .
 - (b) $S^d = C_l \times C_l$ et $Q = 1$ pour l un nombre premier, c.-à-d. $G \cong C_l \times C_l$.
 - (c) $S = C_l$ pour l un nombre premier, $l \nmid |Q|$ (c.-à-d. $G \cong (C_l)^d \times Q$) et Q agit irréductiblement sur le \mathbb{F}_l -espace vectoriel $(C_l)^d$ par conjugaison.

Démonstration. 2. \Rightarrow 1. Comme $\mathbb{F} \text{Prim}(G) \neq 0$, G n'est pas cyclique, et on peut donc appliquer le théorème 3.2.9.

1. \Rightarrow 3. Par la proposition 3.2.2, e_G^G engendrent $\mathbb{F} \text{Prim}(G)$. Donc en particulier, e_G^G est une relation primitive.

3. \Rightarrow 2. Trivial.

4. \Rightarrow 1. Découle du théorème 3.2.9.

1. \Rightarrow 5. Le groupe G est un B-groupe par la proposition 3.2.2. De plus, on sait que e_G^G engendre $\mathbb{F}\text{Prim}(G)$. Par le lemme 3.2.4, tous les quotients propres sont cycliques car dans le cas contraire e_G^G serait imprimitif (et $\mathbb{F}\text{Prim}(G) = 0$)

5. \Rightarrow 4. Découle du fait qu'un B-groupe non-trivial ne peut pas être cyclique.

2. \Rightarrow 4. Comme $\mathbb{F}\text{Prim}(G) \neq 0$, G n'est pas cyclique. Le résultat découle du théorème 3.2.9.

4. \Rightarrow 6. Découle des théorèmes 3.2.11 et 3.2.12.

6. \Rightarrow 4. Découle des théorèmes 3.2.11 et 3.2.12. □

Deuxième partie

Adjonctions entre catégories de
foncteurs et applications

Chapitre 4

Adjonctions entre catégories de foncteurs

Ce chapitre est une application de la théorie des catégories. Les résultats de ce chapitre pourraient avoir des implications dans divers cas d'application de la théorie des catégories. Mais la première motivation provient de la théorie des foncteurs de bi-ensembles.

On note p un nombre premier.

Soit $\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont les groupes finis et dont les morphismes sont les bi-ensembles sans inflations excepté depuis des sous-groupes normaux d'ordre p' (voir la notation 1.2.11 pour une description plus détaillée). Il existe un foncteur oubli naturel

$$\Omega : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$$

qui est induit par l'inclusion $\theta : \mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}} \rightarrow \mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$. L'objectif est de savoir si le foncteur Ω a un foncteur adjoint $\varphi : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$.

La motivation vient ici du fait que $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ contient en particulier le foncteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ (voir la section 1.4.2). En effet, pour k un corps de caractéristique p , $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ n'est pas un foncteur de bi-ensembles car il ne sait faire des inflations que depuis des sous-groupes normaux d'ordre p' . Si on connaît φ , on peut alors s'intéresser à $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ qui lui est un foncteur de bi-ensembles. L'idée est ensuite de comparer ce foncteur avec $\mathbb{C}pp_k$, puisqu'on sait que pour un groupe fini G , les kG -modules indécomposables de p -permutation sont déterminés par les modules indécomposables projectifs pour $N_G(P)/P$ lorsque P parcourt les p -sous-groupes de G (voir la section 2.1.3).

Cette question est le point de départ de ce chapitre même s'il est en fait beaucoup plus général. Le paragraphe 4.1 donne par exemple une formule pour les extensions de Kan (voir [Bor94a, §3.7]) dans un cas où les catégories sont enrichies. Ceci s'applique directement aux foncteurs de bi-ensembles, mais pourrait avoir d'autres applications.

4.0.7 Situation

Soit R un anneau unitaire. On note $R\text{-Mod}$ la catégorie des R -modules. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux petites catégories enrichies sur $R\text{-Mod}$. Soit $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$. Alors, puisque c'est un foncteur enrichi, θ induit un foncteur

$$\begin{aligned} \theta^* : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}) &\longrightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \\ F &\longmapsto F \circ \theta. \end{aligned}$$

On définit θ^* sur les transformations naturelles comme suit, pour $\gamma : F \Rightarrow J$ un morphisme de $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, on pose $\theta^*(\gamma)_C = \gamma_{\theta(C)}$. Notons qu'il est trivial de vérifier que θ^* est un foncteur.

Maintenant, on voudrait définir un foncteur

$$\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$$

qui soit l'adjoint à gauche de θ^* .

Remarquons que si nous traitons le cas sans enrichissement, la solution à ce problème est connue. Il suffit de considérer l'extension de Kan à gauche le long de θ (voir [Bor94a, §3.7]). Pour le cas enrichi, il existe aussi une solution générale à ce problème provenant de la théorie des catégories (voir [Bor94b, Theorem 6.7.7, p. 344]). Cependant, la formule générale est difficile à calculer dans des cas particuliers. Notre cas est très particulier puisque les foncteurs considérés sont à valeur dans la catégorie sur laquelle on enrichit et l'enrichissement est sur une catégorie très "simple". C'est pour cela qu'on proposera ici une approche directe avec une formule explicite pour les adjoints de θ^* .

4.1 Adjoint à gauche

On va définir, dans ce paragraphe,

$$\varphi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$$

un adjoint à gauche de θ^* .

4.1.1 Le foncteur φ sur les objets

Pour $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, on va définir $\varphi(F) \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$.

Le foncteur $\varphi(F)$ sur les objets

Définition 4.1.1. Pour un objet $D \in \mathcal{D}$, on définit la catégorie \mathcal{E}_D comme étant la catégorie dont les objets sont les paires (C, a) pour $C \in \mathcal{C}$ et $a \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\theta(C), D)$. Un morphisme dans \mathcal{E}_D , $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ est la donnée d'un morphisme $f : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} tel que

$$\begin{array}{ccc} \theta(C) & \xrightarrow{a} & D \\ \theta(f) \downarrow & & \nearrow \\ \theta(C') & \xrightarrow{a'} & \end{array}$$

commute. La composition d'applications est induite par celle de \mathcal{C} .

Remarque 4.1.2. Remarquons que puisque \mathcal{C} est une petite catégorie, \mathcal{E}_D est aussi petite.

Notation 4.1.3. Soit $D \in \mathcal{D}$. On considère la somme $\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C)$. Dans cette somme, on dénote un générateur (C, a, m) pour $(C, a) \in \mathcal{E}_D$ et $m \in F(C)$.

Remarque 4.1.4. Si on se place dans le contexte de la définition ci-dessus, pour $(C, a) \in \mathcal{E}_D$, $m_1, m_2 \in F(C)$ et $\lambda \in R$ on a

$$(C, a, \lambda m_1 + m_2) = \lambda(C, a, m_1) + (C, a, m_2).$$

Ceci découle de la définition de la somme directe et de sa structure de R -module.

Définition 4.1.5. Pour $D \in \mathcal{D}$, on définit

$$\varphi(F)(D) = \left(\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) \right) / U_D$$

où U_D est le sous- R -module engendré par

$$(C', a', F(f)(m)) - (C, a, m) \quad (4.1)$$

$$(C, \lambda a_1 + a_2, m) - \lambda(C, a_1, m) - (C, a_2, m) \quad (4.2)$$

pour $(C, a), (C', a')$ et $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ dans \mathcal{E}_D , $\lambda \in R$ et $m \in F(C)$.

Remarquons que $\varphi(F)(D)$ a une structure naturelle de R -module héritée du module

$$\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C)$$

puisqu'on quotiente par un sous-module.

Notation 4.1.6. La classe d'un générateur (C, a, m) de $\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C)$ dans le quotient $\varphi(F)(D)$ est notée $[C, a, m]$.

Le foncteur $\varphi(F)$ sur les morphismes

On veut à présent définir la structure de foncteur de $\varphi(F)$.

Définition 4.1.7. Soit $g : D \rightarrow D'$ un morphisme de \mathcal{D} , on définit $\varphi(F)(g)$ comme étant l'application

$$\begin{aligned} \varphi(F)(g) : \left(\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) \right) / U_D &\longrightarrow \left(\bigoplus_{(C',a') \in \mathcal{E}_{D'}} F(C') \right) / U_{D'} \\ [C, a, m] &\longmapsto [C, g \circ a, m] \end{aligned}$$

Lemme 4.1.8. L'application de la définition 4.1.7 est bien définie et elle est R -linéaire.

Démonstration. Remarquons d'abord que si on prend $(C, a) \in \mathcal{E}_D$, alors $g \circ a : \theta(C) \rightarrow D \rightarrow D'$ et donc $(C, g \circ a) \in \mathcal{E}_{D'}$. On considère alors l'application R -linéaire

$$\begin{aligned} g_* : \bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) &\longrightarrow \left(\bigoplus_{(C',a') \in \mathcal{E}_{D'}} F(C') \right) / U_{D'} \\ (C, a, m) &\longmapsto [C, g \circ a, m] \end{aligned}$$

Remarquons que g_* est définie sur les générateurs de $\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C)$ puis étendue par R -linéarité. On vérifie maintenant que cette application passe au quotient par U_D , c.-à-d. induit une application depuis $\varphi(F)(D)$. Or, on a que

$$\begin{aligned} g_*((C', a', F(f)(m))) &= [C', g \circ a', F(f)(m)] \\ &= [C, g \circ a, m] \\ &= g_*((C, a, m)) \\ g_*((C, \lambda a_1 + a_2, m)) &= [C, g \circ (\lambda a_1 + a_2), m] \\ &= [C, \lambda g \circ a_1 + g \circ a_2, m] \\ &= \lambda [C, g \circ a_1, m] + [C, g \circ a_2, m] \\ &= \lambda g_*((C, a_1, m)) + g_*((C, a_2, m)) \end{aligned}$$

pour $(C, a), (C', a')$ et $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ dans \mathcal{E}_D , $\lambda \in R$ et $m \in F(C)$. Notons que l'égalité $[C, g \circ (\lambda a_1 + a_2), m] = [C, \lambda g \circ a_1 + g \circ a_2, m]$ découle du fait que la composition d'applications est linéaire. Donc on a bien un application induite

$$\begin{aligned} \varphi(F)(g) : \left(\bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) \right) / U_D &\longrightarrow \left(\bigoplus_{(C',a') \in \mathcal{E}_{D'}} F(C') \right) / U_{D'} \\ [C, a, m] &\longmapsto [C, g \circ a, m] \end{aligned}$$

qui est R -linéaire. □

Vérification de la structure de foncteur de $\varphi(F)$

Lemme 4.1.9. *Les définitions 4.1.5 et 4.1.7 font bien de $\varphi(F)$ un foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$.*

Démonstration. On vérifie d'abord que $\varphi(F)$ est bien un foncteur. On considère $g : D \rightarrow D'$ et $f : D' \rightarrow D''$ des morphismes de \mathcal{D} . Pour $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$, on a bien

$$\begin{aligned} \varphi(F)(f \circ g)([C, a, m]) &= [C, f \circ g \circ a, m] \\ &= \varphi(F)(f)([C, g \circ a, m]) \\ &= \varphi(F)(f) \circ \varphi(F)(g)([C, a, m]). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\varphi(F)(f \circ g) = \varphi(F)(f) \circ \varphi(F)(g)$. Par ailleurs, pour D un objet de \mathcal{C} et $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(F)(\text{Id}_D)([C, a, m]) &= [C, \text{Id}_D \circ a, m] \\ &= [C, a, m]. \end{aligned}$$

Donc $\varphi(F)(\text{Id}_D) = \text{Id}_{\varphi(F)(D)}$, ce qui termine la preuve que $\varphi(F)$ est un foncteur.

On montre maintenant que $\varphi(F)$ est un foncteur R -linéaire. Soient $g_1, g_2 : D \rightarrow D'$ dans \mathcal{D} et soit $\lambda \in R$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(F)(\lambda g_1 + g_2)([C, a, m]) &= [C, (\lambda g_1 + g_2) \circ a, m] \\ &= [C, \lambda g_1 \circ a + g_2 \circ a, m] \\ &= \lambda [C, g_1 \circ a, m] + [C, g_2 \circ a, m] \\ &= \lambda \varphi(F)(g_1)([C, a, m]) + \varphi(F)(g_2)([C, a, m]) \\ &= (\lambda \varphi(F)(g_1) + \varphi(F)(g_2))([C, a, m]). \end{aligned}$$

pour $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$, où la troisième égalité découle de la définition du quotient $\varphi(F)(D')$. □

Par conséquent, on a bien construit $\varphi(F) \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$.

4.1.2 Le foncteur φ sur les morphismes

Ci-dessus, nous avons défini le foncteur φ sur les objets. Il faut encore définir φ sur les morphismes, c.-à-d. les transformations naturelles.

Définition 4.1.10. Soit $\gamma : F \Rightarrow J$ une transformation naturelle dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$. On définit alors la transformation naturelle $\varphi(\gamma) : \varphi(F) \Rightarrow \varphi(J)$ par, pour $D \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma)_D : \varphi(F)(D) &\longrightarrow \varphi(J)(D) \\ [C, a, m] &\longmapsto [C, a, \gamma_C(m)]. \end{aligned}$$

Lemme 4.1.11. *Les applications $\varphi(\gamma)_D$ dans la définition 4.1.10 sont bien définies et R -linéaires. De plus $\varphi(\gamma)$ est bien une transformation naturelle.*

Démonstration. On a une famille d'applications R -linéaires $(\gamma_C : F(C) \rightarrow J(C))_{C \in \mathcal{C}}$. Pour $D \in \mathcal{D}$, on peut considérer

$$\sum_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} \gamma_C : \bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) \rightarrow \bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} J(C).$$

En passant au quotient à droite, on obtient une application R -linéaire

$$\Gamma_D : \bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) \longrightarrow \varphi(J)(D) \\ (C, a, m) \longmapsto [C, a, \gamma_C(m)].$$

On vérifie que Γ_D passe au quotient et induit une application depuis $\varphi(F)(D)$. On a bien, pour $f : (C, a) \rightarrow (C', a') \in \mathcal{E}_D$, $(C, a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $m \in F(C)$ et $\lambda \in R$,

$$\begin{aligned} \Gamma_D((C', a', F(f)(m))) &= [C', a', \gamma_{C'}(F(f)(m))] \\ &= [C', a', J(f)(\gamma_C(m))] \\ &= [C, a, \gamma_C(m)] \\ &= \Gamma_D((C, a, m)) \\ \Gamma_D((C, \lambda a_1 + a_2, m)) &= [C, \lambda a_1 + a_2, \gamma_C(m)] \\ &= \lambda [C, a_1, \gamma_C(m)] + [C, a_2, \gamma_C(m)] \\ &= \lambda \Gamma_D((C, a_1, m)) + \Gamma_D((C, a_2, m)) \end{aligned}$$

Notons que la deuxième égalité découle du fait que γ est une transformation naturelle et la troisième égalité découle de la définition de $J(F)(D)$. Donc Γ_D induit une application R -linéaire

$$\varphi(\gamma)_D : \varphi(F)(D) \longrightarrow \varphi(J)(D) \\ [C, a, m] \longmapsto [C, a, \gamma_C(m)].$$

Vérifions que $\varphi(\gamma)$ est une transformation naturelle entre $\varphi(F)$ et $\varphi(J)$. Soit $g : D \rightarrow D'$ dans \mathcal{D} , on veut que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F)(D) & \xrightarrow{\varphi(\gamma)_D} & \varphi(J)(D) \\ \varphi(F)(g) \downarrow & & \downarrow \varphi(J)(g) \\ \varphi(F)(D') & \xrightarrow{\varphi(\gamma)_{D'}} & \varphi(J)(D') \end{array}$$

commute. Soit $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$, alors on a

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma)_{D'} \circ \varphi(F)(g)([C, a, m]) &= \varphi(\gamma)_{D'}([C, g \circ a, m]) \\ &= [C, g \circ a, \gamma_C(m)] \\ &= \varphi(J)(g)([C, a, \gamma_C(m)]) \\ &= \varphi(J)(g) \circ \varphi(\gamma)_D([C, a, m]). \end{aligned}$$

Donc $\varphi(\gamma) = (\varphi(\gamma)_D)_{D \in \mathcal{D}}$ est bien une transformation naturelle. \square

Vérification de la structure de foncteur de φ

Il ne reste qu'à vérifier que φ est bien un foncteur. Soient $\gamma : F \Rightarrow J$ et $\beta : J \Rightarrow L$ des transformations naturelles dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$. On doit alors vérifier qu'on a bien

$$\varphi(\beta \circ \gamma) = \varphi(\beta) \circ \varphi(\gamma).$$

Autrement dit, pour tout $D \in \mathcal{D}$, on doit vérifier $\varphi(\beta \circ \gamma)_D = \varphi(\beta)_D \circ \varphi(\gamma)_D$. Soit $[C, a, m]$ un générateur de $\varphi(F)(D)$, on a alors

$$\begin{aligned} \varphi(\beta \circ \gamma)_D([C, a, m]) &= [C, a, (\beta \circ \gamma)_C(m)] \\ &= [C, a, \beta_C \circ \gamma_C(m)] \\ &= \varphi(\beta)_D([C, a, \gamma_C(m)]) \\ &= \varphi(\beta)_D \circ \varphi(\gamma)_D([C, a, m]). \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien un foncteur

$$\varphi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}).$$

4.1.3 Adjonction entre φ et θ^*

Théorème 4.1.12. *Le foncteur φ est l'adjoint à gauche du foncteur θ^* .*

Remarque 4.1.13. Par définition, φ est l'adjoint à gauche du foncteur θ^* , si il existe des isomorphismes

$$\text{Hom}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})}(\varphi(F), G) \cong \text{Hom}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})}(F, \theta^*(G))$$

pour tout $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$ et $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, naturels en F et G . Or, par [Bor94a, Theorem 3.1.5, p.99], ceci est équivalent à la donnée d'une transformation naturelle

$$\eta : \text{Id}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})} \Rightarrow \theta^* \circ \varphi$$

telle que pour tout $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, le couple $(\varphi(F), \eta_F)$ vérifie la propriété : si $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, $\alpha : F \Rightarrow \theta^*(G)$ dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, il existe un unique $\alpha' : \varphi(F) \Rightarrow G$ dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ tel que $\theta^*(\alpha') \circ \eta_F = \alpha$, c.-à-d. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & \theta^*(G) \\ \eta_F \downarrow & \nearrow \theta^*(\alpha') & \\ \theta^* \circ \varphi(F) & & \end{array} \quad (4.3)$$

commute dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$.

Démonstration du théorème. Nous allons utiliser la remarque ci-dessus pour démontrer que φ est l'adjoint à gauche de θ^* .

Définition de η

Soit $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, alors $(\theta^* \circ \varphi)(F) = \varphi(F) \circ \theta$. On définit, pour $C \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} (\eta_F)_C : F(C) &\longrightarrow \varphi(F)(\theta(C)) \\ m &\longmapsto [C, \text{Id}_{\theta(C)}, m] \end{aligned}$$

car $(C, \text{Id}_{\theta(C)}) \in \mathcal{E}_{\theta(C)}$. Comme $(\eta_F)_C$ est la composition de l'inclusion dans la somme directe puis du passage au quotient, c'est une application R -linéaire. Vérifions à présent que $(\eta_F)_C$ est naturelle en C . Soit $f : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} . Pour vérifier la naturalité de η_F , on doit vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{(\eta_F)_C} & \varphi(F)(\theta(C)) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow \varphi(F)(\theta(f)) \\ F(C') & \xrightarrow{(\eta_F)_{C'}} & \varphi(F)(\theta(C')) \end{array}$$

commute. Soit $m \in F(C)$, on a alors

$$\begin{aligned} \varphi(F)(\theta(f)) \circ (\eta_F)_C(m) &= \varphi(F)(\theta(f))([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= [C, \theta(f), m] \\ &= [C', \text{Id}_{\theta(C')}, F(f)(m)] \\ &= (\eta_F)_{C'}(F(f)(m)) \\ &= (\eta_F)_{C'} \circ F(f)(m), \end{aligned}$$

où la troisième identité découle du fait que $f : (C, \theta(f)) \rightarrow (C', \text{Id}_{\theta(C')})$ est un morphisme de $\mathcal{E}_{\theta(C')}$ (donc induit une identification dans $\varphi(F)(\theta(C'))$). Par conséquent, η_F est une transformation naturelle puisque $\varphi(F)(\theta(f)) \circ (\eta_F)_C = (\eta_F)_{C'} \circ F(f)$.

Vérifions à présent que η_F est naturelle en F . Soit $\gamma : F \Rightarrow J$ une transformation naturelle dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, on doit vérifier que

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\gamma} & J \\ \eta_F \downarrow & & \downarrow \eta_J \\ \varphi(F) \circ \theta & \xrightarrow{\theta^* \circ \varphi(\gamma)} & \varphi(J) \circ \theta \end{array}$$

commute. Mais ceci est vérifié si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\gamma_C} & J(C) \\ (\eta_F)_C \downarrow & & \downarrow (\eta_J)_C \\ \varphi(F) \circ \theta(C) & \xrightarrow{(\theta^* \circ \varphi(\gamma))_C} & \varphi(J) \circ \theta(C) \end{array}$$

commute pour tout $C \in \mathcal{C}$. Commençons par étudier l'application $(\theta^* \circ \varphi(\gamma))_C = \theta^*(\varphi(\gamma))_C$. Or, par définition de θ^* (voir paragraphe 4.0.7), on a $\theta^*(\varphi(\gamma))_C = \varphi(\gamma)_{\theta(C)}$. Pour $m \in F(C)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} (\theta^* \circ \varphi(\gamma))_C \circ (\eta_F)_C(m) &= (\theta^* \circ \varphi(\gamma))_C([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= \varphi(\gamma)_{\theta(C)}([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= [C, \text{Id}_{\theta(C)}, \gamma_C(m)] \\ &= (\eta_J)_C(\gamma_C(m)) \\ &= (\eta_J)_C \circ \gamma_C(m) \end{aligned}$$

donc le diagramme ci-dessus commute.

Propriété universelle

On vérifie que η a la propriété universelle souhaitée. Soit $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, soit $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ et soit $\alpha : F \Rightarrow \theta^*(G)$ une transformation naturelle. On veut définir une transformation naturelle $\alpha' : \varphi(F) \Rightarrow G$. Soit $D \in \mathcal{D}$ et soit $(C, a) \in \mathcal{E}_D$, alors on a $a : \theta(C) \rightarrow D$ dans \mathcal{D} qui induit $G(a) : G(\theta(C)) \rightarrow G(D)$. On a de plus $\alpha_C : F(C) \rightarrow G(\theta(C))$, donc on peut définir

$$A_D : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{(C,a) \in \mathcal{E}_D} F(C) & \longrightarrow & G(D) \\ (C, a, m) & \longmapsto & G(a) \circ \alpha_C(m) \end{array}$$

qui est clairement R -linéaire. Vérifions que cette application passe au quotient et induit bien $\alpha'_D : \varphi(F)(D) \rightarrow G(D)$. Or, pour $f : (C, a) \rightarrow (C', a') \in \mathcal{E}_D$, $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $m \in F(C)$ et $\lambda \in R$, on a

$$\begin{aligned} A_D((C', a', F(f)(m))) &= G(a') \circ \alpha_{C'}(F(f)(m)) \\ &= G(a') \circ \alpha_{C'} \circ F(f)(m) \\ &= G(a') \circ G(\theta(f)) \circ \alpha_C(m) \\ &= G(a' \circ \theta(f)) \circ \alpha_C(m) \\ &= G(a) \circ \alpha_C(m) \\ &= A_D((C, a, m)) \\ A_D((C, \lambda a_1 + a_2, m)) &= G(\lambda a_1 + a_2) \circ \alpha_C(m) \\ &= (\lambda G(a_1) + G(a_2)) \circ \alpha_C(m) \\ &= \lambda G(a_1) \circ \alpha_C(m) + G(a_2) \circ \alpha_C(m) \\ &= \lambda A_D((C, a_1, m)) + A_D((C, a_2, m)), \end{aligned}$$

où dans la troisième égalité on a utilisé que α est une transformation naturelle et dans la cinquième égalité on a utilisé que f est un morphisme de \mathcal{E}_D .

