

# Coalgèbres d'Alexander-Whitney: un modèle algébrique pour les espaces topologiques

THÈSE N° 4381 (2009)

PRÉSENTÉE LE 8 MAI 2009

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE  
INSTITUT DE GÉOMÉTRIE, ALGÈBRE ET TOPOLOGIE  
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Théophile NAÏTO

acceptée sur proposition du jury:

Prof. Ph. Michel, président du jury  
Prof. K. Hess Bellwald, directrice de thèse  
Prof. B. Fresse, rapporteur  
Prof. J. Scott, rapporteur  
Prof. D. Testerman, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse  
2009



# Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude des coalgèbres d'Alexander-Whitney (définies pour la première fois dans [HPST06]), en choisissant une perspective topologique. Une coalgèbre d'Alexander-Whitney est une  $\mathbb{Z}$ -coalgèbre de chaînes coassociative munie d'une structure algébrique supplémentaire : la co-multiplication doit respecter la structure de coalgèbre à une suite infinie d'homotopies près (cette suite d'homotopies faisant partie intégrante de la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney).

Les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont intéressantes du point de vue de la topologie parce que le complexe des chaînes normalisées  $C(K)$  d'un ensemble simplicial  $K$  est muni d'une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney. Ce théorème est prouvé pour la première fois en toute généralité ici (en généralisant un résultat prouvé dans [HPST06]). Comme conséquence, on obtient l'espoir que la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K)$  contienne des informations intéressantes qui puissent être utilisées dans la résolution de problèmes topologiques. Cet espoir est renforcé par les succès obtenus dans différents travaux à caractère topologique ; ces travaux utilisant de manière essentielle la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney des chaînes normalisées d'un ensemble simplicial. Parmi d'autres, on peut citer [HPST06], [HL07], [Boy08], et [HR].

On commence cette thèse par quelques rappels. En particulier, on rappelle et décortique la définition d'un morphisme **DCSH** entre coalgèbres de chaînes coassociatives avec un luxe de précision introuvable dans la littérature. Par exemple, les signes sont déterminés avec grande précision. Ensuite on consacre un chapitre à la définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney et à l'intérêt topologique de ces coalgèbres. Et c'est dans le chapitre suivant de cette thèse que l'on débute une étude conceptuelle des coalgèbres d'Alexander-Whitney. En effet, si cette structure a déjà été étudiée et exploitée par différents auteurs pour résoudre des problèmes spécifiques, elle n'a encore jamais été abordée de manière globale.

Dans ce but, on montre que les coalgèbres d'Alexander-Whitney admettent une description opéradique : il existe une opérade explicite  $\mathcal{AW}$  telle que les coalgèbres sur cette opérade sont les coalgèbres d'Alexander-Whitney. De plus, cette opérade est une opérade de Hopf, ce qui induit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney. Ces résultats sont prouvés dans un cadre relativement général en associant une opérade à tout bimodule (sur l'opérade associative) d'un certain type. En choisissant bien le bimodule on obtient l'opérade  $\mathcal{AW}$ . Ces résultats permettent l'étude des coalgèbres d'Alexander-Whitney avec le recul que donnent les opérades, ce qui s'est avéré être une stratégie gagnante dans différents domaines des mathématiques, et en particulier en topologie algébrique.

D'autre part, on développe dans ce travail une notion de modèle minimal dans le cadre des modules à droite sur une opérade fixée (qui satisfait quelques conditions raisonnables), dans le but d'appliquer ce résultat au cas particulier des coalgèbres d'Alexander-Whitney. En effet, les coalgèbres sur une opérade  $\mathcal{P}$  peuvent être vues comme des modules à droite sur l'opérade  $\mathcal{P}$ , et la catégorie de ces modules est au bénéfice de propriétés agréables que la catégorie des  $\mathcal{P}$ -coalgèbres n'a pas.

L'inspiration pour cette notion de modèle minimal vient de l'homotopie rationnelle. Deux éléments tendent à montrer que les coalgèbres d'Alexander-Whitney forment un bon cadre pour y transposer (sur l'anneau des entiers) des idées d'homotopie rationnelle.

**A.** Il existe un théorème qui dit qu'étudier les espaces topologiques à équivalences rationnelles près

est équivalent, essentiellement, à étudier les coalgèbres de chaînes cocommutatives sur le corps des rationnels. Ce résultat est faux sur l'anneau des entiers, mais les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont, en un sens expliqué dans cette thèse, "presque" cocommutatives.

**B.** La structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney des chaînes normalisées d'un ensemble simplicial pourrait être suffisamment faible pour que des calculs explicites restent possibles. En effet, il est évident que la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney des chaînes normalisées d'un ensemble simplicial est loin d'être une structure de  $E_\infty$ -coalgèbre, qui détermine (sous certaines conditions) le type d'homotopie de l'ensemble simplicial considéré.

Le travail effectué ici sur la notion de modèle minimal dans la catégorie des modules à droite sur une opérade inclut un théorème d'existence du modèle minimal et une discussion sur l'unicité de ce modèle. Dans un second temps, on construit un objet chemin explicite dans la catégorie modèle des modules à droite sur une opérade  $\mathcal{P}$ ; cet objet chemin étant ensuite utile dans l'investigation de l'information topologique que l'on peut espérer tirer de ce modèle minimal lorsque l'on travaille sur  $\mathcal{AW}$ .

Finalement, on présente et discute quelques problèmes ouverts concernant les coalgèbres d'Alexander-Whitney et qui semblent particulièrement intéressants. Ce qui ouvre de belles perspectives pour des recherches futures dans ce domaine des coalgèbres d'Alexander-Whitney.

**Mots clés :** coalgèbre d'Alexander-Whitney, opérade, opérade d'Alexander-Whitney, module à droite sur une opérade, modèle minimal, catégorie **DCSH**.

# Abstract

The goal of this work is to study Alexander-Whitney coalgebras (first defined in [HPST06]) from a topological point of view. An Alexander-Whitney coalgebra is a coassociative chain coalgebra over  $\mathbb{Z}$  with an extra algebraic structure : the comultiplication must respect the coalgebra structure up to an infinite sequence of homotopies (this sequence is part of the data of the Alexander-Whitney coalgebra structure).

Alexander-Whitney coalgebras are interesting for topologists because the normalized chain complex  $C(K)$  of a simplicial set  $K$  is endowed with an Alexander-Whitney coalgebra structure. This theorem is proved for the first time here (generalising a result proven in [HPST06]). This theorem gives the hope that the Alexander-Whitney coalgebra structure of  $C(K)$  contains interesting information that can be used to solve topological problems. This hope is strengthened by the success already obtained in the work of several topologists. Among others, [HPST06], [HL07], [Boy08], and [HR] use the Alexander-Whitney coalgebra structure of the normalized chains of a simplicial set in an essential way to solve topological problems.

This thesis begins with some background material. In particular, the definition of a **DCSH** morphism between two coassociative chain coalgebras is recalled in complete detail. For example, signs are determined with great precision. Next we devote a chapter to the definition of Alexander-Whitney coalgebras and to their importance in topology. In the following chapter we begin the conceptual study of Alexander-Whitney coalgebras. A global study of these objects had not yet been carried out even if the Alexander-Whitney coalgebra structure has been studied and used in order to answer some specific questions.

With the aim of studying Alexander-Whitney coalgebras in a nice setting, we develop an operadic description of these coalgebras in the following chapter. More precisely, we show that there is an explicit operad  $\mathcal{AW}$  such that the coalgebras over this operad are exactly the Alexander-Whitney coalgebras. Furthermore,  $\mathcal{AW}$  is shown to be a Hopf operad, so that the category formed by the Alexander-Whitney coalgebras is actually a monoidal category. These results are proven in a reasonably general framework. In fact, we associate an operad to each bimodule (over the associative operad) of a certain type, such that we get  $\mathcal{AW}$  if this bimodule is well chosen. In particular, these results enable us to study Alexander-Whitney coalgebras from the standpoint of operads. This strategy is recognised to be successful in various mathematical situations, and especially in algebraic topology.

Moreover, we develop a minimal model notion in the setting of right module over a chosen operad (which has to satisfy some reasonable conditions), with the aim of applying this result to the special case of the Alexander-Whitney coalgebras. This is possible because coalgebras over some fixed operad  $\mathcal{P}$  can be seen as right modules over  $\mathcal{P}$ . And the category of right modules over  $\mathcal{P}$  has some nice features which do not appear to hold in the category of  $\mathcal{P}$ -coalgebras.

The inspiration for this part of our work comes from the notion of minimal model developed in the framework of rational homotopy theory. The two following facts show that it is reasonable to try to adapt some ideas of rational homotopy theory to the category of Alexander-Whitney coalgebras.

**A.** There is a theorem that says that studying topological spaces up to rational equivalences is, essentially, equivalent to studying cocommutative chain coalgebras over the field of rational numbers. This is false if the ring of integers replaces the field of rational numbers, but Alexander-Whitney coalgebras are "almost" cocommutative in the sense which is explained in this thesis.

**B.** It could be that the Alexander-Whitney coalgebra structure of the normalized chains of a simplicial set is weak enough to allow explicit computations. At least, it is clear that the Alexander-Whitney coalgebra structure on the normalized chains is far from being an  $E_\infty$ -structure (such a structure determines the homotopy type of the considered simplicial set, at least under some conditions).

The chapter about minimal models in the framework of right modules over an operad includes an existence theorem and a discussion of the unicity of this model. In the second part of this chapter, we construct an explicit path-object in the model category of right modules over an operad. This path-object is then used to investigate the topologically relevant information that could stem from the minimal model in the case of the operad  $\mathcal{AW}$ .

Finally, we present and examine some interesting open questions about Alexander-Whitney coalgebras. These questions give a nice outlook on future research in this area.

**Keywords :** Alexander-Whitney coalgebra, operad, Alexander-Whitney operad, right module over an operad, minimal model, **DCSH** category.

# Remerciements

J'ai eu la chance de travailler dans un groupe, le groupe de topologie de l'EPFL, qui est animé d'un fort esprit d'équipe. Je remercie chaque membre de ce groupe, passé ou présent, pour cet esprit. Comme j'ai encore un peu de place, je vais maintenant remercier chacun des membres que j'ai pu côtoyer :

Kathryn Hess, évidemment, ma directrice de thèse. Je la remercie de m'avoir accueilli dans son groupe. Elle m'a guidé vers la recherche avec perspicacité. Apprendre des mathématiques présentées joliment au tableau noir par un expert est souvent une chose très différente de la recherche, et Kathryn a parfaitement su attirer mon attention sur certains aspects que j'aurais certainement négligés autrement. Je remercie Kathryn pour m'avoir donné la possibilité de voyager et de participer à un grand nombre d'événements mathématiques. Finalement, je la remercie pour ses encouragements (et son aide) à rester dans la recherche mathématique.

Nicolas Michel, mon collègue de bureau durant environ trois ans et demi. Même si nous n'avons finalement fait que peu de mathématiques ensemble, son style teinté d'une extrême rigueur et d'une toute aussi extrême précision m'a parfois rappelé à l'ordre et encouragé lorsque cela était nécessaire. Et de manière plus générale, il a toujours été très intéressant et agréable de discuter avec lui de toutes sortes de sujets.

Ilias Amrani, un autre doctorant de Kathryn. Son énorme culture générale et la justesse de sa pensée m'ont souvent été très précieuses ; ma vision des mathématiques et plus particulièrement de la topologie algébrique est certainement fortement (et positivement !) influencée par Ilias. Je le remercie pour m'avoir parfois aidé dans mes tâches d'assistantat lorsque j'ai eu besoin d'aide.

Jan Brunner, le premier de cordée. Nous avons commencé nos études de doctorat simultanément et il a été mon premier collègue de bureau. C'est lui qui, du groupe actuel des doctorants en topologie, a terminé en premier. Son imperturbable optimisme et sa volonté ont certainement été importants, par l'exemple, dans les moments difficiles.

Patrick Muller, le dernier à avoir commencé sa thèse dans le groupe de topologie. De lui, je retiens ici la tranquillité et la sérénité, qui ont souvent déteint sur moi. Son aide a été précieuse de deux manières différentes : d'une part il a pris sur lui l'organisation annuelle du "Young topologists' meeting in the Swiss Alps", et d'autre part il m'a aussi aidé dans mes tâches d'assistantat lorsque j'en ai eu besoin.

Je remercie également chacun des post-docs du groupe de topologie que j'ai pu côtoyer durant ces années : Peter Bubenik, Jonathan Scott, Sverre Lunoe-Nielsen, Christine Vespa, Samuel Wütrich, et John Harper. Il a été très agréable de travailler et d'apprendre des mathématiques avec eux.

Evidemment, je remercie aussi tous les membres de mon jury de thèse pour avoir accepté d'expertiser mon travail. Le président du jury, le Prof. P. Michel. Le Prof. J. Scott, qui, avec Kathryn, est à l'origine du sujet de ma thèse et qui m'a patiemment introduit aux opérades durant son séjour à Lausanne. Le Prof. B. Fresse, qui s'est toujours montré disponible pour discuter lors des quelques occasions où j'ai pu le rencontrer. C'est un grand honneur d'avoir un chercheur aussi prestigieux que lui dans mon jury. La Prof. D. Testerman, qui m'a fait part de nombreux commentaires malgré qu'elle ne soit pas une spécialiste de la topologie algébrique !

Je remercie mes parents, mes frères Jacob et Baptiste (et sa femme Céline), ma soeur Agathe (et son ami Diego). Je remercie aussi les parents de Tiziana et sa soeur, Annalisa. Ils ont parfois (souvent pour certains d'entre eux !) été d'une grande aide pour mon organisation familiale. De plus, Jacob et Diego ont relu chacun une moitié de cette thèse jusqu'à tard dans "la dernière nuit" !

Finalelement, je termine en remerciant ma compagne Tiziana et nos filles Tea Elisabeth et Sveva Katherine pour toutes sortes de choses.



Au moment de terminer la version définitive de ma thèse, j'ai une pensée particulière pour mes grands-parents :

*Elisabeth Weidmann-Leuenberger  
et Hans Weidmann*

*Michiko Naito  
et Jun Naito*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Rappels</b>	<b>9</b>
1 Catégories modèles	11
<b>2 Opérades et objets associés</b>	<b>15</b>
2.1 Opérades et (co)algèbres sur une opérade . . . . .	15
2.2 Modules sur une opérade . . . . .	22
2.3 Structure de catégorie monoïdale . . . . .	24
<b>3 La catégorie DCSH</b>	<b>27</b>
3.1 La catégorie <b>DCSH</b> . . . . .	27
3.2 Le co-anneau d'Alexander-Whitney d'un point de vue conceptuel . . . . .	32
3.3 Comparaison entre la définition classique et la définition opéradique de <b>DCSH</b> . . .	33
3.4 Structure de catégorie monoïdale sur <b>DCSH</b> . . . . .	35
<b>II Coalgèbres d'Alexander-Whitney</b>	<b>37</b>
<b>4 Définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney</b>	<b>39</b>
4.1 Définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney . . . . .	39
4.2 Pourquoi les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont-elles intéressantes? . . . . .	40
4.3 Différents types de coalgèbres d'Alexander-Whitney . . . . .	43
<b>5 Description opéradique des coalgèbres d'Alexander-Whitney</b>	<b>47</b>
5.1 Construction de l'opérade d'Alexander-Whitney . . . . .	47
5.2 Structure monoïdale . . . . .	67
5.3 Le cas particulier du co-anneau d'Alexander-Whitney . . . . .	75
<b>6 Modèle minimal pour les coalgèbres d'Alexander-Whitney</b>	<b>79</b>
6.1 Modèle minimal pour module à droite sur une opérade . . . . .	79
6.2 Objet chemin dans la catégorie des modules à droite sur une opérade . . . . .	88
6.3 Information donnée par le modèle minimal . . . . .	92

<b>7 Problèmes ouverts</b>	<b>99</b>
7.1 Théorie de l'homotopie des coalgèbres d'Alexander-Whitney . . . . .	99
7.2 Relation entre l'opéade d'Alexander-Whitney et les opéades associative et commu- tative . . . . .	102
7.3 Remplacement cofibrant de l'opéade d'Alexander-Whitney . . . . .	102
7.4 Le SDR d'Eilenberg-Zilber topologique . . . . .	103
<b>A Annexe</b>	<b>105</b>
A.1 Règle de Koszul . . . . .	105
A.2 La transformation naturelle d'Alexander-Whitney, la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber, et l'homotopie d'Eilenberg-MacLane . . . . .	106
A.3 Calculs utiles dans le chapitre 2 . . . . .	108
A.4 Calculs utiles dans le chapitre 4 . . . . .	111
A.5 Lemmes utiles pour la construction de l'opéade d'Alexander-Whitney . . . . .	121
A.6 Calculs utiles dans le chapitre 7 . . . . .	128
A.7 Quelques propriétés de $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ . . . . .	130
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>
<b>Index des notations</b>	<b>136</b>
<b>Index</b>	<b>137</b>

# Introduction

## Les coalgèbres d'Alexander-Whitney

Cette thèse est dévolue à l'étude des coalgèbres d'Alexander-Whitney, ces objets ayant été définis pour la première fois dans [HPST06]. Commençons par donner une idée de ce qu'est une telle coalgèbre. Une coalgèbre d'Alexander-Whitney est un complexe de chaînes  $C$ , sur l'anneau des entiers  $\mathbb{Z}$ , et muni d'une co-multiplication coassociative  $\psi_1 : C \rightarrow C \otimes C$ . C'est donc en particulier une coalgèbre de chaînes coassociative. Mais de plus, on exige que  $C$  soit muni d'une famille de co-opérations

$$C \xrightarrow{\psi_n} (C \otimes C)^n, \quad n \geq 2,$$

telles que

- $\psi_2$  soit une homotopie de chaînes entre  $(\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1$  et  $(1 \otimes \tau \otimes 1)(\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1$ , où  $\tau$  est l'isomorphisme qui permute deux copies de  $C$ ,
- $\psi_n$  avec  $n \geq 3$  est une homotopie "supérieure".

Remarquons que la condition imposée sur  $\psi_2$  signifie que  $\psi_1$  est un morphisme qui respecte la structure de coalgèbres coassociatives à homotopie près. Informellement, on peut donc définir une coalgèbre d'Alexander-Whitney avec le slogan suivant : "une coalgèbre d'Alexander-Whitney est une coalgèbre coassociative telle que la co-multiplication est elle-même un morphisme de coalgèbres à une suite d'homotopies près".

De plus, lorsque la suite  $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$  satisfait une condition de finitude locale, on peut assembler cette famille d'homotopies pour en tirer un morphisme d'algèbres de chaînes  $\Omega C \xrightarrow{\psi} \Omega(C \otimes C)$ , où  $\Omega$  est la construction cobar. La construction cobar est un foncteur qui envoie une coalgèbre sur une algèbre et qui a la propriété suivante : il existe un quasi-isomorphisme naturel d'algèbres  $\Omega C_*(X) \xrightarrow{\theta_X} C_*(\Omega X)$ , où  $C_*(X)$  est le complexe de chaînes singulier de l'espace topologique  $X$ , et où  $\Omega X$  est l'espace des lacets sur  $X$ . Si on compose ce morphisme  $\psi : \Omega C \rightarrow \Omega(C \otimes C)$  avec le quasi-isomorphisme naturel de Milgram  $q : \Omega(C \otimes C) \rightarrow \Omega C \otimes \Omega C$  on obtient une co-multiplication sur  $\Omega C$ . A nouveau de manière très informelle, on peut donc aussi dire qu'une coalgèbre d'Alexander-Whitney est une coalgèbre coassociative  $C$  telle que l'algèbre  $\Omega C$  est munie d'une co-multiplication (au moins lorsque la condition de finitude locale, déjà citée ci-dessus, est respectée).

## Pourquoi les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont-elles intéressantes ?

Dans ce travail, on étudie ces coalgèbres du point de vue de la topologie. De ce point de vue, les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont intéressantes parce que  $C_*(X)$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney pour tout espace  $X$ . L'espoir est donc que cette structure supplémentaire donne des informations supplémentaires intéressantes au sujet de l'espace topologique  $X$  considéré. Ce qui est le cas. En effet, lorsque  $X$  est un espace 1-connexe, alors la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C_*(X)$  induit une co-multiplication sur  $\Omega(C_*(X))$  qui a la propriété supplémentaire

d'être coassociative. L'algèbre  $\Omega(C_*(X))$  est donc une algèbre de Hopf. D'autre part,  $C_*(\Omega X)$  est également une algèbre de Hopf. On peut se demander si le quasi-isomorphisme naturel d'algèbres  $\Omega C_*(X) \xrightarrow{\theta_X} C_*(\Omega X)$  respecte aussi la co-multiplication. Ceci n'est pas vrai, mais presque :  $\theta_X$  respecte la co-multiplication à une suite d'homotopies près. Ce qui montre la pertinence topologique de la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C_*(X)$ . De plus, depuis l'énoncé et la preuve de ce premier résultat dans [HPST06], la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C_*(X)$  a été étudiée et utilisée plusieurs fois avec succès. On peut citer [HL07], qui utilise cette structure pour construire un "petit" modèle pour l'espace des lacets de la fibre homotopique d'une application continue entre espaces 2-connexes. Comme cas particulier, cela permet de construire un "petit" modèle pour  $C_*(\Omega^2 X)$ , si  $X$  est un espace topologique 2-connexe. On peut également citer [Boy08], qui utilise les constructions faites dans [HL07] pour construire un modèle pour  $C_*(Map_*(S_g, X))$ ;  $X$  étant un espace 2-connexe,  $S_g$  étant une surface fermée de genre  $g$ , et  $Map_*(S_g, X)$  étant l'espace des applications continues pointées. Finalement, attirons encore l'attention sur [HR], qui utilise la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C_*(X)$  pour construire un modèle pour l'application "puissance  $r$ " sur l'espace des lacets libres  $\mathcal{L}X$ , définie de manière évidente par la concaténation des lacets, pour  $X$  un espace topologique qui est une double suspension et pour  $r \geq 1$ . Ce résultat est un élément crucial pour mieux comprendre l'homologie cyclique topologique de l'espace  $X$ , ce qui est le projet à plus long terme des auteurs de cet article.

## Description du contenu de cette thèse

Maintenant, décrivons le contenu de ce travail. Mais juste avant de commencer cette description, notons que si jusqu'ici on s'est toujours placés dans la catégorie des espaces topologiques, tous les résultats déjà cités sont en fait énoncés dans le cadre des ensembles simpliciaux. Cela a un sens puisque d'une part la catégorie des ensembles simpliciaux est équivalente à la catégorie des espaces topologiques du point de vu de l'homotopie, et d'autre part la catégorie des ensembles simpliciaux est de nature combinatoire, ce qui la rend plus aisée à manipuler. Par la suite, c'est donc toujours dans la catégorie des ensembles simpliciaux que l'on se place, sauf si le contraire est indiqué.

Ce travail est divisé en deux parties, la première rappelant les notions utilisées dans la deuxième partie et fixant le cadre dans lequel on travaille. Cette première partie fixe aussi les notations utilisées par la suite. Les rappels sont parfois extrêmement brefs, comme dans le cas des catégories modèles, mais une littérature abondante est alors conseillée. A l'opposé, dans le cas de la catégorie **DCSH**, la présentation est détaillée. Cela pour deux raisons : d'une part cette catégorie est moins connue (surtout dans sa description opéradique) que d'autres concepts rappelés dans cette première partie, et d'autre part certains des détails donnés ici n'apparaissent, semble-t-il, encore nulle part ailleurs. En particulier, les signes sont donnés avec grande précision. Enfin, on rappelle également la notion d'opéradé, de (co)algèbre sur une opéradé et de module sur une opéradé.

La deuxième partie forme le corps de ce travail. Le chapitre 4 débute avec la définition précise des coalgèbres d'Alexander-Whitney et avec le théorème suivant.

**Théorème.** *Soit  $K$  un ensemble simplicial. Il existe une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney sur le complexe de chaînes normalisées  $C(K)$  de  $K$  ( $C(K)$  joue le rôle de  $C_*(X)$  lorsque l'on considère des ensembles simpliciaux plutôt que des espaces topologiques). Muni de cette structure, on note  $\tilde{C}(K)$  le complexe de chaînes  $C(K)$ .*

Ce théorème est une petite généralisation d'un résultat qui apparaît dans [HPST06]. Ce chapitre discute aussi l'utilité des coalgèbres d'Alexander-Whitney en topologie ; discussion qui reprend les

éléments déjà cités ci-dessus avec un petit supplément de détails. Et finalement, différents types de coalgèbres d'Alexander-Whitney sont discutés, puisque différentes définitions sont possibles. Le chapitre suivant présente une description opéradique des coalgèbres d'Alexander-Whitney. Plus précisément, on donne une méthode générale pour construire une opérade à partir de tout bimodule (sur l'opérade associative) d'un certain type. Lorsque ce bimodule est bien choisi, l'opérade  $\mathcal{AW}$  que l'on obtient par cette méthode est telle que les coalgèbres sur cette opérade sont les coalgèbres d'Alexander-Whitney. Un peu plus précisément, c'est l'énoncé suivant qui est présenté.

**Théorème.** *Il existe une opérade de Hopf, notée  $\mathcal{AW}$ , telle que la catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney est isomorphe à la catégorie des coalgèbres sur  $\mathcal{AW}$ .*

De plus, il existe une description explicite de cette opérade et de sa structure d'opérade de Hopf.

Rappelons très brièvement en quoi les opérades peuvent être utiles. Chaque opérade décrit une catégorie d'algèbres et une catégorie de coalgèbres (mais pour simplifier l'exposition, on ne parle que des algèbres dans ce qui suit). Les opérades que l'on rencontre le plus souvent sont l'opérade associative, l'opérade commutative, et l'opérade de Lie. Comme son nom l'indique, les algèbres associées à l'opérade associative (respectivement commutative) sont les algèbres associatives (resp. associatives et commutatives). Alors que l'opérade de Lie décrit les algèbres de Lie. Mais il existe une énorme variété d'opérades intéressantes qui apparaissent dans différents domaines des mathématiques. Les opérades sont utiles parce qu'elles permettent de prendre du recul par rapport aux algèbres qu'elles décrivent. Il est alors possible d'étudier les algèbres de ce nouveau point de vue donné par les opérades, pour en tirer des résultats intéressants. En particulier, les opérades sont bien adaptées pour certains problèmes homotopiques. Par exemple, on peut se poser la question suivante : si  $X$  est un monoïde associatif topologique, et si  $Y$  est un espace avec le même type d'homotopie que  $X$ , est-ce qu'il est possible de transférer la structure de monoïde de  $X$  sur  $Y$  ? La réponse est non, mais les opérades donnent une très jolie manière de contourner le problème. En effet, les monoïdes associatifs topologiques sont décrits par l'opérade associative topologique, notée  $\mathcal{A}$ . On peut prendre ce que l'on appelle un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}$ , un tel objet étant une opérade équivalente (dans un sens bien précis) à  $\mathcal{A}$ . De plus, cette nouvelle opérade, que l'on note  $\mathcal{A}_\infty$ , a deux propriétés importantes : la catégorie des algèbres sur  $\mathcal{A}$  est une sous-catégorie de la catégorie des algèbres sur  $\mathcal{A}_\infty$ , et le problème du transfert énoncé ci-dessus dans le cadre des  $\mathcal{A}$ -algèbres a maintenant une réponse positive dans le cadre des  $\mathcal{A}_\infty$ -algèbres. Avant de retourner aux coalgèbres d'Alexander-Whitney, notons que ce résultat est dû à Stasheff ([Sta63]).