Par conséquent, A_D induit une application R -linéaire

$$\alpha'_D : \begin{array}{ccc} \varphi(F)(D) & \longrightarrow & G(D) \\ [C, a, m] & \longmapsto & G(a) \circ \alpha_C(m). \end{array}$$

On montre à présent que l'application ci-dessus est bien naturelle en D , c.-à-d. $\alpha' : \varphi(F) \rightarrow G$ est une transformation naturelle. Soient D et D' deux objets de \mathcal{D} et soit $g : D \rightarrow D'$ un morphisme de \mathcal{D} . On doit alors vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F)(D) & \xrightarrow{\varphi(F)(g)} & \varphi(F)(D') \\ \alpha'_D \downarrow & & \downarrow \alpha'_{D'} \\ G(D) & \xrightarrow{G(g)} & G(D') \end{array}$$

commute. Soit $[C, a, m]$ un élément de $\varphi(F)(D)$, on a alors

$$\begin{aligned} \alpha'_{D'} \circ \varphi(F)(g)([C, a, m]) &= \alpha'_{D'}([C, g \circ a, m]) \\ &= G(g \circ a) \circ \alpha_C(m) \\ &= G(g) \circ G(a) \circ \alpha_C(m) \\ &= G(g) \circ \alpha'_D([C, a, m]) \end{aligned}$$

et donc $\alpha'_{D'} \circ \varphi(F)(g) = G(g) \circ \alpha'_D$, c.-à-d. α' est bien une transformation naturelle. Pour que le diagramme (4.3) commute, on doit vérifier que

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & G(\theta(C)) \\ (\eta_F)_C \downarrow & \nearrow (\theta^*(\alpha'))_C & \\ \varphi(F)(\theta(C)) & & \end{array}$$

commute pour tout $C \in \mathcal{C}$. Soit alors $C \in \mathcal{C}$ et soit $m \in F(C)$, on a alors

$$\begin{aligned} (\theta^*(\alpha'))_C \circ (\eta_F)_C(m) &= (\theta^*(\alpha'))_C([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= \alpha'_{\theta(C)}([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= G(\text{Id}_{\theta(C)}) \circ \alpha_C(m) \\ &= \text{Id}_{G(\theta(C))} \circ \alpha_C(m) \\ &= \alpha_C(m) \end{aligned}$$

donc on a bien $\alpha_C = (\theta^*(\alpha'))_C \circ (\eta_F)_C$, d'où $\alpha = \theta^*(\alpha') \circ \eta_F$.

Montrons à présent que α' est l'unique transformation naturelle qui fait commuter le diagramme (4.3). Supposons qu'on ait $\beta : \varphi(F) \Rightarrow G$ une transformation naturelle telle que $\theta^*(\beta) \circ \eta_F = \alpha$. On veut démontrer que $\beta = \alpha'$, c.-à-d. $\beta_D = \alpha'_D$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. L'égalité $\theta^*(\beta) \circ \eta_F = \alpha$, nous assure que pour tout $C \in \mathcal{C}$, on a $\beta_{\theta(C)} \circ (\eta_F)_C = \alpha_C$. Donc pour $m \in F(C)$, on a

$$\alpha_C(m) = \beta_{\theta(C)} \circ (\eta_F)_C(m) = \beta_{\theta(C)}([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]). \quad (4.4)$$

Soit $D \in \mathcal{D}$ et soit $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$ (donc $(C, a) \in \mathcal{E}_D$ et $m \in F(C)$), alors on a une application $a : \theta(C) \rightarrow D$ qui induit $\varphi(F)(a) : \varphi(F)(\theta(C)) \rightarrow \varphi(F)(D)$ et qui par définition vérifie l'égalité $\varphi(F)(a)([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) = [C, a, m]$. De plus, comme β est une transformation naturelle, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F)(\theta(C)) & \xrightarrow{\beta_{\theta(C)}} & G(\theta(C)) \\ \varphi(F)(a) \downarrow & & \downarrow G(a) \\ \varphi(F)(D) & \xrightarrow{\beta_D} & G(D) \end{array}$$

commute. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \beta_D([C, a, m]) &= \beta_D(\varphi(F)(a)([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m])) \\ &= \beta_D \circ \varphi(F)(a)([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= G(a) \circ \beta_{\theta(C)}([C, \text{Id}_{\theta(C)}, m]) \\ &= G(a) \circ \alpha_C(m) \\ &= \alpha'_D([C, a, m]). \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle de l'égalité (4.4). Comme ceci est vrai pour tout générateur $[C, a, m] \in \varphi(F)(D)$ on a $\beta_D = \alpha'_D$. D'où $\beta = \alpha'$ et on a bien l'unicité. En conclusion, η vérifie la propriété universelle voulue. Et donc φ est bien l'adjoint à gauche de θ^* . \square

Notation 4.1.14. On note $\varphi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ cet adjoint φ puisqu'il dépend de \mathcal{C} et \mathcal{D} . Notons qu'il dépend aussi de θ mais on l'omet dans la notation.

4.1.4 Propriétés d'exactitude

Soit $\varphi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ l'adjoint à gauche du foncteur θ^* . Les propriétés d'exactitude du foncteur φ sont essentielles. En effet, si on connaît les facteurs de composition d'un foncteur $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, il est tout à fait naturel de vouloir connaître ceux de $\varphi(F)$.

Proposition 4.1.15. *Le foncteur φ est exact à droite.*

Démonstration. Comme φ est un adjoint à gauche de θ^* , φ a un adjoint à droite. Donc par [Bor94a, Proposition 3.2.2], φ préserve les colimites. Par [Bor94b, Proposition 1.11.2], φ est exact à droite. \square

A priori rien n'assure l'exactitude à gauche de φ (cela n'est en général pas le cas pour un adjoint à gauche). Cela ne nous permet donc pas en général de connaître les facteurs simples de $\varphi(F)$ à partir de ceux de F , mais on peut au moins envisager de décrire des sous-foncteurs.

4.2 Adjoint à droite

On garde les notations de la section 4.0.7. On va définir, dans ce paragraphe,

$$\psi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$$

un adjoint à droite de θ^* . Pour cela, nous avons choisi ici une approche directe. On va donc donner directement la définition de ψ puis vérifier que c'est bien un adjoint à droite de θ^* .

Si nous avons traité le cas d'un enrichissement sur $K\text{-Vect}$ plutôt que $R\text{-Mod}$, nous pourrions réutiliser la section 4.1 et la "dualiser". Explicitement, θ induit également

$$\theta^{*'} : \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{D}, K\text{-Vect}^{op}) \rightarrow \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{C}, K\text{-Vect}^{op})$$

où $(-)^{op}$ désigne la catégorie opposée et $\theta^{*'}$ est défini comme θ^* à la section 4.0.7. Par la section 4.1, le foncteur

$$(\theta^{*'})^{op} : \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{D}^{op}, K\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{C}^{op}, K\text{-Vect})$$

a un adjoint à gauche. Donc, en utilisant la définition de l'adjonction et le principe de dualité, on obtient que

$$\theta^{*'} : \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{D}, K\text{-Vect}^{op}) \rightarrow \text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{C}, K\text{-Vect}^{op})$$

a un adjoint à droite. De plus, on peut identifier $\text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{D}, K\text{-Vect}^{op})$ avec la catégorie $\text{Fun}_{K\text{-Vect}}(\mathcal{D}, K\text{-Vect})$ en utilisant le fait que les catégories $K\text{-Vect}$ et $K\text{-Vect}^{op}$ sont équivalentes. En effet, on utilise le foncteur $K\text{-Vect} \rightarrow K\text{-Vect}^{op} : V \rightarrow V^*$ où V^* désigne le dual d'un espace vectoriel qui est bien une équivalence de catégories puisqu'on considère des espaces vectoriels de dimension finie. Par ce processus, on obtient un adjoint à droite de θ^* .

Cette méthode donne le même résultat que celui obtenu ci-dessous, mais la preuve est moins directe et ne s'applique pas dans le cas d'un enrichissement sur $R\text{-Mod}$.

4.2.1 Le foncteur ψ sur les objets

Pour $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, on va définir $\psi(F) \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$.

Le foncteur $\psi(F)$ sur les objets

Définition 4.2.1. Pour un objet $D \in \mathcal{D}$, on définit la catégorie \mathcal{E}^D comme étant la catégorie dont les objets sont les paires (C, a) pour $C \in \mathcal{C}$ et $a \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \theta(C))$. Un morphisme dans \mathcal{E}^D , $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ est la donnée d'un morphisme $f : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} tel que

$$\begin{array}{ccc} & a & \theta(C) \\ & \nearrow & \downarrow \theta(f) \\ D & & \\ & \searrow & \theta(C') \\ & a' & \end{array}$$

commute. La composition d'applications est induite par celle de \mathcal{C} .

Notation 4.2.2. Soit $D \in \mathcal{D}$. On considère le produit $\prod_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} F(C)$. Dans ce produit, on dénote un élément $(m_{(C,a)})_{(C,a)}$ pour $m_{(C,a)} \in F(C)$.

Pour $(C', a') \in \mathcal{E}^D$ fixé, on dénote

$$\begin{aligned} p_{(C',a')}^{F,D} : \prod_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} F(C) &\longrightarrow F(C') \\ (m_{(C,a)})_{(C,a)} &\longmapsto m_{(C',a')} \end{aligned}$$

la projection sur la composante (C', a') .

Définition 4.2.3. Pour $D \in \mathcal{D}$, on définit $\psi(F)(D)$ comme étant le sous-module de $\prod_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} F(C)$, défini par :

$(m_{(C,a)})_{(C,a)} \in \psi(F)(D)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} F(f)(m_{(C,a)}) &= m_{(C',a')} \\ m_{(C,\lambda a_1 + a_2)} &= \lambda m_{(C,a_1)} + m_{(C,a_2)} \end{aligned}$$

pour tout $f : (C, a) \rightarrow (C', a') \in \mathcal{E}^D$ et $\lambda \in R$. Avec la notation ci-dessus, on peut donc dire, pour $M \in \prod_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} F(C)$, $M \in \psi(F)(D)$ si et seulement si

$$F(f) \circ p_{(C,a)}^{F,D}(M) = p_{(C',a')}^{F,D}(M) \quad (4.5)$$

$$p_{(C,\lambda a_1 + a_2)}^{F,D}(M) = \lambda p_{(C,a_1)}^{F,D}(M) + p_{(C,a_2)}^{F,D}(M) \quad (4.6)$$

pour $(C, a), (C', a')$ et $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}^D$, $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ dans \mathcal{E}^D et $\lambda \in R$.

Remarquons que $\psi(F)(D)$ a une structure naturelle de R -module héritée du R -module $\prod_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} F(C)$. En effet, $\psi(F)(D)$ est un sous- R -module puisque pour tout $f \in \mathcal{C}$, $F(f)$ est une application linéaire.

Le foncteur $\psi(F)$ sur les morphismes

On veut à présent définir la structure de foncteur de $\psi(F)$.

Définition 4.2.4. Soit $g : D \rightarrow D'$ un morphisme de \mathcal{D} , on définit $\psi(F)(g)$ comme étant l'application

$$\begin{aligned} \psi(F)(g) : \psi(F)(D) &\longrightarrow \psi(F)(D') \\ (m_{(C,a)})_{(C,a)} &\longmapsto (m_{(C',a' \circ g)})_{(C',a')} \end{aligned}$$

Autrement dit $p_{(C',a')}^{F,D'} \circ \psi(F)(g) = p_{(C',a' \circ g)}^{F,D}$ pour tout $(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}$.

Lemme 4.2.5. *L'application de la définition 4.2.4 est bien définie.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si on prend $(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}$, alors

$$a' \circ g : D \rightarrow D' \rightarrow \theta(C)$$

et dans ce cas $(C, a' \circ g) \in \mathcal{E}^D$. Soit $M \in \psi(F)(D)$, on veut vérifier que $\psi(F)(g)(M) \in \psi(F)(D')$. On a clairement, $\psi(F)(g)(M) \in \prod_{(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}} F(C')$, il reste à vérifier les conditions de la définition 4.2.3, or on a

$$\begin{aligned} F(f) \circ p_{(C', a')}^{F, D'} \circ \psi(F)(g)(M) &= F(f) \circ p_{(C', a' \circ g)}^{F, D} (M) \\ &= p_{(C'', a'' \circ g)}^{F, D} (M) \\ &= p_{(C'', a'')}^{F, D'} \circ \psi(F)(g)(M) \\ p_{(C', \lambda a'_1 + a'_2)}^{F, D'} \circ \psi(F)(g)(M) &= p_{(C', (\lambda a'_1 + a'_2) \circ g)}^{F, D} (M) \\ &= p_{(C', \lambda a'_1 \circ g + a'_2 \circ g)}^{F, D} (M) \\ &= \lambda p_{(C', a'_1 \circ g)}^{F, D} (M) + p_{(C', a'_2 \circ g)}^{F, D} (M) \\ &= \lambda p_{(C', a'_1)}^{F, D'} \circ \psi(F)(g)(M) + p_{(C', a'_2)}^{F, D'} \circ \psi(F)(g)(M) \end{aligned}$$

pour $(C', a'), (C'', a'')$ et $(C', \lambda a'_1 + a'_2) \in \mathcal{E}_D$, $f : (C', a') \rightarrow (C'', a'')$ dans $\mathcal{E}^{D'}$ et $\lambda \in R$. Notons que la deuxième égalité découle du fait que si $f : (C', a') \rightarrow (C'', a'')$ est un morphisme dans $\mathcal{E}^{D'}$, alors $f : (C', a' \circ g) \rightarrow (C'', a'' \circ g)$ est un morphisme dans \mathcal{E}^D (et $M \in \psi(F)(D)$). \square

Vérification de la structure de foncteur de $\psi(F)$

Lemme 4.2.6. *Les définitions 4.2.3 et 4.2.4 font bien de $\psi(F)$ un foncteur enrichi sur $R\text{-Mod}$.*

Démonstration. On vérifie d'abord que $\psi(F)$ est bien un foncteur. Soient deux morphismes de \mathcal{D} , $g : D \rightarrow D'$ et $f : D' \rightarrow D''$. On veut alors démontrer que les applications $\psi(F)(f \circ g)$ et $\psi(F)(f) \circ \psi(F)(g)$ sont égales de $\psi(F)(D)$ vers $\psi(F)(D'')$. On a

$$\begin{aligned} p_{(C'', a'')}^{F, D''} \circ \psi(F)(f \circ g) &= p_{(C'', a'' \circ f \circ g)}^{F, D} \\ &= p_{(C'', a'' \circ f)}^{F, D'} \circ \psi(F)(g) \\ &= p_{(C'', a'')}^{F, D''} \circ \psi(F)(f) \circ \psi(F)(g) \end{aligned}$$

pour tout $(C'', a'') \in \mathcal{E}^{D''}$. Donc on obtient bien $\psi(F)(f \circ g) = \psi(F)(f) \circ \psi(F)(g)$.

On montre maintenant que $\psi(F)$ est un foncteur R -linéaire. Soient $g_1, g_2 : D \rightarrow D'$ dans \mathcal{D} et soit $\lambda \in R$. On a alors

$$\begin{aligned} p_{(C', a')}^{F, D'} \circ \psi(F)(\lambda g_1 + g_2) &= p_{(C', a' \circ (\lambda g_1 + g_2))}^{F, D} \\ &= p_{(C', \lambda a' \circ g_1 + a' \circ g_2)}^{F, D} \\ &= \lambda p_{(C', a' \circ g_1)}^{F, D} + p_{(C', a' \circ g_2)}^{F, D} \\ &= \lambda p_{(C', a')}^{F, D'} \circ \psi(F)(g_1) + p_{(C', a')}^{F, D'} \circ \psi(F)(g_2) \\ &= p_{(C', a')}^{F, D'} \circ (\lambda \psi(F)(g_1) + \psi(F)(g_2)) \end{aligned}$$

pour tout $(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}$ et où la troisième égalité découle de la définition du sous-module $\psi(F)(D)$. Donc on obtient bien $\psi(F)(\lambda g_1 + g_2) = \lambda \psi(F)(g_1) + \psi(F)(g_2)$. \square

Par conséquent, on a bien construit $\psi(F) \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$.

4.2.2 Le foncteur ψ sur les morphismes

Ci-dessus, nous avons défini le foncteur ψ sur les objets. Il faut encore définir ψ sur les morphismes, c.-à-d. les transformations naturelles.

Définition 4.2.7. Soit $\gamma : F \Rightarrow J$ une transformation naturelle dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$. On définit alors la transformation naturelle $\psi(\gamma) : \psi(F) \Rightarrow \psi(J)$ par, pour $D \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \psi(\gamma)_D : \quad \psi(F)(D) &\longrightarrow \psi(J)(D) \\ (m_{(C,a)})_{(C,a)} &\longmapsto (\gamma_C(m_{(C,a)}))_{(C,a)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $p_{(C,a)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) = \gamma_C \circ p_{(C,a)}^{F,D}(M)$ pour $M \in \psi(F)(D)$.

Lemme 4.2.8. Les applications $\psi(\gamma)_D$ dans la définition 4.2.7 sont bien définies et R -linéaires. De plus $\psi(\gamma)$ est bien une transformation naturelle.

Démonstration. On commence par démontrer que pour $M = (m_{(C,a)})_{(C,a)} \in \psi(F)(D)$, on a $\psi(\gamma)_D(M) \in \psi(J)(D)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} J(f) \circ p_{(C,a)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) &= J(f) \circ \gamma_C \circ p_{(C,a)}^{F,D}(M) \\ &= \gamma_{C'} \circ F(f) \circ p_{(C,a)}^{F,D}(M) \\ &= \gamma_{C'} \circ p_{(C',a')}^{F,D}(M) \\ &= p_{(C',a')}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) \\ p_{(C,\lambda a_1 + a_2)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) &= \gamma_C \circ p_{(C,\lambda a_1 + a_2)}^{F,D}(M) \\ &= \gamma_C \circ (\lambda p_{(C,a_1)}^{F,D} + p_{(C,a_2)}^{F,D})(M) \\ &= \lambda \gamma_C \circ p_{(C,a_1)}^{F,D}(M) + \gamma_C \circ p_{(C,a_2)}^{F,D}(M) \\ &= \lambda p_{(C,a_1)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) + p_{(C,a_2)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D(M) \end{aligned}$$

pour $(C, a), (C', a')$ et $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ dans \mathcal{E}^D et $\lambda \in R$. Notons qu'on a utilisé le fait que γ est une transformation naturelle, c.-à-d. par définition, on a une famille d'applications R -linéaires $(\gamma_C : F(C) \rightarrow J(C))_{C \in \mathcal{C}}$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\gamma_C} & J(C) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow J(f) \\ F(C') & \xrightarrow{\gamma_{C'}} & J(C') \end{array}$$

commute. Enfin, pour tout $D \in \mathcal{D}$, $\psi(\gamma)_D$ est R -linéaire puisque les applications $(\gamma_C : F(C) \rightarrow J(C))_{C \in \mathcal{C}}$ le sont.

Montrons à présent que $\psi(\gamma)$ est une transformation naturelle. Soit $g : D \rightarrow D'$ dans \mathcal{D} , on veut que

$$\begin{array}{ccc} \psi(F)(D) & \xrightarrow{\psi(\gamma)_D} & \psi(J)(D) \\ \psi(F)(g) \downarrow & & \downarrow \psi(J)(g) \\ \psi(F)(D') & \xrightarrow{\psi(\gamma)_{D'}} & \psi(J)(D') \end{array}$$

commute. Or, on a bien

$$\begin{aligned}
p_{(C',a')}^{J,D'} \circ \psi(J)(g) \circ \psi(\gamma)_D &= p_{(C',a' \circ g)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D \\
&= \gamma_{C'} \circ p_{(C',a' \circ g)}^{F,D} \\
&= \gamma_{C'} \circ p_{(C',a')}^{F,D'} \circ \psi(F)(g) \\
&= p_{(C',a')}^{J,D'} \circ \psi(\gamma)_{D'} \circ \psi(F)(g)
\end{aligned}$$

pour tout $(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}$. Donc $\psi(J)(g) \circ \psi(\gamma)_D = \psi(\gamma)_{D'} \circ \psi(F)(g)$, c.-à-d. $\psi(\gamma) = (\psi(\gamma)_D)_{D \in \mathcal{D}}$ est bien une transformation naturelle. \square

Vérification de la structure de foncteur de ψ

Il ne reste qu'à vérifier que ψ est bien un foncteur. Soient $\gamma : F \Rightarrow J$ et $\beta : J \Rightarrow L$ des transformations naturelles dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$. On doit alors vérifier qu'on a bien $\psi(\beta \circ \gamma) = \psi(\beta) \circ \psi(\gamma)$. Autrement dit, pour $D \in \mathcal{D}$, on doit vérifier $\psi(\beta \circ \gamma)_D = \psi(\beta)_D \circ \psi(\gamma)_D$. Soit $(C, a) \in \mathcal{E}^D$, on a alors

$$\begin{aligned}
p_{(C,a)}^{L,D} \circ \psi(\beta \circ \gamma)_D &= (\beta \circ \gamma)_C \circ p_{(C,a)}^{F,D} \\
&= \beta_C \circ \gamma_C \circ p_{(C,a)}^{F,D} \\
&= \beta_C \circ p_{(C,a)}^{J,D} \circ \psi(\gamma)_D \\
&= p_{(C,a)}^{L,D} \circ \psi(\beta)_D \circ \psi(\gamma)_D
\end{aligned}$$

et comme ceci est vrai pour tout $(C, a) \in \mathcal{E}^D$, on a bien le résultat voulu. En conclusion, on a bien obtenu un foncteur

$$\psi : \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod}).$$

4.2.3 Adjonction entre ψ et θ^*

Théorème 4.2.9. *Le foncteur ψ est l'adjoint à droite du foncteur θ^* .*

Remarque 4.2.10. Par définition, ψ est l'adjoint à droite du foncteur θ^* si et seulement si θ^* est l'adjoint à gauche de ψ . Donc ψ est l'adjoint à droite du foncteur θ^* , si il existe des isomorphismes

$$\text{Hom}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})}(G, \psi(F)) \cong \text{Hom}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})}(\theta^*(G), F)$$

pour tout $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$ et $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, naturels en F et G . Or, par [Bor94a, Theorem 3.1.5, p.99], ceci est équivalent à la donnée d'une transformation naturelle

$$\eta : \text{Id}_{\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})} \Rightarrow \psi \circ \theta^*$$

telle que pour tout $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, le couple $(\theta^*(G), \eta_G)$ vérifie la propriété : si $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, $\alpha : G \Rightarrow \psi(F)$ dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, il existe un unique $\alpha' : \theta^*(G) \Rightarrow F$ dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$ tel que $\psi(\alpha') \circ \eta_G = \alpha$, c.-à-d. le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\alpha} & \psi(F) \\
\eta_G \downarrow & \nearrow \psi(\alpha') & \\
\psi(\theta^*(G)) & &
\end{array} \tag{4.7}$$

commute dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$.

Démonstration du théorème. Nous allons utiliser la remarque ci-dessus pour démontrer que ψ est l'adjoint à droite de θ^* .

Définition de η

Soit $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, alors $\psi \circ \theta^*(G) = \psi(G \circ \theta)$. On définit, pour $D \in \mathcal{D}$,

$$(\eta_G)_D : \begin{array}{ccc} G(D) & \longrightarrow & \psi(G \circ \theta)(D) \\ m & \longmapsto & (G(a)(m))_{(C,a) \in \mathcal{E}^D} \end{array}$$

car $a : D \rightarrow \theta(C)$ induit $G(a) : G(D) \rightarrow G(\theta(C))$. On peut donc dire $p_{(C,a)}^{G \circ \theta, D} \circ (\eta_G)_D = G(a)$. Cette application est R -linéaire car G est un foncteur à valeurs dans $R\text{-Mod}$. Vérifions que cette application est bien définie, c.-à-d. pour $m \in G(D)$ on doit avoir $(\eta_G)_D(m) \in \psi(G \circ \theta)(D)$. Or, on a bien

$$\begin{aligned} (G \circ \theta)(f)(G(a)(m)) &= G(\theta(f)) \circ G(a)(m) \\ &= G(\theta(f) \circ a)(m) \\ &= G(a')(m) \\ G(\lambda a_1 + a_2)(m) &= (\lambda G(a_1) + G(a_2))(m) \end{aligned}$$

pour $(C, a), (C', a')$ et $(C, \lambda a_1 + a_2) \in \mathcal{E}_D$, $f : (C, a) \rightarrow (C', a')$ dans \mathcal{E}^D et $\lambda \in R$. Notons qu'on a utilisé le fait que G est R -linéaire.

Vérifions à présent que η_G est une transformation naturelle (c.-à-d. $(\eta_G)_D$ est naturelle en D). Soit $g : D \rightarrow D'$ dans \mathcal{D} , on doit vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(D) & \xrightarrow{(\eta_G)_D} & \psi(G \circ \theta)(D) \\ G(g) \downarrow & & \downarrow \psi(G \circ \theta)(g) \\ G(D') & \xrightarrow{(\eta_G)_{D'}} & \psi(G \circ \theta)(D') \end{array}$$

commute. On a

$$\begin{aligned} p_{(C',a')}^{G \circ \theta, D'} \circ (\eta_G)_{D'} \circ G(g) &= G(a') \circ G(g) \\ &= G(a' \circ g) \\ &= p_{(C',a' \circ g)}^{G \circ \theta, D} \circ (\eta_G)_D \\ &= p_{(C',a')}^{G \circ \theta, D'} \circ \psi(G \circ \theta)(g) \circ (\eta_G)_D \end{aligned}$$

pour tout $(C', a') \in \mathcal{E}^{D'}$. Comme ceci est vrai pour tout (C', a') , on obtient

$$(\eta_G)_{D'} \circ G(g) = \psi(G \circ \theta)(g) \circ (\eta_G)_D$$

et donc le diagramme ci-dessus commute. Ainsi η_G est une transformation naturelle.