Le résultat principal de ce chapitre 5 permet donc l'étude des coalgèbres d'Alexander-Whitney du point de vue des opérades, ce qui, à l'image du problème topologique décrit ci-dessus, s'est avéré payant dans de nombreuses situations.

Le chapitre 6 présente une notion de modèle minimal pour les coalgèbres d'Alexander-Whitney. Comme la catégorie des coalgèbres sur une opérade n'est pas aisée à utiliser (on peut remarquer que les limites, les colimites et le foncteur co-libre des coalgèbres sur une opérade ne se décrivent pas facilement, ... si ces objets existent !), on choisit d'utiliser un foncteur qui permet de regarder une coalgèbre d'Alexander-Whitney comme un module à droite sur l'opérade d'Alexander-Whitney  $\mathcal{AW}$ . Cette notion de module sur une opérade a un sens évident, puisque l'on peut définir une opérade comme étant un monoïde dans une certaine catégorie monoïdale. Et c'est dans ce cadre des modules à droite sur  $\mathcal{AW}$  que l'on étudie l'existence et les propriétés d'un modèle minimal.

La motivation pour cette étude vient de l'homotopie rationnelle. En effet, dans le cadre rationnel, Sullivan ([Sul77]) a montré que l'on peut remplacer le complexe de cochaînes singulier  $C^*(X; \mathbb{Q})$ , qui est une algèbre non-commutative (sauf cas particulier), par une algèbre de cochaînes commutative rationnelle  $A^*(X)$  qui est reliée à  $C^*(X; \mathbb{Q})$  par un zig-zag de quasi-isomorphismes. De plus, Sullivan a construit un quasi-isomorphisme  $(\Delta V, d) \xrightarrow{\cong} A^*(X)$ , où  $(\Delta V, d)$  est une algèbre de cochaînes commutative, qui est libre sur un module gradué  $V$  si l'on oublie la différentielle. Et on

exige que ce module gradué  $V$  soit le "plus petit possible". Ce module gradué a une propriété spectaculaire :  $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \cong V^n$ . La raison pour laquelle il est justifié d'essayer d'adapter ces idées d'homotopie rationnelle au cadre des coalgèbres d'Alexander-Whitney sur  $\mathbb{Z}$  est la suivante : les deux affirmations ci-dessous sont équivalentes lorsque la coalgèbre coassociative  $(C, \Delta)$  est munie d'une co-unité.

- $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  est cocommutative
- $\Delta$  est un morphisme de coalgèbres

Mais une coalgèbre d'Alexander-Whitney est, essentiellement, une coalgèbre coassociative telle que la co-multiplication est un morphisme de coalgèbres à une suite d'homotopies près. Par l'équivalence ci-dessus, on peut aussi penser à une coalgèbre d'Alexander-Whitney comme à une coalgèbre qui est presque une coalgèbre cocommutative. De plus, sur  $\mathbb{Z}$ , il est impossible de remplacer  $C^*(X; \mathbb{Z})$  par une algèbre commutative comme dans le cas rationnel. Tous ces éléments font donc penser que la catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney pourrait être le bon cadre pour adapter les idées d'homotopie rationnelle au cadre de l'anneau des entiers. Un élément supplémentaire allant dans ce sens est l'espoir que la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K)$  soit suffisamment "faible" pour que des calculs restent possibles. C'est la force de l'homotopie rationnelle : en rationalisant, on perd une grande quantité d'informations, mais en échange on gagne en facilité de calcul. Par contraste, il est clair que faire des calculs dans le cadre des  $E_\infty$ -algèbres ( $E_\infty$  est un remplacement cofibrant de l'opérade commutative) est une tâche extrêmement difficile puisque la structure de  $E_\infty$ -algèbre de  $C(K)$  détermine complètement le type d'homotopie de  $K$  (au moins si  $K$  est un ensemble simplicial qui satisfait certaines conditions).

Revenons aux coalgèbres d'Alexander-Whitney. Dans ce chapitre, on développe donc une notion de modèle minimal pour un module à droite sur l'opérade  $\mathcal{AW}$ . En particulier on obtient le théorème suivant.

**Théorème.** *Soit  $K$  un ensemble simplicial. Il existe un quasi-isomorphisme de  $\mathcal{AW}$ -modules à droite de la forme :*

$$(X \circ \mathcal{AW}, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}(\tilde{C}(K)).$$

*Ici*

- $\mathcal{T} : \mathcal{AW} \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{AW}}$  est un foncteur qui envoie une coalgèbre d'Alexander-Whitney sur un  $\mathcal{AW}$ -module à droite (voir la proposition 2.12),
- $X$  est une suite symétrique de modules gradués
- $X \circ \mathcal{AW}$  est le  $\mathcal{AW}$ -module à droite libre sur  $X$ ,
- $d$  est une différentielle sur  $X \circ \mathcal{AW}$ .

*De plus,  $X$  vérifie une condition de minimalité.*

On aborde également la question de l'unicité de ce modèle, qui reste un problème ouvert. Finalement on donne une indication sur la manière dont ce modèle pourrait être utilisé pour obtenir une information intéressante du point de vue topologique. Avec en prime la construction explicite d'un objet chemin dans la catégorie modèle des modules à droite sur une opérade (sur la catégorie des complexes de chaînes). Cet objet chemin est utilisé pour étudier l'information contenue dans le modèle minimal d'un module à droite sur une opérade, mais de manière plus générale il est certainement utile d'avoir un tel objet à disposition lorsque l'on travaille avec des modules à droite sur une opérade.

Le chapitre 7, comme son titre l'indique, présente et discute quelques problèmes ouverts concernant l'opérade d'Alexander-Whitney et les coalgèbres d'Alexander-Whitney et qui semblent particulièrement intéressants.



Finalemant, l'annexe regroupe des résultats qui placés dans le corps principal de ce travail auraient distrait le lecteur des éléments plus importants. En particulier, un grand nombre de calculs s'y trouvent.



Première partie

Rappels



# Chapitre 1

## Catégories modèles

Dans ce chapitre on rappelle très brièvement la notion de catégorie modèle.

Il y a une multitude d'articles et de livres traitant de ce sujet. Pour une introduction au sujet, on peut consulter [DS95] ou [Hes00]. Pour en apprendre davantage, [Hov99] et [Hir03] sont à recommander. De plus, [DHKS04] donne un autre point de vue en focalisant sur les constructions que l'on peut faire en utilisant uniquement la classe des équivalences faibles. Et finalement, indiquons encore les notes informelles de W. Dwyer ([Dwy]).

Avant de commencer avec la définition d'une catégorie modèle, précisons que certaines définitions et certains résultats élémentaires de la théorie des catégories modèles sont utilisés dans la suite de ce travail (y compris dans le présent chapitre) sans référence et sans qu'ils soient présentés ici. Lorsque ceci est le cas, il n'est pas difficile de trouver tous les détails nécessaires dans l'une des sources indiquées ci-dessus.

La notion de catégorie modèle a été introduite par D. Quillen dans [Qui67].

**Définition 1.1.** Une catégorie modèle est une catégorie  $\mathcal{M}$  avec trois classes de morphismes : les équivalences faibles, les fibrations et les cofibrations. On demande que ces classes soient stables sous composition et que les morphismes identités soient contenus dans chacune des trois classes. Et les axiomes suivants doivent être satisfaits.

(M1)  $\mathcal{M}$  est complète et cocomplète.

(M2) Soit  $f$  et  $g$  deux morphismes composables dans  $\mathcal{M}$ . Si deux parmi les trois morphismes  $f$ ,  $g$  et  $fg$  sont des équivalences faibles, alors le troisième est aussi une équivalence faible.

(M3) Les équivalences faibles, les fibrations et les cofibrations sont fermées sous retracts.

(M4) Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

un diagramme dans  $\mathcal{M}$  tel que  $i$  est une cofibration et tel que  $p$  est une fibration. Si  $i$  ou  $p$  est une équivalence faible alors il existe un relèvement  $h : C \rightarrow B$  qui fait commuter le diagramme.

(M5) Tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{M}$  admet une factorisation  $pi$  avec  $p$  une fibration et  $i$  une cofibration.

De plus, il existe une telle factorisation avec  $i$  une équivalence faible, et il existe une (autre) telle factorisation avec  $p$  une équivalence faible.

Evidemment, la catégorie des espaces topologiques **Top** est une catégorie modèle, puisque la notion de catégorie modèle peut être comprise comme une abstraction de certaines propriétés bien choisies de **Top**.

**Exemple 1.1.** ([Str72]) La catégorie **Top** est une catégorie modèle si on choisit :

- les équivalences d'homotopie comme équivalences faibles
- les fibrations de Hurewicz comme fibrations
- les cofibrations fermées d'Hurewicz comme cofibrations.

Mais **Top** est aussi muni d'une deuxième structure de catégorie modèle, qui est d'ailleurs celle communément utilisée.

**Exemple 1.2.** ([Qui67]) La catégorie **Top** est une catégorie modèle si on prend :

- les équivalences faibles comme équivalences faibles
- les fibrations de Serre comme fibrations
- les rétracts d'inclusion de CW-complexes comme cofibrations.

Dans le cadre des espaces topologiques il est usuel de travailler à homotopie près plutôt qu'à isomorphisme près. Autrement dit, on travaille dans la catégorie homotopique  $Ho(\mathbf{Top})$  plutôt que dans **Top**. Une telle notion de catégorie homotopique vient automatiquement avec toute structure de catégorie modèle.

**Définition 1.2.** Par l'axiome (M5), pour tout objet  $X$  d'une catégorie modèle  $\mathcal{M}$  il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \phi & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \searrow i & \nearrow p \\
 & & QX
 \end{array}$$

où  $\phi$  est l'objet initial de  $\mathcal{M}$ , où  $i$  une cofibration, et où  $p$  une fibration acyclique. Dans cette situation, on dit que  $QX$  est un remplacement cofibrant de  $X$ .

Un remplacement fibrant  $RX$  pour  $X$  est défini de manière duale.

Dans la définition qui suit et dans toute la suite de ce texte, les morphismes de  $X$  dans  $Y$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  sont notés  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**Définition 1.3.** Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie modèle. La catégorie homotopique de  $\mathcal{M}$  est la catégorie  $Ho(\mathcal{M})$  définie par

- $Ob(Ho(\mathcal{M})) = Ob(\mathcal{M})$
  - $Ho(\mathcal{M})(X, Y) = \pi(QX, RY)$ , pour tout couple d'objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{M}$ ,
- où  $\pi(QX, RY)$  est l'ensemble  $\mathcal{M}(QX, RY)$  quotienté par la relation d'homotopie.

D'un point de vue conceptuel, la topologie algébrique consiste en bonne partie en la recherche de catégories de type algébrique telles que ces catégories sont équivalentes à une sous-catégorie pertinente de **Top**. La première chose à définir est donc la notion d'équivalence. Dans le cadre des catégories modèles, c'est la notion suivante qui s'est imposée.

**Définition 1.4.** Soit  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  des catégories modèles. Soit alors

$$\mathcal{M}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{M}_2$$

un couple de foncteurs adjoints. On dit que ce couple est un couple de Quillen si

- $F$  envoie les cofibrations sur les cofibrations
- $G$  envoie les fibrations sur les fibrations.

De plus, si pour tout objet fibrant  $A$  de  $\mathcal{M}_1$  et tout objet cofibrant  $X$  de  $\mathcal{M}_2$  on a que  $f : F(A) \rightarrow X$  est une équivalence faible

si et seulement si

$f^\# : A \rightarrow G(X)$  est une équivalence faible, où  $\#$  fait référence à l'isomorphisme évident, alors on dit que le couple  $(F, G)$  est une équivalence de Quillen.

**Théorème 1.1.** Si  $(F, G)$  est un couple de Quillen comme ci-dessus, alors il induit un couple adjoint

$$Ho(\mathcal{M}_1) \begin{array}{c} \xrightarrow{LF} \\ \xleftarrow{RG} \end{array} Ho(\mathcal{M}_2).$$

De plus, si le couple considéré est une équivalence de Quillen, alors  $LF$  et  $RG$  sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

En particulier, le théorème suivant est très important. Toutes les notions nécessaires pour énoncer ce théorème se trouvent dans [May67] ou [Jun04] qui est écrit en français.

**Théorème 1.2.** Le couple adjoint

$$\mathbf{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xleftarrow{S_\bullet} \end{array} \mathbf{Top}$$

est une équivalence de Quillen. Ici,  $\mathbf{sSet}$  est la catégorie des ensembles simpliciaux,  $|\cdot|$  est la réalisation géométrique et  $S_\bullet$  est le foncteur complexe singulier.

Ce théorème permet d'utiliser la catégorie  $\mathbf{sSet}$  au lieu d'utiliser  $\mathbf{Top}$ , ce qui est fait dans la suite de ce travail, la nature combinatoire de la catégorie  $\mathbf{sSet}$  étant agréable.

Pour finir ce chapitre indiquons la structure de catégorie modèle dont est munie la catégorie des complexes de chaînes.

**Théorème 1.3 ([DS95]).** Soit  $R$  un anneau.

La catégorie des  $R$ -complexes de chaînes non-négatifs est munie d'une structure de catégorie modèle si on choisit

- les équivalences faibles comme étant les quasi-isomorphismes
- les fibrations comme étant les morphismes surjectifs en degré strictement positif
- les cofibrations comme étant les injections telles que le conoyau est projectif en chaque degré.

**Théorème 1.4 ([Hov99]).** Soit  $R$  un anneau.

La catégorie des  $R$ -complexes de chaînes (indexés par  $\mathbb{Z}$ ) est munie d'une structure de catégorie modèle si on choisit

- les équivalences faibles comme étant les quasi-isomorphismes

- les fibrations comme étant les surjections
- les cofibrations comme étant les injections scindées degré par degré et telles que le conoyau est cofibrant.



## Chapitre 2

# Opérades et objets associés

On se donne une catégorie monoïdale symétrique fermée  $(\mathcal{M}, \otimes, I)$ . A partir du chapitre 2, on considère essentiellement la catégorie monoïdale  $(\mathbf{Ch}(\mathbb{Z}), \otimes, \mathbb{Z})$  des complexes de chaînes (non-négatifs) sur  $\mathbb{Z}$ , et le lecteur peut donc déjà penser à cette catégorie pour se fixer les idées. En ce qui concerne les notations, le foncteur adjoint au foncteur  $-\otimes A$  est noté  $Hom(A, -)$  pour  $A$  un objet de  $\mathcal{M}$ ; l'ensemble des morphismes d'un objet  $A$  vers un objet  $B$  dans  $\mathcal{M}$  étant noté  $\mathcal{M}(A, B)$ . De plus, la transformation naturelle de symétrie de la catégorie monoïdale  $\mathcal{M}$  est notée  $\tau$ . Finalement, on suppose que  $\mathcal{M}$  est complet et cocomplet, même si ce n'est pas toujours nécessaire.

### 2.1 Opérades et (co)algèbres sur une opérade

Dans cette section, on rappelle la définition d'une opérade et d'une (co)algèbre sur une opérade. De même, on rappelle les résultats liés à ces objets et qui sont nécessaires dans la suite de ce travail. Pour en savoir davantage sur les opérades et les (co)algèbres qui y sont liés, on peut consulter [MSS02] et [LV]; toutes les définitions et tous les résultats donnés sans références ci-dessous pouvant être trouvés dans ces deux livres (ou sont évidents).

#### Opérades et (co)algèbres sur une opérade

Commençons avec les définitions et résultats essentiels.

**Définition 2.1.** Une suite symétrique de  $\mathcal{M}$  est une suite  $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'objets de  $\mathcal{M}$  telle que  $X(n)$  est muni d'une action à droite de  $\Sigma_n$ , le groupe des permutations de  $n$  éléments (étant entendu que  $\Sigma_0$  est le groupe trivial). On dit que  $X(n)$  est le niveau  $n$  de la suite symétrique  $X$ .

Un morphisme de suites symétriques  $f : X \rightarrow Y$  est une suite  $\{f(n) : X(n) \rightarrow Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de morphismes dans  $\mathcal{M}$  tels que  $f(n)$  soit  $\Sigma_n$ -équivariant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La catégorie des suites symétriques est notée  $\mathcal{M}^\Sigma$ .

La catégorie des suites symétriques peut être munie de différentes structures monoïdales.

**Lemme 2.1.** Il existe une structure de catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{M}^\Sigma, \otimes, \mathcal{C})$ , où

$$(X \otimes Y)(n) := X(n) \otimes Y(n),$$

avec  $X$  et  $Y$  des suites symétriques et  $X(n) \otimes Y(n)$  étant muni de l'action diagonale de  $\Sigma_n$ . Et  $\mathcal{C}$  est la suite symétrique définie par  $\mathcal{C}(n) := I$ ;  $I$  étant muni de l'action triviale pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Cette structure monoïdale est appelée la structure monoïdale niveau.

**Lemme 2.2.** *Il existe une structure de catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{M}^\Sigma, \odot, \mathcal{U})$ , où*

$$(X \odot Y)(n) = \coprod_{i+j=n} X(i) \otimes Y(j) \otimes_{\Sigma_i \times \Sigma_j} I[\Sigma_n],$$

et où

$$\mathcal{U}(n) := \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus,  $I[\Sigma_n] = \coprod_{\sigma \in \Sigma_n} I_\sigma$ .

Ces deux structures sont importantes, mais pour définir les opérades, c'est de la structure monoïdale suivante dont on a besoin.

**Proposition 2.3.** *Il existe une structure de catégorie monoïdale  $(\mathcal{M}^\Sigma, \circ, \mathcal{J})$  où*

$$(X \circ Y)(n) = \coprod_{m \geq 0} X(m) \otimes_{\Sigma_m} Y^{\circ m}(n),$$

avec  $X$  et  $Y$  des suites symétriques. Et la suite symétrique  $\mathcal{J}$  est définie par

$$\mathcal{J}(n) := \begin{cases} I & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est utile de décortiquer la définition de  $(X \circ Y)(n)$ . On obtient

$$(X \circ Y)(n) = \coprod_{m \geq 1} X(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \coprod_{\underline{n} \in I_{m,n}} Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{n}}} I[\Sigma_n] \right)$$

si  $n > 0$ , et

$$(X \circ Y)(n) = X(n) \coprod_{m \geq 1} \left( \coprod_{m \geq 1} X(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \coprod_{\underline{n} \in I_{m,n}} Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{n}}} I[\Sigma_n] \right) \right)$$

si  $n = 0$ , sachant que

$I_{m,n} = \{\underline{n} = (n_1, \dots, n_m) \mid n_1 + \dots + n_m = n \text{ et } n_i \in \mathbb{N}\}$  (et donc  $I_{0,n} = \emptyset$ )

et que

$\Sigma_{\underline{n}} = \Sigma_{n_1} \times \dots \times \Sigma_{n_m}$ .

**Remarque 2.1.** *Si  $f : A \rightarrow X$  et  $g : B \rightarrow Y$  sont des morphismes de suites symétriques, alors  $f \circ g$  est défini de manière évidente.*

*Considérons maintenant le cas particulier de la catégorie  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ . Et supposons que  $A$  (respectivement  $B$ ) est inclu dans  $X$  (resp.  $Y$ ). De plus, supposons que  $f$  et  $g$  sont des morphismes de suites symétriques de modules gradués. Finalement, choisissons  $f$  et  $g$  tels qu'ils soient de degré  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors le morphisme  $f \circ g : A \circ B \rightarrow X \circ Y$ , de degré  $n$ , est défini par*

$$(f \circ g)(a \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_m) = f(a) \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_m$$

$$\begin{aligned}
&+(-1)^{na} a \otimes g(b_1) \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_m + \dots \\
&+(-1)^{n(a+b_1+\dots+b_{m-1})} a \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{m-1} \otimes g(b_m),
\end{aligned}$$

avec  $a \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_m \in (A \circ B)(k)$ .

Le produit  $\circ$  est appelé le produit de composition. Cette structure monoïdale permet déjà de définir ce qu'est une opérade. Mais juste avant de le faire, notons un lemme très utile lorsque l'on veut travailler de manière moins conceptuelle.

**Lemme 2.4.** *Soit  $X, Y$ , et  $Z$  des suites symétriques. Et soit*

$$f_{\underline{n}} : X(m) \otimes Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) \rightarrow Z(n)$$

*une famille de morphismes pour tout  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ . De plus supposons que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
X(m) \otimes Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) & \xrightarrow{1 \otimes \hat{\sigma}} & X(m) \otimes Y(n_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes Y(n_{\sigma^{-1}(m)}) \\
\downarrow \sigma \otimes 1 & & \downarrow f_{\sigma \underline{n}} \\
X(m) \otimes Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & Z(n) \\
& & \downarrow \sigma_{\underline{n}} \\
& & Z(n)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
X(m) \otimes Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & Z(n) \\
\downarrow 1 \otimes \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_m & & \downarrow \tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_m \\
X(m) \otimes Y(n_1) \otimes \dots \otimes Y(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & Z(n)
\end{array}$$

commutent pour tout  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , avec  $m, n \geq 0$ , pour tout  $\sigma \in \Sigma_m$ , et pour tout  $\tau_j \in \Sigma_{n_j}$ . Ici

- la permutation  $\sigma_{\underline{n}} \in \Sigma_n$  est définie de la façon suivante : on considère la partition  $\{\{1, \dots, n_1\}, \dots, \{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1, \dots, n\}\}$ , et  $\sigma_{\underline{n}}$  agit sur  $\{1, \dots, n\}$  en permutant les blocs de la partition,
- $(\tau_{n_1} \oplus \dots \oplus \tau_{n_m})$  est la permutation qui agit sur  $\{1, \dots, n_1\}$  par  $\tau_1$ , sur  $\{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$  par  $\tau_2$ , et ainsi de suite,
- $\sigma_{\underline{n}} = (n_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, n_{\sigma^{-1}(m)}) \in I_{m,n}$ .
- $\hat{\sigma}$  est l'isomorphisme de permutation qui agit de manière évidente sur tout objet de la forme  $C_1 \otimes \dots \otimes C_m$ .

Alors on peut assembler la famille de morphismes  $f_{\underline{n}}$  en un morphisme de suites symétriques

$$f : X \circ Y \rightarrow Z.$$

De plus, cette correspondance entre famille de morphismes et morphisme de suites symétriques est bijective.

Et comme promis, voilà la définition d'opéade.

**Définition 2.2.** Une opéade est un monoïde  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \gamma, \eta)$  dans la catégorie monoïdale  $(\mathcal{M}^\Sigma, \circ, \mathcal{J})$ .

La catégorie des opéades est notée  $\mathbf{Op}(\mathcal{M})$ , ou simplement  $\mathbf{Op}$ .

On peut décortiquer cette définition pour obtenir une définition équivalente plus terre-à-terre.

**Lemme 2.5.** Une opéade est une suite symétrique  $\mathcal{P}$  munie de morphismes

$$\gamma_{\underline{n}} : \mathcal{P}(m) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m) \rightarrow \mathcal{P}(n)$$

pour tout  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ , et munie d'un morphisme

$$I \rightarrow \mathcal{P}(1)$$

tels que certains diagrammes d'équivariance, d'associativité et d'unité (cf. [May97]) commutent.

Plus bas, on donne une explication intuitive de ce qu'est une opéade. Mais un avant-goût en est déjà donné par l'exemple suivant.

**Exemple 2.1.** Soit  $A$  et  $C$  des objets de  $\mathcal{M}$ . On définit des suites symétriques  $End(A)$  et  $CoEnd(C)$  en posant

$$End(A)(n) = Hom(A^{\otimes n}, A)$$

et

$$CoEnd(C)(n) = Hom(C, C^{\otimes n}),$$

$\Sigma_n$  agissant par permutation des facteurs dans la première (respectivement deuxième) variable. En jouant avec le couple adjoint  $\left( (- \otimes B), Hom(B, -) \right)$  pour certains  $B \in Ob(\mathcal{M})$  bien choisis, on obtient des morphismes

$$Hom(A^{\otimes m}, A) \otimes Hom(A^{\otimes n_1}, A) \otimes \dots \otimes Hom(A^{\otimes n_m}, A) \rightarrow Hom(A^{\otimes n}, A)$$

pour  $\underline{n} \in I_{m,n}$  et un morphisme

$$I \rightarrow Hom(A, A).$$

(Dans le cas des complexes de chaînes, les morphismes ci-dessus ont une description explicite évidente, puisque les éléments de  $Hom(A, B)$ , sont alors de "vraies" applications.)

Ces morphismes munissent  $End(A)$  d'une structure d'opéade, et cette opéade est appelée l'opéade des endomorphismes de  $A$ . De manière analogue, on peut munir  $CoEnd(C)$  d'une structure d'opéade, et cette opéade est appelée l'opéade des co-endomorphismes de  $C$ .

Une opéade vient avec différents objets qui lui sont associés. Les plus importants sont les algèbres, qui sont en fait la raison pour laquelle on s'intéresse aux opéades. Dans toute la suite de ce chapitre,  $\mathcal{P}$  est une opéade dans la catégorie  $\mathcal{M}$ .

**Définition 2.3.** Une algèbre sur  $\mathcal{P}$  (ou une  $\mathcal{P}$ -algèbre) est un objet  $A$  de  $\mathcal{M}$  qui est muni d'un morphisme d'opéades  $\theta : \mathcal{P} \rightarrow End(A)$ .

En utilisant le couple adjoint évident, on obtient la définition équivalente suivante.

**Lemme 2.6.** Une algèbre sur l'opérade  $\mathcal{P}$  est un objet  $A$  de  $\mathcal{M}$  muni d'une suite de morphismes

$$\theta_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A, \quad n \in \mathbb{N},$$

telle que les diagrammes d'équivariance, d'associativité et d'unité appropriés commutent.

Et les morphismes d'algèbres sont alors définis comme chacun s'y attend.

**Définition 2.4.** Un morphisme de  $\mathcal{P}$ -algèbres  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme  $f : A \rightarrow B$  dans  $\mathcal{M}$  qui respecte les morphismes de structure; autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{\theta_{n,A}} & A \\ \downarrow 1 \otimes f^{\otimes n} & & \downarrow f \\ \mathcal{P}(n) \otimes B^{\otimes n} & \xrightarrow{\theta_{n,B}} & B \end{array}$$

doit commuter pour tout  $n \geq 0$ . La catégorie des algèbres sur  $\mathcal{P}$  est notée  $\mathcal{P}\text{-alg}$ .

La définition d'une algèbre sur une opérade permet de dire ce que l'on pouvait déjà soupçonner après avoir défini l'opérade des endomorphismes : une opérade peut être vue comme un ensemble d'opérations génériques (au moins "moralement", puisque rien n'empêche de considérer des catégories qui ne sont pas concrètes). Plus précisément, le niveau  $n$  de l'opérade  $\mathcal{P}$  peut être vu comme un ensemble d'opérations génériques  $n$ -aires. Et la multiplication  $\gamma$  de  $\mathcal{P}$  code ce que l'on obtient si l'on compose  $p \in \mathcal{P}(m)$  avec  $p_1 \otimes \dots \otimes p_m \in \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m)$ , lorsque l'on regarde ces éléments de  $\mathcal{P}$  comme des opérations. Enfin, l'unité  $\eta$  de  $\mathcal{P}$  impose la présence de l'opération identité au niveau 1.

Mais comme le suggère l'opérade des co-endomorphismes, on peut aussi voir une opérade comme un ensemble de co-opérations. Plus précisément, on a la définition suivante.

**Définition 2.5.** Une coalgèbre sur  $\mathcal{P}$  (ou une  $\mathcal{P}$ -coalgèbre) est un objet  $C$  de  $\mathcal{M}$  qui est muni d'un morphisme d'opérades

$$\theta : \mathcal{P} \rightarrow \text{CoEnd}(C).$$

Comme dans le cas des algèbres, on peut décortiquer cette définition pour obtenir une définition équivalente moins conceptuelle et plus explicite.