Vérifions à présent que η_G est naturelle en G (c.-à-d. η est une transformation naturelle). Soit $\gamma : G \Rightarrow L$ une transformation naturelle dans $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$, on doit vérifier que

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & \psi \circ \theta^*(G) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \psi \circ \theta^*(\gamma) \\ L & \xrightarrow{\eta_L} & \psi \circ \theta^*(L) \end{array}$$

commute. Mais ceci est vérifié si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(D) & \xrightarrow{(\eta_G)_D} & \psi(G \circ \theta)(D) \\ \gamma_D \downarrow & & \downarrow (\psi \circ \theta^*(\gamma))_D \\ L(D) & \xrightarrow{(\eta_L)_D} & \psi(L \circ \theta)(D) \end{array}$$

commute pour tout $D \in \mathcal{D}$. Soit alors $m \in G(D)$, on a

$$\begin{aligned} p_{(C,a)}^{L \circ \theta, D} \circ (\eta_L)_D \circ \gamma_D(m) &= L(a)(\gamma_D(m)) \\ &= \gamma_{\theta(C)} \circ G(a)(m) \\ &= \theta^*(\gamma)_C \circ G(a)(m) \\ &= \theta^*(\gamma)_C \circ p_{(C,a)}^{G \circ \theta, D} \circ (\eta_G)_D(m) \\ &= p_{(C,a)}^{L \circ \theta, D} \circ \psi(\theta^*(\gamma))_D \circ (\eta_G)_D(m) \\ &= p_{(C,a)}^{L \circ \theta, D} \circ (\psi \circ \theta^*(\gamma))_D \circ (\eta_G)_D(m) \end{aligned}$$

pour tout $(C, a) \in \mathcal{E}_D$. Notons qu'on a utilisé le fait que γ est une transformation naturelle sur la catégorie \mathcal{D} et donc que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(D) & \xrightarrow{\gamma_D} & L(D) \\ G(a) \downarrow & & \downarrow L(a) \\ G(\theta(C)) & \xrightarrow{\gamma_{\theta(C)}} & L(\theta(C)) \end{array}$$

commute puisque $\alpha : D \rightarrow \theta(C)$ est un morphisme de \mathcal{D} . On déduit, de l'équation ci-dessus, $(\eta_L)_D \circ \gamma_D(m) = (\psi \circ \theta^*(\gamma))_D \circ (\eta_G)_D(m)$ pour tout $m \in G(D)$. Ainsi les diagrammes ci-dessus commutent et η est bien une transformation naturelle.

Propriété universelle

On vérifie que η a la propriété universelle souhaitée. Soit $F \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{C}, R\text{-Mod})$, soit $G \in \text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ et soit $\alpha : G \Rightarrow \psi(F)$ une transformation naturelle. On veut définir une transformation naturelle $\alpha' : \theta^*(G) \Rightarrow F$. Soit $C \in \mathcal{C}$, on définit alors

$$\begin{aligned} \alpha'_C : G(\theta(C)) &\longrightarrow F(C) \\ m &\longmapsto p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)}(\alpha_{\theta(C)}(m)) \end{aligned}$$

qui est bien défini car on a $\alpha_{\theta(C)} : G(\theta(C)) \rightarrow \psi(F)(\theta(C))$ et $(C, \text{Id}_{\theta(C)}) \in \mathcal{E}^{\theta(C)}$. Premièrement, remarquons que cette application est bien R -linéaire puisque $\alpha_{\theta(C)}$ est une application R -linéaire. Vérifions que α' est bien une transformation naturelle. Soit $f : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} , on veut vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(\theta(C)) & \xrightarrow{\alpha'_C} & F(C) \\ G(\theta(f)) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ G(\theta(C')) & \xrightarrow{\alpha'_{C'}} & F(C') \end{array}$$

commute. En utilisant le fait que α est une transformation naturelle, et donc que

$$\begin{array}{ccc} G(\theta(C)) & \xrightarrow{\alpha_{\theta(C)}} & \psi(F)(\theta(C)) \\ G(\theta(f)) \downarrow & & \downarrow \psi(F)(\theta(f)) \\ G(\theta(C')) & \xrightarrow{\alpha_{\theta(C')}} & \psi(F)(\theta(C')) \end{array}$$

commute, on obtient

$$\begin{aligned} F(f) \circ \alpha'_C(m) &= F(f) \circ p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)}(\alpha_{\theta(C)}(m)) \\ &= p_{(C', \theta(f))}^{F, \theta(C)}(\alpha_{\theta(C)}(m)) \\ &= p_{(C', \text{Id}_{\theta(C')})}^{F, \theta(C')} \circ \psi(F)(\theta(f)) \circ \alpha_{\theta(C)}(m) \\ &= p_{(C', \text{Id}_{\theta(C')})}^{F, \theta(C')} \circ \alpha_{\theta(C')} \circ G(\theta(f))(m) \\ &= \alpha'_{C'}(G(\theta(f))(m)) \\ &= \alpha'_{C'} \circ G(\theta(f))(m) \end{aligned}$$

pour tout $m \in G(\theta(C))$. On a donc bien le résultat souhaité. Pour que le diagramme (4.7) commute, on doit vérifier que

$$\begin{array}{ccc} G(D) & \xrightarrow{\alpha_D} & \psi(F)(D) \\ (\eta_G)_D \downarrow & \nearrow \psi(\alpha')_D & \\ \psi(\theta^*(G))(D) & & \end{array}$$

commute pour tout $D \in \mathcal{D}$. Soit alors $D \in \mathcal{D}$ et $m \in G(D)$, on a

$$\begin{aligned} p_{(C, a)}^{F, D} \circ \psi(\alpha')_D \circ (\eta_G)_D(m) &= \alpha'_C \circ p_{(C, a)}^{G \circ \theta, D} \circ (\eta_G)_D(m) \\ &= \alpha'_C \circ G(a)(m) \\ &= p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)} \circ \alpha_{\theta(C)} \circ G(a)(m) \\ &= p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)} \circ \psi(F)(a) \circ \alpha_D(m) \\ &= p_{(C, a)}^{F, D} \circ \alpha_D(m) \end{aligned}$$

pour tout $(C, a) \in \mathcal{E}^D$. Et ainsi $\psi(\alpha')_D \circ (\eta_G)_D(m) = \alpha_D(m)$ pour tout $m \in G(D)$. Donc les diagrammes ci-dessus commutent.

Montrons à présent que α' est l'unique transformation naturelle qui fait commuter le diagramme (4.7). Supposons qu'on ait $\beta : \theta^*(G) \Rightarrow F$ une transformation naturelle telle que $\psi(\beta) \circ \eta_G = \alpha$. On veut démontrer que $\beta = \alpha'$, c.-à-d. $\beta_C = \alpha'_C$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. L'égalité $\psi(\beta) \circ \eta_G = \alpha$ nous assure que pour tout $D \in \mathcal{D}$, on a $\psi(\beta)_D \circ (\eta_G)_D = \alpha_D$. Soit $C \in \mathcal{C}$, on considère le cas où $D = \theta(C)$ dans la formule précédente. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha'_C &= p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)} \circ \alpha_{\theta(C)} \\ &= p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{F, \theta(C)} \circ \psi(\beta)_{\theta(C)} \circ (\eta_G)_{\theta(C)} \\ &= \beta_C \circ p_{(C, \text{Id}_{\theta(C)})}^{G \circ \theta, \theta(C)} \circ (\eta_G)_{\theta(C)} \\ &= \beta_C \circ G(\text{Id}_{\theta(C)}) \\ &= \beta_C. \end{aligned}$$

D'où $\alpha' = \beta$, et on peut donc ainsi déduire l'unicité de α' . □

Notation 4.2.11. On note $\psi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ l'adjoint ψ défini ci-dessus.

Chapitre 5

Applications des formules d'adjonction

Dans le chapitre précédent, on a défini deux adjonctions entre catégories de foncteurs. Plus précisément, il s'agit même de foncteurs enrichis sur la catégorie $R\text{-Mod}$. Or, dans la partie I, nous avons traité une famille particulière de ces foncteurs, les foncteurs de bi-ensembles. Il est donc particulièrement intéressant d'appliquer les deux adjonctions dans des cas particuliers liés aux foncteurs de bi-ensembles.

Remarquons que ce chapitre pourrait être traité de manière tout à fait similaire dans le cas d'un anneau commutatif et unitaire R au lieu du corps \mathbb{C} . C.-à-d. on pourrait démontrer les mêmes résultats pour les catégories du type $\text{Fun}_{R\text{-Mod}}(\underline{R}\text{GrB}, R\text{-Mod})$.

5.1 Application aux foncteurs sans inflation

On va utiliser la section 4.1 dans un cas particulier et donner une description explicite de l'adjoint à gauche de θ^* . On traite le cas où

- ◊ $\mathcal{D} = \mathbb{C}\text{GrB}$,
- ◊ $\mathcal{C} = \mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}$, la catégorie dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les bi-ensembles sans inflation (voir la notation 1.2.11),
- ◊ $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'inclusion.

Alors $\theta^* : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ est en fait un foncteur oubli, c.-à-d. $\theta^*(G) = \text{Res}_{\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(G)$ pour $G \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Son adjoint $\varphi_{\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ envoie un foncteur qui ne sait pas faire de l'inflation sur un foncteur de bi-ensembles. Dans cette section on note $\varphi = \varphi_{\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ pour alléger la notation.

Le but de ce paragraphe va être, pour $F \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, d'identifier explicitement le foncteur $\varphi(F) : \mathbb{C}\text{GrB} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Vect}$.

Notation 5.1.1. Par définition, un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $[U_i]$ la classe d'isomorphisme d'un bi-ensemble U_i . Pour simplifier la notation, on identifie le bi-ensemble U_i avec sa classe d'isomorphisme $[U_i]$ lorsque cela ne prête pas à confusion.

5.1.1 Le foncteur $\varphi(F)$ sur les objets

Pour G un groupe fini, on a

$$\varphi(F)(G) = \left(\bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H) \right) / U_G$$

et $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ veut dire $a : H \rightarrow G$ dans $\mathbb{C}\text{GrB}$. De plus, on considère le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\bar{F}(G) = \left(\bigoplus_{Q \leq G} F(N_G(Q)/Q) \right)_G$$

où $(-)_G$ dénote les points co-fixes de l'action par conjugaison de G . Explicitement, pour $Q \leq G$ et $m \in F(N_G(Q)/Q)$, on note (Q, m) le générateur dans $\bigoplus_{Q \leq G} F(N_G(Q)/Q)$. Alors $(-)_G$ revient à identifier (Q, m) à $({}^gQ, F(\text{Iso}(c_g))(m))$ pour tout $Q \leq G$, $m \in F(N_G(Q)/Q)$ et $g \in G$ (où $c_g : N_G(Q)/Q \rightarrow N_G({}^gQ)/{}^gQ$ dénote l'isomorphisme de conjugaison et on note $\text{Iso}(c_g)$ le bi-ensemble correspondant). Pour un générateur (Q, m) de la somme directe, on note $[Q, m]$ sa classe dans le quotient $\bar{F}(G)$.

Théorème 5.1.2. *Pour tout groupe fini G , on a un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels*

$$\varphi(F)(G) \cong \bar{F}(G).$$

Définition de $\iota_G : \bar{F}(G) \rightarrow \varphi(F)(G)$

Lemme 5.1.3. *Il existe une application \mathbb{C} -linéaire*

$$\begin{aligned} \iota_G : \bar{F}(G) &\longrightarrow \varphi(F)(G) \\ [Q, m] &\longmapsto [N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G, m]. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si $Q \leq G$, $\text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G$ est un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$, donc on peut voir $(N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G)$ comme un objet de \mathcal{E}_G . On peut ainsi considérer l'application

$$\begin{aligned} i_G : \bigoplus_{Q \leq G} F(N_G(Q)/Q) &\longrightarrow \varphi(F)(G) \\ (Q, m) &\longmapsto [N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G, m]. \end{aligned}$$

Cette application est \mathbb{C} -linéaire par construction. Vérifions que i_G passe au quotient et induit une application depuis $\bar{F}(G)$. Soit $Q \leq G$ et soit $g \in G$. On remarque d'abord que

$$\text{Indinf}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G \times \text{Iso}(c_g) = \text{Iso}(c_g) \times \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G.$$

Et de plus $\text{Iso}(c_g) = \text{Id}_G$ dans $B(G, G)$ (car Δ et Δ_g sont conjugués), donc

$$\text{Indinf}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G \times \text{Iso}(c_g) = \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G.$$

Ainsi $\text{Iso}(c_g)$ est bien un morphisme entre l'objet $(N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G)$ et l'objet $(N_G({}^gQ)/{}^gQ, \text{Indinf}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G)$, dans la catégorie \mathcal{E}_G . Par conséquent

$$\begin{aligned} i_G(({}^gQ, F(\text{Iso}(c_g))(m))) &= [N_G({}^gQ)/{}^gQ, \text{Indinf}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G, F(\text{Iso}(c_g))(m)] \\ &= [N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G, m] \\ &= i_G((Q, m)), \end{aligned}$$

par définition de $\varphi(F)(G)$ (voir définition 4.1.5) Ainsi, il existe bien une application \mathbb{C} -linéaire $\iota_G : \bar{F}(G) \rightarrow \varphi(F)(G)$ comme dans l'énoncé. \square

Définition de $\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \bar{F}(G)$

On va définir l'inverse de ι_G , c.-à-d. une application \mathbb{C} -linéaire $\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \bar{F}(G)$. On commence par définir une application depuis la somme directe $\bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H)$.

Définition 5.1.4. Soit (H, a) un objet de \mathcal{E}_G , on commence par supposer que a est la classe d'isomorphisme d'un bi-ensemble transitif, c.-à-d. $a = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$. On définit alors

$$r_{(H,a)} : \begin{array}{ccc} F(H) & \longrightarrow & \bar{F}(G) \\ (H, a, m) & \longmapsto & \left[C, F(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H)(m) \right]. \end{array}$$

Pour (H, a) où a n'est pas un morphisme transitif, c.-à-d. $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ (pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et u_i des bi-ensembles transitifs), on pose $r_{(H,a)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_{(H,u_i)}$.

Lemme 5.1.5. *L'application de la définition 5.1.4 est bien définie.*

Démonstration. L'écriture de a sous la forme $\text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$ n'est pas unique puisque dans $\mathbb{C}\text{GrB}$ les bi-ensembles sont identifiés à isomorphisme près (voir la remarque 5.1.1). Supposons alors $a \cong \text{Indinf}_{D'/C'}^G \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H$. Or, a ne peut avoir ces deux écritures que s'il existe $g \in G$ et $h \in H$ tel que ${}^g D' = D$, ${}^g C' = C$, ${}^h B' = B$, ${}^h A' = A$ et $f = c_g \circ f' \circ c_{h^{-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} & \left[C, F \left(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \right) (m) \right] \\ &= \left[C, F \left(\text{Ind}_{{}^g D'/{}^g C'}^{N_G({}^g C')/{}^g C'} \times \text{Iso}(c_g \circ f' \circ c_{h^{-1}}) \times \text{Defres}_{{}^g B'/{}^g A'}^H \right) (m) \right] \\ &= \left[{}^g C', F \left(\text{Iso}(c_g) \times \text{Ind}_{D'/C'}^{N_G(C')/C'} \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H \times \text{Iso}(c_{h^{-1}}) \right) (m) \right] \\ &= \left[C', F \left(\text{Ind}_{D'/C'}^{N_G(C')/C'} \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H \right) (m) \right] \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation d'équivalence sur les éléments de $\bar{F}(G)$ et le fait que le (H, H) -bi-ensemble $\text{Iso}(c_{h^{-1}})$ est isomorphe à l'identité. On a par conséquent démontré que $r_{(H,a)}$ ne dépend pas du choix de l'écriture de a . \square

Premièrement, on remarque que $r_{(H,a)}$ est une application linéaire (comme composition d'applications linéaires). Donc ces applications induisent une application \mathbb{C} -linéaire

$$R : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H) & \longrightarrow & \bar{F}(G) \\ (H, a, m) & \longmapsto & r_{(H,a)}(m). \end{array}$$

Proposition 5.1.6. *L'application R ci-dessus induit une application*

$$\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \bar{F}(G),$$

qui vérifie $\rho_G([H, a, m]) = r_{(H,a)}(m)$ pour tout $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ et $m \in F(H)$.

Démonstration. On veut vérifier que R passe au quotient et induit une application depuis $\varphi(F)(G)$ (voir définition 4.1.7).

Pour la deuxième condition, elle est vérifiée par définition, c.-à-d. on a toujours

$$R((H, \lambda a_1 + a_2, m)) = \lambda R((H, a_1, m)) + R((H, a_2, m))$$

(puisque par définition $r_{(H, \lambda a_1 + a_2)} = \lambda r_{(H, a_1)} + r_{(H, a_2)}$).

Soient à présent (H, a) et (H', a') deux objets de \mathcal{E}_G et soit $v : (H, a) \rightarrow (H', a')$ dans \mathcal{E}_G (c.-à-d. $v : H \rightarrow H'$ dans lgGrB tel que $a' \circ v = a$). On veut démontrer que

$$R([H', a', F(v)(m)]) = R([H, a, m])$$

pour tout $m \in F(H)$, c.-à-d. $r_{(H',a')} \circ F(v) = r_{(H,a)}$. On va montrer cela pour a et a' des morphismes transitifs et v un morphisme élémentaire, le cas général en découlera directement. On suppose $a' = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'}$. Si $v = \text{Res}_{H'}^H$. On a alors

$$a = a' \circ v = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} r_{(H',a')} \circ F(\text{Res}_{H'}^H)(m) &= \left[C, F \left(\text{Indinf}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \right) \circ F(\text{Res}_{H'}^H)(m) \right] \\ &= \left[C, F \left(\text{Indinf}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \right) (m) \right] \\ &= r_{(H,a)}(m) \end{aligned}$$

Si $v = \text{Iso}$ ou $v = \text{Def}$ le résultat se démontre de la même manière et découle directement du fait que F est un foncteur et des formules de la section 1.1.1. Comme v est un morphisme de $\mathbb{C}_{\text{lg}}\text{GrB}$, on ne peut pas avoir $v = \text{Inf}$.

Il reste donc le cas où $v = \text{Ind}_{H'}^H$. Dans ce cas, par le lemme 5.1.7 ci-dessous, on a

$$\begin{aligned} a &= a' \circ v \\ &= \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Indinf}_{K_x/C}^G \times \text{Iso}(f \circ d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H. \end{aligned}$$

où c_x est l'isomorphisme de conjugaison par x , où $d : B \cap {}^x H/A \cap {}^x H \rightarrow A(B \cap {}^x H)/A$ est l'isomorphisme standard et où $C \leq K_x \leq D$ est tel que $K_x/C = f(A(B \cap {}^x H)/A)$. On a donc

$$\begin{aligned} r_{(H',a')} \circ F(\text{Ind}_{H'}^H)(m) &= \left[C, F \left(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \right) \circ F \left(\text{Ind}_{H'}^H \right) (m) \right] \\ &= \left[C, F \left(\sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Ind}_{K_x/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f \circ d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H \right) (m) \right] \\ &= r_{(H,a)}(m) \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 5.1.7 dans lequel on remplace G par $N_G(C)/C$. On a donc bien une application K -linéaire $\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \bar{F}(G)$, qui vérifie $\rho_G([H, a, m]) = r_{(H,a)}(m)$ pour tout $(H, a) \in \mathcal{E}_D$. \square

Lemme 5.1.7. *Soient G et H' des groupes finis. Soient (D, C) une section de G , (B, A) une section de H' , $f : B/A \rightarrow D/C$ un isomorphisme de groupes. Soit encore $H \leq H'$. On a*

$$\begin{aligned} \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \times \text{Ind}_{H'}^{H'} \\ = \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Indinf}_{K_x/C}^G \times \text{Iso}(f \circ d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H \end{aligned}$$

où c_x est l'isomorphisme de conjugaison par x , où $d : B \cap {}^x H/A \cap {}^x H \rightarrow A(B \cap {}^x H)/A$ est l'isomorphisme standard et où $C \leq K_x \leq D$ est tel que $K_x/C = f(A(B \cap {}^x H)/A)$.

Démonstration. On utilise les formules de [Bou10, Pages 2 et 3] dont les preuves se trouvent dans la section 1.1.1. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \times \text{Ind}_{H'}^{H'} \\ = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Def}_{B/A}^B \times \left(\sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Ind}_{B \cap {}^x H}^B \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{B^x \cap H}^H \right) \end{aligned}$$

par la formule de Mackey (voir lemme 1.1.9). Comme de plus on a

$$\text{Def}_{B/A}^B \times \text{Ind}_{B \cap^x H}^B = \text{Ind}_{A(B \cap^x H)/A}^{B/A} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{(B \cap^x H)/(A \cap B \cap^x H)}^{B \cap^x H}$$

(par le lemme 1.1.11) et

$$\text{Def}_{(B \cap^x H)/(A \cap^x H)}^{B \cap^x H} \times \text{Iso}(c_x) = \text{Iso}(c_x) \times \text{Def}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^{B^x \cap H},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \times \text{Ind}_H^{H'} \\ &= \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Ind}_{A(B \cap^x H)/A}^{B/A} \times \text{Iso}(d \circ c_x) \times \text{Def}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^{B^x \cap H} \times \text{Res}_{B^x \cap H}^H \\ &= \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Ind}_{K_x/C}^{D/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Iso}(d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H \\ &= \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Ind}_D^G \times \text{Ind}_{K_x}^D \times \text{Inf}_{K_x/C}^{K_x} \times \text{Iso}(f \circ d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H \\ &= \sum_{x \in [B \setminus H'/H]} \text{Indinf}_{K_x/C}^G \times \text{Iso}(f \circ d \circ c_x) \times \text{Defres}_{(B^x \cap H)/(A^x \cap H)}^H. \quad \square \end{aligned}$$

Isomorphisme

Il reste à démontrer que ρ_G et ι_G sont inverses l'un de l'autre.

Lemme 5.1.8. *L'application $\rho_G \circ \iota_G : \bar{F}(G) \rightarrow \varphi(F)(G) \rightarrow \bar{F}(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. Soit $[Q, m]$ un générateur de $\varphi(F)(G)$, c.-à-d. $Q \leq G$ et $m \in F(N_G(Q)/Q)$. On a alors

$$\begin{aligned} \rho_G \circ \iota_G([Q, m]) &= \rho_G\left([N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G, m]\right) \\ &= [Q, m] \end{aligned}$$

car, par définition, $r_{(N_G(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_G(Q)/Q}^G)}(m) = [Q, m]$. On a donc le résultat voulu. \square

Lemme 5.1.9. *L'application $\iota_G \circ \rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \varphi(F)(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. Soit $[H, a, m]$ un générateur de $\varphi(F)(G)$, c.-à-d. $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ et $m \in F(H)$. On montre cela dans le cas où a représente un bi-ensemble transitif, le cas général découle par linéarité de ι_G . Supposons donc $a = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \iota_G \circ \rho_G([H, a, m]) &= \iota_G\left([C, F\left(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H\right)(m)]\right) \\ &= [N_G(C)/C, \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G, F\left(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H\right)(m)] \end{aligned}$$

Remarquons alors que si on pose $u = \text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$,

$$u : (H, a) \rightarrow (N_G(C)/C, \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G)$$

est un morphisme de \mathcal{E}_G . En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{a} & G \\ u \downarrow & & \uparrow \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G \\ N_G(C)/C & & \end{array}$$

commute car on a

$$\begin{aligned} \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G \circ u &= \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G \times \text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \\ &= \text{Ind}_{N_G(C)}^G \times \text{Ind}_D^{N_G(C)} \times \text{Inf}_{D/C}^D \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \\ &= a. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left[N_G(C)/C, \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G, F(u)(m) \right] = [H, a, m]$$

par définition de $\varphi(F)(G)$ (définition 4.1.5).

Ainsi, on a bien démontré que

$$\begin{aligned} \iota_G \circ \rho_G([H, a, m]) &= \left[N_G(C)/C, \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G, F(\text{Ind}_{D/C}^{N_G(C)/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H)(m) \right] \\ &= [H, a, m] \end{aligned}$$

c.-à-d. que $\iota_G \circ \rho_G$ est l'application identité. □

5.1.2 Le foncteur $\varphi(F)$ sur les morphismes

L'enjeu est ici de décrire explicitement le foncteur $\varphi(F)$ (qui est un foncteur de bi-ensembles) sur les morphismes. Dans le paragraphe précédent, on a pu simplifier l'écriture de $\varphi(F)$ sur les objets. On veut utiliser cette nouvelle écriture pour décrire explicitement $\varphi(F)$ sur les morphismes. Soit $u : H \rightarrow G$ un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$, on obtient alors $\varphi(F)(u) : \varphi(F)(H) \rightarrow \varphi(F)(G)$. Considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F)(H) & \xrightarrow{\varphi(F)(u)} & \varphi(F)(G) \\ \iota_H \uparrow \cong & & \cong \downarrow \rho_G \\ \bar{F}(H) & \xrightarrow{\bar{F}(u)} & \bar{F}(G) \end{array}$$

on définit $\bar{F}(u) = \rho_G \circ \varphi(F)(u) \circ \iota_H$. On a alors, pour $Q \leq H$ et $m \in F(N_H(Q)/Q)$,

$$\bar{F}(u)([Q, m]) = \rho_G \circ \varphi(F)(u) \circ \iota_H([Q, m]) \tag{5.1}$$

$$= \rho_G \circ \varphi(F)(u) \left(\left[N_H(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \tag{5.2}$$

$$= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right). \tag{5.3}$$

On va rendre cela explicite dans le cas où u est un morphisme élémentaire.

Restriction. On suppose dans ce cas $u = \text{Res}_G^H$. On utilise les formules de la section 1.1.1. On a alors

$$\begin{aligned}
u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H &= \text{Res}_G^H \times \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H \\
&= \sum_{x \in [G \backslash H / N_H(Q)]} \text{Ind}_{G \cap {}^x N_H(Q)}^G \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{G^x \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)} \times \text{Inf}_{N_H(Q)/Q}^{N_H(Q)} \\
&= \sum_{x \in [G \backslash H / N_H(Q)]} \text{Ind}_{G \cap {}^x N_H(Q)}^G \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Inf}_{G^x \cap N_H(Q)/G^x \cap Q}^{G^x \cap N_H(Q)} \times \text{Iso}(d) \times \text{Res}_{(QG^x \cap N_H(Q))/Q}^{N_H(Q)/Q} \\
&= \sum_{x \in [G \backslash H / N_H(Q)]} \text{Ind}_{G \cap {}^x N_H(Q)}^G \times \text{Inf}_{G \cap N_H(xQ)/G \cap {}^x Q}^{G \cap N_H(xQ)} \times \text{Iso}(c_x \circ d) \times \text{Res}_{(QG^x \cap N_H(Q))/Q}^{N_H(Q)/Q}
\end{aligned}$$

où c_x est l'isomorphisme de la conjugaison par x et où

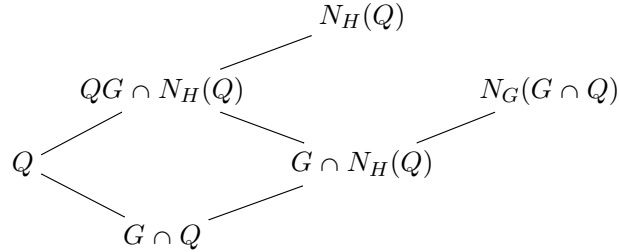
$$d : Q(G^x \cap N_H(Q))/Q \rightarrow G^x \cap N_H(Q)/G^x \cap Q$$

est l'isomorphisme standard. Donc, on a

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\text{Res}_G^H)([Q, m]) &= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\
&= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, \text{Res}_G^H \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\
&= \sum_{x \in [G \backslash H / N_H(Q)]} \left[G \cap {}^x Q, F \left(\text{Ind}_{G \cap N_H(xQ)/G \cap {}^x Q}^{N_H(Q)/G \cap {}^x Q} \times \text{Iso}(c_x \circ d) \times \text{Res}_{(QG^x \cap N_H(Q))/Q}^{N_H(Q)/Q} \right) (m) \right].
\end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.3) et la dernière de la définition de ρ_G (5.1.4).

On peut se représenter cette application à l'aide du diagramme



(diagramme dans lequel on n'a pas représenté la conjugaison).

Déflation. On suppose $u = \text{Def}_G^H$, où $G = H/N$ pour $N \triangleleft H$. Dans ce cas, on a

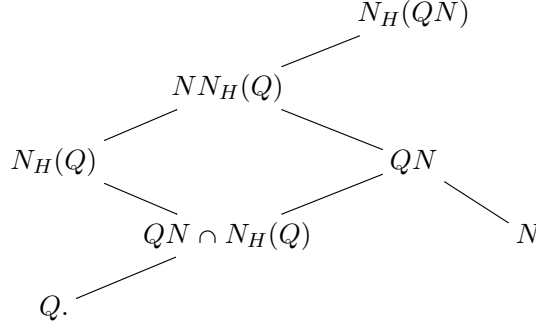
$$\begin{aligned}
u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H &= \text{Def}_G^H \times \text{Ind}_{N_H(Q)}^H \times \text{Inf}_{N_H(Q)/Q}^{N_H(Q)} \\
&= \text{Ind}_{NN_H(Q)/N}^{H/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{N_H(Q)/N \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)} \times \text{Inf}_{N_H(Q)/Q}^{N_H(Q)} \\
&= \text{Ind}_{NN_H(Q)/N}^{H/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Inf}_{N_H(Q)/Q(N \cap N_H(Q))}^{N_H(Q)/N \cap N_H(Q)} \times \text{Def}_{N_H(Q)/Q N \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)/Q} \\
&= \text{Ind}_{NN_H(Q)/N}^{H/N} \times \text{Inf}_{NN_H(Q)/QN}^{NN_H(Q)/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{N_H(Q)/QN \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)/Q}
\end{aligned}$$

où $d : N_H(Q)/N \cap N_H(Q) \rightarrow NN_H(Q)/N$ est l'isomorphisme standard. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\text{Def}_G^H)([Q, m]) &= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\
&= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, \text{Def}_G^H \times \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\
&= \left[QN/N, F \left(\text{Ind}_{NN_H(Q)/QN}^{NN_H(Q)/QN} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{N_H(Q)/QN \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)/Q} \right) (m) \right].
\end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.3) et la dernière de la définition de ρ_G (5.1.4).

La situation peut être représentée à l'aide du diagramme



Isomorphisme. On suppose $u = \text{Iso}(f)$ pour $f : H \rightarrow G$ un isomorphisme. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
 u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H &= \text{Iso}(f) \times \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H \\
 &= \text{Indinf}_{N_G(f(Q))/f(Q)}^{N_G(f(Q))} \times \text{Iso}(f').
 \end{aligned}$$

où $f' : N_H(Q)/Q \rightarrow N_G(f(Q))/f(Q)$ est l'isomorphisme induit par f . Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(\text{Iso}(f))([Q, m]) &= \rho_G \left([N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m] \right) \\
 &= [f(Q), F(\text{Iso}(f'))(m)].
 \end{aligned}$$

Inflation. On suppose $u = \text{Inf}_H^G$, où $H = G/N$ pour $N \trianglelefteq G$. On écrit de plus $Q = Q'/N$ pour $Q' \trianglelefteq G$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
 u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H &= \text{Inf}_{G/N}^G \times \text{Ind}_{N_{G/N}(Q'/N)}^{G/N} \times \text{Inf}_{N_{G/N}(Q'/N)}^{N_G(Q')/Q'} \\
 &= \text{Ind}_{N_G(Q')}^G \times \text{Inf}_{N_G(Q')/N}^{N_G(Q')} \times \text{Inf}_{N_{G/N}(Q'/N)}^{N_G(Q')/Q'} \\
 &= \text{Ind}_{N_G(Q')}^G \times \text{Inf}_{N_G(Q')/Q'}^{N_G(Q')}.
 \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(\text{Inf}_H^G)([Q, m]) &= \rho_G \left([N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m] \right) \\
 &= \rho_G \left([N_H(Q)/Q, \text{Inf}_{G/N}^G \times \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m] \right) \\
 &= \rho_G \left([N_H(Q)/Q, \text{Ind}_{N_G(Q')}^G \times \text{Inf}_{N_G(Q')/Q'}^{N_G(Q')}, m] \right) \\
 &= [Q', m].
 \end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.3) et la dernière de la définition de ρ_G (5.1.4). Notons que cela fonctionne car on a $N_{G/N}(Q'/N)/Q'/N \cong N_G(Q')/Q'$ et on a aussi $N_{G/N}(Q'/N) = N_G(Q')/N$.

Induction. On suppose $u = \text{Ind}_H^G$. Dans ce cas, on a

$$u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H = \text{Ind}_H^G \times \text{Ind}_{N_H(Q)}^H \times \text{Inf}_{N_H(Q)/Q}^{N_H(Q)}.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\bar{F}(\text{Ind}_H^G)([Q, m]) &= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, u \circ \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\ &= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, \text{Ind}_H^G \times \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^H, m \right] \right) \\ &= \rho_G \left(\left[N_H(Q)/Q, \text{Indinf}_{N_H(Q)/Q}^G, m \right] \right) \\ &= \left[Q, F \left(\text{Ind}_{N_H(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q} \right) (m) \right].\end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.3) et la dernière de la définition de ρ_G (5.1.4).

5.2 Application aux foncteurs avec inflation p'

Soit p un nombre premier.

On va utiliser la section 4.1 dans un cas particulier et donner une description explicite de l'adjoint à gauche de θ^* . On traite le cas où

- ◊ $\mathcal{D} = \mathbb{C}\text{GrB}$,
- ◊ $\mathcal{C} = \mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}$, la catégorie dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les bi-ensembles avec inflation uniquement depuis des sous-groupes normaux d'ordre p' (voir la notation 1.2.11).
- ◊ $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'inclusion.

Alors $\theta^* : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ est en fait un foncteur oubli, c.-à-d. $\theta^*(G) = \text{Res}_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(G)$ pour $G \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Son adjoint $\varphi_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ envoie un foncteur qui ne sait faire que de l'inflation p' sur un foncteur de bi-ensembles. Dans ce paragraphe, on notera $\varphi = \varphi_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$.

Le but de ce paragraphe va être, pour $F \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, d'identifier explicitement le foncteur $\varphi(F) : \mathbb{C}\text{GrB} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Vect}$.

Notation 5.2.1. Par définition, un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $[U_i]$ la classe d'isomorphisme d'un bi-ensemble U_i . Pour simplifier la notation, on identifie le bi-ensemble U_i avec sa classe d'isomorphisme $[U_i]$ lorsque cela ne prête pas à confusion.

5.2.1 Le foncteur $\varphi(F)$ sur les objets

Pour G un groupe fini, on a

$$\varphi(F)(G) = \left(\bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H) \right) / U_G$$

et $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ veut dire $a : H \rightarrow G$ dans $\mathbb{C}\text{GrB}$. De plus, on considère le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\hat{F}(G) = \left(\bigoplus_{C \triangleleft D \triangleleft G} F(D/C) \right) / W_G.$$

Premièrement, on note $(D/C, m)$ un générateur de la somme directe $\bigoplus_{C \triangleleft D \triangleleft G} F(D/C)$ pour $m \in D/C$. Avec cette notation, on définit W_G comme le sous-espace vectoriel engendré par les relations

1. $(D/C, m) - ({}^g D/gC, F(\text{Iso}(c_g))(m))$ pour tout $g \in G$, $C \triangleleft D \triangleleft G$ et $m \in F(D/C)$

2. $(D/Q, m) - \left(D/C, F(\text{Inf}_{D/Q}^{D/C})(m) \right)$ pour $C \leq Q \leq D \leq G$, $C \leq D$, Q/C d'ordre p' et $m \in F(D/Q)$
3. $(Q/C, m) - \left(D/C, F(\text{Inf}_{Q/C}^{D/C})(m) \right)$ pour $C \leq Q \leq D \leq G$, $C \leq D$, et $m \in F(Q/C)$

Pour $(D/C, m)$ un générateur de la somme directe $\bigoplus_{C \leq D \leq G} F(D/C)$ (c.-à-d. $m \in F(D/C)$), on note $[D/C, m]$ son image dans le quotient $\widehat{F}(G)$.

On peut remarquer que $\widehat{F}(G)$ est bien un \mathbb{C} -espace vectoriel puisque la somme directe

$$\bigoplus_{C \leq D \leq G} F(D/C)$$

a une structure naturelle de \mathbb{C} -espace vectoriel et qu'on quotiente par un sous-espace (on a bien que W_G est un \mathbb{C} -espace vectoriel en utilisant le fait que F est un foncteur à valeurs dans $\mathbb{C}\text{-Vect}$).

Théorème 5.2.2. *Pour tout groupe fini G , on a un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels*

$$\varphi(F)(G) \cong \widehat{F}(G).$$

Définition de $\iota_G : \widehat{F}(G) \rightarrow \varphi(F)(G)$

Lemme 5.2.3. *Il existe une application \mathbb{C} -linéaire*

$$\begin{aligned} \iota_G : \quad \widehat{F}(G) &\longrightarrow \varphi(F)(G) \\ [D/C, v] &\longmapsto [D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G v]. \end{aligned}$$

Démonstration. On définit

$$\begin{aligned} I_G : \quad \bigoplus_{C \leq D \leq G} F(D/C) &\longrightarrow \varphi(F)(G) \\ (D/C, v) &\longmapsto [D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G v] \end{aligned}$$

qui est bien une application \mathbb{C} -linéaire par construction. Vérifions que cette application passe au quotient par W_G .

1. Pour $C \leq D \leq G$, $g \in G$ et $m \in F(D/C)$, on a

$$\begin{aligned} I_G (({}^g D/g C, F(\text{Iso}(c_g))(m))) &= [{}^g D/g C, \text{Indinf}_{{}^g D/g C}^G F(\text{Iso}(c_g))(m)] \\ &= [D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G m] \\ &= I_G ((D/C, m)) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\text{Iso}(c_g)$ est un morphisme dans \mathcal{E}_G (comme dans la preuve du lemme 5.1.3).

2. Supposons qu'on ait $C \leq Q \leq D \leq G$, $C \leq D$, Q/C d'ordre p' et $m \in F(D/Q)$. On commence par montrer que $\text{Inf}_{D/Q}^{D/C} : (D/Q, \text{Indinf}_{D/Q}^G) \rightarrow (D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G)$ est un morphisme de \mathcal{E}_G . Mais cela découle directement du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D/Q & \xrightarrow{\text{Indinf}_{D/Q}^G} & G \\ \text{Inf}_{D/Q}^{D/C} \downarrow & & \uparrow \\ D/C & \xrightarrow{\text{Indinf}_{D/C}^G} & G \end{array}$$

commute. De plus, comme $|Q/C|$ est p' , $\text{Inf}_{D/Q}^{D/C} \in \mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$. On a alors, par définition de $\varphi(F)(G)$,

$$\begin{aligned} I_G \left(\left(D/C, F(\text{Inf}_{D/Q}^{D/C})(m) \right) \right) &= \left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, F \left(\text{Inf}_{D/Q}^{D/C} \right) (m) \right] \\ &= \left[D/Q, \text{Indinf}_{D/Q}^G, m \right] \\ &= I_G \left(\left(D/Q, m \right) \right). \end{aligned}$$

3. Supposons qu'on ait $C \leq Q \leq D \leq G$, $C \leq D$ et $m \in F(Q/C)$. On commence par montrer que $\text{Ind}_{Q/C}^{D/C} : \left(Q/C, \text{Indinf}_{Q/C}^G \right) \rightarrow \left(D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G \right)$ est un morphisme de \mathcal{E}_G . En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q/C & \xrightarrow{\text{Indinf}_{Q/C}^G} & G \\ \text{Ind}_{Q/C}^{D/C} \downarrow & & \uparrow \\ D/C & \xrightarrow{\text{Indinf}_{D/C}^G} & G \end{array}$$

commute puisque

$$\begin{aligned} \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Ind}_{Q/C}^{D/C} &= \text{Ind}_D^G \times \text{Ind}_Q^D \times \text{Inf}_{Q/C}^Q \\ &= \text{Indinf}_{Q/C}^G \end{aligned}$$

(où on a utilisé le lemme 1.1.14). On a alors, par définition de $\varphi(F)(G)$,

$$\begin{aligned} I_G \left(\left(D/C, F(\text{Ind}_{Q/C}^{D/C})(m) \right) \right) &= \left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, F(\text{Ind}_{Q/C}^{D/C})(m) \right] \\ &= \left[Q/C, \text{Indinf}_{Q/C}^G, m \right] \\ &= I_G \left(\left(Q/C, m \right) \right). \end{aligned}$$

Donc on obtient bien une application \mathbb{C} -linéaire

$$\begin{aligned} \iota_G : \quad \widehat{F}(G) &\longrightarrow \varphi(F)(G) \\ [D/C, v] &\longmapsto [D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, v]. \end{aligned}$$

induite par I_G . □

Définition de $\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \widehat{F}(G)$

On va définir l'inverse de ι_G , c.-à-d. une application \mathbb{C} -linéaire $\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \widehat{F}(G)$. On commence par définir une application depuis la somme directe $\bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H)$.

Définition 5.2.4. Soit (H, a) un objet de \mathcal{E}_G , on commence par supposer que a est la classe d'isomorphisme d'un bi-ensemble transitif, c.-à-d. $a = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$. On définit alors

$$\begin{aligned} r_{(H,a)} : \quad F(H) &\longrightarrow \widehat{F}(G) \\ (H, a, m) &\longmapsto [D/C, F(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H)(m)]. \end{aligned}$$

Pour (H, a) où a n'est pas un morphisme transitif, c.-à-d. $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ (pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et u_i des bi-ensembles transitifs), on pose $r_{(H,a)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_{(H,u_i)}$.

Lemme 5.2.5. *L'application de la définition 5.2.4 est bien définie.*

Démonstration. L'écriture de a sous la forme $\text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$ n'est pas unique puisque dans $\mathbb{C}\text{-GrB}$ les bi-ensembles sont identifiés à isomorphisme près (voir la remarque 5.2.1). Supposons alors $a \cong \text{Indinf}_{D'/C'}^G \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H$. Or, a ne peut avoir ces deux écritures que s'il existe $g \in G$ et $h \in H$ tel que ${}^g D' = D$, ${}^g C' = C$, ${}^h B' = B$, ${}^h A' = A$ et $f = c_g \circ f' \circ c_{h^{-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} & \left[D/C, F(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H)(m) \right] \\ &= \left[D/C, F\left(\text{Iso}(c_g \circ f' \circ c_{h^{-1}}) \times \text{Defres}_{B'/A'}^H\right)(m) \right] \\ &= \left[{}^g D'/{}^g C', F\left(\text{Iso}(c_g) \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H \times \text{Iso}(c_{h^{-1}})\right)(m) \right] \\ &= \left[D'/C', F\left(\text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H\right)(m) \right] \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation d'équivalence sur les éléments $\widehat{F}(G)$ et le fait que le (H, H) -bi-ensemble $\text{Iso}(c_{h^{-1}})$ est isomorphe à l'identité. On a par conséquent démontré que $r_{(H,a)}$ ne dépend pas du choix de l'écriture de a . \square

Premièrement, on remarque que $r_{(H,a)}$ est une application linéaire (comme composition d'applications linéaires). Donc ces applications induisent une application \mathbb{C} -linéaire

$$\begin{aligned} R : \quad \bigoplus_{(H,a) \in \mathcal{E}_G} F(H) &\longrightarrow \widehat{F}(G) \\ (H, a, m) &\longmapsto r_{(H,a)}(m). \end{aligned}$$

Proposition 5.2.6. *L'application R ci-dessus induit une application*

$$\rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \widehat{F}(G),$$

qui vérifie $\rho_G([H, a, m]) = r_{(H,a)}(m)$ pour tout $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ et tout $m \in F(H)$.

Démonstration. On veut vérifier que R passe au quotient et induit une application depuis $\varphi(F)(G)$ (voir définition 4.1.7).

Pour la deuxième condition, elle est vérifiée par définition, c.-à-d. on a toujours

$$R((H, \lambda a_1 + a_2, m)) = \lambda R((H, a_1, m)) + R((H, a_2, m))$$

puisque par définition $r_{(H, \lambda a_1 + a_2)} = \lambda r_{(H, a_1)} + r_{(H, a_2)}$.

Soient à présent (H, a) et (H', a') deux objets de \mathcal{E}_G et soit $v : (H, a) \rightarrow (H', a')$ (c.-à-d. $v : H \rightarrow H'$ dans $\mathbb{C}_{\text{p-lg}}\text{-GrB}$ tel que $a' \circ v = a$). On veut démontrer que

$$R([H', a', F(v)(m)]) = R([H, a, m])$$

(pour $m \in F(H)$), c.-à-d. $r_{(H', a')} \circ F(v) = r_{(H, a)}$. On va montrer cela pour a et a' des morphismes transitifs et v un morphisme élémentaire, le cas général en découlera directement. On suppose $a' = \text{Indinf}_{D'/C'}^G \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{B'/A'}^H$. Si $v = \text{Iso}$, $v = \text{Def}$ ou $v = \text{Res}$ le résultat découle directement du fait que F est un foncteur. Comme v est un morphisme de $\mathbb{C}_{\text{p-lg}}\text{-GrB}$, il ne reste que deux cas possibles, soit v est une inflation depuis un sous-groupe d'ordre p' , soit v est une induction.

- ◇ Supposons que $v = \text{Inf}_H^{H'}$ pour $H = H'/N$ avec N d'ordre p' . En utilisant les formules de la section 1.1.1, on a

$$\begin{aligned}
a &= a' \circ v \\
&= \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \times \text{Inf}_{H'/N}^{H'} \\
&= \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Def}_{B/A}^B \times \text{Inf}_{B/B \cap N}^B \times \text{Iso}(d^{-1}) \times \text{Res}_{BN/N}^{H'/N} \\
&= \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Inf}_{B/A(B \cap N)}^{B/A} \times \text{Def}_{B/A(B \cap N)}^{B/B \cap N} \times \text{Iso}(d^{-1}) \times \text{Res}_{BN/N}^{H'/N} \\
&= \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Inf}_{D/K}^{D/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Def}_{B/A(B \cap N)}^{B/B \cap N} \times \text{Iso}(d^{-1}) \times \text{Res}_{BN/N}^{H'/N} \\
&= \text{Indinf}_{D/K}^G \times \text{Iso}(f \circ d^{-1}) \times \text{Defres}_{BN/AN}^{H'/N}
\end{aligned}$$

où $d : B/B \cap N \rightarrow BN/N$ est l'isomorphisme standard et où $C \leq K \leq D$ est tel que $K/C = f(A(B \cap N)/A)$. Donc, pour $m \in F(H)$, on a

$$\begin{aligned}
r_{(H',a')} \circ F(v)(m) &= \left[D/C, F(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'}) \circ F(v)(m) \right] \\
&= \left[D/C, F\left(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^{H'} \times \text{Inf}_{H'/N}^{H'}\right)(m) \right] \\
&= \left[D/C, F\left(\text{Inf}_{D/K}^{D/C} \times \text{Iso}(f \circ d^{-1}) \times \text{Defres}_{BN/AN}^{H'/N}\right)(m) \right]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle d'un calcul similaire à ci-dessus. De plus, comme $|N|$ est sans facteur p , $|B \cap N|$ est sans facteur p , de plus $|A(B \cap N)/A| = |B \cap N/B \cap N \cap A|$ est sans facteur p . Par conséquent, puisque f est un isomorphisme, $|K/C|$ est sans facteur p . Donc on a une situation $C \leq K \leq D$ avec C d'indice p' dans K . Alors par la définition de $\widehat{F}(G)$, on a

$$\begin{aligned}
r_{(H',a')} \circ F(v)(m) &= \left[D/K, F\left(\text{Iso}(f \circ d^{-1}) \times \text{Defres}_{BN/AN}^{H'/N}\right)(m) \right] \\
&= r_{(H,a)}(m).
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $r_{(H',a')} \circ F(v) = r_{(H,a)}$.

- ◇ Supposons que $v = \text{Ind}_H^{H'}$. Dans ce cas, on reproduit la preuve de la proposition 5.1.6. \square

Isomorphisme

Il reste à démontrer que ρ_G et ι_G sont inverses l'un de l'autre.