**Lemme 2.7.** Une coalgèbre sur  $\mathcal{P}$  est un objet  $C$  de  $\mathcal{M}$  muni d'une suite de morphismes :

$$\mathcal{P}(n) \otimes C \xrightarrow{\theta_n} C^{\otimes n}, \quad n \geq 0,$$

qui font commuter les diagrammes d'équivariance, d'associativité, et d'unité appropriés.

Un morphisme de coalgèbres est un morphisme dans  $\mathcal{M}$  qui respecte la structure de coalgèbre, et la catégorie des coalgèbres sur une opérade  $\mathcal{P}$  est notée  $\mathcal{P}\text{-coalg}$ .

Voyons deux exemples d'opérades. Ces deux opérades sont très importantes et apparaissent souvent dans la suite de ce travail.

**Exemple 2.2.** L'opérade associative  $\mathcal{A}$  est définie, comme suite symétrique, par

$$\mathcal{A}(n) = \begin{cases} I[\Sigma_n] & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

avec l'action à droite standard de  $\Sigma_n$  sur  $\mathcal{A}(n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Pour définir la structure d'opérade de  $\mathcal{A}$ , il faut définir la permutation de "blocs". Soit  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , et  $\sigma \in \Sigma_m$ . Alors la permutation  $\sigma_{\underline{n}} \in \Sigma_n$  est définie de la façon suivante : on considère la partition  $\{\{1, \dots, n_1\}, \dots, \{n_1 + \dots + n_{m-1} + 1, \dots, n\}\}$ , et  $\sigma_{\underline{n}}$  agit sur  $\{1, \dots, n\}$  en permutant les blocs de la partition. La structure d'opérade de  $\mathcal{A}$  est donnée par la composition

$$I[\Sigma_m] \otimes I[\Sigma_{n_1}] \otimes \dots \otimes I[\Sigma_{n_m}] \xrightarrow{\cong} I[\Sigma_m \times \Sigma_{n_1} \times \dots \times \Sigma_{n_m}] \xrightarrow{\gamma_n} I[\Sigma_n],$$

où  $\gamma(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_m) = \sigma_{\underline{n}}(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)$ , pour  $\sigma \in \Sigma_m$  et  $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$  ( $(\sigma_{n_1} \oplus \dots \oplus \sigma_{n_m})$  est la permutation qui agit sur  $\{1, \dots, n_1\}$  par  $\sigma_1$ , sur  $\{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$  par  $\sigma_2$ , et ainsi de suite). Cette composition définit la multiplication de l'opérade, et l'unité est donnée par l'isomorphisme évident. Finalement, il reste à justifier la terminologie. En fait, il n'est pas difficile de voir que les (co)algèbres sur  $\mathcal{A}$  coïncident avec les (co)monoïdes (co)associatifs (sans (co-)unité). Les détails de cette affirmation sont laissés au lecteur, mais on peut immédiatement remarquer que tout (co)monoïde (co)associatif vient avec une unique (à permutation des variables près) (co)opération  $n$ -aire ( $n \geq 1$ ). En effet, avec une multiplication binaire associative et l'opération identité il n'y a qu'une seule manière d'obtenir une opération  $n$ -aire si l'on ne permute pas les variables. Ce qui correspond bien à la définition de  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 2.3.** L'opérade commutative  $\mathcal{C}$  est définie, comme suite symétrique, par

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} I & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Soit  $\underline{n} \in I_{m,n}$ . La structure d'opérade de  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\mathcal{C}(m) \otimes \mathcal{C}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(n_m) = I^{\otimes m+1} \xrightarrow{\cong} I = \mathcal{C}(n).$$

L'unité est l'isomorphisme évident. Et il reste à justifier la terminologie. A nouveau, il n'est pas difficile de voir que les (co)algèbres sur  $\mathcal{C}$  sont les (co)monoïdes (co)associatif (co)commutatifs (sans (co-)unité). Cela correspond bien à la définition de  $\mathcal{C}$ , puisqu'un tel (co)monoïde vient avec exactement une (co)opération  $n$ -aire,  $n \geq 1$ .

## Opérades par générateurs et relations

On va brièvement rappeler ici quelques résultats que l'on utilise dans les chapitres suivants. Ces résultats sont analogues à ceux que l'on peut trouver pour des objets algébriques familiers à tout mathématicien, et ils sont donc utilisés dans la suite sans aucune référence.

**Théorème 2.8.** Le foncteur  $U : \mathbf{Op} \rightarrow \mathcal{M}^\Sigma$  qui oublie la structure d'opérade admet un adjoint à gauche, noté  $F$ , et appelé le foncteur libre.

Très informellement, l'opérade libre sur une suite symétrique  $X$  est construite de la manière suivante : on regarde chaque générateur de  $X(n)$  comme étant un arbre (cf. [MSS02] ou [LV]) avec  $n$  entrées et exactement une sortie. On définit alors  $F(X)(m)$  comme étant engendré par l'ensemble des arbres à  $m$  entrées et une sortie que l'on peut construire en greffant (cf. [MSS02] ou [LV]) les arbres qui engendrent  $X$  les uns aux autres ; en respectant la règle qui dit que l'on peut greffer un

arbre sur un autre seulement en greffant une sortie sur une entrée. La multiplication de  $F(X)$  est alors définie par la greffe des arbres, et l'unité est l'arbre avec une entrée et une sortie. Pour une preuve "abstraite" qui évite les arbres, on peut consulter l'annexe de [Rez96].

Ci-dessus on s'est occupé des générateurs, il reste à s'occuper des relations.

**Définition 2.6.** Soit  $(\mathcal{P}, \gamma)$  une opérade et  $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$  une suite symétrique. On dit que  $\mathcal{I}$  est un idéal si

$$\mathcal{I}(m) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}(n)$$

et

$$\mathcal{P}(m) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_{i-1}) \otimes \mathcal{I}(n_i) \otimes \mathcal{P}(n_{i+1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}(n)$$

se factorisent comme

$$\mathcal{I}(m) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m) \rightarrow \mathcal{I}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$$

et comme

$$\mathcal{P}(m) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_{i-1}) \otimes \mathcal{I}(n_i) \otimes \mathcal{P}(n_{i+1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_m) \rightarrow \mathcal{I}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$$

respectivement. Cela doit être vrai pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(n_1, \dots, n_m) \in I_{m,n}$  et pour tout  $1 \leq i \leq m$ .

De plus, l'idéal opéradique  $\langle R \rangle$  engendré par une suite symétrique  $R \subset \mathcal{P}$  est le plus petit idéal opéradique qui contient  $R$ .

**Proposition 2.9.** Toute opérade admet une description par générateurs et relations. Autrement dit, si  $\mathcal{P}$  est une opérade, alors il existe une suite symétrique  $X$  et une sous-suite symétrique  $R \subset FX$  tels que  $\mathcal{P} = FX / \langle R \rangle$ , où  $\langle R \rangle$  est l'idéal opéradique engendré par  $R$ .

**Exemple 2.4.** Une description explicite de  $\mathcal{A}$  par générateurs et relations est donnée par  $\mathcal{A} = FX / \langle R \rangle$ , où  $X$  est la suite symétrique concentrée en niveau 2 et donnée par  $X(2) = \mathbb{Z}[\Sigma_2]\delta$ . Finalement,  $\langle R \rangle$  est l'idéal opéradique engendré par la suite symétrique  $R$  qui est concentré en niveau 3 :  $R(3)$  est le  $\mathbb{Z}[\Sigma_3]$ -module libre engendré par  $\gamma(\delta \otimes (1 \otimes \delta)) - \gamma(\delta \otimes (\delta \otimes 1))$ , où  $\gamma$  est la multiplication de  $FX$ .

Pour l'opérade commutative aussi, il existe une description explicite et minimale en terme de générateurs et relations. En effet,  $\mathcal{C} = FY / \langle S \rangle$ , où  $Y$  est concentré en niveau 2 :  $Y(2) = \mathbb{Z}\mu$ , muni de l'action triviale de  $\Sigma_2$ . Et  $S$  est concentré en niveau 3 :  $S(3) = \gamma(\mu \otimes (1 \otimes \mu)) - \gamma(\mu \otimes (\mu \otimes 1))$ , où  $\gamma$  est la multiplication de  $FY$ .

Finalement, spécialisons au cas  $\mathcal{M} = \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ .

**Lemme 2.10.** Soit  $X$  une suite symétrique et  $(FX, d)$  une opérade semi-libre (i.e., la différentielle n'est pas nécessairement librement induite par la différentielle de  $X$ ). On a alors que  $d$  est entièrement déterminée par sa restriction  $d : X \rightarrow FX$ .

Soit  $\mathcal{P}$  une opérade et  $g : X \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme de suites symétriques. Alors le morphisme d'opérades  $G : FX \rightarrow \mathcal{P}$ , induit par  $g$ , commute avec la différentielle si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & \mathcal{P} \\ \downarrow d & & \downarrow d_{\mathcal{P}} \\ FX & \xrightarrow{G} & \mathcal{P}. \end{array}$$

## Structure de catégorie modèle sur la catégorie des opérades

Le théorème suivant se prouve avec les méthodes développées dans [BM03].

**Théorème 2.11.** *La catégorie des opérades (sur  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ ) qui sont nulles en niveau 0 forme une catégorie modèle si on choisit*

- les quasi-isomorphismes d'opérades comme équivalences faibles,
- les surjections (en degré strictement positif) d'opérades comme fibrations.

## 2.2 Modules sur une opérade

Rappelons que dans ce chapitre,  $\mathcal{P}$  est une opérade sur la catégorie  $\mathcal{M}$ .

Les algèbres sur une opérade sont la raison même de l'introduction de la notion d'opérade. Mais une autre notion associée à celle d'opérade prend de plus en plus d'importance (cf. [HPSa] et [Fre09] par exemple). C'est celle de module sur une opérade. En effet, comme une opérade peut être définie comme étant un monoïde, on obtient immédiatement une notion de module sur une opérade.

**Définition 2.7.** *Un module à gauche sur une opérade  $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{P}})$  est une suite symétrique  $M$  qui est munie d'un morphisme  $\mathcal{P} \circ M \xrightarrow{\rho} M$  tel que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ M & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{P}} \circ 1} & \mathcal{P} \circ M \\ \downarrow 1 \circ \rho & & \downarrow \rho \\ \mathcal{P} \circ M & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} \circ M & & \\ \downarrow \eta_{\mathcal{P}} \circ 1 & \searrow \cong & \\ \mathcal{P} \circ M & \xrightarrow{\rho} & M. \end{array}$$

Les morphismes de modules à gauche sont les morphismes de suites symétriques qui respectent la structure de module à gauche. Et la catégorie des modules à gauche est notée  ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Mod}$ .

Les modules à droite sur  $\mathcal{P}$  sont définis de manière analogue. Et si  $(\mathcal{Q}, \gamma_{\mathcal{Q}}, \eta_{\mathcal{Q}})$  est une deuxième opérade, alors les  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -bimodules sont des  $\mathcal{P}$ -modules à gauche munis d'une structure de  $\mathcal{Q}$ -module à droite tels que les deux structures soient compatibles. Ces deux catégories sont notées  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  et  ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{Q}}$  respectivement.

**Remarque 2.2.** *La définition de module sur une opérade donnée dans [MSS02] n'est pas équivalente à celle donnée ici. Pour la notion de module sur une opérade au sens utilisé dans ce travail, il vaut donc mieux consulter [HPSa] et [Fre09].*

En fait, comme cela est expliqué dans [HPSa], on peut voir ces modules comme des généralisations des (co)algèbres sur une opérade. En particulier, cet article présente le résultat suivant.

**Proposition 2.12.** *Le foncteur  $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\Sigma}$  défini par  $\mathcal{T}(C)(n) = C^{\otimes n}$  est à valeurs dans  ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}$  et peut se restreindre en un foncteur plein et fidèle  $\mathcal{T} : \mathcal{P}\text{-coalg} \rightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$ .*



**Preuve :** On ne rappelle pas la preuve qui n'est pas difficile, mais comme cela est important par la suite, on rappelle la définition de la structure de  $\mathcal{A}$ -module à gauche de  $\mathcal{T}(C)$ . Le morphisme de structure

$$\mathcal{A}(m) \otimes C^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes C^{\otimes n_m} \xrightarrow{\rho} C^{\otimes n}, \quad \underline{n} \in I_{m,n},$$

de  $\mathcal{T}(C)$  est défini par

$$\rho(a \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_n) = c_1 \otimes \dots \otimes c_n.$$

□

De manière semblable au cas des modules sur un anneau, la catégorie des modules sur une opérade admet un foncteur libre dont le but est la catégorie des suites symétriques.

**Proposition 2.13.**

- Le foncteur oubli  $U : {}_{\mathcal{P}}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{M}^{\Sigma}$  admet un adjoint à gauche, noté  $F$  et appelé le foncteur libre. Ce foncteur est défini par  $F(X) = \mathcal{P} \circ X$ , pour  $X$  une suite symétrique, et la structure de  $\mathcal{P}$ -module à gauche est donnée par la multiplication de  $\mathcal{P}$ .
- Le foncteur libre pour les modules à droite sur  $\mathcal{P}$  est défini par  $F(X) = X \circ \mathcal{P}$ .
- Le foncteur libre pour les bimodules sur  $\mathcal{P}$  est défini par  $F(X) = \mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P}$ .

Comme dans le cas des opérades, spécialisons au cas  $\mathcal{M} = \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ . On a alors le lemme suivant, qui est valable aussi pour les modules à droite/gauche sur  $\mathcal{P}$  en faisant les modifications évidentes dans l'énoncé.

**Lemme 2.14.** Soit  $X$  une suite de modules gradués. Et soit  $d : X \rightarrow \mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P}$  un morphisme de suites symétriques de degré  $-1$ . On a alors que  $\hat{d} = (\gamma_{\mathcal{P}} \circ 1_X \circ \gamma_{\mathcal{P}})(d_{\mathcal{P}} \circ \delta \circ d \circ \delta_{\mathcal{P}})$  respecte la structure de  $\mathcal{P}$ -bimodule de  $\mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P}$ . Et  $\hat{d}$  est une différentielle si et seulement si  $(d_{\mathcal{P}} \circ \delta \circ d \circ \delta_{\mathcal{P}})d = 0$ .

Réciproquement, si  $(\mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P}, d)$  est un  $\mathcal{P}$ -bimodule semi-libre (i.e., la différentielle n'est pas nécessairement librement engendrée par la différentielle de  $X$ ) alors la différentielle est entièrement déterminée par sa restriction  $d : X \rightarrow \mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P}$ .

Finalement, soit  $g : X \rightarrow M$  un morphisme de suites symétriques, avec  $M$  un  $\mathcal{P}$ -bimodule. Le morphisme de bimodules  $G : \mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P} \rightarrow M$  engendré par  $g$  commute avec la différentielle si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow d & & \downarrow d_M \\ \mathcal{P} \circ X \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{G} & M \end{array}$$

commute.

## Limites et colimites dans la catégorie des modules à droite sur une opérade

Le théorème suivant se trouve dans [Fre09].

**Théorème 2.15.** Soit  $\mathcal{P}$  une opérade dans la catégorie  $\mathcal{M}$ . Le foncteur oubli  $U : \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{M}^{\Sigma}$  crée les limites et les colimites.

Autrement dit, il suffit de trouver la (co)limite d'un foncteur quelconque  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  dans la catégorie des suites symétriques pour obtenir la suite-symétrique sous-jacente à la (co)limite dans la catégorie des modules à droite sur  $\mathcal{P}$ .

## Structure de catégorie modèle sur la catégorie des modules à droite sur une opérade

Dans le projet de livre déjà cité pour le théorème ci-dessus, B. Fresse a récemment montré que sous certaines conditions, la catégorie des modules à droite sur une opérade fixée est munie d'une structure de catégorie modèle.

L'une de ces conditions est évidemment que la catégorie de base soit elle-même une catégorie modèle. On suppose donc que  $\mathcal{M}$  est munie d'une structure de catégorie modèle de génération cofibrante compatible avec la structure monoïdale. Le théorème prouvé dans [Fre09] est alors le théorème suivant.

**Théorème 2.16.** *Soit  $\mathcal{P}$  une opérade telle que  $\mathcal{P}(n)$  est cofibrant dans  $\mathcal{M}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La catégorie  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  est une catégorie modèle si on définit les fibrations (respectivement les équivalences faibles) comme étant les morphismes de  $\mathcal{P}$ -modules à droite qui sont des fibrations (resp. des équivalences faibles) dans  $\mathcal{M}$  en chaque niveau.*

*De plus,  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  est une catégorie modèle propre si  $\mathcal{M}$  l'est.*

## 2.3 Structure de catégorie monoïdale

Les (co)algèbres sur une opérade, les (bi)modules sur une opérade admettent une structure de catégorie monoïdale lorsque certaines conditions sont satisfaites. C'est ce que l'on rappelle maintenant.

### Opérides de Hopf

Commençons par rappeler la définition d'une opérade de Hopf.

**Définition 2.8.** *Une opérade de Hopf est une opérade  $\mathcal{P}$  munie*

- *d'un morphisme d'opérides coassociatif  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$*
- *d'un morphisme d'opéride  $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}$  qui est une co-unité pour  $\Delta$ .*

*La catégorie des opérides de Hopf est notée **HopfOp**.*

Pour que cette définition ait un sens, il faut remarquer le lemme suivant.

**Lemme 2.17 ([HPSa]).** *Soit  $V, X, Y$  et  $Z$  des suites symétriques. Il existe une transformation naturelle*

$$\iota : (V \otimes X) \circ (Y \otimes Z) \rightarrow (V \circ Y) \otimes (X \circ Z)$$

*définie par*

$$\iota(v \otimes x \otimes (y_1 \otimes z_1) \otimes (y_2 \otimes z_2) \otimes \dots \otimes (y_m \otimes z_m)) = \pm (v \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m) \otimes (x \otimes z_1 \otimes \dots \otimes z_m),$$

*le signe étant déterminé par la règle de Koszul (rappelé dans l'annexe).*

Et on vérifie aisément que  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$  est une opérade si  $\mathcal{P}$  en est une (en fait, le produit tensoriel niveau muni la catégorie des opérides d'une structure symétrique monoïdale et une opérade de Hopf est alors un comonoïde dans cette catégorie). Et la proposition suivante, bien connue des experts, donne la première partie de ce qui a été annoncé.

**Proposition 2.18.** Soit  $(\mathcal{P}, \Delta_{\mathcal{P}}, \varepsilon_{\mathcal{P}})$  et  $(\mathcal{Q}, \Delta_{\mathcal{Q}}, \varepsilon_{\mathcal{Q}})$  des opérades de Hopf dans la catégorie  $\mathcal{M}$ . Alors

- $(\mathcal{P}\text{-alg}, \otimes, I)$  est une catégorie monoïdale (symétrique si  $\Delta_{\mathcal{P}}$  est cocommutatif),
  - $(\mathcal{P}\text{-coalg}, \otimes, I)$  est une catégorie monoïdale (symétrique si  $\Delta_{\mathcal{P}}$  est cocommutatif),
  - $({}_{\mathcal{P}}\text{Mod}, \otimes, \mathcal{C})$  est une catégorie monoïdale (symétrique si  $\Delta_{\mathcal{P}}$  est cocommutatif),
  - $(\text{Mod}_{\mathcal{Q}}, \otimes, \mathcal{C})$  est une catégorie monoïdale (symétrique si  $\Delta_{\mathcal{Q}}$  est cocommutatif),
  - $({}_{\mathcal{P}}\text{Mod}_{\mathcal{Q}}, \otimes, \mathcal{C})$  est une catégorie monoïdale (symétrique si  $\Delta_{\mathcal{P}}$  et  $\Delta_{\mathcal{Q}}$  sont cocommutatifs).
- De plus,  $T : \mathcal{P}\text{-coalg} \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{P}}$  respecte la structure monoïdale.

**Preuve :** (i) Si  $A$  et  $B$  sont des  $\mathcal{P}$ -algèbres, alors la structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre de  $A \otimes B$  est définie par la composition suivante :

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{P}}} \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \xrightarrow{m_A \otimes m_B} \text{End}(A) \otimes \text{End}(B) \xrightarrow{f} \text{End}(A \otimes B),$$

où

- $m_A : \mathcal{P} \rightarrow \text{End}(A)$  (respectivement  $m_B$ ) est la structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre de  $A$  (resp.  $B$ ),
- $f$  est le morphisme que l'on construit en jouant avec le couple de foncteurs adjoints  $(- \otimes \mathcal{C}, \text{Hom}(\mathcal{C}, -))$  pour certains  $\mathcal{C}$  bien choisis.

La structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre de  $I$  est définie avec  $\varepsilon_{\mathcal{P}}$ . Et  $(\mathcal{P}\text{-alg}, \otimes, I)$  est symétrique monoïdale parce que  $(\mathcal{M}, \otimes, I)$  l'est.

(ii) Le cas des coalgèbres sur  $\mathcal{P}$  se traite de manière analogue au cas des algèbres sur  $\mathcal{P}$ .

(iii) Si  $(M, \rho_M)$  et  $(N, \rho_N)$  sont des  $\mathcal{P}$ -modules à gauche, alors la structure de  $\mathcal{P}$ -module à gauche de  $M \otimes N$  est définie comme étant la composition

$$(M \otimes N) \circ \mathcal{P} \xrightarrow{1 \circ \Delta_{\mathcal{P}}} (M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \xrightarrow{\iota} (M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\rho_M \otimes \rho_N} M \otimes N.$$

La structure de  $\mathcal{P}$ -module de  $\mathcal{C}$  est défini avec  $\varepsilon_{\mathcal{P}}$  et avec la structure d'opérade de  $\mathcal{C}$ . Et  $({}_{\mathcal{P}}\text{Mod}, \otimes, \mathcal{C})$  est symétrique monoïdale parce que  $(\mathcal{M}, \otimes, I)$  l'est.

(iv) Le cas de  $\text{Mod}_{\mathcal{Q}}$  et de  ${}_{\mathcal{P}}\text{Mod}_{\mathcal{Q}}$  se traite comme le cas des modules à gauche.  $\square$

**Exemple 2.5.** Soit  $n \geq 0$ . Définissons un morphisme de  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -modules à droite

$$\Delta_n : \mathbb{Z}[\Sigma_n] \xrightarrow{\Delta_n} \mathbb{Z}[\Sigma_n] \otimes \mathbb{Z}[\Sigma_n]$$

en posant  $\Delta_n(1) = 1 \otimes 1$ . Il n'est pas difficile de voir que si on définit un morphisme

$$\Delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

comme étant le morphisme  $\Delta_n$  en niveau  $n$ , alors  $\Delta_{\mathcal{A}}$  munit l'opérade associative  $\mathcal{A}$  d'une structure d'opérade de Hopf.

Le fait suivant est également facile à vérifier. Considérons l'isomorphisme  $I \xrightarrow{\Delta} I \otimes I$ . Si on définit un morphisme de suites symétriques

$$\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$$

comme étant le morphisme qui coïncide avec  $\Delta$  en tout niveau (sauf au niveau 0), alors  $\Delta_{\mathcal{C}}$  muni l'opérade commutative  $\mathcal{C}$  d'une structure d'opérade de Hopf.



# Chapitre 3

## La catégorie **DCSH**

### 3.1 La catégorie **DCSH**

La catégorie **DCSH** (category of Differential Coalgebras with Strongly Homotopy co-multiplicative maps) se trouve en arrière-fond de l'idée de coalgèbre d'Alexander-Whitney et on utilise donc tout ce chapitre pour introduire cette catégorie. La catégorie **DCSH** est apparue lorsqu'il a été remarqué que certains morphismes (importants en topologie) entre coalgèbres coassociatives ne respectent pas la structure de coalgèbres, mais presque : essentiellement, ils respectent la structure de coalgèbres à une suite d'homotopies près. Il a donc fallu augmenter le "nombre" de morphismes acceptés dans la catégorie des coalgèbres. C'est précisément ce que fait la catégorie **DCSH**. Pour en savoir plus sur les origines et l'utilisation de cette catégorie, le lecteur intéressé peut consulter [GM74], [Mun74], et [HS70].

Ici, plutôt que de présenter **DCSH** comme cela est fait dans ces articles, on va utiliser un langage opéradique développé et appliqué au cas de **DCSH** dans [HPSa]. Toutes les idées qui suivent sont tirées de cet article. Malgré cela, on donne à nouveau des preuves complètes de la plupart des résultats qui sont énoncés ici. Il y a deux raisons à ce choix. D'une part, le cadre choisi par K. Hess, P.-E. Parent et J. Scott est très général, ce qui rend son accès difficile. En tout cas plus difficile que pour le rappel exposé ici. D'autre part, [HPSa] ne traite pas les signes, alors que ces signes sont déterminés avec grande précision dans le présent travail (voir la définition 3.5, la proposition 3.3, et le théorème 4.4). Finalement, notons que [HPSa] ne parle pas de la condition de finitude locale qui fait la différence entre la catégorie **DCSH** au sens classique et la catégorie **DCSH** au sens opéradique. Mais si elle est mentionnée dans ce travail, c'est sur l'indication des auteurs de [HPSa].

Soit  $(\mathcal{M}, \circ, J)$  une catégorie monoïdale (co)complète (le lecteur peut penser que cette catégorie est la catégorie des suites symétriques dans  $\mathcal{M}$  munie du produit de composition ;  $\mathcal{M}$  étant la catégorie utilisée dans le chapitre précédent). Commençons avec la définition de co-anneau.

**Définition 3.1.** Soit  $A$  un monoïde dans  $\mathcal{M}$ . Un  $A$ -co-anneau est un comonoïde dans la catégorie monoïdale  $({}_A\mathbf{Mod}_A, \circ, A)$ .

Maintenant, ajoutons des morphismes à la catégorie des  $A$ -modules à droite (respectivement à la catégorie des  $A$ -bimodules).

**Définition 3.2.** Soit  $(\mathcal{F}, \psi, \varepsilon)$  un  $A$ -co-anneau. La catégorie  $\mathbf{Mod}_{(A, \mathcal{F})}$  est la catégorie dont les objets sont les  $A$ -modules à droite et dont les morphismes d'un  $A$ -module à droite  $M$  vers un  $A$ -module à droite  $N$  sont donnés par  $\mathbf{Mod}_{(A, \mathcal{F})}(M, N) = \mathbf{Mod}_A(M \circ_A \mathcal{F}, N)$ .

Si  $O$  est un troisième  $A$ -module à droite, et si  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow O$  sont des morphismes dans  $\mathbf{Mod}_{(A,\mathcal{F})}$ , alors la composition de  $f$  et  $g$ , notée  $f \circ_{\psi} g$ , est définie comme étant la composition

$$M \circ_A \mathcal{F} \xrightarrow{1 \circ_A \psi} M \circ_A \mathcal{F} \circ_A \mathcal{F} \xrightarrow{f \circ_A 1_{\mathcal{F}}} N \circ_A \mathcal{F} \xrightarrow{g} O.$$

Cette catégorie est appelée la catégorie des  $A$ -modules gouvernés par  $\mathcal{F}$ .

**Définition 3.3.** Soit  $A$  et  $B$  des monoïdes dans  $\underline{\mathcal{M}}$ . Soit  $(\mathcal{F}, \psi, \varepsilon)$  un  $A$ -co-anneau. La catégorie  ${}_B \mathbf{Mod}_{(A,\mathcal{F})}$  est la catégorie dont les objets sont les  $(B, A)$ -bimodules et dont les morphismes d'un  $(B, A)$ -bimodule  $M$  vers un  $(B, A)$ -bimodule  $N$  sont donnés par  ${}_B \mathbf{Mod}_{(A,\mathcal{F})}(M, N) = {}_B \mathbf{Mod}_A(M \circ_A \mathcal{F}, N)$ .