Lemme 5.2.7. *L'application $\rho_G \circ \iota_G : \widehat{F}(G) \rightarrow \varphi(F)(G) \rightarrow \widehat{F}(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. Soit D/C une section de G . Soit $m \in F(D/C)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\rho_G \circ \iota_G([D/C, m]) &= \rho_G\left([D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, m]\right) \\
&= [D/C, m]
\end{aligned}$$

car, par définition $r_{(D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G)}([D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, m]) = [D/C, m]$. Comme on l'a démontré sur les générateurs, on a le résultat voulu. \square

Lemme 5.2.8. *L'application $\iota_G \circ \rho_G : \varphi(F)(G) \rightarrow \varphi(F)(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. Soit $[H, a, m]$ un générateur de $\varphi(F)(G)$, c.-à-d. $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ et $m \in F(H)$. On montre cela dans le cas où a représente un bi-ensemble transitif (le cas général en découle). Supposons donc $a = \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \iota_G \circ \rho_G([H, a, m]) &= \iota_G \left(\left[D/C, F(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H)(m) \right] \right) \\ &= \left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, F \left(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \right) (m) \right]. \end{aligned}$$

Remarquons alors que si on pose $u = \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H$,

$$u : (H, a) \rightarrow (D/C, \text{Indinf}_{N_G(C)/C}^G)$$

est un morphisme de \mathcal{E}_G . En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{a} & G \\ u \downarrow & & \uparrow \text{Indinf}_{D/C}^G \\ D/C & & \end{array}$$

commute car on a

$$\begin{aligned} \text{Indinf}_{D/C}^G \circ u &= \text{Indinf}_{D/C}^G \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \\ &= a. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, F(u)(m) \right] = [H, a, m]$$

par définition de $\varphi(F)(G)$.

Ainsi, on a bien démontré que

$$\begin{aligned} \iota_G \circ \rho_G([H, a, m]) &= \left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^G, F \left(\text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{B/A}^H \right) (m) \right] \\ &= [H, a, m] \end{aligned}$$

c.-à-d. que $\iota_G \circ \rho_G$ est le morphisme identité. \square

5.2.2 Le foncteur $\varphi(F)$ sur les morphismes

L'enjeu est ici de décrire explicitement le foncteur $\varphi(F)$ (qui est un foncteur de bi-ensembles) sur les morphismes. Dans le paragraphe précédent, on a pu simplifier l'écriture de $\varphi(F)$ sur les objets. On veut utiliser cette nouvelle écriture pour décrire explicitement $\varphi(F)$ sur les morphismes. Soit $u : H \rightarrow G$ un morphisme de $\underline{\text{GrB}}$, on obtient alors $\varphi(F)(u) : \varphi(F)(H) \rightarrow \varphi(F)(G)$. Considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi(F)(H) & \xrightarrow{\varphi(F)(u)} & \varphi(F)(G) \\ \iota_H \uparrow \cong & & \cong \downarrow \rho_G \\ \widehat{F}(H) & \xrightarrow{\widehat{F}(u)} & \widehat{F}(G) \end{array}$$

on définit $\widehat{F}(u) = \rho_G \circ \varphi(F)(u) \circ \iota_H$. On a alors, pour D/C une section de H et $m \in F(D/C)$,

$$\widehat{F}(u) ([D/C, m]) = \rho_G \circ \varphi(F)(u) \circ \iota_H ([D/C, m]) \quad (5.4)$$

$$= \rho_G \circ \varphi(F)(u) \left(\left[D/C, \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \quad (5.5)$$

$$= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right). \quad (5.6)$$

On va rendre cela explicite dans le cas où u est un morphisme transitif.

Restriction. On suppose dans ce cas $u = \text{Res}_G^H$. On utilise alors les formules de la section 1.1.1.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H &= \text{Res}_G^H \times \text{Indinf}_{D/C}^H \\
&= \sum_{x \in [G \setminus H/D]} \text{Ind}_{G \cap^x D}^G \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{G^x \cap D}^D \times \text{Inf}_{D/C}^D \\
&= \sum_{x \in [G \setminus H/D]} \text{Ind}_{G \cap^x D}^G \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Inf}_{G^x \cap D / G^x \cap C}^{G^x \cap D} \times \text{Iso}(d) \times \text{Res}_{C(G^x \cap D)/C}^{D/C} \\
&= \sum_{x \in [G \setminus H/D]} \text{Ind}_{G \cap^x D}^G \times \text{Inf}_{G \cap^x D / G \cap^x C}^{G \cap^x D} \times \text{Iso}(c_x \circ d) \times \text{Res}_{C(G^x \cap D)/C}^{D/C}
\end{aligned}$$

où c_x est l'isomorphisme de la conjugaison par x et où

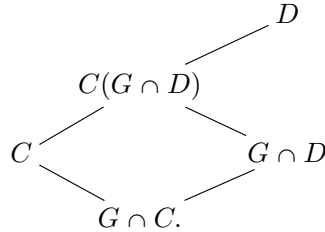
$$d : C(G^x \cap D)/C \rightarrow G^x \cap D / G^x \cap C$$

est l'isomorphisme standard. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\text{Res}_G^H)([D/C, m]) &= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
&= \rho_G \left(\left[D/C, \text{Res}_G^H \times \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
&= \sum_{x \in [G \setminus H/D]} \left[G \cap^x D / G \cap^x C, F \left(\text{Iso}(c_x \circ d) \times \text{Res}_{C(G^x \cap D)/C}^{D/C} \right) (m) \right].
\end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.6) et la dernière découle de la définition de ρ_G (5.2.4).

On peut se représenter cette application à l'aide du diagramme



Déflation. On suppose $u = \text{Def}_G^H$, où $G = H/N$ pour $N \trianglelefteq H$. Dans ce cas, on a

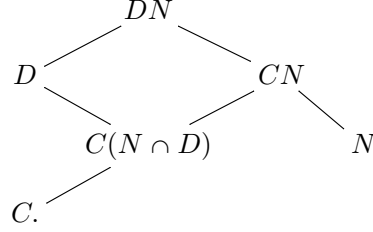
$$\begin{aligned}
u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H &= \text{Def}_G^H \times \text{Ind}_D^H \times \text{Inf}_{D/C}^D \\
&= \text{Ind}_{ND/N}^{H/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{D/N \cap D}^D \times \text{Inf}_{D/C}^D \\
&= \text{Ind}_{ND/N}^{H/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Inf}_{D/C(N \cap D)}^{D/N \cap D} \times \text{Def}_{D/C(N \cap D)}^{D/C} \\
&= \text{Ind}_{ND/N}^{H/N} \times \text{Inf}_{ND/CN}^{ND/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{D/C(N \cap D)}^{D/C}
\end{aligned}$$

où $d : D/C(N \cap D) \rightarrow ND/CN$ est l'isomorphisme standard. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\text{Def}_G^H)([D/C, m]) &= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
&= \rho_G \left(\left[D/C, \text{Def}_G^H \times \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
&= \left[(DN/N)/(CN/N), F \left(\text{Iso}(d) \times \text{Def}_{D/C(N \cap D)}^{D/C} \right) (m) \right].
\end{aligned}$$

où la première égalité découle de l'équation (5.6) et la dernière découle de la définition de ρ_G (5.2.4).

La situation peut être représentée à l'aide du diagramme



Isomorphisme. On suppose $u = \text{Iso}(f)$ pour $f : H \rightarrow G$ un isomorphisme. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
 u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H &= \text{Iso}(f) \times \text{Indinf}_{D/C}^H \\
 &= \text{Indinf}_{f(D)/f(C)}^G \times \text{Iso}(f').
 \end{aligned}$$

où $f' : D/C \rightarrow f(D)/f(C)$ est l'isomorphisme induit par f . Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}(\text{Iso}(f))([D/C, m]) &= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
 &= \left[f(D)/f(C), F(\text{Iso}(f'))(m) \right].
 \end{aligned}$$

Inflation. On suppose $u = \text{Inf}_H^G$, où $H = G/N$ pour $N \trianglelefteq G$. On écrit de plus que $D = D'/N$ pour $D' \trianglelefteq G$ et $C = C'/N$ pour $C' \trianglelefteq G$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
 u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H &= \text{Inf}_{G/N}^G \times \text{Ind}_{D'/N}^{G/N} \times \text{Inf}_{(D'/N)/(C'/N)}^{D'/N} \\
 &= \text{Ind}_{D'}^G \times \text{Inf}_{D'/N}^{D'} \times \text{Inf}_{(D'/N)/(C'/N)}^{D'/N} \\
 &= \text{Ind}_{D'}^G \times \text{Inf}_{D'/C'}^{D'}.
 \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}(\text{Inf}_H^G)([D/C, m]) &= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
 &= [D'/C', m].
 \end{aligned}$$

Induction. On suppose $u = \text{Ind}_H^G$. Dans ce cas, on a

$$u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H = \text{Ind}_H^G \times \text{Ind}_D^H \times \text{Inf}_{D/C}^D.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}(\text{Ind}_H^G)([D/C, m]) &= \rho_G \left(\left[D/C, u \circ \text{Indinf}_{D/C}^H, m \right] \right) \\
 &= [D/C, m].
 \end{aligned}$$

5.3 Application aux foncteurs sans déflation

On va utiliser la section 4.2 dans un cas particulier et donner une description explicite de l'adjoint à droite de θ^* . On traite le cas où

- ◊ $\mathcal{D} = \mathbb{C}\text{GrB}$,
- ◊ $\mathcal{E} = \mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}$, la catégorie dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les bi-ensembles sans déflation (voir la notation 1.2.11),
- ◊ $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'inclusion.

Alors $\theta^* : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ est en fait un foncteur oubli, c.-à-d. $\theta^*(G) = \text{Res}_{\mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(G)$ pour tout $G \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Son adjoint $\psi_{\mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$, envoie un foncteur qui ne sait pas faire de la déflation sur un foncteur de bi-ensembles. Dans ce paragraphe, on note $\psi = \psi_{\mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$.

Le but de ce paragraphe va être, pour $F \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}_{\text{Id}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, d'identifier explicitement le foncteur $\psi(F) : \mathbb{C}\text{GrB} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Vect}$.

Notation 5.3.1. Par définition, un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $[U_i]$ la classe d'isomorphisme d'un bi-ensemble U_i . Pour simplifier la notation, on identifie le bi-ensemble U_i avec sa classe d'isomorphisme $[U_i]$ lorsque cela ne prête pas à confusion.

5.3.1 $\psi(F)$ sur les objets

Pour G un groupe fini, $\psi(F)(G)$ est le sous-espace de $\prod_{(H,a) \in \mathcal{E}^G} F(H)$, défini par : $(m_{(H,a)})_{(H,a)} \in \psi(F)(G)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} F(f)(m_{(H,a)}) &= m_{(H',a')} \\ m_{(H,\lambda a_1 + a_2)} &= \lambda m_{(H,a_1)} + m_{(H,a_2)} \end{aligned}$$

pour tout $f : (H, a) \rightarrow (H', a') \in \mathcal{E}^G$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Rappelons que $(H, a) \in \mathcal{E}^G$ veut dire $a : G \rightarrow H$ dans $\mathbb{C}\text{GrB}$. De plus, on considère le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\underline{F}(G) = \left(\prod_{R \leq G} F(N_G(R)/R) \right)^G$$

où $(-)^G$ dénote les points fixes de l'action par conjugaison de G . On note, pour $Q \leq G$,

$$\begin{aligned} P_Q^G : \prod_{R \leq G} F(N_G(R)/R) &\longrightarrow F(N_G(Q)/Q) \\ (m_R)_R &\longmapsto m_Q \end{aligned}$$

la projection sur le facteur indexé par Q . Un élément $M \in \prod_{R \leq G} F(N_G(R)/R)$ appartient à $\underline{F}(G)$ si et seulement si on a $P_g^Q(M) = F(\text{Iso}(c_g))(P_Q^G(M))$ pour tout $Q \leq Q$ et $g \in G$.

Théorème 5.3.2. *Pour tout groupe fini G , on a un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels*

$$\psi(F)(G) \cong \underline{F}(G).$$

Définition de $\kappa_G : \psi(F)(G) \rightarrow \underline{F}(G)$

Lemme 5.3.3. *Il existe une application \mathbb{C} -linéaire*

$$\begin{aligned} \kappa_G : \psi(F)(G) &\longrightarrow \underline{F}(G) \\ (m_{(H,a)})_{(H,a)} &\longmapsto (m_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G})_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)})_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)} \end{aligned}$$

Autrement dit, pour $Q \leq G$, on a $P_Q^G \circ \kappa_G = p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^{F,G}$, où $p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^{F,G}$ désigne la projection de $\psi(F)(G)$ vers le facteur indexé par $(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)$ (voir notation 4.2.2)

Démonstration. On considère

$$k_G : \begin{array}{ccc} \psi(F)(G) & \longrightarrow & \prod_{Q \leq G} F(N_G(Q)/Q) \\ (m_{(H,a)})_{(H,a)} & \longmapsto & (m_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G})^Q \end{array}$$

qui est bien définie puisque pour $Q \leq G$, on a bien $(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G) \in \mathcal{E}^G$. Autrement dit, pour $Q \leq G$, $P_Q^G \circ k_G = p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^{F,G}$. Il s'agit évidemment d'une application \mathbb{C} -linéaire. Vérifions à présent que l'image de k_G est dans $\underline{F}(G)$. Soit $Q \leq G$ et $g \in G$, on vérifie alors facilement que

$$\text{Iso}(c_g) : (N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G) \rightarrow (N_G({}^gQ)/{}^gQ, \text{Defres}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G)$$

est un morphisme de \mathcal{E}^G . Ainsi, par définition de $\psi(F)(G)$, on a

$$F(\text{Iso}(c_g)) \circ p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^{F,G} = p_{(N_G({}^gQ)/{}^gQ, \text{Defres}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G)}^{F,G}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} P_{{}^gQ}^G \circ k_G &= p_{(N_G({}^gQ)/{}^gQ, \text{Defres}_{N_G({}^gQ)/{}^gQ}^G)}^G \\ &= F(\text{Iso}(c_g)) \circ p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^G \\ &= F(\text{Iso}(c_g)) \circ P_Q^G \circ k_G. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\text{im}(k_G) \subseteq \underline{F}(G)$, c.-à-d. κ_G est bien définie. \square

Définition de $\zeta_G : \underline{F}(G) \rightarrow \psi(F)(G)$

Définition 5.3.4. On définit l'application $\zeta_G : \underline{F}(G) \rightarrow \psi(F)(G)$ en décrivant $p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G$ pour tout $(H, a) \in \mathcal{E}^G$. Pour $(H, a) \in \mathcal{E}^G$, où a est un bi-ensemble transitif, c.-à-d.

$$a = \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G,$$

on pose

$$p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G = F \left(\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B} \right) \circ P_B^G. \quad (5.7)$$

Dans le cas général, c.-à-d. $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ pour u_i des bi-ensembles transitifs et $\lambda_i \in \mathbb{C}$, on pose

$$p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(p_{(H, u_i)}^G \circ \zeta_G \right). \quad (5.8)$$

Lemme 5.3.5. *L'application de la définition 5.3.4 est bien définie.*

Démonstration. On doit d'abord vérifier que la formule (5.7) ne dépend pas du choix de l'écriture de a . L'écriture de a sous la forme $\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G$ n'est pas unique puisque dans $\underline{\text{GrB}}$ les bi-ensembles sont identifiés à isomorphisme près (voir la remarque 5.3.1). Supposons alors $a \cong \text{Indinf}_{D'/C'}^H \times \text{Iso}(f') \times \text{Defres}_{A'/B'}^G$. Or, a ne peut avoir ces deux écritures que s'il existe $g \in G$ et $h \in H$ tels que ${}^hD' = D$, ${}^hC' = C$, ${}^gB' = B$, ${}^gA' = A$ et $f = c_h \circ f' \circ c_{g^{-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} & F \left(\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B} \right) \circ P_B^G \\ &= F \left(\text{Indinf}_{{}^hD'/{}^hC'}^H \times \text{Iso}(c_h \circ f' \circ c_{g^{-1}}) \times \text{Res}_{{}^gA'/{}^gB'}^{N_G({}^gB')/{}^gB'} \right) \circ P_{{}^gB'}^G \\ &= F \left(\text{Iso}(c_h) \times \text{Indinf}_{D'/C'}^H \times \text{Iso}(f') \times \text{Res}_{A'/B'}^{N_G(B')/B'} \times \text{Iso}(c_{g^{-1}}) \right) \circ P_{{}^gB'}^G \\ &= F \left(\text{Indinf}_{D'/C'}^H \times \text{Iso}(f') \times \text{Res}_{A'/B'}^{N_G(B')/B'} \right) \circ P_{B'}^G, \end{aligned}$$

où on a utilisé $\text{Iso}(c_h) \cong \text{Id}$ comme (H, H) -bi-ensembles et $F(\text{Iso}(c_{g^{-1}})) \circ P_{gB'}^G = P_B^G$. Donc (5.7) ne dépend pas du choix de l'écriture de a .

Il est clair que ζ_G est une application \mathbb{C} -linéaire à valeurs dans $\prod_{(H,a) \in \mathcal{E}^G} F(H)$, il faut maintenant vérifier que son image est bien dans $\psi(F)(G)$. La deuxième condition dans la définition de $\psi(F)(G)$ (voir 4.2.3) est trivialement vérifiée car on a posé (5.8). Pour la première condition, on doit vérifier que pour $v : (H, a) \rightarrow (H', a')$ dans \mathcal{E}^G , on a

$$F(v) \circ p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G = p_{(H',a')}^G \circ \zeta_G.$$

Comme $v \in \mathcal{E}^G$, on a $v : H \rightarrow H'$ dans $\mathbb{C} \text{GrB}_{\text{Id}}$ et $v \circ a = a'$. On va démontrer l'égalité ci-dessus pour a et a' transitifs et v un morphisme élémentaire. Le cas général se déduit du fait que F est un foncteur et ensuite par linéarité. Si $v = \text{Ind}$, Inf ou Iso , le résultat découle directement du fait que F est un foncteur (et de la définition de ζ_G). On ne peut pas avoir $v = \text{Def}$ car v est un morphisme de $\mathbb{C} \text{GrB}_{\text{Id}}$. Il reste le cas $v = \text{Res}_{H'}^H$. On suppose $a = \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G$, et on a alors (par le lemme 1.1.9)

$$\begin{aligned} a' &= v \circ a \\ &= \text{Res}_{H'}^H \times \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G \\ &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} \text{Ind}_{H' \cap^x D}^{H'} \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{H' \cap D}^D \times \text{Inf}_{D/C}^D \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G \\ &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} \text{Indinf}_{H' \cap^x D / H' \cap^x C}^{H'} \times \text{Iso}(c_x \circ d^{-1}) \times \text{Res}_{(H' \cap D)C/C}^{D/C} \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G \end{aligned}$$

où c_x est l'isomorphisme de conjugaison par x , où

$$d : H'^x \cap D / (H'^x \cap D \cap C) \rightarrow (H'^x \cap D)C/C$$

est l'isomorphisme standard et où on a utilisé

$$\text{Res}_{H' \cap D}^D \times \text{Inf}_{D/C}^D = \text{Inf}_{H'^x \cap D / H'^x \cap D \cap C}^{H'^x \cap D} \times \text{Iso}(d^{-1}) \times \text{Res}_{(H'^x \cap D)C/C}^{D/C}$$

(égalité du lemme 1.1.12). Finalement on obtient

$$\begin{aligned} a' &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} \text{Indinf}_{H' \cap^x D / H' \cap^x C}^{H'} \times \text{Iso}(c_x \circ d^{-1} \circ f) \times \text{Res}_{K_x/B}^{A/B} \times \text{Defres}_{A/B}^G \\ &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} \text{Indinf}_{H' \cap^x D / H' \cap^x C}^{H'} \times \text{Iso}(c_x \circ d^{-1} \circ f) \times \text{Def}_{K_x/B}^{K_x} \times \text{Res}_{K_x}^A \times \text{Res}_A^G \\ &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} \text{Indinf}_{H' \cap^x D / H' \cap^x C}^{H'} \times \text{Iso}(c_x \circ d^{-1} \circ f) \times \text{Defres}_{K_x/B}^G \end{aligned}$$

pour $B \leq K_x \leq A$ tel que $f(K_x/B) = (H'^x \cap D)C/C$, et où on a utilisé le lemme 1.1.13. On a par conséquent,

$$\begin{aligned} &F(v) \circ p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G \\ &= F(v) \circ F \left(\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B} \right) \circ P_B^G \\ &= F \left(\text{Res}_{H'}^H \times \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B} \right) \circ P_B^G \\ &= \sum_{x \in [H' \setminus H/D]} F \left(\text{Indinf}_{H' \cap^x D / H' \cap^x C}^{H'} \times \text{Iso}(c_x \circ d^{-1} \circ f) \times \text{Res}_{K_x/B}^{N_G(B)/B} \right) \circ P_B^G \\ &= p_{(H',a')}^G \circ \zeta_G. \end{aligned}$$

□

Isomorphisme

Il reste à démontrer que ζ_G et κ_G sont inverses l'un de l'autre.

Lemme 5.3.6. *L'application $\kappa_G \circ \zeta_G : \underline{F}(G) \rightarrow \psi(F)(G) \rightarrow \underline{F}(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. On va montrer $P_Q^G \circ \kappa_G \circ \zeta_G = P_Q^G$ pour tout $Q \leq G$ (ceci démontre $\kappa_G \circ \zeta_G = \text{Id}$ par la propriété universelle du produit). Or, on a

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \kappa_G \circ \zeta_G &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^G \circ \zeta_G \\ &= F(\text{Res}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q}) \circ P_Q^G \\ &= P_Q^G, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. □

Lemme 5.3.7. *L'application $\zeta_G \circ \kappa_G : \psi(F)(G) \rightarrow \underline{F}(G) \rightarrow \psi(F)(G)$ est l'application identité.*

Démonstration. On va montrer $p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G \circ \kappa_G = p_{(H,a)}^G$ pour tout $(H, a) \in \mathcal{E}^G$ (ce qui démontre $\zeta_G \circ \kappa_G = \text{Id}$ par la propriété universelle du produit). En particulier, on montre cela dans le cas où a est un bi-ensemble transitif (le cas général découle de la \mathbb{C} -linéarité des applications). On suppose alors $a = \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Defres}_{A/B}^G$, et dans ce cas on a

$$\begin{aligned} p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G \circ \kappa_G &= F\left(\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B}\right) \circ P_B^G \circ \kappa_G \\ &= F\left(\text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B}\right) \circ p_{(N_G(B)/B, \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G)}^G. \end{aligned}$$

On pose $u = \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B}$. On a que $u : (N_G(B)/B, \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G) \rightarrow (H, a)$ est un morphisme de \mathcal{E}^G puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & N_G(B)/B \\ & \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G \nearrow & \downarrow u \\ G & & H \\ & \searrow a & \end{array}$$

commute. En effet, on a

$$\begin{aligned} u \times \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G &= \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Res}_{A/B}^{N_G(B)/B} \times \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G \\ &= \text{Indinf}_{D/C}^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Def}_{A/B}^A \times \text{Res}_A^G \\ &= a \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 1.1.13. Donc, par la définition de $\psi(F)(G)$, on a

$$\begin{aligned} p_{(H,a)}^G \circ \zeta_G \circ \kappa_G &= F(u) \circ p_{(N_G(B)/B, \text{Defres}_{N_G(B)/B}^G)}^G \\ &= p_{(H,a)}^G, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. □

5.3.2 $\psi(F)$ sur les morphismes

L'enjeu est ici de décrire explicitement le foncteur $\psi(F)$ (qui est un foncteur de bi-ensembles) sur les morphismes. Dans le paragraphe précédent, on a pu simplifier l'écriture de $\psi(F)$ sur les objets. On veut utiliser cette nouvelle écriture pour décrire explicitement $\psi(F)$ sur les morphismes. Soit $u : H \rightarrow G$ un morphisme de $\mathbb{C}\text{GrB}$, on obtient alors $\psi(F)(u) : \psi(F)(H) \rightarrow \psi(F)(G)$. Considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \psi(F)(H) & \xrightarrow{\psi(F)(u)} & \psi(F)(G) \\ \zeta_H \uparrow \cong & & \cong \downarrow \kappa_G \\ \underline{F}(H) & \xrightarrow{\underline{F}(u)} & \underline{F}(G) \end{array}$$

on définit $\underline{F}(u) = \kappa_G \circ \psi(F)(u) \circ \zeta_H$. Pour décrire $\underline{F}(u)$ explicitement, on décrit $P_Q^G \circ \underline{F}(u)$ pour tout $Q \leq G$. Or, on a

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \underline{F}(u) &= P_Q^G \circ \kappa_G \circ \psi(F)(u) \circ \zeta_H \\ &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G)}^G \circ \psi(F)(u) \circ \zeta_H \\ &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^{G \circ u})}^H \circ \zeta_H. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin, il faut décrire $\text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u$ explicitement. On va décrire cela dans les cas où u est un morphisme élémentaire.

Restriction. On suppose dans ce cas $u = \text{Res}_G^H$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \times u &= \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \times \text{Res}_G^H \\ &= \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^H. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \underline{F}(u) &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^H)}^H \circ \zeta_H \\ &= F \left(\text{Res}_{N_G(Q)/Q}^{N_H(Q)/Q} \right) \circ P_Q^H. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \underline{F}(\text{Res}_G^H) : \underline{F}(H) &\longrightarrow \underline{F}(G) \\ (m_Q)_Q &\longmapsto \left(F \left(\text{Res}_{N_G(Q)/Q}^{N_H(Q)/Q} \right) (m_Q) \right)_Q. \end{aligned}$$

Déflation. On suppose dans ce cas $u = \text{Def}_G^H$ pour $G = H/N$ (avec N un sous-groupe normal de H). On a alors, pour $N \leq Q' \leq H$ tel que $Q'/N = Q$,

$$\begin{aligned} \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u &= \text{Defres}_{N_{H/N}(Q'/N)/(Q'/N)}^{H/N} \times \text{Def}_{H/N}^H \\ &= \text{Def}_{N_{H/N}(Q'/N)/(Q'/N)}^{N_H(Q')/N} \times \text{Res}_{N_H(Q')/N}^{H/N} \times \text{Def}_{H/N}^H \\ &= \text{Def}_{N_{H/N}(Q'/N)/(Q'/N)}^{N_H(Q')/N} \times \text{Def}_{N_H(Q')/N}^{N_H(Q')} \times \text{Res}_{N_H(Q')}^H \\ &= \text{Def}_{N_H(Q')/Q'}^{N_H(Q')} \times \text{Res}_{N_H(Q')}^H \\ &= \text{Defres}_{N_H(Q')/Q'}^H \end{aligned}$$

(où on a utilisé le lemme 1.1.13). Donc, on obtient

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \underline{F}(u) p_{(N_G(Q)/Q, \text{Def}_{N_H(Q')/Q'}^{N_H(Q')})}^H \circ \zeta_H &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Def}_{N_H(Q')/Q'}^{N_H(Q')} \times \text{Res}_{N_H(Q')}^H)}^H \circ \zeta_H \\ &= F \left(\text{Res}_{N_H(Q')/Q'}^{N_H(Q')/Q'} \right) \circ P_{Q'}^H \\ &= P_{Q'}^H, \end{aligned}$$

on remarque que cela fonctionne car on a bien $N_H(Q')/Q' \cong N_G(Q)/Q$.

Isomorphisme. On suppose dans ce cas $u = \text{Iso}(f)$ pour $f : H \rightarrow G$ un isomorphisme. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u &= \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \times \text{Iso}(f) \\ &= \text{Def}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} \times \text{Iso}(f') \times \text{Res}_{f^{-1}(N_G(Q))}^H \\ &= \text{Def}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} \times \text{Iso}(f') \times \text{Res}_{N_H(Q')}^H \\ &= \text{Iso}(f'') \times \text{Defres}_{N_H(Q')/Q'}^H \end{aligned}$$

pour $Q' = f^{-1}(Q)$ et $f'' : N_H(Q')/Q' \rightarrow N_G(Q)/Q$ l'isomorphisme induit par f .

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \underline{F}(u) &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Iso}(f'') \times \text{Defres}_{N_H(Q')/Q'}^H)}^H \circ \zeta_H \\ &= F \left(\text{Iso}(f'') \times \text{Res}_{N_H(Q')/Q'}^{N_H(Q')/Q'} \right) \circ P_{Q'}^G \\ &= F(\text{Iso}(f'')) \circ P_{Q'}^G \\ &= F(\text{Iso}(f'')) \circ P_{f^{-1}(Q)}^G. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \underline{F}(\text{Iso}(f)) : \quad \underline{F}(H) &\longrightarrow \underline{F}(G) \\ (m_R)_R &\longmapsto \left(F(\text{Iso}(f''))(m_{f^{-1}(Q)}) \right)_Q. \end{aligned}$$

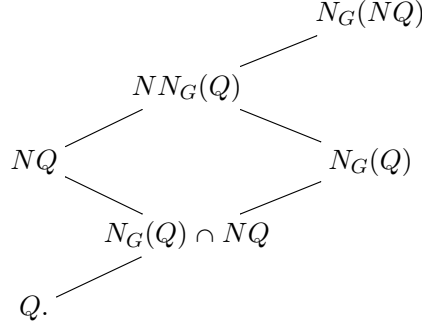
Inflation. On suppose dans ce cas $u = \text{Inf}_H^G$ pour $H = G/N$ pour N un sous-groupe normal de G . On a alors (en utilisant les lemmes 1.1.12 et 1.1.10)

$$\begin{aligned} \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u &= \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \times \text{Inf}_{G/N}^G \\ &= \text{Def}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} \times \text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap N}^{N_G(Q)} \times \text{Iso}(d) \times \text{Res}_{NN_G(Q)/N}^{G/N} \\ &= \text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap NQ}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Def}_{N_G(Q)/Q(N_G(Q) \cap N)}^{N_G(Q)/N_G(Q) \cap N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Res}_{NN_G(Q)/N}^{G/N} \\ &= \text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap NQ}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d') \times \text{Def}_{NN_G(Q)/NQ}^{NN_G(Q)/N} \times \text{Res}_{NN_G(Q)/N}^{G/N} \\ &= \text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap NQ}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d') \times \text{Defres}_{NN_G(Q)/NQ}^{G/N} \end{aligned}$$

où $d : NN_G(Q)/N \rightarrow N_G(Q)/N \cap N_G(Q)$ est l'isomorphisme canonique et d' est induit par d . Donc, on obtient

$$\begin{aligned} P_Q^G \circ \underline{F}(u) &= p_{(N_G(Q)/Q, \text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap NQ}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d') \times \text{Defres}_{NN_G(Q)/NQ}^{G/N})}^H \circ \zeta_H \\ &= F \left(\text{Inf}_{N_G(Q)/N_G(Q) \cap NQ}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d') \times \text{Res}_{NN_G(Q)/NQ}^{N_G(Q)/NQ} \right) \circ P_{NQ/N}^H. \end{aligned}$$

La situation peut être représentée à l'aide du diagramme



Induction. On suppose dans ce cas $u = \text{Ind}_H^G$. On a alors (par le lemme 1.1.9)

$$\begin{aligned}
 \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u &= \text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \times \text{Ind}_H^G \\
 &= \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} \text{Def}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} \times \text{Ind}_{N_G(Q) \cap^x H}^{N_G(Q)} \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{N_G(Q) \cap^x H}^H.
 \end{aligned}$$

On utilise ensuite

$$\text{Def}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} \times \text{Ind}_{N_G(Q) \cap^x H}^{N_G(Q)} = \text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x) \times \text{Def}_{N_G(Q) \cap^x H/Q \cap N_G(Q) \cap^x H}^{N_G(Q) \cap^x H}$$

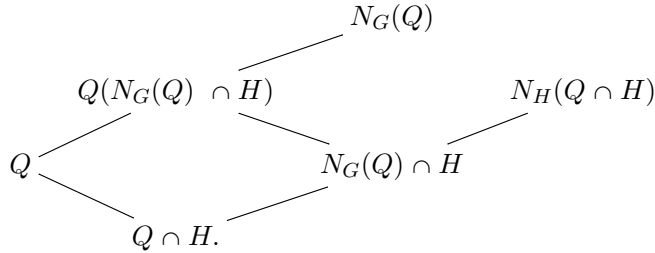
(voir lemme 1.1.11) et on obtient

$$\begin{aligned}
 &\text{Defres}_{N_G(Q)/Q}^G \circ u \\
 &= \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} \text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Def}_{N_G(Q^x) \cap H/Q^x \cap H}^{N_G(Q^x) \cap H} \times \text{Res}_{N_G(Q^x) \cap H}^H \\
 &= \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} \text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{N_G(Q^x) \cap H/Q^x \cap H}^H
 \end{aligned}$$

où $d_x : N_G(Q) \cap^x H/Q \cap N_G(Q) \cap^x H \rightarrow (N_G(Q) \cap^x H)Q/Q$ est l'isomorphisme standard. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
 P_Q^G \circ \underline{F}(u) &= p^H_{(N_G(Q)/Q, \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} \text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{N_G(Q^x) \cap H/Q^x \cap H}^H)} \circ \zeta_H \\
 &= \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} p^H_{(N_G(Q)/Q, \text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Defres}_{N_G(Q^x) \cap H/Q^x \cap H}^H)} \circ \zeta_H \\
 &= \sum_{x \in [N_G(Q) \backslash G/H]} F \left(\text{Ind}_{(N_G(Q) \cap^x H)Q/Q}^{N_G(Q)/Q} \times \text{Iso}(d_x \circ c_x) \times \text{Res}_{N_G(Q^x) \cap H/Q^x \cap H}^{N_G(Q^x) \cap H} \right) \circ P_{Q^x \cap H}^H.
 \end{aligned}$$

La situation peut être représentée à l'aide du diagramme



Chapitre 6

Exemples d'adjoints

6.1 Foncteur adjoint du foncteur des modules projectifs

Soit p un nombre premier et soit k un corps de caractéristique p . On considère l'inclusion $\theta : \mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}} \rightarrow \mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$. Comme vu au paragraphe 4.0.7, θ induit

$$\theta^* : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}).$$

Dans la section 4.1, on a démontré que θ^* a un adjoint à gauche

$$\varphi_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}} : \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}).$$

On note $\varphi = \varphi_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$. Cette adjonction a été étudiée en détail dans la section 5.2. Ici, on va étudier $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ puisque

$$\mathbb{C}\text{Proj}_k \in \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect}).$$

Le foncteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ est décrit dans la section 1.4.2.

6.1.1 Surjection de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ vers $\mathbb{C}pp_k$

On va comparer $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ et $\mathbb{C}pp_k$ comme foncteurs sur $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$. Pour cela, on va utiliser la propriété universelle de l'adjonction (voir la remarque 4.1.13) et commencer par comparer $\mathbb{C}\text{Proj}_k$ et la restriction de $\mathbb{C}pp_k$ à $\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$. Pour faire cela, on va définir une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{C}\text{Proj}_k \Rightarrow \text{Res}_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(\mathbb{C}pp_k)$, cette dernière induira alors une transformation naturelle $\alpha' : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \Rightarrow \mathbb{C}pp_k$ sur $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$.

Soit G un groupe fini. Soit M un kG -module projectif. Alors M est facteur direct d'un module libre $(kG)^{\oplus n}$ (pour un entier n). Or $(kG)^{\oplus n}$ est un module de permutation et donc M est un module de p -permutation. On a alors une application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{Proj}_k(G) &\rightarrow \mathbb{C}pp_k(G) \\ [M] &\mapsto [M]. \end{aligned}$$

Remarquons que cette application est bien définie puisque $[.]$ représente les classes d'isomorphisme dans $\mathbb{C}\text{Proj}_k(G)$ et $\mathbb{C}pp_k(G)$ et les suites exactes dans $\mathbb{C}\text{Proj}_k(G)$ le sont aussi dans $\mathbb{C}pp_k(G)$. Comme les morphismes sont définis de la même manière pour les deux foncteurs, on obtient un morphisme de foncteurs

$$\alpha : \mathbb{C}\text{Proj}_k \Rightarrow \mathbb{C}pp_k$$

sur la catégorie $\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}$.

Par la propriété universelle de l'adjonction (voir la remarque 4.1.13), il existe une unique transformation naturelle

$$\alpha' : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \Rightarrow \mathbb{C}pp_k$$

sur la catégorie $\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\text{Proj}_k & \xrightarrow{\alpha} & \text{Res}_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(\mathbb{C}pp_k) \\ \eta_{\mathbb{C}\text{Proj}_k} \downarrow & \nearrow \theta^*(\alpha') & \\ \text{Res}_{\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)) & & \end{array} \quad (6.1)$$

commute dans $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}_{p\text{-lg}}\underline{\text{GrB}}, \mathbb{C}\text{-Vect})$. Dans la preuve du théorème 4.1.12, on trouve une description explicite de $\eta_{\mathbb{C}\text{Proj}_k}$ ainsi que la construction de α' à partir de α . Pour un groupe fini G , on obtient alors

$$\begin{aligned} \alpha'_G : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(G) &\longrightarrow \mathbb{C}pp_k(G) \\ [H, a, [M]] &\longmapsto \mathbb{C}pp_k(a)(\alpha_H([M])) \end{aligned}$$

lorsque $(H, a) \in \mathcal{E}_G$ et $[M]$ est la classe d'un kH -module projectif, i.e. $[M] \in \mathbb{C}\text{Proj}_k(H)$ (et où on a utilisé la notation 4.1.6). On obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha'_G([H, a, [M]]) &= \mathbb{C}pp_k(a)(\alpha_H([M])) \\ &= \mathbb{C}pp_k(a)([M]) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i \otimes_{kH} M] \end{aligned}$$

si $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i [U_i]$ pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et U_i des (G, H) -bi-ensembles.

Lemme 6.1.1. *La transformation naturelle $\alpha' : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ est surjective.*

Démonstration. Un morphisme de foncteurs est surjectif si et seulement si il est surjectif à chaque évaluation (1.2.10). Soit G un groupe fini, on va donc montrer que α'_G est surjectif. On note \mathcal{B} l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules de la forme $\text{Indinf}_{N_G(P)/P}^G(M(P))$ où $M(P)$ parcourt les classes d'isomorphisme de $kN_G(P)/P$ -modules projectifs indécomposables et P parcourt les p -sous-groupes de G à conjugaison près. Alors, on a que \mathcal{B} est une \mathbb{Z} -base de $\mathbb{C}pp_k(G)$ (voir le lemme 2.1.11). Or, si P est un p -sous-groupe de G , on a

$$\alpha'_G \left(\left[N_G(P)/P, \text{Indinf}_{N_G(P)/P}^G, [M(P)] \right] \right) = \left[\text{Indinf}_{N_G(P)/P}^G(M(P)) \right].$$

Donc la base \mathcal{B} de $\mathbb{C}pp_k(G)$ est dans l'image de α'_G , ce qui démontre le résultat (par \mathbb{C} -linéarité de α'_G). \square

6.1.2 Comparaison entre $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ et $\mathbb{C}pp_k$

Dans cette section, on note $S_{H,V}$ pour le foncteur $S_{H,V}^{\mathbb{C}\underline{\text{GrB}}}$ (pour simplifier les notations). Après avoir obtenu une surjection $\alpha' : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \rightarrow \mathbb{C}pp_k$, la question naturelle est de savoir si α' est un isomorphisme. Notons tout d'abord que puisque α' est une transformation naturelle surjective, tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$ sont aussi des facteurs de composition de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$.

Théorème 6.1.2. *La transformation naturelle α' n'est pas un isomorphisme de foncteurs. En particulier, α'_{A_4} n'est pas un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels lorsque k est de caractéristique 3.*

Dimensions de $\mathbb{C}pp_k$

Proposition 6.1.3. *Si $p = 3$, c.-à-d. k est de caractéristique 3, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}pp_k(A_4)) = 3$$

et $\mathbb{C}pp_k$ n'a pas de facteur de composition de la forme $S_{A_4, V}$ (pour aucun $\text{Out}(A_4)$ -module simple V).

Preuve de la proposition 6.1.3. Ce résultat est dû à M. Baumann ([Bau12]). On sait que $S_{1, \mathbb{C}}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}pp_k$ (puisque $\mathbb{C}pp_k(1) \cong \mathbb{C}$). Or,

$$\dim(S_{1, \mathbb{C}}(A_4)) = 3$$

puisque par la proposition 1.2.19, la dimension de $S_{1, \mathbb{C}}(A_4)$ est le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de A_4 . D'autre part, par le corollaire 2.1.12, on a

$$\dim(\mathbb{C}pp_k(A_4)) = l_3(C_3/C_3) + l_3(A_4/1) = 1 + 2 = 3$$

puisque k est de caractéristique 3. Alors, puisque $\dim(S_{1, \mathbb{C}}(A_4)) = \dim(\mathbb{C}pp_k(A_4))$, il ne peut pas y avoir de facteur de composition de la forme $S_{A_4, V}$ (pour aucun $\text{Out}(A_4)$ -module simple V). \square

Proposition 6.1.4. *Si $p = 3$, c.-à-d. k est de caractéristique 3, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}pp_k(S_4)) = 6$$

et $\mathbb{C}pp_k$ n'a pas de facteur de composition de la forme $S_{S_4, V}$ (pour aucun $\text{Out}(S_4)$ -module simple V).

Lemme 6.1.5. *On a*

$$S_{C_4, \mathbb{C}_{\xi}}(S_4) = 0.$$

où $\xi : C_4^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ est le caractère primitif, c.-à-d. $\xi : C_2 = \langle x \rangle \rightarrow \mathbb{C}^*$ est tel que $\xi(1) = 1$ et $\xi(x) = -1$.

Preuve du lemme 6.1.5. On va appliquer la proposition 1.2.20 pour calculer les évaluations $S_{C_4, \mathbb{C}_{\xi}}(S_4)$ et $S_{C_3, \mathbb{C}}(S_4)$.

Tout d'abord, on a $\Sigma_{C_4} = \{(C_4, 1)\}$ car il n'y a aucun autre sous-quotient de S_4 qui est isomorphe à C_4 . Alors, par la proposition, $S_{C_4, \mathbb{C}_{\xi}}(S_4) = 0$ si et seulement si l'action de

$$w = \sum_{g \in [N_{S_4}(C_4, 1)/C_4]} \text{conj}_g$$

sur \mathbb{C}_{ξ} est nulle. Or on a

$$\begin{aligned} w &= \sum_{g \in [N_{S_4}(C_4)/C_4]} \text{conj}_g \\ &= \sum_{g \in [D_8/C_4]} \text{conj}_g \\ &= \text{conj}_1 + \text{conj}_{(12)(34)}. \end{aligned}$$

Or $\text{Out}(C_4) \cong C_2 = \{\text{Id}, \text{conj}_{(12)(34)}\}$ et $\text{conj}_{(12)(34)}$ est d'ordre 2. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$w\lambda = (\text{conj}_1 + \text{conj}_{(12)(34)}) \cdot \lambda = 1 \cdot \lambda + (-1) \cdot \lambda = 0.$$

Ainsi, l'action de w est nulle, et donc $S_{C_4, \mathbb{C}_{\xi}}(S_4) = 0$. \square

Lemme 6.1.6. *On a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4)) = 1.$$

Preuve du lemme 6.1.6. On applique la proposition 1.2.20 pour calculer $S_{C_3, \mathbb{C}}(S_4)$. Dans ce cas, l'ensemble $\Sigma_{S_3}(S_4)$ ne contient que $(S_3, 1)$ à conjugaison près. On obtient alors

$$\begin{aligned} S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4) &\cong \mathrm{Tr}_1^{N_{S_4}(S_3, 1)/S_3}(\mathbb{C}) \\ &= \mathrm{Tr}_1^1(\mathbb{C}) \\ &= \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\dim_{\mathbb{C}}(S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4)) = 1$. \square

Preuve de la proposition 6.1.4. On va lister les facteurs de composition simples de $\mathbb{C}pp_k$ qui contribuent à $\mathbb{C}pp_k(S_4)$. Premièrement, si $S_{H, V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}pp_k$ tel que $S_{H, V}(S_4) \neq 0$, on a que H est isomorphe à un sous-quotient de S_4 . Selon la liste établie par M. Bauman dans [Bau12], les facteurs simples indexés par des groupes d'ordre plus petit ou égal à 12 sont connus. On sait donc que $S_{1, \mathbb{C}}$, S_{C_4, \mathbb{C}_ξ} (pour $\xi : \mathrm{Out}(C_4) \rightarrow \mathbb{C}$ un caractère primitif) et $S_{S_3, \mathbb{C}}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}pp_k$ qui contribuent à $\mathbb{C}pp_k(S_4)$. On sait également que $\mathbb{C}pp_k$ n'a aucun facteur de la forme $S_{A_4, V}$.

On va maintenant observer ce qu'il se passe en évaluation à S_4 . Par le corollaire 2.1.12, on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}pp_k(S_4)) &= l_3(S_4) + l_3(S_3/C_3) \\ &= 4 + 2 = 6, \end{aligned}$$

puisque les 3-sous-groupes de S_4 sont 1 et C_3 (à conjugaison près). Par la proposition 1.2.19, on a que $\dim_{\mathbb{C}}(S_{1, \mathbb{C}}(S_4)) = 5$. Par le lemme 6.1.5, on a $S_{C_4, \mathbb{C}_\xi}(S_4) = 0$. Par le lemme 6.1.6, on a $\dim_{\mathbb{C}}(S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4)) = 1$.

Cela nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}pp_k(S_4)) &= 6 \\ &= 5 + 0 + 1 \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(S_{1, \mathbb{C}}(S_4)) + \dim_{\mathbb{C}}(S_{C_4, \mathbb{C}_\xi}(S_4)) + \dim_{\mathbb{C}}(S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4)) \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{C}pp_k$ n'a pas de facteur de composition simple indexé par S_4 . \square

Dimensions de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$

Proposition 6.1.7. *Si $p = 3$, on a $\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(A_4)) = 4$ et $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ a un facteur de composition $S_{A_4, \mathbb{C}}$ avec multiplicité 1.*

Démonstration. On rappelle que pour tout groupe fini G , on a un isomorphisme

$$\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(G) \cong \widehat{\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k}(G) = \left(\bigoplus_{C \leq D \leq G} F(D/C) \right) / W_G$$

pour W_G un certain sous-espace (voir le théorème 5.2.2).

On va lister les facteurs simples de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ qui contribuent à $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(A_4)$. Premièrement, si $S_{H, V}$ est un facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ tel que $S_{H, V}(A_4) \neq 0$, on a que H est isomorphe à un sous-quotient de A_4 . On va donc considérer les évaluations de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ sur les

sous-quotients de A_4 à conjugaison près afin d'obtenir les facteurs de composition simples qui contribuent à $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(A_4)$. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(1) &\cong \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(1) \\ &= \mathbb{C}\text{Proj}_k(1) \\ &\cong \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Le seul facteur simple qui peut contribuer à $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(1)$ est $S_{1,\mathbb{C}}$. Comme $S_{1,\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C}$, par conséquent, $S_{1,\mathbb{C}}$ est un facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ avec multiplicité 1.

On a ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_2) &\cong \left(\bigoplus_{C \trianglelefteq D \leq C_2} \mathbb{C}\text{Proj}_k(D/C) \right) / W_{C_2} \\ &= \left(\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2/C_2) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2/1) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(1/1) \right) / W_{C_2} \\ &= \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2) \\ &= \mathbb{C}R_k(C_2)\end{aligned}$$

où la troisième égalité découle du fait que $\text{Inf}_{C_2/C_2}^{C_2} \in \mathbb{C}_{\text{p-lg}}\text{GrB}$ (puisque $\text{char}(k) = 3$) identifie $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2/C_2)$ avec une partie de $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2)$, $\text{Ind}_{1/1}^{C_2/1}$ identifie $\mathbb{C}\text{Proj}_k(1/1)$ à une partie de $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2/1)$ et il n'y a pas d'autres identifications via W_{C_2} . Et donc

$$\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_2)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}R_k(C_2)) = 2$$

puisque $\text{char}(k) = 3$.

Par ailleurs, on a $\dim_{\mathbb{C}}(S_{1,\mathbb{C}}(C_2)) = 2$ (par la proposition 1.2.19). Donc, comme

$$\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_2)) = \dim_{\mathbb{C}}(S_{1,\mathbb{C}}(C_2)),$$

il n'y a pas de facteur de composition simple de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ indexé par C_2 .

Soit V_4 le groupe de Klein. On a alors, en utilisant $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(V_4)$, $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(V_4) \cong \mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4)$ qui est de dimension $l_3(V_4) = 4$. Or, la dimension de $S_{1,\mathbb{C}}(V_4)$ est 4. Donc il n'y a pas de facteur de composition indexé par V_4 .

On a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_3) &\cong \left(\bigoplus_{C \trianglelefteq D \leq C_3} \mathbb{C}\text{Proj}_k(D/C) \right) / W_{C_3} \\ &= \left(\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/1) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(1/1) \right) / W_{C_3} \\ &= \mathbb{C}\text{Proj}_k(1) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3)\end{aligned}$$

où la troisième égalité découle du fait que $\text{Inf}_{C_3/C_3}^{C_3} \notin \mathbb{C}_{\text{p-lg}}\text{GrB}$ (puisque $|C_3| = 3$ est divisible par $\text{char}(k)$) n'identifie pas $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3)$ et $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3)$, mais $\text{Ind}_{1/1}^{C_3/1}$ identifie $\mathbb{C}\text{Proj}_k(1/1)$ avec une partie de $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/1)$. Ainsi $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_3)$ est de dimension 2, puisque

$$\dim(\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3)) = 1.$$

Comme $\dim(S_{1,\mathbb{C}}(C_3)) = 2$, il n'y a pas de facteur de composition simple indexé par C_3 .