La composition des morphismes se fait comme dans la définition précédente.

Cette catégorie est appelée la catégorie des  $(B, A)$ -bimodules gouvernés par  $\mathcal{F}$ .

La proposition suivante dit que l'on a en effet ajouté des morphismes.

**Proposition 3.1.** Supposons que  $\mathcal{F}$  soit co-augmenté par  $\eta : A \rightarrow \mathcal{F}$ , un morphisme de  $A$ -modules à gauche. Le foncteur  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_{(A,\mathcal{F})}$  qui

- est l'identité sur les objets

- envoie un morphisme de  $A$ -modules à droite  $M \xrightarrow{f} N$  sur le morphisme  $M \circ_A \mathcal{F} \xrightarrow{f \circ \varepsilon} N$  est fidèle.

Comme corollaire, on a que la restriction de ce foncteur en un foncteur  ${}_A \mathbf{Mod}_A \rightarrow {}_A \mathbf{Mod}_{(A,\mathcal{F})}$  est également fidèle.

**Preuve :** Soit  $f, g : M \rightarrow N$  des morphismes de  $A$ -modules à droite tels que  $f(1 \circ_A \varepsilon) = g(1 \circ_A \varepsilon)$ . La co-augmentation permet alors d'écrire  $f = f(1 \circ_A \varepsilon)(1 \circ_A \eta) = g(1 \circ_A \varepsilon)(1 \circ_A \eta) = g$ . □

Spécialisons au cas de la catégorie monoïdale  $(\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^{\Sigma}, \circ, \mathcal{J})$ . Considérons une opérade  $\mathcal{P}$  et un  $\mathcal{P}$ -co-anneau  $\mathcal{F}$  et rappelons que  $\mathcal{A}$  est l'opérade associative.

**Définition 3.4.** La catégorie  $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ -**coalg** est la catégorie dont les objets sont les  $\mathcal{P}$ -coalgèbres et dont l'ensemble des morphismes de  $C$  vers  $D$  est  ${}_A \mathbf{Mod}_{(\mathcal{P},\mathcal{F})}(\mathcal{T}(C), \mathcal{T}(D))$ . Cette catégorie est appelée la catégorie des  $\mathcal{P}$ -coalgèbres gouvernées par  $\mathcal{F}$ .

Un co-anneau sur l'opérade associative joue un rôle très important dans ce travail. C'est le co-anneau d'Alexander-Whitney.

**Définition 3.5.** Le co-anneau d'Alexander-Whitney est le  $\mathcal{A}$ -co-anneau  $\mathcal{F}_{AW} = (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d, \psi, \varepsilon)$  où

- $X(0) = 0$ ,
- $X(n) = \mathbb{Z}[\Sigma_n]x_{n-1}$  avec  $n \geq 1$  et le degré de  $x_{n-1}$  est  $n - 1$ ,
- $d$  est la différentielle définie par

$$d(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} [\delta \otimes (x_i \otimes x_{n-i-1}) - x_{n-1} \otimes (1^{\otimes i} \otimes \delta \otimes 1^{\otimes n-i-1})],$$

où  $\delta$  est un générateur de  $\mathcal{A}(2)$ ,

- $\psi$  est défini par

$$\psi(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i \in I_{k,n+1}} x_{k-1} \otimes (x_{i_1-1} \otimes \dots \otimes x_{i_k-1}),$$

où  $I_{k,n+1}$  est l'ensemble des  $k$ -partitions de  $n+1$  (cf. la proposition 2.3),

- $\varepsilon$  est défini comme étant nul sur  $x_n$  avec  $n > 0$  et  $\varepsilon(x_0) = 1$ .

De plus il existe un morphisme coassociatif explicite de  $\mathcal{A}$ -bimodules  $\Delta : \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{F}_{AW} \otimes \mathcal{F}_{AW}$ . Ce morphisme est défini par

$$\Delta(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i \in I_{k,n+1}} \left( x_{k-1} \otimes (\delta^{(i_1)} \otimes \dots \otimes \delta^{(i_k)}) \right) \otimes \left( \delta^{(k)} \otimes (x_{i_1-1} \otimes \dots \otimes x_{i_k-1}) \right),$$

où  $\delta^{(1)} = \delta$  et  $\delta^{(i)} = \gamma_{\mathcal{A}}(\delta \otimes \delta^{(i-1)} \otimes 1)$ . Par conséquent, le co-anneau d'Alexander-Whitney est muni d'une structure de comonoïde niveau (i.e., c'est un comonoïde pour la structure monoïdale niveau).

Et l'extension de l'inclusion  $\mathcal{J} \rightarrow X$  en un morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}_{AW}$  coaugmente  $\mathcal{F}_{AW}$ .

C'est de ce co-anneau d'Alexander-Whitney que l'on a besoin pour définir la catégorie **DCSH**.

**Définition 3.6.** La catégorie **DCSH** est la catégorie  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW}) - \mathbf{coalg}$ .

On décortique maintenant la définition des morphismes **DCSH**, mais pour faire ceci on a besoin du lemme suivant, qui a été indiqué à l'auteur par K. Hess.

**Lemme 3.2.** Soit  $C$  et  $D$  des modules gradués et  $X$  une suite symétrique de modules gradués. Soit  $\mathfrak{D}_{C,D}$  l'ensemble des suites de la forme  $f = \{f_n : C \otimes X(n) \rightarrow D^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$  telles que  $f_n$  est de degré 0 et telles que les diagrammes d'équivariance appropriés commutent, de telle sorte que l'on puisse assembler les morphismes

$$f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_m} : C^{\otimes n} \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) \cong C \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes C \otimes X(n_m) \xrightarrow{f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_m}} D^{\otimes n},$$

avec  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , en un morphisme de suites symétriques  $\xi(f) : \mathcal{T}(C) \circ X \rightarrow \mathcal{T}(D)$ . Alors  $\xi$  est une bijection

$$\mathfrak{D}_{C,D} \cong {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}(\mathcal{T}(C) \circ X, \mathcal{T}(D)),$$

où la structure de  $\mathcal{A}$ -module est donnée dans la proposition 2.12.

**Preuve :** (i) Il est évident que  $\xi(f)$  est un morphisme de  $\mathcal{A}$ -module à gauche par définition de la structure de  $\mathcal{A}$ -module à gauche dont sont munis  $\mathcal{T}(C)$  et  $\mathcal{T}(D)$ .

(ii) L'injectivité de  $\xi$  est assurée par le lemme 2.4.

(iii) Il reste à voir la surjectivité. Soit

$f : \mathcal{T}(C) \circ X \rightarrow \mathcal{T}(D)$  un morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche. En particulier, on en extrait un morphisme

$$C^{\otimes m} \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) \xrightarrow{f_{\underline{n}}} D^{\otimes n_1 + \dots + n_m}, \quad \forall \underline{n} \in I_{m,n}.$$

Comme  $f$  respecte la structure de module à gauche, on a en particulier que

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes C \otimes X(n_m) & \xrightarrow{f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_m}} & D^{\otimes n_1 + \dots + n_m} \\ \downarrow \rho(1 \otimes -) & & \downarrow = \\ C^{\otimes m} \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & D^{\otimes n_1 + \dots + n_m} \end{array}$$

commute, ce qui entraîne la surjectivité. Dans le diagramme ci-dessus,  $\rho$  est l'action à gauche de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{T}(C)$ .  $\square$

**Proposition 3.3.** *Soit  $C$  et  $D$  des coalgèbres (de chaînes) coassociatives. Et soit  $\mathfrak{E}_{C,D}$  l'ensemble des suites  $\{f_n : C \rightarrow D^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$  telles que  $f_n$  soit de degré  $n - 1$  et telles que la relation*

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(f_j \otimes f_{n-j})\Delta_C - (Id^{\otimes j-1} \otimes \Delta_D \otimes Id^{\otimes n-j-1})f_{n-1}] = f_n d_C + (-1)^n d_{D^{\otimes n}} f_n$$

soit satisfaite pour tout  $n \geq 1$ .

Alors il existe une bijection  $\mathbf{DCSH}(C, D) \cong \mathfrak{E}_{C,D}$ .

**Preuve :** On définit une application

$$\mathbf{DCSH}(C, D) = {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}(C) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}, \mathcal{T}(D)) \xrightarrow{\xi} \mathfrak{E}_{C,D}$$

en posant  $\xi(f) = \{f_n = f \circ (- \otimes x_{n-1}) : C \rightarrow C \otimes X(n) \rightarrow D^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$ . Ensuite, il faut voir que  $Im(\xi) \subset \mathfrak{E}_{C,D}$ . Il est évident que  $f_n$  est de degré  $n - 1$ . Il reste à vérifier que la famille de relations est satisfaite. Pour cela, il faut utiliser la commutativité du diagramme suivant (et ne pas oublier la règle de Koszul, qui est rappelée dans A.1) :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n+1) & \xrightarrow{f} & D^{\otimes n+1} \\ \downarrow d & & \downarrow d_{D^{\otimes n+1}} \\ C \otimes (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n+1) & \xrightarrow{f} & D^{\otimes n+1} \end{array}$$

pour tout  $n \geq 0$ . D'une part, on a

$$d_{D^{\otimes n+1}} f(c \otimes x_n) = (-1)^{|c|n} d_{D^{\otimes n+1}} f_{n+1}(c),$$

$|c|$  étant le degré d'un élément homogène  $c$  de  $C$ . Et d'autre part on a

$$\begin{aligned} fd(c \otimes x_n) &= f(d_C(c) \otimes x_n + (-1)^{|c|} c \otimes d(x_n)) \\ &= (-1)^{(|c|-1)n} f_{n+1}(d_C(c)) + (-1)^{|c|} f \left( \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} [c \otimes \delta \otimes (x_i \otimes x_{n-i-1}) \right. \\ &\quad \left. - c \otimes x_{n-1} \otimes (1^{\otimes i} \otimes \delta \otimes 1^{\otimes n-i-1}) \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} (-1)^{(|c|-1)n} f_{n+1}(d_C(c)) + (-1)^{|c|} f \left( \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} [\Delta_C(c) \otimes (x_i \otimes x_{n-i-1}) \right. \\ &\quad \left. - c \otimes x_{n-1} \otimes (1^{\otimes i} \otimes \delta \otimes 1^{\otimes n-i-1}) \right] \\ &\stackrel{(**)}{=} (-1)^{(|c|-1)n} f_{n+1}(d_C(c)) + (-1)^{|c|} f \left( \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \left[ \sum_j c_j \otimes c^j \otimes (x_i \otimes x_{n-i-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c \otimes x_{n-1} \otimes (1^{\otimes i} \otimes \delta \otimes 1^{\otimes n-i-1}) \right] \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\stackrel{(***)}{=} (-1)^{(|c|-1)n} f_{n+1}(d_C(c)) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} [(-1)^{|c|n} (f_{i+1} \otimes f_{n-i}) \Delta_C(c) \\ &\quad - (-1)^{|c|n} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-i-1}) f_n(c)]. \end{aligned}$$

L'égalité (\*) utilise l'isomorphisme  $\mathcal{T}(C) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \cong \mathcal{T}(C) \circ X \circ \mathcal{A}$ . L'égalité (\*\*) utilise la notation  $\Delta_C(c) = \sum_j c_j \otimes c^j$ . Et pour l'égalité (\*\*\*) on utilise le calcul

$$\begin{aligned} f(c_j \otimes c^j \otimes x_i \otimes x_{n-i-1}) &= (-1)^{i|c^j|} f(c_j \otimes x_i) \otimes f(c^j \otimes x_{n-i-1}) \\ &= (-1)^{i|c^j|+i|c_j|+(n-i-1)|c^j|} f_{i+1}(c_j) \otimes f_{n-i}(c^j) \\ &= (-1)^{i|c^j|+i|c_j|+(n-i-1)|c^j|+(n-i-1)|c_j|} (f_{i+1} \otimes f_{n-i})(c_j \otimes c^j) \\ &= (-1)^{(n-1)|c|} (f_{i+1} \otimes f_{n-i})(c_j \otimes c^j), \end{aligned}$$

où la première égalité est vraie par le lemme précédent.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} &(-1)^{|c|n} d_{D^{\otimes n+1}} f_{n+1}(c) = (-1)^{(|c|-1)n} f_{n+1}(d_C(c)) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} [(-1)^{|c|n} (f_{i+1} \otimes f_{n-i}) \Delta_C(c) - (-1)^{|c|n} (1^{\otimes i} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-i-1}) f_n(c)]. \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité par  $(-1)^{n+1+|c|n}$  et en faisant courir  $i$  de 1 à  $n$  plutôt que de 0 à  $n-1$ , on obtient la relation voulue. Et donc  $Im(\xi) \subset \mathfrak{E}_{C,D}$ .

Il reste à voir que cette flèche est bijective, et pour cela on définit une flèche

$$\xi^{-1} : \mathfrak{E}_{C,D} \rightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}(C) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}, \mathcal{T}(D))$$

en posant  $\xi^{-1}(\{f_n\}_{n \geq 1}) = f$  où  $f$  est défini comme suit : pour toute partition  $\underline{n} \in I_{m,n}$  on considère la composition

$$C^{\otimes n} \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) \xrightarrow{\cong} C \otimes X(n_1) \otimes \dots \otimes C \otimes X(n_m) \xrightarrow{f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_m}} D^{\otimes n_1 + \dots + n_m}.$$

Et il est évident que l'on peut assembler ces morphismes en un morphisme  $\mathcal{T}(C) \circ X \rightarrow \mathcal{T}(D)$  de suites symétriques de modules gradués. On peut évidemment l'étendre en un morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules à droite  $\mathcal{T}(C) \circ X \circ \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}(D)$ , et  $f$  est défini comme étant ce morphisme. Par le lemme précédent on a que  $f$  respecte la structure de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche, et il reste à voir que  $f$  respecte aussi la différentielle. Autrement dit, il faut voir que

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n) & \xrightarrow{f} & D^{\otimes n+1} \\ \downarrow d & & \downarrow d_{D^{\otimes n+1}} \\ C \otimes (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{f} & D^{\otimes n+1} \end{array}$$

commute pour tout  $n \geq 0$ , ce qui se fait en lisant à "l'envers" la preuve précédente concernant ce diagramme.

Il reste alors à voir que la notation pour  $\xi^{-1}$  est justifiée, ce qui n'est pas difficile.  $\square$

Cette proposition donne une définition intuitive de ce qu'est un morphisme dans la catégorie **DCSH**. En effet, pour  $n = 1$ , la relation ci-dessus dit que  $f_1$  est un morphisme de complexes de chaînes. Et lorsque  $n = 2$ , cette relation dit que  $f_2$  est une homotopie entre  $\Delta_D f_1$  et  $(f_1 \otimes f_1) \Delta_C$ . Autrement dit,  $f_1$  est un morphisme de coalgèbres à homotopie près. De plus, on peut comprendre les morphismes  $f_n$  avec  $n \geq 3$  comme des homotopies supérieures, ce qui donne le slogan suivant : "un morphisme dans **DCSH** est un morphisme de complexes de chaînes qui respecte la structure de coalgèbre à une suite d'homotopies près". Ce qui est bien ce qui a été annoncé en introduction.

Puisqu'un morphisme **DCSH** peut être vu comme une suite de morphismes vérifiant certaines propriétés, on peut se demander si on peut donner une formule en terme de suites de morphismes pour la composition de deux telles suites. La réponse est positive. La formule suivante est donnée dans une version préliminaire de [HL07].

**Formule 3.4.** Soit  $C, D$ , et  $E$  des objets de  $\mathcal{A} - \text{coalg}$ . Et soit  $f \in {}_{\mathcal{A}}\text{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}, \mathcal{T}(D)\right)$  et  $g \in {}_{\mathcal{A}}\text{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(D) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}, \mathcal{T}(E)\right)$ . Alors

$$(g \circ_{\psi} f)_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{i \in I_{k,n}} (g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_k}) f_k.$$

Comme annoncé, certains morphismes importants en topologie sont dans **DCSH** (mais ne respectent pas strictement la structure de coalgèbres). L'exemple fondamental d'un tel morphisme est la transformation naturelle d'Alexander-Whitney. Un autre exemple, qui dérive du premier, est la co-multiplication sur les chaînes normalisées  $C(K)$  pour  $K$  un ensemble simplicial. Cette co-multiplication est définie comme étant la composition

$$C(K) \xrightarrow{C(\Delta_K)} C(K \times K) \xrightarrow{f_{K,K}} C(K) \otimes C(K),$$

où  $\Delta_K$  est la diagonale de  $K$  et où  $f_{K,K}$  est la transformation naturelle d'Alexander-Whitney. Un autre exemple apparaît par la suite.

## 3.2 Le co-anneau d'Alexander-Whitney d'un point de vue conceptuel

On vient de voir que le co-anneau d'Alexander-Whitney décrit les morphismes qui respectent la structure de coalgèbre coassociative à une suite d'homotopies près. Ce fait a une explication conceptuelle. En effet, [HPSa] contient le théorème suivant.

**Théorème 3.5.** La co-unité  $\varepsilon : \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{A}$  est un quasi-isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules.

Mais dans le chapitre précédent se trouve un autre résultat de [HPSa]; et ce résultat - la proposition 2.12 - est également intéressant ici. Cette proposition dit en particulier que

$$\mathcal{A} - \text{coalg}(C, D) \cong {}_{\mathcal{A}}\text{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{A}, \mathcal{T}(D)\right).$$

Autrement dit, le  $\mathcal{A}$ -bimodule  $\mathcal{A}$  décrit les morphismes de  $\mathcal{A}$ -coalgèbres. Or, lorsque l'on travaille dans un cadre opéradique, il y a un slogan qui dit que "si un certain objet  $O$  décrit une certaine classe d'objets  $\mathcal{C}$ , alors le remplacement cofibrant de  $O$  décrit la classe des objets qui sont des objets de  $\mathcal{C}$  à une suite d'homotopies près". Il n'est donc pas surprenant que le co-anneau d'Alexander-Whitney décrit les morphismes qui respectent la structure de coalgèbre coassociative à une suite d'homotopies près, puisque le théorème ci-dessus dit que ce co-anneau est un excellent candidat pour être un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}$  comme  $\mathcal{A}$ -bimodule. De plus, on trouve le théorème suivant dans [Fre09].

**Théorème 3.6.** *Soit  $Q$  une opérade et  $\mathcal{P}$  une opérade  $\Sigma_*$ -cofibrante. Alors la catégorie  ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Mod}_Q$  est munie d'une structure de catégorie semi-modèle si on choisit*  
- les quasi-isomorphismes de  $(\mathcal{P}, Q)$ -bimodules comme équivalences faibles, et les morphismes surjectifs en degré strictement positif comme fibrations.  
*De plus, si  $\mathcal{R}$  est nul en niveau 0, alors il suffit que l'opérade  $\mathcal{P}$  soit  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ -cofibrante pour obtenir la même conclusion.*

Comme ce théorème n'intervient pas dans la suite, le lecteur est prié de consulter [Fre09] pour les notions de catégorie semi-modèle, d'opérade  $\Sigma_*$ -cofibrante, et d'opérade  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ -cofibrante.

Ce théorème donne un cadre conceptuel dans lequel il ne devrait pas être difficile de montrer que le co-anneau d'Alexander-Whitney est effectivement un remplacement cofibrant de  $\mathcal{A}$  comme  $\mathcal{A}$ -bimodule.

### 3.3 Comparaison entre la définition classique et la définition opéradique de DCSH

On ouvre maintenant une parenthèse dans le cours de ce travail pour comparer la définition de **DCSH** que l'on a vu ci-dessus avec la définition "classique" de **DCSH**. En effet, et comme déjà écrit plus haut, cette catégorie a été définie de manière différente au début des années 1970. A cette époque, la catégorie **DCSH** était définie comme étant la catégorie dont les objets sont les coalgèbres coassociatives et dont les morphismes entre  $C$  et  $D$  sont les morphismes d'algèbres entre  $\Omega C$  et  $\Omega D$ ,  $\Omega$  étant la construction cobar.

**Définition 3.7.** *Soit  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C, \eta_C)$  une coalgèbre coassociative coaugmentée avec différentielle  $d$ . Le co-idéal de coaugmentation  $J_C$  de  $C$  est défini par la suite exacte courte scindée*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta_C} C \xrightarrow{p_C} J_C.$$

*La construction cobar sur  $C$  est l'algèbre de chaînes semi-libre (la différentielle n'est pas librement engendrée)  $\Omega(C) = (T(s^{-1}J_C), d_\Omega)$  où*

- $s^{-1}$  est la desuspension (voir la remarque A.1 dans l'annexe),
- $d = -s^{-1}ds + (p_C \otimes p_C)\Delta_C i_C$ , où  $i_C$  est une section de  $p_C$ .

Avant de retourner à la catégorie **DCSH**, remarquons le fait suivant : la catégorie des coalgèbres coassociatives sans co-unité est isomorphe à la catégorie des coalgèbres coassociatives co-unitaires et co-augmentées. Par conséquent, on peut utiliser la construction cobar comme définie ci-dessus pour les  $\mathcal{A}$ -coalgèbres.

Décortiquons la définition classique de **DCSH**. Pour cela prenons une deuxième coalgèbre co-unitaire coaugmentée  $(D, \Delta_D, \varepsilon_D, \eta_D)$ . Et définissons une diagonale  $\Delta_{J_C}$  sur  $J_C$  en posant  $\Delta_{J_C} =$

$(p_C \otimes p_C) \Delta_C i_C$ . Evidemment, on utilise les mêmes notations pour  $D$ . Et on a alors le lemme suivant, dual du résultat que donne H. Munkholm dans [Mun74] (une preuve en est tout de même donnée dans l'annexe, sous forme du lemme A.6).

**Lemme 3.7.** *Il existe une bijection entre  $\mathcal{A}\text{-alg}(\Omega C, \Omega D)$  et l'ensemble des suites de la forme*

$$\{g_n : JC \rightarrow (JD)^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$$

et qui sont telles que  $g_n$  est de degré  $n - 1$  et telles que

1.

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(g_j \otimes g_{n-j}) \Delta_{JC} - (Id^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes Id^{\otimes n-j-1}) g_{n-1}] = g_n d_{JC} + (-1)^n d_{JD^{\otimes n}} g_n$$

soit satisfaite pour tout  $n \geq 1$ ,

2.  $\sum_{i \geq 1} g_i$  soit localement fini (autrement dit, cette somme est finie quel que soit l'élément de  $JC$  sur lequel on l'évalue).

Pour comparer cette définition classique avec la définition opéradique, il est utile de noter le lemme suivant, facile à prouver.

**Lemme 3.8.** *On a que*

- $\Delta_{JC}$  est coassociative, et donc  $(JC, \Delta_{JC})$  est une  $\mathcal{A}$ -coalgèbre,
- $p_C$  respecte la co-multiplication,
- $i_C$  ne respecte pas la co-multiplication.

Et on a alors deux résultats de comparaison.

**Proposition 3.9.**

(i) Soit  $f : \mathcal{T}(JC) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{T}(JD)$  un morphisme **DCSH** au sens opéradique. Et soit  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  la suite de morphismes qui correspond à  $f$ . Cette suite définit un morphisme **DCSH** selon la définition classique si la condition suivante est satisfaite :  $\sum_{i \geq 1} f_i$  est localement fini.

(ii) Soit  $f : \Omega C \rightarrow \Omega D$  un morphisme **DCSH** au sens classique. Et soit  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  la suite de morphismes qui lui correspond. Cette suite définit un morphisme **DCSH** au sens opéradique :  $\mathcal{T}(JC) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{T}(JD)$ .

**Preuve** : Il suffit de considérer lemme 3.7 et la proposition 3.3. □

**Proposition 3.10.**

(i) Soit  $f : \mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{T}(D)$  un morphisme **DCSH** au sens opéradique. Et soit  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  la suite de morphismes qui correspond à  $f$ . Alors la suite

$$\{g_n = p_D^{\otimes n} f_n i_C\}_{n \geq 1}$$

définit un morphisme de la forme  $g : \Omega C \rightarrow \Omega D$  dans la catégorie **DCSH** définie de façon classique si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $p_D^{\otimes n} (f_j \otimes f_{n-j}) \Delta_C i_C = p_D^{\otimes n} (f_j \otimes f_{n-j}) (i_C \otimes i_C) \Delta_{JC}$   
et

2.  $\sum_{i \geq 1} g_i$  est localement fini.

(ii) Soit  $g : \Omega C \rightarrow \Omega D$  un morphisme **DCSH** au sens classique. Et soit  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  la suite de morphismes qui lui correspond. Alors la suite

$$\{f_n = i_D^{\otimes n} g_n p_C\}_{n \geq 1}$$

définit un morphisme  $f : T(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow T(D)$  dans la catégorie **DCSH** définie de manière opéradique si  $i_D^{\otimes n} (1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes 1^{\otimes n-j-1}) f_{n-1} p_C = (1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-j-1}) i_D^{\otimes n-1} f_{n-1} p_C$ .

**Preuve :** (i) On a

$$\begin{aligned} & g_n d_{JC} + (-1)^n d_{JD^{\otimes n}} g_n \\ &= p_D^{\otimes n} f_n i_C d_{JC} + (-1)^n d_{JD^{\otimes n}} p_D^{\otimes n} f_n i_C \\ &= p_D^{\otimes n} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} [(f_j \otimes f_{n-j}) \Delta_C - (1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_D \otimes 1^{\otimes n-j-1}) f_{n-1}] \right) i_C \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \left[ (p_D^{\otimes n} (f_j \otimes f_{n-j}) \Delta_C i_C) - ((1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes 1^{\otimes n-j-1}) p_D^{\otimes n-1} f_{n-1} i_C) \right], \end{aligned}$$

ce qui montre ce que l'on veut.

(ii) C'est un calcul analogue au calcul donné sous (i).  $\square$

Le lien entre la définition opéradique de **DCSH** et la définition classique de **DCSH** étant éclairci, on peut retourner dans le courant principal de ce travail. Tout en précisant que la catégorie **DCSH** utilisée par la suite est la catégorie **DCSH** au sens opéradique, puisque cette catégorie est mieux adaptée : il n'y a pas de raison de se restreindre aux morphismes qui vérifient la propriété de finitude locale que l'on vient de voir.

### 3.4 Structure de catégorie monoïdale sur DCSH

Ici, on considère l'opérade associative  $\mathcal{A}$  et le co-anneau d'Alexander-Whitney  $\mathcal{F}_{AW}$ , bien que la validité de ce qui suit est plus générale.

**Proposition 3.11 ([HL07]).** *Les catégories  $(\mathbf{Mod}_{(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW})}, \otimes, \mathcal{C})$  et  $({}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW})}, \otimes, \mathcal{C})$  sont monoïdales symétriques.*

**Preuve :** Soit  $f \in \mathbf{Mod}_{(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW})}(M, N)$  et  $g \in \mathbf{Mod}_{(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW})}(M', N')$ . Alors  $f \otimes g$  est défini comme étant la composition

$$(M \otimes M') \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \xrightarrow{1 \circ_{\mathcal{A}} \Delta} (M \otimes M') \circ_{\mathcal{A}} (\mathcal{F}_{AW} \otimes \mathcal{F}_{AW}) \xrightarrow{\iota} (M \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}) \otimes (M' \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}) \xrightarrow{f \otimes g} N \otimes N'.$$

La compatibilité entre  $\psi$  et  $\Delta$  (diagramme disponible dans [HL07]) assure que  $\otimes$  est en effet un bifoncteur. La coassociativité de  $\Delta$  entraîne la coassociativité de  $\otimes$ , et  $\mathcal{C}$  est la co-unité par définition.  $\square$

**Corollaire 3.12.** *La catégorie  $\mathbf{DCSH} = ((\mathcal{A}, \mathcal{F}_{AW})\text{-coalg}, \otimes, \mathbb{Z})$  est monoïdale.*

Et comme on l'a fait pour la composition, voilà une formule pour le produit tensoriel de deux morphismes dans **DCSH**. Cette formule est à nouveau tirée d'une version préliminaire de [HL07].

**Formule 3.13.** *Soit  $C, D, E$  et  $F$  des coalgèbres coassociatives. Et soit  $f \in \mathbf{DCSH}(C, D)$  et  $g \in \mathbf{DCSH}(E, F)$ . Alors  $f \otimes g$  est donné, en terme de suite de morphismes, par*

$$(f \otimes g)_n = \sigma_n \left( \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} (f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}) \Delta_C^{(k-1)} \otimes (\Delta_F^{(i_1-1)} \otimes \dots \otimes \Delta_F^{(i_k-1)}) g_k \right),$$

où  $\sigma_n$  est l'isomorphisme de permutation qui remet les facteurs de  $D$  et  $F$  dans le "bon" ordre.

**Remarque 3.1.** *La notion d'isomorphisme de permutation qui arrange l'ordre des facteurs dans le "bon" ordre est discutée dans la remarque 4.2.*

Deuxième partie

Coalgèbres d'Alexander-Whitney





## Chapitre 4

# Définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney

Avant de commencer ce chapitre, notons que dans toute la suite de ce texte, les modules sont des modules sur l'anneau  $\mathbb{Z}$ .

### 4.1 Définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney

Les coalgèbres d'Alexander-Whitney ont été introduites dans [HPST06]. Ces coalgèbres sont définies à l'aide du co-anneau d'Alexander-Whitney  $\mathcal{F}_{AW}$ .

**Définition 4.1.** *Un couple  $(C, \psi)$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney si*

- $C \in \mathcal{A}\text{-coalg}$

*et*

- $\psi \in {}_{\mathcal{A}}\text{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW}, \mathcal{T}(C \otimes C)\right)$ . De plus, on demande que la structure de  $\mathcal{A}$ -coalgèbre de  $C$  soit compatible avec  $\psi$  : on exige que  $\psi(- \otimes x_0)$  soit la co-multiplication de  $C$ .

*Un morphisme de coalgèbres d'Alexander-Whitney de  $(C, \psi_C)$  vers  $(D, \psi_D)$  est un morphisme  $f : C \rightarrow D$  dans  $\mathcal{A}\text{-coalg}$  qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} & \xrightarrow{\psi_C} & \mathcal{T}(C \otimes C) \\ \downarrow \mathcal{T}(f) \circ_{\mathcal{A}} 1 & & \downarrow \mathcal{T}(f \otimes f) \\ \mathcal{T}(D) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} & \xrightarrow{\psi_D} & \mathcal{T}(D \otimes D). \end{array}$$

*La catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney est notée  $AW\text{-coalg}$ .*

Comme conséquence du corollaire 3.12, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.1.** *La catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney est une catégorie monoïdale.*

Avant de continuer, notons que les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont appelées coalgèbres d'Alexander-Whitney faibles dans [HPST06]. Ce point est discuté dans la section 4.3.

Comme cas particulier de la proposition 3.3, on obtient une nouvelle définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney.

**Proposition 4.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(C, \psi)$ , avec  $C$  une coalgèbre coassociative et  $\psi = \{\psi_n : C \rightarrow (C \otimes C)^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$ , où  $\psi_n$  est un morphisme de modules gradués de degré  $n - 1$ . On exige aussi que la relation*

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(\psi_j \otimes \psi_{n-j})\psi_1 - (Id^{\otimes j-1} \otimes (1 \otimes \tau \otimes 1)(\psi_1 \otimes \psi_1) \otimes Id^{\otimes n-j-1})\psi_{n-1}] = \psi_n d + (-1)^n d_{(C \otimes C)^{\otimes n}} \psi_n$$

*soit satisfaite pour tout  $n \geq 1$ . Et finalement on demande que  $C$  et  $\psi$  soient compatibles :  $\psi_1$  doit coïncider avec la co-multiplication de  $C$ .*

*Les morphismes sont les morphismes de complexes de chaînes qui commutent avec les morphismes de structure.*

*La catégorie  $\mathcal{C}$  est isomorphe à la catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney.*

Cette proposition nous donne une définition intuitive des coalgèbres d'Alexander-Whitney. En effet, lorsque  $n = 2$ , la relation donnée ci-dessus dit que  $\psi_2$  est une homotopie entre  $\Delta_{C \otimes C} \psi_1 = (1 \otimes \tau \otimes 1)(\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1$  et  $(\psi_1 \otimes \psi_1)\Delta_C = (\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1$ . Autrement dit,  $\psi_1 = \Delta_C$  est un morphisme de coalgèbres à homotopie près. De plus, on peut comprendre les morphismes  $\psi_n$  avec  $n \geq 3$  comme des homotopies supérieures, ce qui donne le slogan suivant : "une coalgèbre d'Alexander-Whitney est une coalgèbre coassociative telle que la co-multiplication est un morphisme de coalgèbres à une suite d'homotopies près".

Il reste maintenant à noter que l'étude de **DCSH** faite dans le chapitre précédent (voir la proposition 3.10) permet de dire que certaines coalgèbres d'Alexander-Whitney peuvent être vues comme des couples  $(C, \psi)$ , où  $C$  est une coalgèbre coassociative et où  $\psi : \Omega C \rightarrow \Omega(C \otimes C)$  est un morphisme d'algèbres. Lorsque cela est possible, on obtient en fait une co-multiplication sur  $\Omega C$ , puisqu'on peut alors composer  $\psi$  avec la transformation naturelle de Milgram

$$q : \Omega(C \otimes C) \xrightarrow{\cong} \Omega C \otimes \Omega C,$$

qui est définie par :

- $q(s^{-1}(c \otimes 1)) = s^{-1}c \otimes 1$ ,
- $q(s^{-1}(1 \otimes c')) = 1 \otimes s^{-1}c'$ ,
- $q(s^{-1}(c \otimes c')) = 0$ , pour tout  $c, c' \in JC$ .

Pour en savoir davantage sur la transformation naturelle de Milgram, qui est en fait un quasi-isomorphisme naturel, on peut signaler l'annexe de [HPS07] qui est un bon point de départ.

En résumé, une coalgèbre d'Alexander-Whitney du type décrit ci-dessus est une coalgèbre coassociative telle que  $\Omega C$  est une algèbre de Hopf dont la co-multiplication n'est pas nécessairement coassociative.

## 4.2 Pourquoi les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont-elles intéressantes ?

Du point de vue de la topologie, les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont intéressantes parce que les chaînes normalisées sur un ensemble simplicial sont munies d'une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney. Plus précisément, on a le théorème suivant, qui généralise un résultat de [HPST06].

**Théorème 4.3.**

(a) Le foncteur  $C$  qui envoie un ensemble simplicial  $K$  sur les chaînes normalisées se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet} & \xrightarrow{C} & \mathcal{A}\text{-coalg} \\ & \searrow \tilde{C} & \nearrow U \\ & \mathcal{AW}\text{-coalg} & \end{array}$$

où  $U$  est le foncteur oubli.

(b) Si  $K$  est un ensemble simplicial 1-réduit, alors la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $\tilde{C}(K) = (C(K), \psi_K)$  est localement finie et vérifie la condition donnée dans la partie (i) du lemme 3.10. Donc  $\psi_K$  peut être vu comme un morphisme d'algèbres  $\Omega C(K) \xrightarrow{\psi_K} \Omega(C(K) \otimes C(K))$ , et ce morphisme est coassociatif lorsqu'il est composé avec la transformation naturelle de Milgram.

(c) Si  $K$  est un ensemble simplicial réduit, alors  $\tilde{C}(K)$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney quasi-stricte (cf. définition dans [HPSb]).

Pour prouver la partie (a) de ce théorème, on a besoin de la définition d'un SDR (= Strong Deformation Retract) d'Eilenberg-Zilber.

**Définition 4.2.** *Le diagramme*

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla} \\ \xleftarrow{f} \end{array} Y \circ \varphi$$

est un SDR d'Eilenberg-Zilber si

- $X$  et  $Y$  sont des coalgèbres coassociatives,
- $f$  est un morphisme de complexes de chaînes,
- $\nabla$  est un morphisme de coalgèbres,
- $f\nabla = 1_X$ ,
- $\varphi$  est une homotopie de complexes de chaînes entre  $\nabla f$  et  $1_Y$  (autrement dit,  $d\varphi + \varphi d = \nabla f - 1_Y$ ),
- $\varphi\nabla = 0$ ,
- $f\varphi = 0$ ,
- $\varphi^2 = 0$ .

On a alors le théorème suivant, qui est une petite généralisation du théorème 4.1 de [GM74]. La preuve est semblable à celle donnée dans [GM74], mais celle de V.A. Gugenheim et H. Munkholm est plus conceptuelle et "compacte" car ils peuvent utiliser la construction cobar avec leurs hypothèses un peu plus restrictives. Comme la preuve donnée dans ce travail est un calcul, le lecteur intéressé peut la trouver dans l'annexe, sous la forme du théorème A.7.

**Théorème 4.4 (Gugenheim-Munkholm).** *Soit*

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla} \\ \xleftarrow{f} \end{array} Y \circ \varphi$$

un SDR d'Eilenberg-Zilber, et soit  $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$f_1 = f$$

et

$$f_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i+1} (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta \varphi, \text{ pour } n \geq 2.$$

Alors  $F$  est un morphisme **DCSH**.

**Remarque 4.1.** *La définition de  $f_n$  donnée ici diffère de celle donnée dans [GM74] par le signe. Une analyse soigneuse de la preuve de ce théorème indique pourtant que le signe donné ici est nécessaire.*

Et maintenant on a tout ce qu'il faut pour prouver le théorème 4.3.

**Preuve du théorème 4.3 :** (a) Ce résultat est une conséquence du théorème 4.4. En effet, rappelez que

$$C(K) \otimes C(L) \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla_{K,L}} \\ \xleftarrow{f_{K,L}} \end{array} C(K \times L) \circ \varphi_{K,L}$$

est un SDR d'Eilenberg-Zilber si  $K, L \in \mathbf{sSet}$ , si  $f_{K,L}$  est la transformation naturelle d'Alexander-Whitney, et si  $\nabla_{K,L}$  est la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber (des formules explicites pour ces deux transformations naturelles sont données dans l'annexe). Enfin,  $\varphi_{K,L}$  est l'homotopie définie dans [EM54]. Dans le présent texte, cette homotopie est appelée homotopie d'Eilenberg-MacLane (une définition explicite en est donnée dans l'annexe). Le théorème 4.4 produit un morphisme **DCSH** explicite

$$\mathcal{T}(C(K \times K)) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{T}(C(K) \otimes C(K)),$$

en prenant  $K = L$ . Il suffit de composer ce morphisme avec le morphisme

$$\mathcal{T}(C(K)) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \xrightarrow{\mathcal{T}(C(\Delta_K)) \circ_{\mathcal{A}} 1} \mathcal{T}(C(K \times K)) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{AW} \xrightarrow{1 \circ_{\mathcal{A}} \varepsilon} \mathcal{T}(C(K \times K))$$

pour obtenir une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney sur  $C(K)$ . Ci-dessus,  $\Delta_K$  est la diagonale de  $K$  et  $\varepsilon$  est la co-unité du co-anneau d'Alexander-Whitney.

(b) Ce théorème se trouve dans [HPST06].

(c) Ce théorème se trouve dans [HPSb].

□

Evidemment, le théorème 4.3 donne l'espoir que la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney des chaînes normalisées sur un ensemble simplicial  $K$  contienne une information intéressante sur  $K$ . Une première question que l'on peut se poser est la suivante : si  $K$  est 1-réduit, alors  $\Omega C(K)$  est une algèbre de Hopf par le théorème 4.3. Mais  $C(GK)$ , où  $G$  est le foncteur "groupe des lacets simpliciaux", est aussi une algèbre de Hopf. Et il est bien connu (cf. [Szc61]) qu'il existe un quasi-isomorphisme d'algèbres

$$\Omega C(K) \xrightarrow{\cong} C(GK).$$

Il serait alors très joli de pouvoir montrer que ce quasi-isomorphisme respecte aussi la structure de coalgèbre donnée par la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K)$ . Ceci n'est pas vrai, mais presque, dans le sens suivant.

**Théorème 4.5 ([HPST06]).** *Toute transformation naturelle d'algèbres  $\theta_K : \Omega C(K) \rightarrow C(GK)$  est un morphisme DCSH, pour  $K$  un ensemble simplicial 1-réduit.*

Autrement dit, la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K)$  donne, essentiellement, la structure de coalgèbre de  $C(GK)$ . Ce qui montre la pertinence de la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K)$ .

Pour achever de convaincre le lecteur de l'intérêt de cette structure, attirons l'attention sur les travaux suivants :

- Dans [HL07], les auteurs considèrent les applications entre ensembles simpliciaux 2-réduits. Si  $f$  est une telle application, alors ils construisent une algèbre de chaînes  $A$ , qui est explicite et engendrée par un petit nombre de générateurs, et dont l'homologie est isomorphe à l'homologie de  $GF$ . Ici,  $F$  est la fibre homotopique de  $f$ . La structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney des chaînes normalisées est essentielle pour cette construction. Comme cas particulier, cela permet de construire un modèle de  $C(G^2K)$  avec une structure d'algèbre, si  $K$  est un ensemble simplicial 2-réduit.
- Dans [Boy08], M. Boyle construit un modèle pour  $C_*(Map_*(S_g, X))$  en utilisant les résultats développés dans [HL07]. Ici,  $X$  est un espace topologique 2-connexe,  $S_g$  est une surface fermée de genre  $g$ ,  $Map_*(S_g, X)$  est l'espace des applications continues pointées, et  $C_*$  est le foncteur qui associe le complexe de chaînes singulier à tout espace topologique.
- Dans [HR], les auteurs commencent par considérer un morphisme de  $R$ -algèbres

$$T : \Omega C \rightarrow A,$$

où  $C$  est une coalgèbre de chaînes coaugmentée et connexe, où  $A$  est une algèbre de chaînes augmentée, et où  $R$  est un anneau principal. A partir de cette donnée, ils construisent un complexe de chaînes  $H(t)$  qui est une généralisation du complexe de Hochschild pour une algèbre associative, mais qui est aussi une généralisation du complexe de coHochschild pour une coalgèbre coassociative. Lorsque  $A$  est une algèbre de Hopf de chaînes, K. Hess et J. Rognes donnent des conditions sous-lesquelles  $H(t)$  admet une application "puissance  $r$ ", avec  $r \geq 1$ , qui étend l'application usuelle "puissance  $r$ " sur  $A$ . En particulier, le complexe de coHochschild des chaînes normalisées sur un ensemble simplicial  $K$  qui est une double suspension, satisfait ces conditions. De plus, les auteurs de cet article montrent que cet objet est un modèle pour l'application "puissance  $r$ " simplicial définie sur le groupe des lacets libres sur  $K$ . D'une part cela montre la pertinence topologique de la construction  $H(t)$ , et d'autre part c'est un élément crucial pour mieux comprendre le spectre de l'homologie cyclique topologique; ce qui est le projet des auteurs à plus long terme.

### 4.3 Différents types de coalgèbres d'Alexander-Whitney

Avant de passer à l'étude des coalgèbres d'Alexander-Whitney, terminons ce chapitre par une petite discussion sur les différentes définitions de coalgèbres d'Alexander-Whitney possibles. En effet, et comme déjà indiqué plus haut, la définition utilisée dans ce travail n'est pas celle donnée dans [HPST06]. Dans cet article, les coalgèbres d'Alexander-Whitney sont de la forme  $(C, \psi)$  avec  $\psi : \Omega C \rightarrow \Omega(C \otimes C)$  un morphisme d'algèbres. Mais surtout, il est exigé que  $q\psi$  soit coassociatif,  $q$  étant la transformation naturelle de Milgram (et les couples  $(C, \psi)$  avec  $q\psi$  pas nécessairement coassociatif sont appelés des coalgèbres d'Alexander-Whitney faibles dans [HPST06]). Cette définition est effectivement bonne, puisque le théorème 4.3 dit que  $\tilde{C}(K)$  est une telle coalgèbre

pour  $K$  un ensemble simplicial 1-réduit. Quelle est alors la raison pour donner une définition plus faible? Et bien, d'une part, on n'attrape pas tous les ensembles simpliciaux. Mais aussi, il semble impossible de construire une opérade telle que les coalgèbres sur cette opérade soient les coalgèbres d'Alexander-Whitney au sens de [HPST06]. En effet, décortiquer la définition des coalgèbres d'Alexander-Whitney au sens de [HPST06] ne semble pas produire un ensemble de co-opérations qui seraient liées entre elles par des relations. Alors que pour la définition utilisée tout au long de ce travail, l'existence d'une opérade qui code les coalgèbres d'Alexander-Whitney est prouvée dans le chapitre suivant. Il reste à discuter le cas des coalgèbres d'Alexander-Whitney fortes. Celles-ci sont définies comme suit.

**Définition 4.3.** *Un couple  $(C, \psi)$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney forte si ce couple est une coalgèbre d'Alexander-Whitney et si  $\psi$ , vu comme morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules gouvernés par le co-anneau d'Alexander-Whitney, est coassociatif.*

En analysant cette définition, on obtient une nouvelle définition en terme de suites de morphismes.

**Proposition 4.6.** *Un couple  $(C, \psi)$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney forte si ce couple est une coalgèbre d'Alexander-Whitney telle que  $\psi$ , vu comme une suite de morphismes, vérifie la famille de relations suivantes :*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} \alpha_{\underline{i}} \left( (\psi_{i_1} \otimes \Delta_C^{(i_1-1)}) \otimes \dots \otimes (\psi_{i_k} \otimes \Delta_C^{(i_k-1)}) \right) \psi_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\underline{j} \in I_{k,n}} \beta_{\underline{j}} \left( (\Delta_C^{(j_1-1)} \otimes \psi_{j_1}) \otimes \dots \otimes (\Delta_C^{(j_k-1)} \otimes \psi_{j_k}) \right) \psi_k, \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq 1$  ( $\alpha_{\underline{i}}$  et  $\beta_{\underline{j}}$  sont les isomorphismes de permutations qui placent les facteurs dans le "bon" ordre).

**Preuve :** Il suffit d'utiliser les formules 3.4 et 3.13. □

**Remarque 4.2.** *Dans l'énoncé de la proposition ci-dessus on se contente de dire que  $\alpha_{\underline{i}}$  et  $\beta_{\underline{j}}$  sont les isomorphismes de permutations qui placent les facteurs dans le "bon" ordre. Donner des formules explicites n'amène rien à la compréhension, mais pour le lecteur qui n'est pas habitué à ces isomorphismes, on donne quelques exemples. D'autant que ces isomorphismes apparaissent souvent dans la suite de ce travail.*

L'exemple fondamental est donné par les coalgèbres coassociatives. En effet, soit  $(C, \Delta_C)$  et  $(D, \Delta_D)$  de telles coalgèbres. Il est facile de vérifier que  $C \otimes D$  est encore une coalgèbre coassociative si on munit ce complexe de chaînes de la composition suivante :

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} C \otimes D \otimes C \otimes D.$$

Dans ce cas,  $1 \otimes \tau \otimes 1$  est l'isomorphisme qui place les facteurs dans le "bon" ordre. On est forcé d'utiliser cet isomorphisme puisque l'on veut un morphisme  $C \otimes D \rightarrow (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$  par définition d'une coalgèbre coassociative.

On peut évidemment donner un exemple tiré de la proposition ci-dessus. Si  $n = 2$ , alors le membre du dessus de l'égalité donnée dans cette proposition contient le terme  $(\psi_2 \otimes \Delta_C) \psi_1$ . Ce terme apparaît en prenant  $k = 1$ . L'isomorphisme de permutation  $\alpha_{\underline{i}}$  est alors l'isomorphisme  $C^{\otimes 6} \rightarrow C^{\otimes 6}$  donné par  $\alpha_{\underline{i}}(c_1 \otimes \dots \otimes c_6) = \pm c_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes c_{\sigma^{-1}(6)} = \pm c_1 \otimes c_2 \otimes c_5 \otimes c_3 \otimes c_4 \otimes c_6$ ,

où  $\sigma = (345) \in \Sigma_6$ . Pour comprendre pourquoi cet isomorphisme est le bon, il suffit en fait de se rappeler que  $(\psi_2 \otimes \Delta_C)$  est un des éléments du morphisme **DCSH** suivant :

$$\psi \otimes 1 : \mathcal{T}(C \otimes C) \underset{\mathcal{A}}{\circ} \mathcal{F}_{AW} \rightarrow \mathcal{T}((C \otimes C) \otimes C).$$

En effet, si on pose  $D = C \otimes C$  pour accentuer les rôles différents que jouent les trois copies de  $C$ , on voit que le but de  $(\psi_2 \otimes 1)$  doit être  $\mathcal{T}(D \otimes C)(2) = (D \otimes C) \otimes (D \otimes C)$ . Ce qui force l'utilisation de la permutation indiquée ci-dessus. Finalement, notons que le signe est déterminé par la règle de Koszul qui est rappelée dans l'annexe.

La notion de coalgèbre d'Alexander-Whitney forte est plus forte que celle utilisée dans ce travail. Il est certainement possible de montrer qu'il existe une opérade  $\mathcal{P}$  telle que les coalgèbres d'Alexander-Whitney fortes coïncident avec les coalgèbres sur  $\mathcal{P}$ . Mais il faudrait déterminer si la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney sur les chaînes normalisées d'un ensemble simplicial est une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney forte, pour que cette catégorie soit intéressante à étudier pour un topologue. Or A. Tonks s'est rendu compte le premier que cela est faux. Ce que montre le contre-exemple suivant, trouvé dans le cadre de ce travail.

**Proposition 4.7.** *Soit  $x_{012}$  l'unique 2-simplexe non-dégénéré de l'ensemble simplicial  $\Delta[2]$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \alpha(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(x_{012}) + \left( (\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1) \right) \psi_2(x_{012}) \\ & \neq \beta(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(x_{012}) + \left( (1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1) \right) \psi_2(x_{012}), \end{aligned}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les isomorphismes de permutation plaçant les facteurs dans le "bon" ordre.

**Preuve :** La preuve est calculatoire et se trouve dans l'annexe (cf. la proposition A.8).  $\square$

**Remarque 4.3.** *En utilisant les calculs effectués dans [HPS07] il ne devrait pas être difficile de montrer que  $\tilde{C}(K)$  n'est pas une coalgèbre d'Alexander-Whitney forte même pour les ensembles simpliciaux de la forme  $K := EL$ , où  $L$  un ensemble simplicial et où  $E$  est le foncteur de suspension simplicial.*

Comme conséquence, on obtient qu'un topologue ne peut pas utiliser cette notion plus forte de coalgèbre d'Alexander-Whitney, même si un espoir demeure : pour définir la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney sur les chaînes normalisées d'un ensemble simplicial, on a fait le choix d'utiliser la formule usuelle pour la transformation naturelle d'Alexander-Whitney. Or, il est possible de faire d'autres choix que ceux faits pour cette formule explicite, et on peut se demander s'il existe un choix tel que la structure d'Alexander-Whitney induite sur les chaînes normalisées soit forte. Cette question n'est pas étudiée dans ce travail.





## Chapitre 5

# Description opéradique des coalgèbres d'Alexander-Whitney

Dans ce chapitre on montre comment construire une opérade, appelée opérade d'Alexander-Whitney, telle que les coalgèbres sur cette opérade coïncident avec les coalgèbres d'Alexander-Whitney. De plus, on va voir que la structure de co-monoïde niveau du co-anneau d'Alexander-Whitney induit une structure d'opérade de Hopf sur l'opérade d'Alexander-Whitney.

### 5.1 Construction de l'opérade d'Alexander-Whitney

On va donner cette construction dans un cadre raisonnablement général, et sous forme d'un foncteur  $\mathcal{P}$  dont le domaine est une catégorie de  $\mathcal{A}$ -bimodules. Plus précisément, le domaine de  $\mathcal{P}$  est la catégorie donnée dans la définition ci-dessous.

**Définition 5.1.** Soit  $(J, d_J)$  un couple tel que  $J$  est une suite symétrique de modules gradués et tel que  $d_J$  est une différentielle sur le  $\mathcal{A}$ -bimodule libre  $\mathcal{A} \circ J \circ \mathcal{A}$ . Alors la catégorie des bimodules au-dessous de  $(J, d_J)$  est la catégorie dont les objets sont les triples  $(X, d, i)$  avec

- $X$  une suite symétrique de modules gradués  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -libres en chaque degré du niveau  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $d$  une différentielle sur  $\mathcal{F}_X = \mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}$ ,
- $i : J \rightarrow X$  une injection de suites symétriques telle que  $1 \circ i \circ 1 : (\mathcal{A} \circ J \circ \mathcal{A}, d_J) \rightarrow (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d)$  respecte la différentielle.

Et les morphismes  $(X, d_X, i_X) \rightarrow (Y, d_Y, i_Y)$  sont les morphismes de suites symétriques  $X \rightarrow Y$  qui respectent la différentielle et l'inclusion de  $J$ . Cette catégorie est notée  $\mathbf{Bimod}(J, d_J)$ .

Plus précisément encore, le domaine de  $\mathcal{P}$  est la catégorie des bimodules au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ , où  $\mathcal{J}$  est l'unité du produit de composition.

Comme on veut également parler d'une structure monoïdale sur les coalgèbres d'Alexander-Whitney, il faut donner une structure supplémentaire aux bimodules définis ci-dessus.

**Définition 5.2.** Soit  $(J, d_J, \Delta_J)$  tel que  $(J, d_J)$  est comme dans la définition donnée plus haut, et tel que  $\Delta_J : (\mathcal{A} \circ J \circ \mathcal{A}, d_J) \rightarrow (\mathcal{A} \circ J \circ \mathcal{A}, d_J) \otimes (\mathcal{A} \circ J \circ \mathcal{A}, d_J)$  est un morphisme coassociatif de  $\mathcal{A}$ -bimodules différentiels. Alors la catégorie des bimodules de Hopf au-dessous de  $(J, d_J, \Delta_J)$  est la

catégorie dont les objets sont de la forme  $(X, d, i, \Delta)$  avec

- $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(J, d_J)$

et

- $\Delta : (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d) \rightarrow (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d) \otimes (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d)$  est un morphisme coassociatif de  $\mathcal{A}$ -bimodules différentiels tel que  $i$ , vu comme morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules, respecte cette structure co-multiplicative. De plus, les morphismes de cette catégorie sont les morphismes de bimodules au-dessous de  $(J, d_J)$  qui respectent la structure co-multiplicative. Cette catégorie est notée  $\mathbf{Bimod}(J, d_J, \Delta_J)$ .

Le cas particulier qui nous intéresse dans ce texte est  $(\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}})$  où  $\Delta_{\mathcal{J}}$  est la composition

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \Delta_{\mathcal{A}}}} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \circ (\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}) \circ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \xrightarrow{\iota} (\mathcal{A} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{A} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{A}).$$

Ici,  $\Delta_{\mathcal{A}}$  munit  $\mathcal{A}$  de sa structure d'opérate de Hopf usuelle (voir l'exemple 2.5). Et  $\iota$  est une notation pour l'isomorphisme évident  $\mathcal{J} \cong \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$ .