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(A_4) &\cong \left(\bigoplus_{C \leq D \leq A_4} \mathbb{C}\text{Proj}_k(D/C) \right) / W_{A_4} \\ &= (\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(1) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4/A_4) \\ &\quad \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4/V_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2/C_2) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(1/1) \\ &\quad \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4/V_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4/C_2)) / W_{A_4} \\ &= \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4/A_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3) \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle du fait que l'induction identifie les facteurs

$$\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4), \mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4), \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_2), \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3) \text{ et } \mathbb{C}\text{Proj}_k(1)$$

et l'inflation (depuis des 2-groupes) identifie les autres termes. Par conséquent, $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(A_4)$ est de dimension $2 + 1 + 1 = 4$. Or, $\dim(S_{1,\mathbb{C}}(A_4))$ vaut 3, donc il y a un facteur simple indexé par A_4 .

On suppose que ce facteur est $S_{A_4,V}$ pour V un $\text{Out}(A_4)$ -module simple. Alors V est de dimension 1 et ce facteur apparaît avec multiplicité 1. On va montrer que V est isomorphe au module trivial. Pour cela, on doit comprendre exactement comment $S_{1,\mathbb{C}}$ contribue à $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \cong \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}$ pour l'évaluation en A_4 afin de comprendre "ce qui manque". On commence par appliquer l'adjonction impliquant $L_{1,\mathbb{C}}$ (voir la section 1.2.3) pour obtenir un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Func-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})(L_{1,\mathbb{C}}, \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(1)). \quad (6.2)$$

On considère l'application \mathbb{C} -linéaire

$$\begin{aligned} I : \mathbb{C} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(1) \\ 1 &\longmapsto [1, [k]] \end{aligned}$$

(où on utilise la notation de la section 5.2.1). Alors par l'isomorphisme (6.2), on a une transformation naturelle $\iota : L_{1,\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}$, donnée par, pour tout groupe fini G ,

$$\begin{aligned} \iota_G : L_{1,\mathbb{C}}(G) &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(G) \\ [U] &\longmapsto \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([U])([1, [k]]) \end{aligned}$$

où U est un $(G, 1)$ -bi-ensemble puisque

$$L_{1,\mathbb{C}}(G) = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(1, G) \otimes_{\text{End}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(1)} \mathbb{C} = \mathbb{C}B(G, 1).$$

En évaluant en A_4 , on obtient

$$\iota_{A_4} : L_{1,\mathbb{C}}(A_4) = \mathbb{C}B(A_4, 1) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(A_4)$$

et on va montrer que cette application est surjective. On commence par donner une base de $\mathbb{C}B(A_4, 1)$. Pour cela il faut lister tous les $(A_4, 1)$ -bi-ensembles transitifs (à isomorphisme près). On obtient la liste

$$\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}, \text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}, \text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}, \text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}, \text{Ind}_1^{A_4}.$$

Regardons alors l'image de cette liste par ι_{A_4} . On utilise pour ça la section 5.2.2. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}\iota_{A_4}([\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}]) &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}])([1, [k]]) \\ &= [A_4/A_4, [k]] \\ &= [A_4, [\text{Ind}_1^{A_4}(k)]]\end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}]) &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}])([1, [k]]) \\ &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Ind}_{V_4}^{A_4}])([V_4/V_4, [k]]) \\ &= [V_4/V_4, [k]] \\ &= [A_4, [\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}(k)]]\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que $\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}$ identifie $\mathbb{C}\text{Proj}_k(V_4/V_4)$ et $\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4)$ dans $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(A_4)$. De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}]) &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}])([1, [k]]) \\ &= [C_2/C_2, [k]] \\ &= [A_4, [\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}(k)]]\end{aligned}$$

Puisque C_3 est un 3-groupe, on obtient

$$\begin{aligned}\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}]) &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}])([1, [k]]) \\ &= [C_3/C_3, [k]].\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}\iota_{A_4}([\text{Ind}_1^{A_4}]) &= \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}([\text{Ind}_1^{A_4}])([1, [k]]) \\ &= [1, [k]] \\ &= [A_4, [\text{Ind}_1^{A_4}(k)]]\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que $\text{Ind}_1^{A_4}$ identifie $\mathbb{C}\text{Proj}_k(1)$ et $\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4)$ dans $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(A_4)$. Rappelons que

$$\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}_k}(A_4) = \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4/A_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3).$$

Le facteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3)$ est alors atteint par ι_{A_4} puisqu'il est de dimension 1 et

$$\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}]) \in \mathbb{C}\text{Proj}_k(C_3/C_3).$$

Idem, le facteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4/A_4)$ est atteint. Le facteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4)$ a pour base

$$[\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)], [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s)]$$

(voir le lemme ci-dessous 6.1.8). Or,

$$\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}]) = [A_4, [\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}(k)]] = [A_4, [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)]].$$

et

$$\begin{aligned}
\iota_{A_4}([\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}]) &= [A_4, [\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}(k)]] \\
&= [A_4, [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{V_4}(k))]] \\
&= [A_4, [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(\text{Ind}_{C_2}^{V_4}(k))]] \\
&= [A_4, [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k \oplus M_s)]] \\
&= [A_4, [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)] + [\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s)]]
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité découle du fait qu'on peut choisir $C_2 = \langle (13)(24) \rangle$. Donc le facteur $\mathbb{C}\text{Proj}_k(A_4)$ est atteint et ainsi ι_{A_4} est bien surjective.

On cherche à déterminer l'action de $\text{Out}(A_4)$ sur V . Cette action se fait via l'identification entre $\text{Out}(A_4)$ et $\text{End}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(A_4)/I$ où I est l'idéal engendré par les (A_4, A_4) -bi-modules qui se factorisent par des sous-groupes propres de A_4 . Soit U un (A_4, A_4) -bi-ensemble, alors U agit sur $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4)$ via $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k([U])$. Or, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
L_{1,\mathbb{C}}(A_4) & \xrightarrow{\iota_{A_4}} & \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4) \longrightarrow 0 \\
\downarrow L_{1,\mathbb{C}}([U]) & & \downarrow \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k([U]) \\
L_{1,\mathbb{C}}(A_4) & \xrightarrow{\iota_{A_4}} & \widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4) \longrightarrow 0
\end{array}$$

commute puisque ι est une transformation naturelle et ses lignes sont exactes puisque ι_{A_4} est surjective. Puisqu'on cherche à savoir comment $\text{Out}(A_4)$ agit sur $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k([U])$ et puisque ι_{A_4} est surjective, on va étudier l'action de ι_{A_4} sur $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$. Or, $\text{Out}(A_4)$ correspond à $\text{End}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(A_4)/I$ qui est engendré par $[\text{Id}_{A_4}]$ et $[\text{Iso}(c_{(12)})]$ où $c_{(12)} : A_4 \rightarrow A_4$ est l'isomorphisme de conjugaison par (12). Clairement, $[\text{Id}_{A_4}]$ agit trivialement sur $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$, observons donc comment $[\text{Iso}(c_{(12)})]$ agit sur $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$. Rappelons que

$$[\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}], [\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}], [\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}], [\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}], [\text{Ind}_1^{A_4}]$$

est une \mathbb{C} -base de $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$. On a alors

$$\begin{aligned}
L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}] \right) &= [\text{Iso}(c_{(12)}) \times \text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}] \\
&= [\text{Inf}_{(12)A_4/(12)A_4}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)})] \\
&= [\text{Inf}_{A_4/A_4}^{A_4}]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}] \right) &= [\text{Iso}(c_{(12)}) \times \text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}] \\
&= [\text{Inf}_{(12)V_4/(12)V_4}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)})] \\
&= [\text{Indinf}_{V_4/V_4}^{A_4}].
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}] \right) &= [\text{Iso}(c_{(12)}) \times \text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}] \\
&= [\text{Inf}_{(12)C_3/(12)C_3}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)})].
\end{aligned}$$

En fonction du choix du C_3 , on a ${}^{(12)}C_3 = C_3$, mais par exemple si $C_3 = \langle (143) \rangle$, alors ${}^{(12)}C_3 = \langle (243) \rangle$. Heureusement, on a $\langle (243) \rangle = {}^{(12)(34)}C_3$ et $(12)(34) \in A_4$. Donc, puisque la décomposition $\text{Inf}_{(12)C_3/(12)C_3}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)})$ est unique à conjugaison (par A_4) près, on a

$$\begin{aligned} L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Indinf}_{C_3/C_3}^{A_4}] \right) &= \left[\text{Inf}_{(12)C_3/(12)C_3}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)}) \right] \\ &= \left[\text{Inf}_{C_3/C_3}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)}) \right]. \end{aligned}$$

Via le même argument, on a

$$L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Indinf}_{C_2/C_2}^{A_4}] \right) = \left[\text{Inf}_{C_2/C_2}^{A_4} \times \text{Iso}(c_{(12)}) \right].$$

Finalement, on a

$$L_{1,\mathbb{C}}([\text{Iso}(c_{(12)})]) \left([\text{Ind}_1^{A_4}] \right) = \left[\text{Ind}_1^{A_4} \right].$$

Donc $[\text{Iso}(c_{(12)})]$ agit trivialement sur $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$. Par conséquent $\text{Out}(A_4)$ agit trivialement sur $L_{1,\mathbb{C}}(A_4)$ et donc sur $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4)$. Puisque V est un facteur de composition de $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4)$, on n'a pas d'autre choix que d'avoir V isomorphe au module trivial \mathbb{C} . Donc $S_{A_4,\mathbb{C}}$ est un facteur de composition de $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k$. \square

Lemme 6.1.8. *Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k(A_4)$ est de dimension 2 engendré par $[\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)]$ et $[\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s)]$ où M_s est un kV_4 -module de dimension 1, avec action*

$$\begin{aligned} (12)(34) \cdot 1 &= -1 \\ (14)(32) \cdot 1 &= -1 \\ (13)(24) \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Comme k est de caractéristique 3 et V_4 est un 2-groupe, les kV_4 -modules k et M_s sont projectifs. Donc $\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)$ et $\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s)$ sont des kA_4 -modules projectifs (puisque l'induction d'un module projectif est projectif). On va démontrer que les restrictions des modules $\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k)$ et $\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s)$ à C_3 sont des kC_3 -modules indécomposables. Cela démontrera que ce sont des kA_4 -modules indécomposables (car si ils étaient décomposables pour A_4 ils le seraient aussi pour C_3). On a alors par la formule de Mackey (lemme 1.1.9)

$$\begin{aligned} \text{Res}_{C_3}^{A_4} \left(\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(k) \right) &\cong \sum_{x \in [C_3 \backslash A_4 / V_4]} \left(\text{Ind}_{C_3 \cap xV_4}^{C_3} \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{C_3 \cap V_4}^{V_4} \right) (k) \\ &= \left(\text{Ind}_1^{C_3} \times \text{Iso}(c_1) \times \text{Res}_1^{V_4} \right) (k) \\ &= \text{Ind}_1^{C_3}(k) \end{aligned}$$

qui n'est autre que la représentation régulière pour kC_3 .

Puisque C_3 est un 3-groupe et que k est de caractéristique 3, kC_3 est un kC_3 -module projectif indécomposable (voir [Ben98, §3.1.4, p.91]). Par le même argument $\text{Res}_{C_3}^{A_4} \left(\text{Ind}_{V_4}^{A_4}(M_s) \right)$ est isomorphe à la représentation régulière et donc indécomposable. \square

Proposition 6.1.9. *Si $p = 3$, on a $\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k)(S_4)) = 8$ et $\varphi(\widehat{\mathbb{C}\text{Proj}}_k)$ a un facteur de composition $S_{S_4,\mathbb{C}}$ avec multiplicité 1.*

Lemme 6.1.10. *On a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_{A_4,\mathbb{C}}(S_4)) = 1.$$

Preuve du lemme 6.1.10. On applique la proposition 1.2.20 pour calculer $S_{A_4, \mathbb{C}}(S_4)$. Dans ce cas, on a $\Sigma_{A_4}(S_4)$ ne contient que $(A_4, 1)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} S_{A_4, \mathbb{C}}(S_4) &\cong \mathrm{Tr}_1^{N_{S_4}(A_4, 1)/A_4}(\mathbb{C}) \\ &= \mathrm{Tr}_1^{S_4/A_4}(\mathbb{C}) \\ &= \mathbb{C} \end{aligned}$$

car $\mathrm{Tr}_1^{S_4/A_4}$ n'est autre que la multiplication par 2. Par conséquent, on obtient

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_{S_3, \mathbb{C}}(S_4)) = 1.$$

□

Preuve de la proposition 6.1.9. On rappelle que pour tout groupe fini G , on a un isomorphisme

$$\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(G) \cong \widehat{\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k}(G) = \left(\bigoplus_{C \trianglelefteq D \leq G} F(D/C) \right) / W_G$$

pour W_G un certain sous-espace (voir le théorème 5.2.2).

On va lister les facteurs simples de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ qui contribuent à $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(S_4)$. Premièrement, si $S_{H, V}$ est un facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ tel que $S_{H, V}(S_4) \neq 0$, on a que H est isomorphe à un sous-quotient de S_4 . On va donc considérer les évaluations de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ sur les sous-quotients de S_4 à conjugaison près afin d'obtenir les facteurs de composition simples qui contribuent à $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(S_4)$. On va utiliser la preuve de la proposition 6.1.7 pour les calculs sur les sous-quotients de S_4 qui sont isomorphes à des sous-quotients de A_4 .

Premièrement, on a $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(1) \cong \mathbb{C}$ et $S_{1, \mathbb{C}}$ est un facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ avec multiplicité 1.

On a ensuite

$$\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(C_2)) = 2 = \dim_{\mathbb{C}}(S_{1, \mathbb{C}}(C_2))$$

et donc il n'y a pas de facteur de composition simple de $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$ indexé par C_2 .

On a $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(C_4) \cong \widehat{\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k}(C_4) \cong \mathbb{C}\mathrm{Proj}_k(C_4)$ qui a pour dimension $l_3(C_4) = 4$ (par le théorème 1.4.8). Or, on a $\dim_{\mathbb{C}}(S_{1, \mathbb{C}}(C_4)) = 3$. Donc il y a un facteur $S_{C_4, V}$ avec V un $\mathbb{C}\mathrm{Out}(C_4)$ -module simple de dimension 1 et qui a multiplicité 1 qui apparaît dans $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)$. Puisqu'on a une surjection $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k) \rightarrow \mathbb{C}pp_k$ (voir lemme 6.1.1), le facteur simple doit être le même que pour $\mathbb{C}pp_k$, c.-à-d. S_{C_4, C_ξ} pour $\xi : C_4^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ le caractère primitif. Le fait que S_{C_4, C_ξ} est un facteur de composition de $\mathbb{C}pp_k$ est démontré dans [Bau12], mais il s'agit également du théorème 2.2.22.

Soit V_4 le groupe de Klein engendré par (12)(34) et (13)(24). On a alors, en utilisant $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k}(V_4)$, $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(V_4) \cong \mathbb{C}\mathrm{Proj}_k(V_4)$ qui est de dimension $l_3(V_4) = 4$. Or, la dimension de $S_{1, \mathbb{C}}(V_4)$ est égale à 4. Donc il n'y a pas de facteur de composition indexé par V_4 .

On a $\varphi(\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k)(D_8) \cong \widehat{\mathbb{C}\mathrm{Proj}_k}(D_8) \cong \mathbb{C}\mathrm{Proj}_k(D_8)$ qui est de dimension $l_3(D_8) = 5$. Or, on a que $S_{1, \mathbb{C}}(D_8)$ est de dimension 5, donc $S_{C_4, C_\xi}(D_8) = 0$ et il n'y a pas de facteur de composition simple indexé par D_8 .

On a que $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(C_3)$ est de dimension 2 et comme $\dim(S_{1,\mathbb{C}}(C_3)) = 2$, il n'y a pas de facteur de composition simple indexé par C_3 .

Par la proposition 6.1.7, $\dim_{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(A_4)) = 4$ et $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ a un facteur de composition $S_{A_4,\mathbb{C}}$ avec multiplicité 1.

On a $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(S_3) \cong \mathbb{C}\text{Proj}_k(S_3) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(S_3/C_3)$. En effet, en faisant le même raisonnement que ci-dessus, les facteurs pour $D/1$ sont identifiés avec celui de S_3 via l'induction et le facteur pour le quotient $S_3/S_3 \cong (S_3/C_3)/(S_3/C_3)$ est identifié via l'inflation avec une partie du facteur pour S_3/C_3 (puisque $|S_3/C_3| = 2$). Donc, on a $\dim(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(S_3)) = 2 + 2 = 4$. Or, on a $\dim(S_{1,\mathbb{C}}(S_3)) = 3$, donc il y a un facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ de la forme $S_{S_3,V}$ pour V un $\mathbb{C}\text{Out}(S_3)$ -module simple de dimension 1 avec multiplicité 1. Si on compare avec $\mathbb{C}pp_k$, en utilisant la surjection $\alpha' : \varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k) \rightarrow \mathbb{C}pp_k$, la seule possibilité est d'avoir le même que celui de $\mathbb{C}pp_k$, c.-à-d. $S_{S_3,\mathbb{C}}$.

Finalement, on a

$$\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(S_4) = \mathbb{C}\text{Proj}_k(S_4) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(S_3/C_3) \oplus \mathbb{C}\text{Proj}_k(S_4/A_4)$$

(par le même procédé que ci-dessus). Donc $\dim(\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)(S_4)) = 8$. Par les lemmes 6.1.5 et 6.1.6, on a

$$\begin{aligned} \dim(S_{1,\mathbb{C}}(S_4)) &= 5 \\ \dim(S_{S_3,\mathbb{C}}(S_4)) &= 1 \\ \dim(S_{C_4,\mathbb{C}_\xi}(S_4)) &= 0 \\ \dim(S_{A_4,\mathbb{C}}(S_4)) &= 1. \end{aligned}$$

Il y a donc au moins un facteur de composition simple de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ indexé par S_4 . Il s'agit d'un facteur $S_{S_4,V}$ pour V un $\mathbb{C}\text{Out}(S_4)$ -module simple de dimension 1 qui apparaît avec multiplicité 1. Or, on a $\text{Out}(S_4) = 1$ (puisque S_4 est complet - voir [Rot94, Theorem 7.5, p.158]), donc il n'y a qu'un seul $\text{Out}(S_4)$ -module simple : le module trivial. Ainsi $S_{S_4,\mathbb{C}}$ est facteur de composition de $\varphi(\mathbb{C}\text{Proj}_k)$ avec multiplicité 1. \square

6.2 Foncteur adjoint du foncteur des modules libres

6.2.1 Définition du foncteur des modules libres

Soit k un corps quelconque.

Définition 6.2.1. Soit G un groupe fini, on note $\text{Free}_k(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des kG -modules libres de dimension finie. C.-à-d. on a que $\text{Free}_k(G)$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble $\{[V] \mid V \text{ } kG\text{-module libre de génération finie}\}$ (l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG -modules libres) quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[U] - [V] - [W]$ où $U \cong V \oplus W$.

Notation 6.2.2. Soit G un groupe fini. Soit A un anneau commutatif unitaire. Comme d'ordinaire, on note $A\text{Free}_k(G) := A \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Free}_k(G)$.

Lemme 6.2.3. Soient G et H deux groupes finis et soit U un (H, G) -bi-ensemble fini. On considère $M \mapsto kU \otimes_{kG} M$ pour M un kG -module libre. Si U est libre à gauche, alors l'application ci-dessus induit une application $\text{Free}_k(U) : \text{Free}_k(G) \rightarrow \text{Free}_k(H)$.

Remarque 6.2.4. Soient G, H et K trois groupes finis.

L'application définie ci-dessus $\text{Free}_k(U) : \text{Free}_k(G) \rightarrow R_k(H)$ vérifie

$$\begin{aligned} U_1 \cong U_2 &\Rightarrow \text{Free}_k(U_1) = \text{Free}_k(U_2) \\ \text{Free}_k(U_1 \sqcup U_2) &= \text{Free}_k(U_1) + \text{Free}_k(U_2) \\ \text{Free}_k(V) \circ \text{Free}_k(U) &= \text{Free}_k(V \times_H U) \end{aligned}$$

pour tout U, U_1 et U_2 des (H, G) -bi-ensembles libres à gauche et tout V un (K, H) -bi-ensemble libre à gauche. Ceci découle simplement du fait que $\text{Free}_k(U)$ est la restriction de $\text{Proj}_k(U)$ (voir la remarque 1.4.7).

Démonstration. Il suffit de démontrer que pour M un kG -module libre, $kU \otimes_{kG} M$ est un kH -module libre. En effet, $kU \otimes_{kG} (V \oplus W) \cong (kU \otimes_{kG} V) \oplus (kU \otimes_{kG} W)$ (pour tous kG -modules V et W). Par conséquent, on aura que $\text{Free}_k(U)$ sera bien défini sur le groupe de Grothendieck. Soit M un kG -module libre. Il existe alors un entier n tel que $M \cong (kG)^{\oplus n}$. Donc on a un isomorphisme $kU \otimes_{kG} M \cong (kU \otimes_{kG} kG)^{\oplus n}$. Il suffit donc de démontrer que $kU \otimes_{kG} kG$ est un kH -module libre pour pouvoir conclure.

On va montrer le lemme dans le cas où U est transitif. Comme U est libre à gauche, on a $U \cong \text{Ind}_D^H \times \text{Iso}(f) \times \text{Def}_{B/A}^G$. Donc

$$kU \otimes_{kG} kG \cong k \text{Ind}_D^H \otimes_{kD} \text{Iso}(f) \otimes_{kB/A} \text{Def}_{B/A}^B \otimes_{kB} \text{Res}_B^G \otimes_{kG} kG.$$

Il suffit donc d'observer comment se comportent les opérations élémentaires sur kG .

◇ Supposons $H \leq G$, on a alors

$$\text{Res}_H^G \otimes_{kG} kG = kG \otimes_{kG} kG \cong \bigoplus_{g \in [H \backslash G]} kHg \cong \bigoplus_{g \in [H \backslash G]} kH$$

qui est un kH -module libre.

◇ Supposons $G \leq H$, on a alors

$$\text{Ind}_H^G \otimes_{kG} kG = kH \otimes_{kG} kG \cong kH$$

qui est un kH -module libre.

◇ Supposons $H = G/N$ pour $N \trianglelefteq G$. On a alors

$$\text{Def}_{G/N}^G \otimes_{kG} kG = kG/N \otimes_{kG} kG \cong kG/N$$

qui est un G/N -module libre.

◇ Supposons que $f : G \rightarrow H$ soit un homomorphisme de groupe. On a alors

$$\text{Iso}(f) \otimes_{kG} kG = kH \otimes_{kG} kG \cong kH$$

qui est un kH -module libre.

Ce qui termine la preuve. □

Remarque 6.2.5. Soit A un anneau commutatif unitaire. On a alors

$$A \text{Free}_k \in \text{Fun}_{A\text{-mod}}(A \text{lgGrB}, A\text{-mod}).$$

Si on considère plus spécifiquement le cas $\mathbb{C} \text{Free}_k$. On a, pour tout groupe fini G , que $\mathbb{C} \text{Free}_k(G)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension un engendré par la classe d'isomorphisme du module kG , i.e. $\mathbb{C} \text{Free}_k(G) \cong \mathbb{C}$. On note d'ailleurs 1_{kG} le générateur de $\mathbb{C} \text{Free}_k(G)$, c.-à-d. 1_{kG} est la classe d'isomorphisme du module kG .

Avec la notation ci-dessus, on a

- ◇ Si $H \leq G$, on a $\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Res}_H^G])(1_{kG}) = |G : H|1_{kH}$.
- ◇ Si $H \leq G$, on a $\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Ind}_H^G])(1_{kH}) = 1_{kG}$.
- ◇ Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupes, on a $\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Iso}(f)])(1_{kG}) = 1_{kH}$.
- ◇ Si $N \trianglelefteq G$, on a $\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Def}_{G/N}^G])(1_{kG}) = 1_{kG/N}$.

6.2.2 Propriétés du foncteur des modules libres

Lemme 6.2.6. *Dans la catégorie $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, le foncteur $\mathbb{C}\text{Free}_k$ est un foncteur simple.*

Démonstration. Supposons que $F \subseteq \mathbb{C}\text{Free}_k$ soit un sous-foncteur non-nul. Puisque $F \neq 0$, il existe un groupe fini G tel que $F(G) \neq 0$. Autrement dit, $F(G)$ est un sous-espace vectoriel non-nul de $\mathbb{C}\text{Free}_k(G)$ qui est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1, engendré par 1_{kG} . On a donc que $F(G)$ est de dimension un, engendré par 1_{kG} .

Soit $H \leq G$, alors $F([\text{Res}_H^G]) : F(G) \rightarrow F(H)$ est la restriction de $\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Res}_H^G])$. Donc

$$1_{kH} = \frac{1}{|G : H|} \mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Res}_H^G])(1_{kG}) = \frac{1}{|G : H|} F([\text{Res}_H^G])(1_{kG}).$$

Comme $1_{kG} \in F(G)$, on a $1_{kH} \in \text{im}(F([\text{Res}_H^G])) \subseteq F(H)$. Donc $F(H)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1, engendré par 1_{kH} . C.-à-d. $F(H) = \mathbb{C}\text{Free}_k(H)$. En particulier, $F(1)$ est non-nul engendré par 1_k et $F(1) = \mathbb{C}\text{Free}_k(1)$.

Soit maintenant J un groupe quelconque. On considère $F(\text{Ind}_1^J) : F(1) \rightarrow F(J)$. Alors

$$\begin{aligned} 1_{kJ} &= \mathbb{C}\text{Free}_k(\text{Ind}_1^J)(1_k) \\ &= F(\text{Ind}_1^J)(1_k) \in F(J). \end{aligned}$$

Donc $F(J)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel non nul de dimension un et donc $F(J) = \mathbb{C}\text{Free}_k(J)$. Par conséquent, on a $F = \mathbb{C}\text{Free}_k$. \square

Lemme 6.2.7. *Dans la catégorie $\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, les foncteurs $\mathbb{C}\text{Free}_k$ et $S_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}$ sont isomorphes.*

Démonstration. Comme $\mathbb{C}\text{Free}_k(1) \cong \mathbb{C} \neq 0$, $S_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\text{Free}_k$. Puisque ce dernier est simple, les deux foncteurs sont isomorphes.

On peut également définir un isomorphisme de manière directe. On considère $L_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}$. Pour tout groupe fini G , on a

$$L_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}(G) = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{lgGrB}}(1, G) \otimes_{\text{End}(1)} \mathbb{C}.$$

En observant la définition de $S_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}$, on a $J_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}} = 0$ et donc $L_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}} = S_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}}$. Or, par définition, $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{lgGrB}}(1, G) = \mathbb{C} \otimes_{B_{lg}}(G, 1)$ et comme il n'y a qu'un seul $(G, 1)$ -bi-ensemble transitif Ind_1^G , $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{lgGrB}}(1, G)$ est de dimension 1, engendré par la classe d'isomorphisme de Ind_1^G . On peut alors définir un isomorphisme $\zeta : L_{1,\mathbb{C}}^{\text{lgGrB}} \rightarrow \mathbb{C}\text{Free}_k$, défini par $\zeta_G([\text{Ind}_1^G]) = 1_{kG}$ pour tout groupe fini G . \square

6.2.3 Adjoint du foncteur des modules libres

On considère l'adjonction

$$\text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\theta^*} \\ \xrightarrow{\varphi} \end{array} \text{Fun}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}).$$

où $\varphi = \varphi_{\mathbb{C}, \text{lgGrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$. L'existence de cette adjonction est démontrée dans la section 4.1, et une description explicite en est donnée dans la section 5.1. On va alors déterminer le foncteur $\varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k)$.

Théorème 6.2.8. *Sur la catégorie $\mathbb{C}\text{GrB}$ le foncteur $\varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k)$ est isomorphe au foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$.*

Démonstration. On a que, pour tout groupe fini G ,

$$\varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k)(G) \cong \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(G) = \left(\bigoplus_{Q \leq G} \mathbb{C}\text{Free}_k(N_G(Q)/Q) \right)_G.$$

(voir le paragraphe 5.1). Or, on sait également que $\mathbb{C}B(G)$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel ayant pour base l'ensemble

$$\{[G/Q] \mid Q \leq G\}.$$

On peut alors définir un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels $\xi_G : \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(G) \rightarrow \mathbb{C}B(G)$ via

$$\xi_G([Q, m \cdot 1_{N_G(Q)/Q}]) = m \cdot [G/Q]$$

pour $Q \leq G$ et $m \in \mathbb{C}$. Il reste à vérifier que ceci définit une transformation naturelle de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}$ vers $\mathbb{C}B$. Il faut alors vérifier que pour U un (G, H) -bi-ensemble, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H) & \xrightarrow{\xi_H} & \mathbb{C}B(H) \\ \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([U]) \downarrow & & \downarrow \mathbb{C}B([U]) \\ \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(G) & \xrightarrow{\xi_G} & \mathbb{C}B(G) \end{array} \quad (6.3)$$

commute. On va le vérifier pour U un morphisme élémentaire.

Dans la section 5.1.2, on a donné une description explicite de l'évaluation de $\varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k)$ sur les morphismes élémentaires via l'isomorphisme avec $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}$. On va donc décrire $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([U])$ pour U un morphisme élémentaire.

- ◇ Soit $G \leq H$, on suppose $U = \text{Res}_G^H$. Soit $Q \leq H$, et soit $[Q, \mu]$ un élément de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H)$, c.-à-d. dans ce cas on a $\mu \in \mathbb{C}\text{Free}_k(N_H(Q)/Q)$ (voir la section 5.1.1 pour la notation). Puisque $\mathbb{C}\text{Free}_k(N_H(Q)/Q)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension un engendré par $1_{kN_H(Q)/Q}$, sans perte de généralité, on peut supposer $\mu = m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q}$ pour $m \in \mathbb{C}$. Par la section 5.1.2, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([\text{Res}_G^H])([Q, m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q}]) &= \sum_{x \in [G \setminus H / N_H(Q)]} [G \cap {}^x Q, \\ &\mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Ind}_{G \cap N_H({}^x Q)/G \cap {}^x Q}^{N_G(G \cap {}^x Q)/G \cap {}^x Q} \times \text{Iso}(c_x \circ d) \times \text{Res}_{(QG^x \cap N_H(Q))/Q}^{N_H(Q)/Q}]) (m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q})] \\ &= \sum_{x \in [G \setminus H / N_H(Q)]} [G \cap {}^x Q, |N_H(Q) : QG^x \cap N_H(Q)| \cdot m \cdot 1_{kN_G(G \cap {}^x Q)/G \cap {}^x Q}]. \end{aligned}$$

- ◇ Supposons $G = H/N$ pour $N \trianglelefteq H$, et $U = \text{Def}_{H/N}^H$. Soit $Q \leq H$, et soit $[Q, m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q}]$ un élément de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H)$ (pour $m \in \mathbb{C}$). On a alors

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([\text{Def}_{H/N}^H])([Q, m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q}]) &= [QN/N, \mathbb{C}\text{Free}_k([\text{Ind}_{NN_H(Q)/QN}^{N_H/N(QN/N)/(QN/N)} \times \text{Iso}(e) \times \text{Def}_{N_H(Q)/QN \cap N_H(Q)}^{N_H(Q)/Q}]) \\ &\hspace{15em} (m \cdot 1_{kN_H(Q)/Q})] \\ &= [QN/N, m \cdot 1_{kN_G(QN/N)/(QN/N)}]. \end{aligned}$$

- ◇ Soit $f : H \rightarrow G$ un isomorphisme de groupes, on suppose $U = \text{Iso}(f)$. Soit $Q \leq H$, et soit $[Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]$ un élément de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H)$ (pour $m \in \mathbb{C}$). On a alors

$$\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([\text{Iso}(f)])([Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]) = [f(Q), m \cdot 1_{N_G(f(Q))/f(Q)}].$$

- ◇ Soit $H = G/N$ pour $N \trianglelefteq G$, on suppose $U = \text{Inf}_{G/N}^G$. Soit $Q = Q'/N \leq H$ (pour $Q' \leq G$), et soit $[Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]$ un élément de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H)$ (pour $m \in \mathbb{C}$). On a alors

$$\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([\text{Inf}_{G/N}^G])([Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]) = [Q', m \cdot 1_{N_G(Q')/Q'}].$$

- ◇ Soit $H \leq G$, on suppose $U = \text{Ind}_H^G$. Soit $Q \leq H$, et soit $[Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]$ un élément de $\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}(H)$ (pour $m \in \mathbb{C}$). On a alors

$$\overline{\mathbb{C}\text{Free}_k}([\text{Ind}_H^G])([Q, m \cdot 1_{N_H(Q)/Q}]) = [Q, m \cdot 1_{N_G(Q)/Q}].$$

On étudie à présent explicitement, pour U un (G, H) -bi-ensemble, le comportement de l'application $\mathbb{C}B([U]) : \mathbb{C}B(H) \rightarrow \mathbb{C}B(G)$ sur la base $\{[H/Q] \mid Q \leq_H H\}$.

- ◇ Soit $G \leq H$, on suppose $U = \text{Res}_G^H$. Soit $Q \leq H$. On a alors

$$\mathbb{C}B([\text{Res}_G^H])([H/Q]) = [\text{Res}_G^H \times_H H/Q].$$

Or, le H -ensemble H/Q est isomorphe à $\text{Ind}_Q^H(1)$ (où 1 est le Q -ensemble trivial - isomorphe à Q/Q) vu comme un H -ensemble à gauche. Par conséquent, on a

$$\text{Res}_G^H \times_H H/Q \cong \text{Res}_G^H \times_H \text{Ind}_Q^H(1) \quad (6.4)$$

$$\cong \sum_{x \in [G \backslash H/Q]} \text{Ind}_{G \cap^x Q}^G \times \text{Iso}(c_x) \times \text{Res}_{G^x \cap Q}^Q(1) \quad (6.5)$$

$$= \sum_{x \in [G \backslash H/Q]} \text{Ind}_{G \cap^x Q}^G(1) \quad (6.6)$$

$$= \sum_{x \in [G \backslash H/Q]} G/G \cap^x Q \quad (6.7)$$

où c_x dénote l'isomorphisme de conjugaison par x , où on a utilisé la formule de Mackey (voir 1.1.9) et où on a utilisé le fait que $\text{Res}_{G^x \cap Q}^Q(1) = 1$. On sait qu'il existe des cas où pour $x \neq y$ deux éléments de $[G \backslash H/Q]$, on a $G \cap^x Q = G \cap^y Q$. En particulier, ceci est le cas si $xy^{-1} \in N_H(Q)$. On va donc écrire la somme 6.7 sur l'ensemble d'indices $[G \backslash H/N_H(Q)]$. On a

$$H = \bigsqcup_{y \in [G \backslash H/N_H(Q)]} GyN_H(Q)$$

et on va maintenant décomposer chaque $GyN_H(Q)$ en orbites pour l'action de Q à droite. Par le lemme 6.2.9, on a

$$H = \bigsqcup_{y \in [G \backslash H/N_H(Q)]} \bigsqcup_{z \in [G^y \cap N_H(Q) \backslash N_H(Q)/Q]} GyzQ.$$

Donc la somme 6.7 est égale à

$$\begin{aligned} \sum_{x \in [G \backslash H/Q]} G/G \cap^x Q &= \sum_{y \in [G \backslash H/N_H(Q)]} \sum_{z \in [G^y \cap N_H(Q) \backslash N_H(Q)/Q]} G/G \cap^{yz} Q \\ &= \sum_{y \in [G \backslash H/N_H(Q)]} \sum_{z \in [G^y \cap N_H(Q) \backslash N_H(Q)/Q]} G/G \cap^y Q. \end{aligned}$$

Donc, en passant dans $\mathbb{C}B(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}B([\text{Res}_G^H]) \left(\left[\frac{H}{Q} \right] \right) &= \left[\text{Res}_G^H \times_H \frac{H}{Q} \right] \\
&= \sum_{y \in [G \backslash H / N_H(Q)]} \sum_{z \in [G^y \cap N_H(Q) \backslash N_H(Q) / Q]} \left[G / G \cap {}^y Q \right] \\
&= \sum_{y \in [G \backslash H / N_H(Q)]} |G^y \cap N_H(Q) \backslash N_H(Q) / Q| \left[G / G \cap {}^y Q \right] \\
&= \sum_{y \in [G \backslash H / N_H(Q)]} |N_H(Q) / Q (G^y \cap N_H(Q))| \left[G / G \cap {}^y Q \right]
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que Q est normal dans $N_H(Q)$.

◇ Supposons $G = H/N$ pour $N \trianglelefteq H$, et $U = \text{Def}_{H/N}^H$. Soit $Q \leq H$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}B([\text{Def}_G^H]) \left(\left[\frac{H}{Q} \right] \right) &= \left[\text{Def}_G^H \times_H \frac{H}{Q} \right] \\
&= \left[\text{Def}_{H/N}^H \times_H \text{Ind}_Q^H(1) \right] \\
&= \left[\text{Ind}_{QN/N}^{H/N} \times \text{Iso}(d) \times \text{Def}_{Q/Q \cap N}^Q(1) \right] \\
&= \left[\text{Ind}_{QN/N}^{H/N}(1) \right] \\
&= \left[G / (QN/N) \right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 1.1.11, où $d : Q/Q \cap N \rightarrow QN/N$ est l'isomorphisme standard et où on a utilisé $\text{Def}_{Q/Q \cap N}^Q(1) \cong 1$.

◇ Soit $f : H \rightarrow G$ un isomorphisme de groupes, on suppose $U = \text{Iso}(f)$. Soit $Q \leq H$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}B([\text{Iso}(f)]) \left(\left[\frac{H}{Q} \right] \right) &= \left[\text{Iso}(f) \times_H \frac{H}{Q} \right] \\
&= \left[\text{Iso}(f) \times_H \text{Ind}_Q^H(1) \right] \\
&= \left[\text{Ind}_{f(Q)}^G(1) \right] \\
&= \left[G / f(Q) \right].
\end{aligned}$$

◇ Soit $H = G/N$ pour $N \trianglelefteq G$, on suppose $U = \text{Inf}_{G/N}^G$. Soit $Q = Q'/N \leq H$ (pour $Q' \leq G$). On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}B([\text{Inf}_{G/N}^G]) \left(\left[\frac{H}{Q} \right] \right) &= \left[\text{Inf}_{G/N}^G \times_H \frac{H}{Q} \right] \\
&= \left[\text{Inf}_{G/N}^G \times_H \text{Ind}_Q^H(1) \right] \\
&= \left[\text{Inf}_{G/N}^G \times_H \text{Ind}_{Q'/N}^{G/N}(1) \right] \\
&= \left[\text{Ind}_{Q'}^G \times \text{Inf}_{Q'/N}^{Q'}(1) \right] \\
&= \left[\text{Ind}_{Q'}^G(1) \right] \\
&= \left[G / Q' \right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 1.1.14 et le fait que $\text{Inf}_{Q'/N}^{Q'}(1) \cong 1$.

◇ Soit $H \leq G$, on suppose $U = \text{Ind}_H^G$. Soit $Q \leq H$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}B([\text{Ind}_H^G]) \left([H/Q] \right) &= [\text{Ind}_H^G \times_H H/Q] \\ &= [\text{Ind}_H^G \times_H \text{Ind}_Q^H(1)] \\ &= [\text{Ind}_Q^G(1)] \\ &= [G/Q]. \end{aligned}$$

Le diagramme 6.3 commute alors lorsque U est un morphisme élémentaire et commute donc en général ce qui démontre qu'on a bien une transformation naturelle $\xi : \overline{\mathbb{C}\text{Free}_k} \rightarrow \mathbb{C}B$. Comme ξ_G est bijective pour tout G , ξ est un isomorphisme de foncteurs. \square

Lemme 6.2.9. *Soit G un groupe fini. Soient U et V deux sous-groupes de G et soit $Q \leq V$. Soit encore $a \in G$. On a alors*

$$UaV \cong \bigsqcup_{z \in [U^a \cap V \setminus V/Q]} UazQ$$

comme (U, Q) -bi-ensembles.

Démonstration. On commence par démontrer que

$$U1_GV = \bigsqcup_{z \in [U \cap V \setminus V/Q]} UzQ.$$

On regarde l'ensemble $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ sous l'action de U à gauche et celle de Q à droite. On va faire une décomposition de UV en orbites disjointes. On veut donc montrer que $[U \cap V \setminus V/Q]$ est un ensemble de représentant d'orbites. Soit $uv \in UV$ (avec $u \in U$ et $v \in V$). Comme $v \in V$, il existe $z \in [U \cap V \setminus V/Q]$ tel que

$$(U \cap V)vQ = (U \cap V)zQ.$$

Alors il existe $u' \in U \cap V$ et $q \in Q$ tels que $v = u'zq$. Ainsi $UuvQ = Uu'u'zqQ = UzQ$. On montre maintenant que $[U \cap V \setminus V/Q]$ est un ensemble de représentants d'orbites disjointes. Supposons qu'on ait $Uz_1Q = Uz_2Q$ pour $z_1, z_2 \in [U \cap V \setminus V/Q]$ avec $z_1 \neq z_2$. Alors il existe $u \in U$ et $q \in Q$ tels que $z_1 = uz_2q$. On a alors

$$(U \cap V)z_1Q = (U \cap V)uz_2qQ = (U \cap V)z_2Q$$

où la dernière égalité découle du fait que $u = z_1q^{-1}z_2^{-1} \in V$ donc $u \in U \cap V$.

On montre maintenant l'assertion du lemme. On applique le résultat ci-dessus à U^a et on obtient

$$U^aV = \bigsqcup_{z \in [U^a \cap V \setminus V/Q]} U^azQ.$$

Donc on obtient

$$a^{-1}UaV = \bigsqcup_{z \in [U^a \cap V \setminus V/Q]} a^{-1}UazQ,$$

qui, en multipliant à gauche par a , donne

$$UaV = \bigsqcup_{z \in [U^a \cap V \setminus V/Q]} UazQ. \quad \square$$

Preuve du théorème via la propriété universelle. On rappelle que $\mathbb{C}\text{Free}_k \cong S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}$, donc

$$\varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k) \cong \varphi\left(S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}\right).$$

On montre $\mathbb{C}B \cong \varphi(\mathbb{C}\text{Free}_k)$ en montrant que $\mathbb{C}B$ vérifie la propriété universelle de $\varphi(S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}})$. Comme tout foncteur vérifiant une propriété universelle est unique à isomorphisme près, on aura le résultat.

On note $\theta : \mathbb{C}\text{lgGrB} \rightarrow \mathbb{C}\text{GrB}$ l'inclusion et on rappelle qu'on a une adjonction

$$\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \xrightleftharpoons[\varphi]{\theta^*} \text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}).$$

Par ailleurs $S_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}} = L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}$ (voir la preuve du lemme 6.2.7) De plus, $\mathbb{C}B \cong L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$ (voir lemme 1.3.4). On doit donc démontrer

$$\varphi\left(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}\right) \cong L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}.$$

Or, par la section 1.2.3, on sait qu'on a une adjonction

$$\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect}) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}]{E_1} \text{End}_{\mathbb{C}\text{GrB}}(1)\text{-Mod} = \mathbb{C}\text{-Vect}$$

où E_1 est le foncteur d'évaluation en 1, et pour tout \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{L}(V) = L_{1,V}^{\mathbb{C}\text{GrB}}$. Donc pour tout $F \in \text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}, F) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}, F(1))$$

naturel en F . Par ailleurs, on peut faire exactement le même argument sur la catégorie $\mathbb{C}\text{lgGrB}$ et on obtient que pour tout $J \in \text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}, J) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}, J(1))$$

naturel en J . Donc pour tout foncteur $F \in \text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}, F) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}, F(1)) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}, \text{Res}_{\mathbb{C}\text{lgGrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(F)) \end{aligned}$$

naturel en F . Or, par définition de θ , on a simplement

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}, \text{Res}_{\mathbb{C}\text{lgGrB}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}(F)) &= \\ \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}, \theta^*(F)). \end{aligned}$$

Puisque θ^* et φ sont adjoints, on a

$$\text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{lgGrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}, \theta^*(F)) \cong \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(\varphi(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}), F)$$

un isomorphisme naturel en F . Par conséquent, on obtient

$$\text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}}, F) \cong \text{Hom}_{\text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})}(\varphi(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}}), F)$$

pour tout $F \in \text{Func}_{\mathbb{C}\text{-Vect}}(\mathbb{C}\text{GrB}, \mathbb{C}\text{-Vect})$ et donc

$$L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{GrB}} \cong \varphi(L_{1,\mathbb{C}}^{\mathbb{C}\text{lgGrB}})$$

ce qui termine la démonstration. \square

Bibliographie

- [Bau11] Mélanie Baumann, *The composition factors of the functor of permutation modules*, J. Algebra **344** (2011), 284–295. MR 2831942 (2012g :16050)
- [Bau12] ———, *Le foncteur de bi-ensembles des modules de p -permutation*, Ph.D. thesis, 2012.
- [Bau13] ———, *The functor of p -permutation modules for abelian groups*, J. Algebra **392** (2013), 142–157. MR 3085028
- [BD12] Alex Bartel and Tim Dokchitser, *Brauer relations in finite groups*, arXiv (2012).
- [Ben98] D. J. Benson, *Representations and cohomology. I*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Basic representation theory of finite groups and associative algebras. MR 1644252 (99f :20001a)
- [Bor94a] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory. MR MR1291599 (96g :18001a)
- [Bor94b] ———, *Handbook of categorical algebra. 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories and structures. MR 1313497 (96g :18001b)
- [Bou91] Serge Bouc, *Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, et modules de Steinberg généralisés*, J. Algebra **139** (1991), no. 2, 395–445. MR 1113783 (92k :20016)
- [Bou96] ———, *Foncteurs d'ensembles munis d'une double action*, J. Algebra **183** (1996), no. 3, 664–736. MR 1401673 (97j :20017)
- [Bou00] ———, *Burnside rings*, Handbook of algebra, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 739–804. MR 1759611 (2001m :19001)
- [Bou10] ———, *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1990, Springer-Verlag, Berlin, 2010. MR 2598185 (2011d :20098)
- [Bro85] Michel Broué, *On Scott modules and p -permutation modules : an approach through the Brauer morphism*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), no. 3, 401–408. MR 773988 (86d :20010)
- [BST14] Serge Bouc, Radu Stancu, and Jacques Thévenaz, *Vanishing evaluations of simple functors*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 2, 218–227. MR 3120623
- [BT08] Serge Bouc and Jacques Thévenaz, *Gluing torsion endo-permutation modules*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 2, 477–501. MR 2439636 (2009k :20022)
- [CR88] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1013113 (90g :16001)
- [Gor07] D. Gorenstein, *Finite groups*, AMS Chelsea Publishing Series, American Mathematical Society, 2007.

-
- [Isa76] I. Martin Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976, Pure and Applied Mathematics, No. 69. MR 0460423 (57 #417)
- [Pui88] Lluís Puig, *Pointed groups and construction of modules*, J. Algebra **116** (1988), no. 1, 7–129. MR 944149 (89e :20024)
- [Rot94] J.J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, 4 ed., Springer, 1994.
- [Ser78] Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, revised ed., Hermann, Paris, 1978. MR 543841 (80f :20001)
- [TW90] J. Thévenaz and P. J. Webb, *A Mackey functor version of a conjecture of Alperin*, Astérisque (1990), no. 181-182, 9, 263–272. MR 1051255 (91h :20020)
- [TW95] Jacques Thévenaz and Peter Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 6, 1865–1961. MR 1261590 (95i :20018)
- [Web93] Peter Webb, *Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces*, J. Pure Appl. Algebra **88** (1993), no. 1-3, 265–304. MR 1233331 (94f :20101)



Rosalie Chevalley

Route du Pavement 16, 1018 Lausanne

T: +41 79 602 02 14. E: chevalley.rosalie@gmail.com. W: ch.linkedin.com/in/rchevalley

Objective To further my experience as a teacher and help students discover their potential and become great learners. Moreover I would love to help teachers develop themselves to create an empowering environment both for teachers and students.

Education PhD in Mathematics, EPFL 2012-2015
Thesis topic: *Biset functors*.
Adviser: Prof. Jacques Thévenaz
Keywords: Finite groups, Representation theory, Bisets.

MSc and BSc in Mathematics, EPFL 2007-2012
Erasmus exchange, University of Vienna, AT Fall 2009

Experience **Teaching**
Facilitator of the Instructional Skills Workshop. 2013 - 2015
Organizer of the Welcome Workshop for PhD students at EPFL in Mathematics. 2012 - 2015
Teaching assistant since 2009. 2009 - 2015
Tutor. 2005 - 2009

Associative
Representative of PhD students at the Mathematics department. 2012 - (2015)
President of CQFD (The Association of Students in Mathematics at EPFL). 2010 - 2011
Representative of students in Mathematics at EPFL. 2007 - 2012

Professional experience MJSR, Monitor in summer camps. 2008 & 2009
KPMG, secretaryship 2006

Skills **Soft & Life Skills**
Self-Learning, Problem Solving, Analytical Thinking.
Facilitation, Effective Teaching, Effective Presentation.
Communication, Active Listening, Team player, Feedback addict.

Computer Skills
C++, LaTeX, Microsoft Office.

Languages
French (first language), Italian (second language), English (fluent), German.