## Foncteur décalage

Avant de présenter la construction de l'opérate  $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}(X, d, i)$  pour  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ , il faut définir un endo-foncteur dans la catégorie des suites symétriques. On définit ce foncteur par

$$\overline{X}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ X(n/2) \otimes_{\Sigma_{n/2}} \mathbb{Z}[\Sigma_n] & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

pour toute suite symétrique  $X$ , et on l'appelle le foncteur de décalage. Ici (mais également dans tout ce qui suit), la structure de  $\mathbb{Z}[\Sigma_{n/2}]$ -module de  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$  est donnée par l'injection  $\mathbb{Z}[\Sigma_{n/2}] \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[\Sigma_n]$  définie par

- $i(\sigma)(2k) = 2j$  si  $1 \leq k \leq n/2$  et  $\sigma(k) = j$
- $i(\sigma)(2k-1) = 2j-1$  si  $1 \leq k \leq n/2$  et  $\sigma(k) = j$ .

Ce qui est une formule compliquée pour dire qu'une permutation de  $\Sigma_{n/2}$  est envoyée sur la permutation qui permute les éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  par bloc de deux éléments. Par la suite, on note  $\sigma^{(2)} := i(\sigma)$ .

Le foncteur décalage jouit de propriétés utiles par la suite ; je les présente ici.

**Proposition 5.1.** *Il existe une transformation naturelle  $\overline{(- \otimes -)} \xrightarrow{\epsilon} \overline{(-)} \otimes \overline{(-)}$ .*

**Preuve :** Soit  $A$  et  $B$  des suites symétriques. Définissons  $\epsilon_{A,B} : \overline{A \otimes B} \rightarrow \overline{A} \otimes \overline{B}$ . Pour cela, remarquons que

$$\overline{A \otimes B}(2n) = (A \otimes B)(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]$$

et que

$$(\overline{A} \otimes \overline{B})(2n) = \left( A(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right) \otimes \left( B(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right) \cong (A \otimes B)(n) \otimes_{\Sigma_n \times \Sigma_n} (\mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \otimes \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]).$$

Il suffit de prendre  $\alpha = Id : (A \otimes B)(n) \rightarrow (A \otimes B)(n)$ ,  $\beta = \Delta : \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \rightarrow \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \otimes \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]$ , et  $\gamma = \Delta : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n \times \Sigma_n$  ; et de vérifier que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
(A \otimes B)(n) & \xrightarrow{\sigma} & (A \otimes B)(n) \\
\downarrow = & & \downarrow = \\
(A \otimes B)(n) & \xrightarrow{\Delta(\sigma)} & (A \otimes B)(n)
\end{array}$$

pour tout  $\sigma \in \Sigma_n$ , et

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \\
\downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\
\mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \times \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] & \xrightarrow{\Delta(\sigma)} & \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \times \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]
\end{array}$$

pour tout  $\sigma \in \Sigma_n$ . En effet, on peut utiliser le lemme A.11 dans l'annexe pour poser  $\epsilon = Id \otimes \Delta$ .

Enfin, il est clair que cette construction est naturelle, puisque si  $f_A : A_1 \rightarrow A_2$  et  $f_B : B_1 \rightarrow B_2$  sont des morphismes de suites symétriques, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{A_1 \otimes B_1}(2n) & \xrightarrow{\epsilon_{A_1, B_1}(2n)} & \overline{A_1 \otimes B_1}(2n) \\
\downarrow \overline{f_A \otimes f_B} & & \downarrow \overline{f_A \otimes f_B} \\
\overline{A_2 \otimes B_2}(2n) & \xrightarrow{\epsilon_{A_2, B_2}(2n)} & \overline{A_2 \otimes B_2}(2n).
\end{array}$$

□

**Remarque 5.1.** Par définition, il est clair que  $\epsilon$  est "coassociatif". Plus précisément, si  $A, B$  et  $C$  sont des suites symétriques, alors

$$(1 \otimes \epsilon_{B, C})\epsilon_{A, B \otimes C} = (\epsilon_{A, B} \otimes 1)\epsilon_{A \otimes B, C} : \overline{A \otimes B \otimes C} \rightarrow \overline{A \otimes B} \otimes \overline{C}.$$

Pour les résultats suivants, nous avons besoin de définir une notation.

**Définition 5.3.** Soit  $D : \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \times \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma$  le foncteur défini par  $D(A, X) = \overline{A \circ X}$ .

**Définition 5.4.** Soit  $HD : \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \times \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma$  le foncteur défini par  $HD(A, X) = A \circ \overline{X}$ .

**Définition 5.5.** Soit  $DH : \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \times \mathbf{ComonoideNiveau} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma$  le foncteur défini par  $DH(X, A) = \overline{X} \circ A$ .

Evidemment, il n'y a aucune nécessité pour que  $A$  soit un comonoïde niveau dans la définition ci-dessus. Il suffit que  $A$  soit une suite symétrique. Mais plus bas, il est nécessaire de prendre cette hypothèse.

**Lemme 5.2.** Soit  $A, X \in \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma$ . Alors il existe un isomorphisme naturel  $D(A, X) \stackrel{\vartheta_1}{\cong} HD(A, X)$ .

**Preuve :** Si  $n \geq 1$  on a :

$$\begin{aligned}
D(A, X)(2n) &= (A \circ X)(n) \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \\
&= \prod_{m \geq 1} A(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{n \in I_{m, n}} X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} HD(A, X)(2n) &= \prod_{m \geq 1} A(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{\underline{2n} \in I_{m, 2n}} \overline{X}((2n)_1) \otimes \dots \otimes \overline{X}((2n)_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{2n}}} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right) \\ &\cong \prod_{m \geq 1} A(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{\underline{n} \in I_{m, n}} X(n_1) \otimes \dots \otimes X(n_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{n}}} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right). \end{aligned}$$

Il est tout aussi facile de vérifier que l'égalité  $D(A, X)(0) = HD(A, X)(0)$  est vraie. De plus

$$\begin{aligned} HD(A, X)(2n+1) &= \prod_{m \geq 1} A(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{\underline{2n+1} \in I_{m, 2n+1}} \overline{X}((2n+1)_1) \otimes \dots \otimes \overline{X}((2n+1)_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{2n+1}}} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n+1}] \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque'une somme de nombres paires est nécessairement paire.  $\square$

**Proposition 5.3.** *Soit  $X$  une suite symétrique et  $(A, \Delta)$  un comonoïde niveau. Il existe une transformation naturelle  $\vartheta_2 = \vartheta : D(X, A) \rightarrow DH(X, A)$ .*

**Preuve :** Commençons par rappeler que

$$DH(X, A)(2n) = (\overline{X} \circ A)(2n) = \prod_{m \geq 0} X(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{\underline{2n} \in I_{2m, 2n}} A((2n)_1) \otimes \dots \otimes A((2n)_{2m}) \otimes_{\Sigma_{\underline{2n}}} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}] \right).$$

Définissons

$$X(m) \otimes A(n_1) \otimes \dots \otimes A(n_m) \xrightarrow{\vartheta_{\underline{n}}} \overline{X} \circ A,$$

pour  $\underline{n} \in I_{m, n}$ , en posant

$$\vartheta(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) = x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}).$$

Pour que la définition soit complète, il reste à définir  $\tau_i \in \Sigma_{2n_i}$  :

- $\tau_i(j) = 2(j-1) + 1$  si  $1 \leq j \leq n_i$

et

- $\tau_i(n_i + j) = 2j$  si  $1 \leq j \leq n_i$ ,

Autrement dit,  $\tau_i(1) = 1, \tau_i(n_i + 1) = 2, \tau_i(2) = 3, \tau_i(n_i + 2) = 4, \dots, \tau_i(n_i) = 2n_i - 1, \tau_i(2n_i) = 2n_i$  (un dessin de cette permutation est fourni dans la section A.5 de l'annexe!). Il reste maintenant à vérifier que  $\vartheta$  respecte la différentielle, que les diagrammes donnés dans le lemme A.14 commutent, et que la flèche ainsi définie est bien naturelle.

Commençons par vérifier que  $\vartheta$  respecte la différentielle. D'une part on a

$$\begin{aligned} (\vartheta d)(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) &= \vartheta \left( d(x) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m (-1)^{x+a_1+\dots+a_{i-1}} x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes d(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_m \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d(x) \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^{x+a_1+\dots+a_{i-1}} x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_{i-1}) \otimes \Delta d(a_i) \otimes \Delta(a_{i+1}) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes \tau^{-1},
\end{aligned}$$

où  $\tau^{-1} = (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})$ , comme dans le calcul suivant. Et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
&(d\vartheta)(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \\
&= d\left(x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})\right) \\
&= d(x) \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^{x+a_1+\dots+a_{i-1}} x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_{i-1}) \otimes d\Delta(a_i) \otimes \Delta(a_{i+1}) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes \tau.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\vartheta$  commute avec la différentielle. Ensuite, montrons que les diagrammes donnés dans le lemme A.14 commutent. Pour faire cela, il faut fixer quelques notations.

Soit  $\sigma \in \Sigma_m$ . Si  $\underline{n} \in I_{m,n}$ , alors  $\sigma\underline{n} = (n_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, n_{\sigma^{-1}(m)}) \in I_{m,n}$ . Et  $\hat{\sigma}$  est l'isomorphisme de permutation qui agit de manière évidente sur tout objet de la forme  $C_1 \otimes \dots \otimes C_m$ . D'une part on a que

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\underline{n}} \vartheta_{\sigma\underline{n}}(1 \otimes \hat{\sigma})(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \\
&\stackrel{(*)}{=} (-1)^\sigma \sigma_{\underline{n}} \vartheta_{\sigma\underline{n}}(x \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(m)}) \\
&= (-1)^\sigma \sigma_{\underline{n}} \left( x \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(m)}) \otimes (\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{\sigma^{-1}(m)}^{-1}) \right) \\
&= (-1)^\sigma x \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(m)}) \otimes (\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{\sigma^{-1}(m)}^{-1}) (\sigma_{\underline{n}})^{(2)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\underline{n}}(\sigma \otimes 1)(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \\
&= \vartheta_{\underline{n}}(x\sigma \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \\
&= x\sigma \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \\
&\stackrel{(*)}{=} (-1)^\sigma x \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes \Delta(a_{\sigma^{-1}(m)}) \otimes (\sigma^{(2)})_{\underline{2n}} (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}),
\end{aligned}$$

où, pour les égalités (\*),  $(-1)^\sigma$  est le signe défini par la règle de Koszul. Comme

$$(\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{\sigma^{-1}(m)}^{-1}) (\sigma_{\underline{n}})^{(2)} = (\sigma^{(2)})_{\underline{2n}} (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})$$

par le lemme A.17, on obtient ce que l'on veut.

D'autre part

$$(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m) \vartheta_{\underline{n}}(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m)$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m) \left( x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \right) \\
&= x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) (\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)^{(2)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\underline{n}}(1 \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_m)(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \\
&= \vartheta_{\underline{n}}(x \otimes a_1 \sigma_1 \otimes \dots \otimes a_m \sigma_m) \\
&= x \otimes \Delta(a_1 \sigma_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m \sigma_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \\
&= x \otimes \Delta(a_1) (\sigma_1 \otimes \sigma_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) (\sigma_m \otimes \sigma_m) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) \\
&= x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \otimes ((\sigma_1 \oplus \sigma_1) \oplus \dots \oplus (\sigma_m \oplus \sigma_m)) (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}).
\end{aligned}$$

Et comme le lemme A.18 assure que

- $(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)^{(2)} = (\sigma_1^{(2)} \oplus \dots \oplus \sigma_m^{(2)})$

et

- $\tau_i^{-1} \sigma_i^{(2)} = (\sigma_i \oplus \sigma_i) \tau_i^{-1}$  sont vraies, on obtient

$$(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}) (\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)^{(2)} = ((\sigma_1 \oplus \sigma_1) \oplus \dots \oplus (\sigma_m \oplus \sigma_m)) (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1}),$$

ce qui permet de définir  $\vartheta$  à l'aide du lemme A.14.

Finalement, soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de suites symétriques et  $g : A \rightarrow B$  un morphisme de comonoïdes niveau. Il est évident que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X \circ A} & \xrightarrow{\vartheta_{X,A}} & \overline{X} \circ A \\
\downarrow \overline{f \circ g} & & \downarrow \overline{f} \circ g \\
\overline{Y \circ B} & \xrightarrow{\vartheta_{Y,B}} & \overline{Y} \circ B
\end{array}$$

commute, ce qui montre la naturalité de  $\vartheta$ . □

En fait, ce ne sont pas les deux transformations naturelles  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  que l'on vient de voir qui sont utiles par la suite, mais plutôt une troisième qui est essentiellement définie comme étant la composition de  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ . Avant de définir cette nouvelle transformation naturelle, définissons le domaine et le but de cette transformation.

**Définition 5.6.** *On définit deux trifoncteurs*

$$D, G : \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \times \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma \times \mathbf{ComonoïdeNiveau} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma$$

en posant

- $D(A, X, B) = \overline{A \circ X \circ B}$

et

- $G(A, X, B) = A \circ \overline{X} \circ B$ .

**Corollaire 5.4.** *Soit  $A$ ,  $X$  et  $B$  comme dans la définition ci-dessus. Il existe une transformation naturelle  $\vartheta : D \rightarrow G$ .*

**Preuve** : On définit  $\vartheta_{A,X,B}$  comme étant la composition

$$\overline{A \circ X \circ B} \xrightarrow{\vartheta_1} A \circ \overline{X \circ B} \xrightarrow{1 \circ \vartheta_2} A \circ \overline{X} \circ B.$$

□

**Notation 5.1.** Par la suite, on note  $\vartheta_{A,X} = \vartheta_{A,X,A}$ .

Et finalement, voilà quelques résultats de compatibilité nécessaires par la suite.

**Lemme 5.5.** Soit  $A$  et  $X$  des suites symétriques et  $B$  un comonoïde niveau. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \circ X \circ B} & \xrightarrow{\vartheta_2} & \overline{A \circ X} \circ B \\ \downarrow \vartheta_1 & & \downarrow \vartheta_1 \circ 1 \\ A \circ \overline{X \circ B} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta_2} & A \circ \overline{X} \circ B \end{array}$$

commute.

**Preuve** : Ce lemme est une conséquence immédiate des définitions de  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ . □

**Lemme 5.6.** Soit  $A$  et  $X$  des suites symétriques. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \circ A \circ X} & \xrightarrow{\vartheta_{1A,A \circ X}} & \overline{A \circ A} \circ \overline{X} \\ & \searrow \vartheta_{1A \circ A, X} & \downarrow 1 \circ \vartheta_{1A, X} \\ & & A \circ A \circ \overline{X} \end{array}$$

commute.

**Preuve** : La commutativité de ce diagramme est évidente par définition de  $\vartheta_1$ . □

**Lemme 5.7.** Soit  $X$  une suite symétrique et  $B$  un comonoïde niveau. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{X \circ B \circ B} & \xrightarrow{\vartheta_{2X \circ B, B}} & \overline{X \circ B} \circ B \\ & \searrow \vartheta_{2X, B \circ B} & \downarrow \vartheta_{2X, B} \circ 1 \\ & & \overline{X} \circ B \circ B \end{array}$$

commute.

**Preuve** : Durant cette preuve on note  $\vartheta = \vartheta_2$ . De plus, l'associator de la catégorie monoïdale  $(\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^\Sigma, \circ)$  est utilisé dans les calculs ci-dessous sans qu'il apparaisse dans la notation. Enfin, rappelons que la structure de comonoïde niveau de  $B \circ B$  est donnée par

$$B \circ B \xrightarrow{\Delta \circ \Delta} (B \otimes B) \circ (B \otimes B) \xrightarrow{\iota} (B \circ B) \otimes (B \circ B),$$

où  $\Delta$  est la co-multiplication de  $B$ . Commençons par traiter le cas particulier  $B = \mathcal{A}$ . Soit

$$x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_n \in X(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) \otimes B(r_1) \otimes \dots \otimes B(r_n)$$

avec  $n = n_1 + \dots + n_m$  et  $r = r_1 + \dots + r_n$ . Alors

$$\begin{aligned} & (\vartheta_{X,B} \circ 1) \vartheta_{X \circ B, B}(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \\ &= (\vartheta_{X,B} \circ 1) \left( x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \otimes b_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes b_n^{\otimes 2} (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) \right) \\ &= x \otimes \left( a_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes a_m^{\otimes 2} \otimes (t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1}) \right) \otimes \left( b_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes b_n^{\otimes 2} \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Notons que l'on considère en fait des classes d'équivalence. Pour justifier la suite de ce calcul, rappelons que

$$\begin{aligned} & (\overline{X} \circ B \circ B)(n) = \\ & \prod_{m \geq 0} \prod_{t \geq 0} \overline{X}(2t) \otimes_{\Sigma_{2t}} \left( \prod_{\underline{m} \in I_{2t,m}} B(m_1) \otimes \dots \otimes B(m_{2t}) \otimes_{\Sigma_{\underline{m}}} \mathbb{Z}[\Sigma_m] \right) \otimes_{\Sigma_m} \left( \prod_{\underline{n} \in I_{m,n}} B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) \otimes_{\Sigma_{\underline{n}}} \mathbb{Z}[\Sigma_n] \right). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} & x \otimes \left( a_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes a_m^{\otimes 2} \otimes (t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1}) \right) \otimes \left( b_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes b_n^{\otimes 2} \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) \right) \\ &= x \otimes \left( a_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes a_m^{\otimes 2} \right) \otimes \left( (b_1 \otimes \dots \otimes b_{n_1})^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes (b_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} \otimes \dots \otimes b_n)^{\otimes 2} \otimes (t^{-1})_{2r} \tau^{-1} \right), \end{aligned}$$

sachant que  $t^{-1} = t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1}$  et que  $\tau^{-1} = (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1})$ . D'autre part

$$\begin{aligned} & \vartheta_{X, B \circ B} \left( x \otimes (a_1 \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{n_1}) \otimes \dots \otimes (a_m \otimes b_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} \otimes \dots \otimes b_n) \right) \\ &= x \otimes (a_1 \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{n_1})^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes (a_m \otimes b_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} \otimes \dots \otimes b_n)^{\otimes 2} \otimes (s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1}). \\ &= x \otimes \left( a_1^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes a_m^{\otimes 2} \right) \otimes \left( (b_1 \otimes \dots \otimes b_{n_1})^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes (b_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} \otimes \dots \otimes b_n)^{\otimes 2} \otimes s^{-1} \right), \end{aligned}$$

où  $s^{-1} = (s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1})$ . Et comme le lemme A.19 assure que l'égalité

$$(t^{-1})_{2r} (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) = s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1}$$

est vraie, on obtient ce que l'on veut.

Pour finir, il faut traiter le cas général. Il suffit en fait de remarquer que si  $b \in B$  est un générateur, alors  $\Delta(b) = \sum b_j \otimes b^j$ . La preuve ci-dessus continue donc d'être valable dans le cas général, tout en étant bien plus simple à écrire parce qu'il n'y a pas de sommes (et donc moins d'indices) et pas de signes provenant de la règle de Koszul, puisque tous les éléments de l'opérate associative sont de degré 0.  $\square$

**Lemme 5.8.** *Soit  $(A, \Delta)$  un comonoïde niveau et  $X$  une suite symétrique. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \circ A \circ X \circ A \circ A} & \xrightarrow{\vartheta_{A, A \circ X \circ A}} & \overline{A \circ \overline{A \circ X \circ A} \circ A} \\ & \searrow \vartheta_{A \circ A, X} & \downarrow 1 \circ \vartheta_{A, X} \circ 1 \\ & & A \circ A \circ \overline{X} \circ A \circ A \end{array}$$

est commutatif.



**Preuve** : Les lemmes précédents et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{A \circ A \circ X \circ A \circ A} & \xrightarrow{\vartheta_1} & A \circ \overline{A \circ X \circ A \circ A} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta_2} & A \circ \overline{A \circ X \circ A \circ A} \\
& \searrow \vartheta_1 & \downarrow 1 \circ \vartheta_1 & & \downarrow 1 \circ \vartheta_1 \circ 1 \\
& & A \circ A \circ \overline{X \circ A \circ A} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta_2 \circ 1} & A \circ A \circ \overline{X \circ A \circ A} \\
& & & \searrow 1 \circ \vartheta_2 & \downarrow 1 \circ \vartheta_2 \circ 1 \\
& & & & A \circ A \circ \overline{X \circ A \circ A}
\end{array}$$

achèvent la preuve. □

**Lemme 5.9.** Soit  $A, B, X,$  et  $Y$  des suites symétriques. Alors

$$\begin{array}{ccc}
\overline{(A \otimes B) \circ (X \otimes Y)} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \overline{(A \circ X) \otimes (B \circ Y)} \\
\downarrow \vartheta_1 & & \downarrow \epsilon \\
(A \otimes B) \circ \overline{X \otimes Y} & & \overline{A \circ X} \otimes \overline{B \circ Y} \\
\downarrow 1 \circ \epsilon & & \downarrow \vartheta_1 \otimes \vartheta_1 \\
(A \otimes B) \circ (\overline{X \otimes Y}) & \xrightarrow{\iota} & (A \circ \overline{X}) \otimes (B \circ \overline{Y})
\end{array}$$

commute. Supposons maintenant que  $(A, \Delta)$  et  $(B, \Delta)$  sont des comonoïdes niveau. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\overline{(X \otimes Y) \circ (A \otimes B)} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \overline{(X \circ A) \otimes (Y \circ B)} \\
\downarrow \vartheta_2 & & \downarrow \epsilon \\
\overline{X \otimes Y} \circ (A \otimes B) & & \overline{X \circ A} \otimes \overline{Y \circ B} \\
\downarrow \epsilon \circ 1 & & \downarrow \vartheta_2 \otimes \vartheta_2 \\
(\overline{X \otimes Y}) \circ (A \otimes B) & \xrightarrow{\iota} & (\overline{X \circ A}) \otimes (\overline{Y \circ B})
\end{array}$$

commute.

**Preuve** : La commutativité du premier diagramme est évidente. Et pour faciliter un peu l'écriture de la preuve de la commutativité du deuxième diagramme, on note  $\vartheta = \vartheta_2$  et on ne tient pas compte des signes (dans le cas  $A = \mathcal{A} = B$ , il n'y a pas de signes). On a que

$$\begin{aligned}
& ((\vartheta \otimes \vartheta)\epsilon\bar{\iota}) \left( x \otimes y \otimes (a_1 \otimes b_1) \otimes \dots \otimes (a_m \otimes b_m) \right) \\
&= ((\vartheta \otimes \vartheta)\epsilon) \left( (x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \otimes (y \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_m) \right) \\
&= (\vartheta \otimes \vartheta) \left( (x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \otimes (y \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_m) \right) \\
&= \left( x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \right) \otimes \tau^{-1} \left( y \otimes \Delta(b_1) \otimes \dots \otimes \Delta(b_m) \right) \otimes \tau^{-1},
\end{aligned}$$

où  $\tau^{-1} = (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})$ . Comme d'autre part

$$\begin{aligned}
& (\iota(\epsilon \circ 1)\vartheta) \left( x \otimes y \otimes (a_1 \otimes b_1) \otimes \dots \otimes (a_m \otimes b_m) \right) \\
&= (\iota(\epsilon \circ 1)) \left( x \otimes y \otimes \Delta(a_1 \otimes b_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m \otimes b_m) \right) \otimes \tau^{-1} \\
&= \iota \left( x \otimes y \otimes \Delta(a_1 \otimes b_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m \otimes b_m) \right) \otimes \tau^{-1} \\
&= \left( x \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_m) \right) \otimes \tau^{-1} \otimes \left( y \otimes \Delta(b_1) \otimes \dots \otimes \Delta(b_m) \right) \otimes \tau^{-1},
\end{aligned}$$

on obtient ce que l'on veut.  $\square$

**Lemme 5.10.** *Soit  $A$  un comonoïde niveau,  $X$  une suite symétrique et soit  $\mathcal{F}_X = A \circ X \circ A$ . Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\overline{(A \otimes A) \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ (A \otimes A)} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \overline{(A \circ \mathcal{F}_X \circ A) \otimes (A \circ \mathcal{F}_X \circ A)} \\
\downarrow \vartheta & & \downarrow \epsilon \\
(A \otimes A) \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ (A \otimes A) & & \overline{A \circ \mathcal{F}_X \circ A} \otimes \overline{A \circ \mathcal{F}_X \circ A} \\
\downarrow 1 \circ \epsilon \circ 1 & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\
(A \otimes A) \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X)} \circ (A \otimes A) & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\
\downarrow 1 \circ \vartheta^{\otimes 2} \circ 1 & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\
(A \otimes A) \circ (\mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}) \circ (A \otimes A) & \xrightarrow{\iota} & (A \circ \mathcal{F}_{\bar{X}} \circ A) \otimes (A \circ \mathcal{F}_{\bar{X}} \circ A)
\end{array}$$

commute.

**Preuve :** Par définition de  $\vartheta$  et par le lemme 5.8, le diagramme de l'énoncé peut se réécrire comme dans le diagramme 1.

Et le carré du haut de ce diagramme commute par le lemme précédent, alors qu'il est évident que les deux petits carrés du bas commutent.  $\square$

## Foncteur décalage au niveau des bimodules semi-libres

Le foncteur de décalage induit un foncteur  $D : \mathbf{Bimod}(\mathcal{J}, 0) \longrightarrow \mathbf{Bimod}(\bar{\mathcal{J}}, 0)$ . L'essentiel de ce résultat est prouvé dans le lemme ci-dessous. Avant de donner ce lemme, précisons que dorénavant, le comonoïde niveau considéré est l'opérade associative  $\mathcal{A}$  munie de sa structure d'opérade de Hopf.

FIG. 5.1 – Diagramme 1

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{(A \otimes A) \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ (A \otimes A)} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \overline{(A \circ \mathcal{F}_X \circ A) \otimes (A \circ \mathcal{F}_X \circ A)} \\
 \downarrow \vartheta_1 & & \downarrow \epsilon \\
 (A \otimes A) \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ (A \otimes A)} & & \overline{A \circ \mathcal{F}_X \circ A} \otimes \overline{A \circ \mathcal{F}_X \circ A} \\
 \downarrow 1 \circ \vartheta_2 & & \downarrow \vartheta_1 \otimes \vartheta_1 \\
 (A \otimes A) \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ (A \otimes A) & & (A \circ \overline{\mathcal{F}_X \circ A}) \otimes (A \circ \overline{\mathcal{F}_X \circ A}) \\
 \downarrow 1 \circ \epsilon \circ 1 & & \downarrow (1 \circ \vartheta_2) \otimes (1 \circ \vartheta_2) \\
 (A \otimes A) \circ \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} \circ (A \otimes A) & \xrightarrow{\iota} & (A \circ \overline{\mathcal{F}_X} \circ A) \otimes (A \circ \overline{\mathcal{F}_X} \circ A) \\
 \downarrow 1 \circ (\vartheta_1 \otimes \vartheta_1) \circ 1 & & \downarrow (1 \circ \vartheta_1 \circ 1)^{\otimes 2} \\
 A^{\otimes 2} \circ ((A \circ \overline{X \circ A}) \otimes (A \circ \overline{X \circ A})) \circ A^{\otimes 2} & \xrightarrow{\iota} & (A \circ A \circ \overline{X \circ A} \circ A) \otimes (A \circ A \circ \overline{X \circ A} \circ A) \\
 \downarrow 1 \circ (\vartheta_2 \otimes \vartheta_2) \circ 1 & & \downarrow (1^{\circ 2} \circ \vartheta_2 \circ 1)^{\otimes 2} \\
 (A \otimes A) \circ (\mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}) \circ (A \otimes A) & \xrightarrow{\iota} & (A \circ \mathcal{F}_{\bar{X}} \circ A) \otimes (A \circ \mathcal{F}_{\bar{X}} \circ A).
 \end{array}$$

**Lemme 5.11.** Soit  $X$  une suite symétrique de modules gradués. Une différentielle  $d = d_X$  sur  $\mathcal{F}_X = \mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}$  induit une différentielle  $d_{\bar{X}}$  sur  $\mathcal{F}_{\bar{X}} = \mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A}$ .

Preuve : La différentielle sur  $\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}$  est entièrement déterminée par sa restriction

$$X \xrightarrow{d} (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}).$$

En appliquant le foncteur de décalage on obtient un morphisme

$$\bar{X} \xrightarrow{\bar{d}} (\overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}}).$$

On peut composer ce morphisme avec la transformation naturelle  $\vartheta_{\mathcal{A},X}$  pour obtenir un morphisme

$$\bar{X} \rightarrow \mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A}.$$

Il reste à voir que la dérivation induite sur  $\mathcal{F}_{\bar{X}}$  est bien une différentielle. Pour cela, il suffit de voir que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\bar{X} & \xrightarrow{\bar{d}} & \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{A},X}} & \mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A} \\
& & \downarrow \overline{d_{\mathcal{A}} \circ \bar{d} \circ d_{\mathcal{A}}} & & \downarrow d_{\mathcal{A}} \circ \bar{d} \circ d_{\mathcal{A}} \\
& & \overline{\mathcal{A} \circ \mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{A},\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}}} & \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} \circ \mathcal{A} \\
& & \downarrow \overline{\gamma_{\mathcal{A}} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}} & & \downarrow 1 \circ \vartheta_{\mathcal{A},X} \circ 1 \\
& & \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{A},X}} & \mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A} \\
& & \downarrow \overline{\gamma_{\mathcal{A}} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}} & & \downarrow \gamma_{\mathcal{A}} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}} \\
& & \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{A},X}} & \mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A}
\end{array}$$

commute. Mais le carré du bas commute par naturalité : il suffit d'utiliser le lemme 5.8 pour le voir. Et on prouve la commutativité du carré du haut par calcul. En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned}
& (d_{\mathcal{A}} \circ \bar{d} \circ d_{\mathcal{A}}) \vartheta_{\mathcal{A},X}(a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (d_{\mathcal{A}} \circ \bar{d} \circ d_{\mathcal{A}}) \left( a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_n) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{x_1 + \dots + x_{i-1}} a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes d(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_m \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_n) \otimes \tau^{-1}
\end{aligned}$$

où  $\tau^{-1} = (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1})$ . Et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
& \vartheta_{\mathcal{A},\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} \overline{d_{\mathcal{A}} \circ \bar{d} \circ d_{\mathcal{A}}}(a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= \vartheta_{\mathcal{A},\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} \left( \sum_{i=1}^m (-1)^{x_1 + \dots + x_{i-1}} a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes d(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes d(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_m \otimes \Delta(a_1) \otimes \dots \otimes \Delta(a_n) \otimes (\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}).$$

□

Ce lemme entraîne la proposition ci-dessous, comme cela a été annoncé .

**Proposition 5.12.** *Il existe un foncteur  $D : \mathbf{Bimod}(\mathcal{J}, 0) \longrightarrow \mathbf{Bimod}(\overline{\mathcal{J}}, 0)$  défini sur les objets par  $D(X, i, d) = (\overline{X}, \bar{i}, \bar{d}_X = \theta_{\mathcal{A}, X} \bar{d})$  et sur les morphismes  $(X, d_X, i_X) \xrightarrow{f} (Y, d_Y, i_Y)$  par  $D(f) = \bar{f}$ .*

**Preuve :** Il est évident que  $D(f)$  respecte l'inclusion. Il reste à voir que  $D(f)$  respecte aussi la différentielle. C'est le cas, puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\bar{f}} & \overline{Y} \\ \downarrow \bar{d}_X & & \downarrow \bar{d}_Y \\ \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\overline{1 \circ f \circ 1}} & \overline{\mathcal{A} \circ Y \circ \mathcal{A}} \\ \downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, X} & & \downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, Y} \\ \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \bar{f} \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{Y} \circ \mathcal{A}. \end{array}$$

Donc  $D$  est bien défini. Et il est évident que  $D$  est un foncteur. □

## Construction de l'opérade

Soit  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ . Remarquons que l'injection  $\mathcal{J} \xrightarrow{i} X$  induit une injection d'opérades  $F\overline{\mathcal{J}} \rightarrow F\overline{X}$ . De plus, et comme cela est expliqué dans l'exemple 2.4, il existe une suite symétrique  $R \subset F\overline{\mathcal{J}}$  tel que  $\mathcal{A} = F\overline{\mathcal{J}} / \langle R \rangle$ . Et via  $F\bar{i}$ , on peut voir  $R$  comme une sous-suite symétrique de  $F\overline{X}$ . Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour définir  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_X$  comme opérade de modules gradués. En effet, on pose  $(\mathcal{P}_X, \gamma) = F\overline{X} / \langle R \rangle$ . Et on peut étendre  $F\bar{i}$  en un morphisme (injectif) d'opérade  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_X$ . La construction de la différentielle sur  $\mathcal{P}_X$  est plus compliquée, c'est ce que l'on va voir maintenant.

Comme  $\mathcal{J}$ ,  $F\overline{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{A}$  s'injectent dans  $X$ ,  $F\overline{X}$ , et  $\mathcal{P}_X$ , respectivement, on se permet de considérer les éléments de  $\mathcal{J}$ ,  $F\overline{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{A}$  comme étant des éléments de  $X$ ,  $F\overline{X}$ , et  $\mathcal{P}_X$ , respectivement. De plus, toutes ces injections sont notées  $i$ .

**Lemme 5.13.** *La composition*

$$\overline{X} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} \mathcal{A} \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{A} \xrightarrow{i \circ 1 \circ i} \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \xrightarrow{\gamma(1 \circ \gamma)} \mathcal{P}_X,$$

où  $d$  est la différentielle obtenue par le lemme 5.11, induit une différentielle  $d = d_{\mathcal{P}_X}$  sur  $\mathcal{P}_X$ .

**Preuve :** Il y a deux choses à vérifier puisqu'il faut voir que la dérivation  $F\overline{X} \rightarrow \mathcal{P}_X$  de degré  $-1$  induit par la flèche  $X \rightarrow \mathcal{P}_X$  peut s'étendre en une flèche  $\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X$ . Et il faut aussi vérifier que l'on a bien  $d \circ d = 0$ .

Pour la première vérification, il faut montrer que  $d(\gamma[\delta \otimes (1 \otimes \delta)] - \gamma[\delta \otimes (\delta \otimes 1)]) = 0$ , si  $\delta$  est un générateur de  $\overline{\mathcal{J}}$ . Mais comme le morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules  $(\mathcal{A} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{A}, 0) \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}, d)$  respecte la différentielle, on a que

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{X} \\ \downarrow 0 & & \downarrow \bar{d} \\ \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{J}} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} \\ \downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, \mathcal{J}} & & \downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, X} \\ \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{J}} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} \end{array}$$

commute, ce qui entraîne  $d(\delta) = 0$  dans  $\mathcal{P}_X$ . On en déduit que  $d(\gamma(\delta \otimes (1 \otimes \delta))) = 0 = d(\gamma(\delta \otimes (\delta \otimes 1)))$ .

Ensuite, pour montrer que  $d$  ainsi défini est bien une différentielle, il suffit de voir que

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{X} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} & \mathcal{A} \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{i \circ 1 \circ i} & \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X & \xrightarrow{\gamma(1 \circ \gamma)} & \mathcal{P}_X \\ & & \downarrow d & & & & & & \downarrow d \\ & & \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} & \mathcal{A} \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{i \circ 1 \circ i} & \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X & \xrightarrow{\gamma(1 \circ \gamma)} & \mathcal{P}_X \end{array}$$

commute. Pour cela, commençons par remarquer que  $\mathcal{P}_X$  est muni d'une structure de  $\mathcal{A}$ -bimodule via  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_X$ . Mieux, la flèche  $\gamma(\gamma \circ 1)(i \circ 1 \circ i)(1 \circ i \circ 1)$  respecte cette structure de  $\mathcal{A}$ -bimodule, puisque c'est la flèche induite par l'inclusion de  $\overline{X}$  dans  $\mathcal{P}_X$ . On en tire que le diagramme ci-dessus commute si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{X} & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{i \circ 1 \circ i} & \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X & \xrightarrow{\gamma(1 \circ \gamma)} & \mathcal{P}_X \\ \downarrow d & & & & & & \downarrow d \\ \mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ i \circ 1} & \mathcal{A} \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{i \circ 1 \circ i} & \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X & \xrightarrow{\gamma(1 \circ \gamma)} & \mathcal{P}_X \end{array}$$

Mais il est évident que ce diagramme commute, puisque si  $x \in X$ , alors on obtient  $d_{\mathcal{P}_X}(x)$  quel que soit le chemin que l'on fait suivre à cet élément dans le diagramme ci-dessus.  $\square$

On peut maintenant considérer l'opérade différentielle  $\mathcal{P}_X = (\mathcal{P}_X, d)$ .

**Proposition 5.14.** *La construction ci-dessus définit un foncteur  $\mathcal{P} : \mathbf{Bimod}(\mathcal{J}, 0) \rightarrow \mathbf{Op}$ .*

**Preuve :** Il reste à définir  $\mathcal{P}$  sur les morphismes. Soit  $f : (X, d_X, i_X) \rightarrow (Y, d_Y, i_Y)$  un morphisme de bimodules au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ . La composition

$\overline{X} \xrightarrow{\bar{f}} \overline{Y} \rightarrow F\overline{Y} \rightarrow \mathcal{P}_Y$  définit un morphisme d'opérades  $F\overline{X} \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}_Y$ . Pour voir que l'on peut

étendre  $\mathcal{P}(f)$  sur  $\mathcal{P}_X$ , il suffit de vérifier que l'on a

$$\mathcal{P}(f)\left(\gamma_X[\delta \otimes (1 \otimes \delta)]\right) = \mathcal{P}(f)\left(\gamma_X[\delta \otimes (\delta \otimes 1)]\right),$$

$\delta$  étant à nouveau un générateur de  $\overline{\mathcal{J}}$ . Mais

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f)\left(\gamma_X(\delta \otimes (1 \otimes \delta))\right) &= \gamma_Y\left(\overline{f}(\delta) \otimes (1 \otimes \overline{f}(\delta))\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \gamma_Y(\delta \otimes (1 \otimes \delta)) \\ &= \gamma_Y(\delta \otimes (\delta \otimes 1)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \gamma_Y\left(\overline{f}(\delta) \otimes (\overline{f}(\delta) \otimes 1)\right) \\ &= \mathcal{P}(f)\left(\gamma_X(\delta \otimes (\delta \otimes 1))\right), \end{aligned}$$

les égalités  $(*)$  étant vraies car  $f$  préserve l'inclusion de  $\mathcal{J}$ . Et la functorialité de  $\mathcal{P}$  se vérifie aisément. En effet, il est clair que  $\mathcal{P}$  préserve l'identité. Et si  $f : (X, d_X, i_X) \rightarrow (Y, d_Y, i_Y)$  et  $g : (Y, d_Y, i_Y) \rightarrow (Z, d_Z, i_Z)$  sont des morphismes de bimodules au-dessous de  $\mathcal{J}$ , alors il suffit de considérer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overline{Y} & \xrightarrow{\overline{g}} & \overline{Z} & \longrightarrow & F\overline{Z} & \longrightarrow & \mathcal{P}_Z \\ & & \nearrow \overline{f} & \downarrow & & & & & \nearrow \mathcal{P}(g) & \\ \overline{X} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{Y} & \longrightarrow & F\overline{Y} & & & & & \\ \downarrow & & \nearrow \mathcal{P}(f) & & & & & & & \\ F\overline{X} & & & & & & & & & \end{array}$$

pour voir que  $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$ . □

**Proposition 5.15.** *Soit  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$  et  $C$  une  $\mathcal{A}$ -coalgèbre avec morphisme de structure  $m_c : \mathcal{A} \rightarrow \text{CoEnd}(C)$ . Alors on a une bijection naturelle*

$$\{f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X, \mathcal{T}(C \otimes C)\right) \mid f(- \otimes \delta^{-1}) = m_c(\delta)\} \stackrel{\xi}{\cong} \{g \in \mathbf{Op}\left(\mathcal{P}_X, \text{CoEnd}(C)\right) \mid m_c = g\alpha\},$$

sachant que  $\delta^{-1}$  est un générateur de  $\mathcal{J}$  tel que  $\overline{\delta^{-1}} = \delta$ .

**Preuve :** Cette bijection va être donnée comme composition de trois bijections.

(1) Commençons par montrer qu'il existe une bijection

$$\begin{aligned} &\{f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X, \mathcal{T}(C \otimes C)\right) \mid f(- \otimes \delta^{-1}) = m_c(\delta)\} \stackrel{\xi_1}{\cong} \\ &\{g \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{F}_X, \text{CoEnd}(C, C \otimes C)\right) \mid g(\delta^{-1}) = m_c(\delta)\}; \end{aligned}$$

ici  $CoEnd(C, C \otimes C)$  est la suite symétrique donnée par  $CoEnd(C, C \otimes C)(n) = Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n})$ , et la structure de  $\mathcal{A}$ -module à gauche est donnée par la structure de coalgèbre coassociative de  $C$ , alors que la structure de  $\mathcal{A}$ -module à droite est donnée par la structure de coalgèbre coassociative de  $C \otimes C$ . De plus, la coassociativité de  $C$  assure la compatibilité de ces deux structures.

Soit  $f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X, \mathcal{T}(C \otimes C))$ . Par le lemme 3.2,  $f$  correspond à une suite de morphismes  $\{f_n : C \otimes X(n) \rightarrow (C \otimes C)^{\otimes n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que le diagramme suivant commute pour tout  $n \geq 0$  :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n) & \xrightarrow{f_n} & (C \otimes C)^{\otimes n} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ (\mathcal{T}(C) \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{f} & (C \otimes C)^{\otimes n}. \end{array}$$

De manière analogue,  $g \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_X, CoEnd(C, C \otimes C))$  est équivalent à une suite de morphismes  $\{g_n : X(n) \rightarrow Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n})\}_{n \geq 0}$  telle que le diagramme suivant commute pour tout  $n \geq 0$  :

$$\begin{array}{ccc} X(n) & \xrightarrow{g_n} & Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n}) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{g} & Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n}). \end{array}$$

Evidemment,  $\xi_1$  est défini par  $\xi_1(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{g_n := f_n^\#\}_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\#$  fait référence à l'adjonction évidente. Vérifions que le but de  $\xi_1$  est bien l'ensemble qui nous intéresse. Mais le premier des diagrammes ci-dessus peut se réécrire comme ceci, en décomposant la différentielle sur  $C \otimes X(n)$  :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n) & \xrightarrow{f_n} & (C \otimes C)^{\otimes n} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ C \otimes (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{\pi} (\mathcal{T}(C) \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{f} (C \otimes C)^{\otimes n}, \end{array}$$

où  $\pi$  est la projection  $\mathcal{T}(C) \circ (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}) \cong \mathcal{T}(C) \circ X \circ \mathcal{A}$ . Mais  $(f\pi)^\# = g$ , où  $g : \mathcal{F}_X \rightarrow CoEnd(C, C \otimes C)$  est le morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules induit par  $\xi_1(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ . En effet, si  $\mathbf{a} = a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  est un élément de  $\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}$  et si  $c \in C$  avec  $m_c(a)(c) = \sum c_1 \otimes \dots \otimes c_m$ , alors

$$\begin{aligned} & g(\mathbf{a})(c) \\ &= \left( [m_{c \otimes c}(a_1) \otimes \dots \otimes m_{c \otimes c}(a_n)] [g_{n_1}(x_1) \otimes \dots \otimes g_{n_m}(x_m)] m_c(a) \right)(c) \\ &= \left( [m_{c \otimes c}(a_1) \otimes \dots \otimes m_{c \otimes c}(a_n)] [f(- \otimes x_1) \otimes \dots \otimes f(- \otimes x_m)] \right) \left( \sum c_1 \otimes \dots \otimes c_m \right) \\ &= (-1)^{c_1(x_1 + \dots + x_m) + c_2(x_2 + \dots + x_m) + \dots + c_m x_m} \sum (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) (f(c_1 \otimes x_1) \otimes \dots \otimes f(c_m \otimes x_m)) \\ &= (-1)^{c(x_1 + \dots + x_m)} f \left( \left( \sum c_1 \otimes \dots \otimes c_m \right) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^{c(x_1+\dots+x_m)} f(m_c(a)(c) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
&= (-1)^{c(x_1+\dots+x_m)} (f\pi)(c \otimes \mathbf{a}) \\
&= (f\pi)^\#(\mathbf{a})(c).
\end{aligned}$$

On peut donc utiliser le lemme A.16 pour conclure :  $\xi_1$  est bien défini. Et il est maintenant clair aussi que  $\xi_1$  est une bijection.

(2) La deuxième bijection est essentiellement un décalage. On va voir que

$$\begin{aligned}
&\{f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_X, CoEnd(C, C \otimes C)) \mid f(\delta^{-1}) = m_c(\delta)\} \stackrel{\xi_2}{\cong} \\
&\{g \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\bar{X}}, CoEnd(C)) \mid g(\delta) = m_c(\delta)\}.
\end{aligned}$$

A nouveau, décortiquons les définitions. Comme avant,  $f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_X, CoEnd(C, C \otimes C))$  est équivalent à une suite  $\{f_n : X(n) \rightarrow Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n})\}_{n \geq 0}$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
X(n) & \xrightarrow{f_n} & Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n}) \\
\downarrow d & & \downarrow d \\
(\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n) & \xrightarrow{f} & Hom(C, (C \otimes C)^{\otimes n})
\end{array}$$

commute pour tout  $n \geq 0$ . De même,  $g \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\bar{X}}, CoEnd(C, C))$  est équivalent à une suite  $\{g_n : \bar{X}(2n) \rightarrow Hom(C, C^{\otimes 2n})\}_{n \geq 0}$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\bar{X}(2n) & \xrightarrow{g_n} & Hom(C, C^{\otimes 2n}) \\
\downarrow \bar{d} & & \downarrow d \\
\overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}}(2n) & & Hom(C, C^{\otimes 2n}) \\
\downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, X} & & \downarrow = \\
(\mathcal{A} \circ \bar{X} \circ \mathcal{A})(2n) & \xrightarrow{g} & Hom(C, C^{\otimes 2n})
\end{array}$$

commute pour tout  $n \geq 0$ . On définit  $\xi_2$  en posant  $\xi_2(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{g_n := \xi_2(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\xi_2(f_n)$  est défini dans le lemme A.12. Il faut voir que le diagramme voulu commute. En appliquant le foncteur de décalage sur le premier des deux diagrammes ci-dessus, on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X}(2n) & \xrightarrow{\xi_2(f_n)} & \text{Hom}(C, C^{\otimes 2n}) \\
\downarrow \bar{d} & & \downarrow d \\
\overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}}(2n) & \xrightarrow{\xi_2(f)} & \text{Hom}(C, C^{\otimes 2n}) \\
\downarrow \vartheta_{\mathcal{A}, X} & & \downarrow = \\
(\mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A})(2n) & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(C, C^{\otimes 2n}),
\end{array}$$

où  $g$  est le morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules induit par la suite  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Mais dans ce diagramme, le petit carré du haut commute par le lemme A.15. Et le carré du bas commute parce que les deux compositions possibles envoient un élément

$$a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in (\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A})(n)$$

sur le morphisme

$$(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_m)(m_c(a_1)^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes m_c(a_m)^{\otimes 2})(f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_m))m_c(a),$$

par définition de toutes les flèches qui se trouvent dans ce diagramme (la définition de  $\tau_i$  est donnée dans la définition de  $\vartheta$ ). La seule chose à laquelle il faut faire attention, c'est que dans la définition de  $\xi_2(f)$  on fait appel à la structure de  $\mathcal{A}$ -module à droite de  $CoEnd(C \otimes C)$  donnée par la structure de  $\mathcal{A}$ -coalgèbre de  $C \otimes C$ . Alors que la construction de  $g$  fait appel à la structure de  $\mathcal{A}$ -module à droite de  $CoEnd(C)$  donnée par la structure de  $\mathcal{A}$ -coalgèbre de  $C$ .

On en tire que  $\xi_2$  est bien défini. Et à nouveau, il est maintenant clair que  $\xi_2$  est une bijection.

(3) Et la dernière bijection est celle-ci :

$$\{f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\overline{X}}, CoEnd(C)) \mid f(\delta) = m_c(\delta)\} \stackrel{\xi_3}{\cong} \{g \in \mathbf{Op}(\mathcal{P}_X, CoEnd(C)) \mid m_c = gi\}.$$

Soit  $f \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\overline{X}}, CoEnd(C, C))$ . Ce morphisme est équivalent à un morphisme de suites symétriques  $f : \overline{X} \rightarrow CoEnd(C)$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X} & \xrightarrow{f} & CoEnd(C) \\
\downarrow d & & \downarrow d \\
(\mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A}) & \xrightarrow{f} & CoEnd(C)
\end{array}$$

commute. Et  $g \in \mathbf{Op}(\mathcal{P}_X, CoEnd(C))$  est équivalent à un morphisme de suites symétriques  $g : \overline{X} \rightarrow CoEnd(C)$ , si  $m_c = gi$ . De plus, pour que ce morphisme respecte la différentielle, il faut que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{X} & \xrightarrow{g} & CoEnd(C) \\
\downarrow d & & \downarrow d \\
\mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{g} & CoEnd(C) \\
\downarrow \gamma^{(2)}(i \circ i \circ i) & & \downarrow = \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{g} & CoEnd(C).
\end{array}$$

On peut donc définir  $\xi_3$  comme étant induit par l'identité. Et il reste à étudier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{g} & CoEnd(C) \\
\downarrow \gamma^{(2)}(i \circ i \circ i) & & \downarrow = \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{g} & CoEnd(C).
\end{array}$$

On prend un élément  $a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  dans  $\mathcal{A} \circ \overline{X} \circ \mathcal{A}$  et on constate aisément que le diagramme ci-dessus commute si et seulement si on a l'égalité

$$\begin{aligned}
& \left( g(i(a_1)) \otimes \dots \otimes g(i(a_n)) \right) \left( g(x_1) \otimes \dots \otimes g(x_m) \right) gi(a) = \\
& \left( m_c(a_1) \otimes \dots \otimes m_c(a_n) \right) \left( g(x_1) \otimes \dots \otimes g(x_m) \right) m_c(a).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.  $\square$

Avant d'écrire le corollaire que l'on veut obtenir, définissons la catégorie concernée par ce corollaire.

**Définition 5.7.** Soit  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ . La catégorie des coalgèbres sur ce bimodule est la catégorie dont les objets sont les couples  $(C, \psi)$ , où  $C$  est une coalgèbre coassociative et où  $\psi$  est un élément de  ${}_A\mathbf{Mod}_A \left( \mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X, \mathcal{T}(C \otimes C) \right)$  tel que  $\psi(- \otimes \delta^{-1})$  est la co-multiplication de  $C$ ;  $\delta^{-1}$  étant comme dans la proposition précédente. Les morphismes entre deux telles coalgèbres  $(C, \psi_C)$  et  $(D, \psi_D)$  sont les morphismes de complexes de chaînes  $C \rightarrow D$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}(C) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X & \xrightarrow{\psi_C} & \mathcal{T}(C \otimes C) \\
\downarrow \mathcal{T}(f) \circ_{\mathcal{A}} 1 & & \downarrow \mathcal{T}(f \otimes f) \\
\mathcal{T}(D) \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X & \xrightarrow{\psi_D} & \mathcal{T}(D \otimes D).
\end{array}$$

La catégorie des coalgèbres sur  $(X, d, i)$  est notée  $(X, d, i)\text{-coalg}$ .

La proposition que l'on vient de voir dit qu'une structure de  $(X, d, i)$ -coalgèbre est équivalente à une structure de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbre. On peut donc se demander ce qu'il se passe au niveau des morphismes, et la réponse est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 5.16.** Soit  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ .

(i) Soit  $f : (C, \psi_C) \rightarrow (D, \psi_D)$  un morphisme de coalgèbres sur  $(X, d, i)$ . Alors  $f : (C, \xi(\psi_C)) \rightarrow (D, \xi(\psi_D))$  est un morphisme de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbres.

(ii) Réciproquement, si  $f : (C, \theta_C) \rightarrow (D, \theta_D)$  est un morphisme de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbres, alors  $f : (C, \xi^{-1}(\theta_C)) \rightarrow (D, \xi^{-1}(\theta_D))$  est un morphisme de  $(X, d, i)$ -coalgèbres.

**Preuve :** Commençons par rappeler que si  $(C, \psi_C)$  est une  $(X, d, i)$ -coalgèbre, alors  $\psi_C$  est entièrement déterminé par la suite de restrictions  $\{\psi_C(n) : C \otimes X(n) \rightarrow (C \otimes C)^{\otimes n}\}_{n \geq 0}$ . Ceci est expliqué dans le lemme 3.2. Et il est clair que  $f : (C, \psi_C) \rightarrow (D, \psi_D)$  est un morphisme de coalgèbres sur  $(X, d, i)$  si et seulement si ce morphisme de complexes de chaînes fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes X(n) & \xrightarrow{\psi_C} & (C \otimes C)^{\otimes n} \\ \downarrow f \otimes 1 & & \downarrow (f \otimes f)^{\otimes n} \\ D \otimes X(n) & \xrightarrow{\psi_D} & (D \otimes D)^{\otimes n}, \end{array}$$

pour tout  $n \geq 0$ .

D'autre part, une structure de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbre sur  $C$  est entièrement déterminée par un morphisme de suites symétriques  $\overline{X} \xrightarrow{\theta_C} \text{CoEnd}(C)$  qui envoie  $\delta$  sur un morphisme coassociatif. Ce qui revient à se donner une suite de morphismes  $\{\theta_C(n) : \overline{X}(2n) \rightarrow \text{Hom}(C, C^{\otimes 2n})\}_{n \geq 0}$  telle que  $\theta_C(n)$  est  $\Sigma_{2n}$ -équivariant et telle que  $\theta_C(1)(\delta)$  est coassociatif. Mais, par le lemme A.13, une telle suite est équivalente à une suite  $\{\theta_C(n) : X(n) \rightarrow \text{CoEnd}(C \otimes C)\}_{n \geq 0}$  telle que  $\theta_C(n)$  est  $\Sigma_n$ -équivariant et telle que  $\theta_C(1)(\delta^{-1})$  est coassociatif. Et comme avant, il est alors clair que  $g : (C, \theta_C) \rightarrow (D, \theta_D)$  est un morphisme de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbres si et seulement si ce morphisme de complexes de chaînes fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X(n) & \xrightarrow{\theta_C} & \text{Hom}(C, (C \otimes C)^{\otimes n}) \\ \downarrow \theta_D & & \downarrow \text{Hom}(1, (f \otimes f)^{\otimes n}) \\ \text{Hom}(D, (D \otimes D)^{\otimes n}) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, 1)} & \text{Hom}(C, (D \otimes D)^{\otimes n}). \end{array}$$

Mais  $\xi(\{\psi_C(n)\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{\psi_C^\#(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\xi^{-1}(\{\theta_C(n)\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{\theta_C^\flat(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  par la preuve de la proposition ci-dessus,  $\#$  et  $\flat$  faisant référence à l'adjonction évidente. La conclusion de la preuve est alors claire.  $\square$

**Corollaire 5.17.** Soit  $(X, d, i)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0)$ . Alors la catégorie des coalgèbres sur ce bimodule est isomorphe à la catégorie des coalgèbres sur  $\mathcal{P}_X$ .

**Preuve :** Soit  $G : (X, d, i)\text{-coalg} \rightarrow \mathcal{P}_X\text{-coalg}$  le foncteur défini comme suit :

- si  $(C, \psi)$  est une  $(X, d, i)$ -coalgèbre, alors  $G(C, \psi) = (C, \xi(\psi))$ ,
- sur les morphismes,  $G$  est l'identité.

D'autre part, soit  $H : \mathcal{P}_X\text{-coalg} \rightarrow (X, d, i)\text{-coalg}$  le foncteur défini par

- $H(C, \theta) = (C, \xi^{-1}(\theta))$  sur les objets,
- l'identité sur les morphismes.

Il est évident que  $G \circ H = 1$  et que  $H \circ G = 1$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

## 5.2 Structure monoïdale

Dans le cas où  $\mathcal{F}_X$  est muni d'une structure de comonoïde niveau  $\Delta_{\mathcal{F}_X} : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X$ , on peut munir  $\mathcal{P}_X$  d'une structure d'opérade de Hopf. On procède exactement comme pour la construction de la différentielle de l'opérade  $\mathcal{P}_X$  : on commence par montrer que la structure de comonoïde niveau de  $\mathcal{F}_X$  induit une structure de comonoïde niveau sur  $\mathcal{F}_{\bar{X}}$ . Et finalement, on montre que cette structure induit une structure d'opérade de Hopf sur  $\mathcal{P}_X$ . Voyons les détails.

**Lemme 5.18.** *Soit  $(\mathcal{F}_X, \Delta_X)$  comme ci-dessus. Alors*

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\overline{\Delta_X}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} \\ \downarrow \vartheta & & & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\ \mathcal{F}_{\bar{X}} & \xrightarrow{1 \circ \overline{\Delta_X} \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \epsilon \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta \otimes \vartheta \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}, \end{array}$$

commute, sachant que  $\rho$  est défini par la structure de  $\mathcal{A}$ -bimodule de  $\mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}$  qui vient de la structure d'opérade de Hopf de  $\mathcal{A}$  (voir la proposition 2.18).

**Preuve :** Pour effectuer cette vérification, on découpe le diagramme ci-dessus en deux :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{A} \circ X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{1 \circ \overline{\Delta_X} \circ 1} & \overline{\mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ \mathcal{A}} \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ \mathcal{F}_{\bar{X}} & \xrightarrow{1 \circ \overline{\Delta_X} \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ \mathcal{A} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} \\ \downarrow \vartheta & & & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\ \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \epsilon \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta \otimes \vartheta \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}. \end{array}$$

Le premier de ces deux carrés commute par naturalité, et on découpe le deuxième carré en petits carrés, comme cela est fait sur la page 70. Dans ce diagramme, le petit carré en haut à gauche (du point de vu du lecteur) commute par naturalité de  $\vartheta$ , de même que le petit carré en bas à droite. Le petit carré en haut à droite commute par naturalité de  $\epsilon$ . Le carré dans la deuxième colonne commute par le résultat de compatibilité donné dans le lemme 5.10. Enfin, les deux petits carrés dans le bas de la première colonne commutent trivialement.  $\square$

**Proposition 5.19.** *Tout morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules  $\mathcal{F}_X \xrightarrow{\Delta_X} \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X$  induit un morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules  $\mathcal{F}_{\bar{X}} \xrightarrow{\Delta_{\bar{X}}} \mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}$ . De plus, si le premier de ces morphismes est coassociatif, alors le deuxième l'est aussi.*

**Preuve :** On définit  $\Delta_{\bar{X}}$  comme étant le morphisme de  $\mathcal{A}$ -bimodules induit par la composition

$$\overline{\mathcal{X}} \xrightarrow{\overline{\Delta_X}} \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \xrightarrow{\epsilon} \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} \xrightarrow{\vartheta_{\mathcal{A}, X} \otimes \vartheta_{\mathcal{A}, X}} \mathcal{F}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{X}}.$$

Il faut commencer par vérifier que le morphisme induit respecte la différentielle. Autrement dit, il faut vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\Delta_{\overline{X}}} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \\ \downarrow d_{\overline{X}} & & \downarrow d_{\overline{X}} \otimes 1 + 1 \otimes d_{\overline{X}} \\ \mathcal{F}_{\overline{X}} & \xrightarrow{\Delta_{\overline{X}}} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}}. \end{array}$$

Mais ce diagramme se décompose comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{X} & \xrightarrow{\overline{\Delta_X}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\vartheta \otimes \vartheta} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \\ \downarrow \overline{d} & & \downarrow \overline{d \otimes 1 + 1 \otimes \overline{d}} & & \downarrow \overline{d} \otimes 1 + 1 \otimes \overline{d} & & \downarrow d \\ \mathcal{F}_{\overline{X}} & \xrightarrow{\overline{\Delta_X}} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\vartheta \otimes \vartheta} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \\ \downarrow \vartheta & & & & & & \downarrow d \\ \mathcal{F}_{\overline{X}} & \xrightarrow{1 \circ \overline{\Delta_X} \circ 1} & \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \epsilon \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \circ \vartheta \otimes \vartheta \circ 1} & \mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}}) \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}}. \end{array}$$

$\swarrow d = d_{\overline{X}} \otimes 1 + 1 \otimes d_{\overline{X}}$   
 $\searrow =$

Et comme le diagramme en haut à gauche (du point de vu du lecteur) commute par hypothèse, et que les deux autres diagrammes du haut commutent car  $\epsilon$  et  $\vartheta$  respectent la différentielle, on peut conclure avec le lemme précédent.

Puis, pour voir que  $\Delta_{\overline{X}}$  est coassociative lorsque  $\Delta_X$  l'est, on peut décomposer

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \end{array}$$

comme cela est fait sur la page 72. Dans ce diagramme, le petit carré en-haut à gauche commute par hypothèse. Les deux petits carrés adjacents à ce premier carré commutent par naturalité de  $\epsilon$ . Et le quatrième petit carré commute par la propriété de coassociativité de  $\epsilon$ . Finalement, les deux derniers diagrammes commutent par le lemme ci-dessus.  $\square$

Passons maintenant aux opérades.

**Proposition 5.20.** *Soit  $(X, d, i, \Delta)$  un bimodule de Hopf au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}})$ . On a alors que  $(\mathcal{P}_X, \gamma)$  est muni d'une structure d'opérade de Hopf.*

**Preuve :** La proposition précédente permet de définir la composition suivante :

$$\overline{X} \rightarrow \mathcal{F}_{\overline{X}} \xrightarrow{\Delta_{\overline{X}}} \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \xrightarrow{(i \circ i \circ i)^{\otimes 2}} (\mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X) \otimes (\mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X \circ \mathcal{P}_X) \xrightarrow{(\gamma(1 \circ \gamma))^{\otimes 2}} \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X,$$

qui induit un morphisme d'opérades  $\Delta : \overline{F\overline{X}} \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X$ . Il reste à voir que l'on peut passer au

quotient pour obtenir un morphisme  $\mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X$ . Mais considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\overline{\Delta_{\mathcal{F}}}} & \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{F}}} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{F}}} \otimes \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{F}}} & \xrightarrow{\vartheta \otimes \vartheta} & \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{F}}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{F}}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\circ 3} \otimes \mathcal{A}^{\circ 3} \xrightarrow{(\gamma_{\mathcal{A}}(1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}))^{\otimes 2}} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\
\downarrow \overline{i} & & \downarrow \overline{i \otimes i} & & \downarrow \overline{i \otimes i} & & \downarrow i \otimes i \\
\overline{X} & \xrightarrow{\overline{\Delta}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\epsilon} & \overline{\mathcal{F}_X} \otimes \overline{\mathcal{F}_X} & \xrightarrow{\vartheta \otimes \vartheta} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \xrightarrow{(i \circ i \circ i)^{\otimes 2}} \mathcal{P}_X^{\circ 3} \otimes \mathcal{P}_X^{\circ 3} \xrightarrow{(\gamma(1 \circ \gamma))^{\otimes 2}} \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X.
\end{array}$$

Ce carré commute puisque tous les petits carrés commutent. En effet, le premier carré à gauche (du point de vu du lecteur) commute par hypothèse. Le deuxième et le troisième carrés commutent par naturalité de  $\epsilon$  et de  $\vartheta$  respectivement. Et le quatrième petit carré commute car les deux chemins possibles dans ce diagramme donnent l'inclusion de  $\mathcal{F}_{\overline{\mathcal{F}}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{F}}}$  dans  $\mathcal{P}_X^{\circ 3} \otimes \mathcal{P}_X^{\circ 3}$ . Enfin, le dernier carré commute car  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_X$  est un morphisme d'opérades. On obtient alors

FIG. 5.2 – Diagramme 2

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{\mathcal{A} \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \Delta_{\mathcal{A}}}} & \overline{(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \circ (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \circ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{(\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A})} & \xrightarrow{(\gamma_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}})^{\otimes 2}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \\
 \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
 \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \Delta_{\mathcal{A}}}} & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \circ \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \circ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) & & \overline{\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}} \otimes \overline{\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}} & \xrightarrow{(\gamma_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}})^{\otimes 2}} & \overline{\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X} \\
 \downarrow 1 \circ \epsilon \circ 1 & & \downarrow 1 \circ \epsilon \circ 1 & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta & & \downarrow \vartheta \otimes \vartheta \\
 \mathcal{A} \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X)} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \Delta_{\mathcal{A}}}} & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X)} \circ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) & & (\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}) & \xrightarrow{(\gamma_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}})^{\otimes 2}} & \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X \\
 \downarrow 1 \circ (\vartheta^{\otimes 2}) \circ 1 & & \downarrow 1 \circ (\vartheta^{\otimes 2}) \circ 1 & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \mathcal{A} \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X)} \circ \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \Delta_{\mathcal{A}}}} & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \circ \overline{(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X)} \circ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) & \xrightarrow{i} & (\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}) \otimes (\mathcal{A} \circ \mathcal{F}_X \circ \mathcal{A}) & \xrightarrow{(\gamma_{\mathcal{A} \circ 1 \circ \gamma_{\mathcal{A}}})^{\otimes 2}} & \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X
 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma(\delta \otimes 1 \otimes \delta)) &= \gamma_{\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X}(\Delta(\delta) \otimes \Delta(1) \otimes \Delta(\delta)) \\
&= \gamma_{\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X}(\delta \otimes \delta \otimes 1 \otimes 1 \otimes \delta \otimes \delta) \\
&= \gamma(\delta \otimes 1 \otimes \delta) \otimes \gamma(\delta \otimes 1 \otimes \delta) \\
&= \gamma(\delta \otimes \delta \otimes 1) \otimes \gamma(\delta \otimes \delta \otimes 1) \\
&= \gamma_{\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X}(\Delta(\delta) \otimes \Delta(\delta) \otimes \Delta(1)) \\
&= \Delta(\gamma(\delta \otimes \delta \otimes 1)).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on peut étendre  $\Delta$  en un morphisme d'opérades  $\Delta : \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X$ .  
Maintenant, vérifions que le morphisme d'opérades  $\Delta : F\overline{X} \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X$  respecte la différentielle.  
En fait, il suffit de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{X} & \xrightarrow{\Delta_{\overline{X}}} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & & \\
\downarrow d & \searrow = & \downarrow & \searrow & \\
\overline{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & \\
\downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
\mathcal{F}_{\overline{X}} & \xrightarrow{\Delta_{\overline{X}}} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & & \\
\downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & 
\end{array}$$

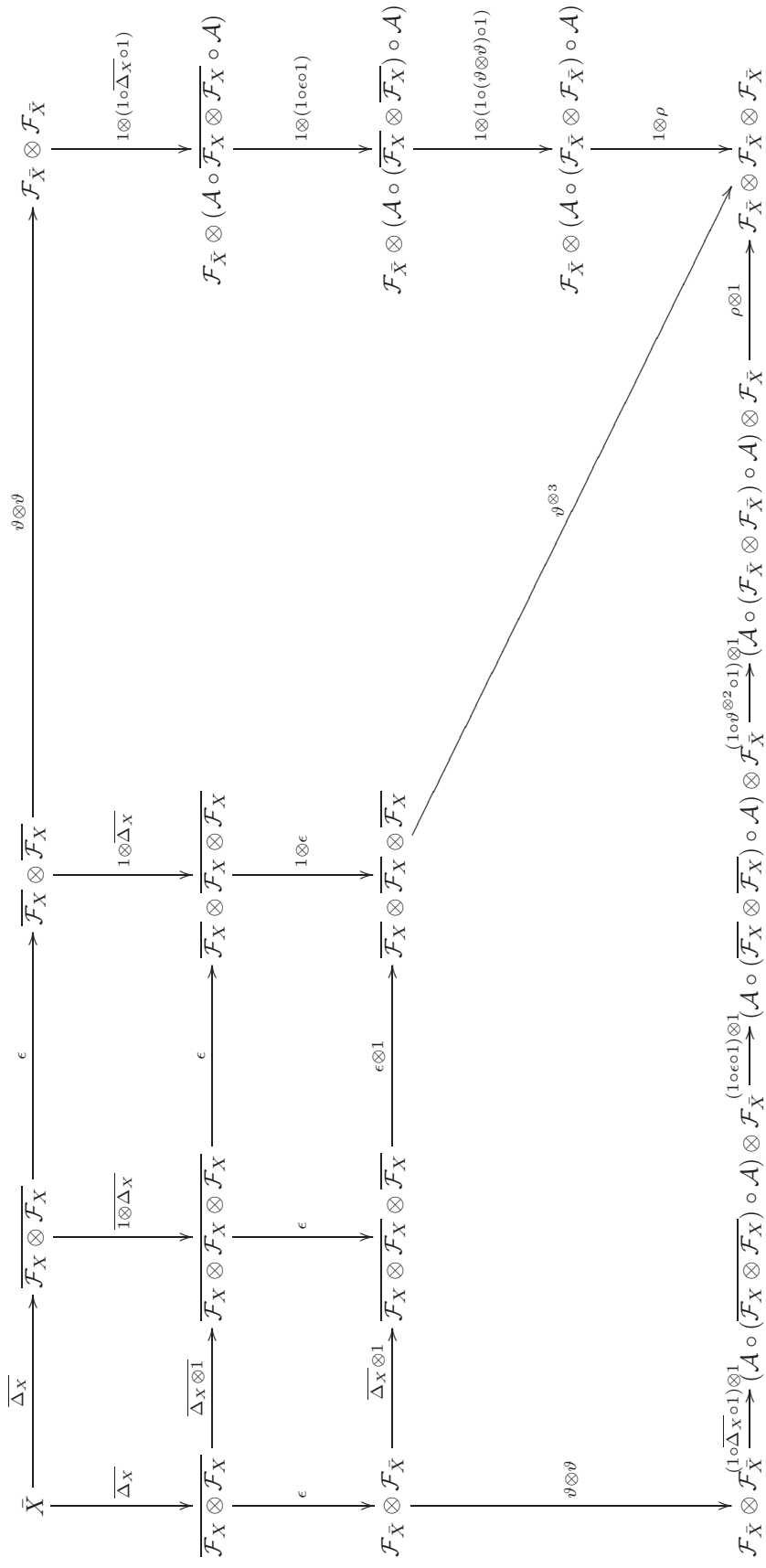
Le carré qui nous intéresse est le carré du devant (par rapport au lecteur). Toutes les autres faces de ce cube commutent. En effet, le carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \longrightarrow & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X \\
\downarrow d & & \downarrow d \\
\mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \longrightarrow & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X
\end{array}$$

commute par un argument déjà donné dans la preuve du lemme 5.13. Et la commutativité de la face du dessous se montre de manière similaire. Toutes les autres faces, sauf celle du devant, commutent pour des raisons évidentes. On en déduit que la face du devant commute aussi. Il reste alors à considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
F\overline{X} & & & & \\
\downarrow d & \searrow \pi & \searrow \Delta & & \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & \\
\downarrow d & & \downarrow d & & \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & 
\end{array}$$

FIG. 5.3 – Diagramme 3



où  $\pi$  est la projection évidente, pour voir que  $\Delta : \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X$  respecte la différentielle. Finalement, il reste à voir que  $\Delta$  est coassociatif. Pour cela, considérons d'abord le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \searrow & \\
\downarrow \Delta & \searrow = & \downarrow & \Delta & \downarrow \Delta \\
\overline{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & \\
\downarrow \Delta & \searrow \Delta \otimes 1 & \downarrow 1 \otimes \Delta & \searrow & \downarrow 1 \otimes \Delta \\
\mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} \otimes \mathcal{F}_{\overline{X}} & \searrow & \downarrow 1 \otimes \Delta \\
\downarrow \Delta & \searrow \Delta \otimes 1 & \downarrow \Delta & \searrow & \downarrow 1 \otimes \Delta \\
\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & 
\end{array}$$

Il est clair que toutes les faces, sauf celle de devant, commutent. On en déduit que la face de devant commute aussi. On peut alors considérer le diagramme suivant pour voir que  $\Delta$  est coassociatif :

$$\begin{array}{ccccc}
F\overline{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & \searrow & \\
\downarrow \Delta & \searrow \pi & \downarrow \Delta & \Delta & \downarrow \Delta \otimes 1 \\
\mathcal{P}_X & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & \\
\downarrow \Delta & \searrow 1 \otimes \Delta & \downarrow \Delta & \searrow & \downarrow \Delta \otimes 1 \\
\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X & & 
\end{array}$$

□

En résumé, ce qui précède nous donne le résultat suivant.

**Corollaire 5.21.** *Le foncteur  $\mathcal{P}$  défini dans la section précédente s'étend en un foncteur*

$$\mathbf{Bimod}(\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}}) \longrightarrow \mathbf{HopfOp}.$$

Et on obtient une amélioration du résultat principal de la section précédente, mais pour cela on a besoin de la proposition suivante, qui est une conséquence de la proposition 3.11.

**Proposition 5.22 ([HL07]).** *Soit  $(X, d, i, \Delta_X)$  un bimodule de Hopf au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}})$ . La catégorie des  $(X, d, i)$ -coalgèbres est une catégorie monoïdale.*

**Théorème 5.23.** *Soit  $(X, d, i, \Delta_X)$  un bimodule au-dessous de  $(\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}})$ . Alors l'isomorphisme de catégories*

$$G : (X, d, i)\text{-coalg} \longrightarrow \mathcal{P}_X\text{-coalg}$$

*respecte le produit tensoriel défini par  $\Delta_X$ .*

**Preuve :** Dans cette preuve, la lettre  $\xi$  fait référence à la bijection de la proposition 5.15. Soit  $(C, \psi_C)$  et  $(D, \psi_D)$  des  $(X, d, i)$ -coalgèbres. Il faut montrer que

$$G(C \otimes D) = G(C) \otimes G(D).$$

Comme complexes de chaînes, il est évident que  $G(C \otimes D) = C \otimes D = G(C) \otimes G(D)$ . Il reste à voir que la structure de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbre de  $G(C \otimes D)$  et  $G(C) \otimes G(D)$  est la même.

Pour cela, commençons par noter qu'une structure de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbre  $\mathcal{P}_X \rightarrow \text{CoEnd}(C \otimes D)$  est entièrement déterminée par sa restriction  $\overline{X} \rightarrow \text{CoEnd}(C \otimes D)$ . Ensuite, rappelons que la structure de  $(X, d, i)$ -coalgèbre de  $C \otimes D$  est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(C \otimes D) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X & \xrightarrow{1_{\mathcal{A}} \circ \Delta_X} & \mathcal{T}(C \otimes D) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} (\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_X) \xrightarrow{\iota} (\mathcal{T}(C) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X) \otimes (\mathcal{T}(D) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X) \\ & & \downarrow \psi_C \otimes \psi_D \\ & & \mathcal{T}(C \otimes C) \otimes \mathcal{T}(D \otimes D) \\ & & \cong \downarrow \alpha \\ & & \mathcal{T}((C \otimes D)^{\otimes 2}). \end{array}$$

Pour obtenir  $\xi(\psi_{C \otimes D})$  il faut considérer la famille de restrictions :

$$C \otimes D \otimes X(n) \rightarrow (\mathcal{T}(C \otimes D) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X)(n) \rightarrow \mathcal{T}((C \otimes D)^{\otimes 2})(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Et  $\xi(\psi_{C \otimes D})$  est défini, en niveau  $2n$ , comme étant l'extension de

$$X(n) \rightarrow \text{Hom}(C \otimes D, (C \otimes D)^{\otimes 2n})$$

en un morphisme  $\Sigma_{2n}$ -équivariant

$$\overline{X}(2n) \xrightarrow{\xi(\psi_{C \otimes D})} \text{Hom}(C \otimes D, (C \otimes D)^{\otimes 2n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que si  $c \in C$ ,  $d \in D$  et  $x \in X(n)$  sont des éléments homogènes, alors

$$\begin{aligned} \xi(\psi_{C \otimes D})(x)(c \otimes d) &= (-1)^{x(c+d)} \psi_{C \otimes D}(c \otimes d \otimes x) \\ &= (-1)^{x(c+d)} \alpha(\psi_C \otimes \psi_D) \iota(c \otimes d \otimes \Delta_X(x)) \\ &\stackrel{(*)}{=} (-1)^{x(c+d)} \alpha(\psi_C \otimes \psi_D) \iota(c \otimes d \otimes \sum_i x_i \otimes x^i) \\ &= \alpha(\psi_C \otimes \psi_D) \left( \sum_i (-1)^{x(c+d)+dx_i} c \otimes x_i \otimes d \otimes x^i \right) \\ &= \sum_i (-1)^{x(c+d)+dx_i} \alpha(\psi_C(c \otimes x_i) \otimes \psi_D(d \otimes x^i)), \end{aligned}$$

$\alpha$  étant l'isomorphisme de permutation évident et l'égalité (\*) étant vraie car on pose  $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes x^i$ ,  $x_i, x^i \in \mathcal{F}_X$ .

De manière analogue à ce que l'on vient de voir ci-dessus,  $\xi(\psi_C)$  est déterminé, en niveau  $2n$ , par l'extension

$$\overline{X}(2n) \rightarrow \text{Hom}(C, (C \otimes C)^{\otimes 2n}), \quad n \in \mathbb{N},$$

de  $\psi_C(n)^\#$ . Ici  $\psi_C(n)$  est la restriction

$$C \otimes X(n) \rightarrow (\mathcal{T}(C) \circlearrowleft_{\mathcal{A}} \mathcal{F}_X)(n) \xrightarrow{\psi_C} \mathcal{T}(C \otimes C)(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

et  $\#$  fait référence à l'adjonction évidente. Evidemment,  $\xi(\psi_D)$  est défini de manière similaire. La structure de  $\mathcal{P}_X$ -coalgèbre de  $F(C) \otimes F(D)$  est alors donnée par la composition

$$\overline{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{P}_X \otimes \mathcal{P}_X \xrightarrow{\xi(\psi_C) \otimes \xi(\psi_D)} \text{CoEnd}(C) \otimes \text{CoEnd}(D) \xrightarrow{\beta} \text{CoEnd}(C \otimes D),$$

$\Delta$  étant la structure d'opérate de Hopf induite par  $\Delta_X$ , et  $\beta$  étant défini de manière évidente. On en déduit que si  $x$ ,  $\Delta(x)$ ,  $c$  et  $d$  sont comme avant, alors

$$\begin{aligned} & \beta(\xi(\psi_C) \otimes \xi(\psi_D))\Delta(x)(c \otimes d) \\ &= \beta(\xi(\psi_C) \otimes \xi(\psi_D))(\gamma(1 \circ \gamma))^{\otimes 2}(i \circ i \circ i)^{\otimes 2}(\vartheta \otimes \vartheta)\Delta_X(x)(c \otimes d) \\ &= \left[ \beta(\xi(\psi_C) \otimes \xi(\psi_D))(\gamma(1 \circ \gamma))^{\otimes 2}(i \circ i \circ i)^{\otimes 2}(\vartheta \otimes \vartheta) \left( \sum_i x_i \otimes x^i \right) \right] (c \otimes d) \\ &= \sum_i (-1)^{cx^i} \alpha \left[ \left( \xi(\psi_C)\gamma(1 \circ \gamma)(i \circ i \circ i)\vartheta(x_i)(c) \right) \otimes \left( \xi(\psi_D)\gamma(1 \circ \gamma)(i \circ i \circ i)\vartheta(x^i)(d) \right) \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_i (-1)^{cx^i + cx_i + d_x^i} \alpha(\psi_C(c \otimes x_i) \otimes \psi_D(d \otimes x^i)), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, une fois que l'on a remarqué que l'égalité (\*) est vraie puisque

$$\xi(\psi_C)\left(\gamma(1 \circ \gamma)(i \circ i \circ i)\vartheta(x_i)\right)(c) = (-1)^{cx_i} \psi_C(c \otimes x_i).$$

En effet, si  $x_i = a \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_r$ , alors les deux membres de cette égalité coïncident, à signe près, avec  $(m_{c \otimes c}(a_1) \otimes \dots \otimes m_{c \otimes c}(a_r))(\psi_C(r_1)^\#(y_1) \otimes \dots \otimes \psi_C(r_m)^\#(y_m))m_c(a)(c)$ . Ici  $m_c : \mathcal{A} \rightarrow \text{CoEnd}(C)$  est le morphisme de structure de  $C$  et  $m_{c \otimes c}$  est la structure induite par  $m_c$  sur  $C \otimes C$ . Et le signe coïncide nécessairement, puisque si  $x_i$  et  $c$  apparaissent dans cet ordre dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus, ils apparaissent dans l'ordre inverse dans le membre de droite de cette même égalité.  $\square$

### 5.3 Le cas particulier du co-anneau d'Alexander-Whitney

Evidemment, on peut appliquer le théorème ci-dessus au cas particulier des coalgèbres d'Alexander-Whitney.

**Corollaire 5.24.** *Il existe une opérate de Hopf, notée  $AW$  et appelée opérate d'Alexander-Whitney, telle que la catégorie des coalgèbres d'Alexander-Whitney est isomorphe à la catégorie des coalgèbres sur  $AW$ .*

De plus,  $\mathcal{AW} = (F\overline{X} / \langle R \rangle, d)$ , où  $X$  est la suite symétrique qui engendre le co-anneau d'Alexander-Whitney et où  $R$  est la suite symétrique engendrée par  $\gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0) - \gamma(x_0 \otimes x_0 \otimes 1)$ ,  $\gamma$  étant la multiplication de  $F\overline{X}$ . La différentielle  $d$  est donnée par

$$d(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \left[ \gamma(x_0 \otimes (x_i \otimes x_{n-i-1})) - \gamma(x_{n-1} \otimes (1^{\otimes i} \otimes x_0 \otimes 1^{\otimes n-i-1})) \right],$$

et la structure d'opérade de Hopf est donnée par

$$\Delta(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i \in I_{k,n+1}} \gamma(x_{k-1} \otimes (x_0^{(i_1)} \otimes \dots \otimes x_0^{(i_k)})) \otimes \gamma(x_0^{(k)} \otimes (x_{i_1-1} \otimes \dots \otimes x_{i_k-1})),$$

avec  $x_0^{(2)} = \gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0)$  et  $x_0^{(j)} = \gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0^{(j-1)})$  pour  $j \geq 3$ .

La proposition suivante est importante car elle garantit (par le théorème 2.16) que la catégorie des  $\mathcal{AW}$ -modules à droite est munie d'une structure de catégorie modèle.

**Proposition 5.25.** *L'opérade d'Alexander-Whitney  $\mathcal{AW}$  est telle que  $\mathcal{AW}(n)$  est  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -libre en chaque degré, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\mathcal{AW}(0) = 0$ , et  $\mathcal{AW}(1) = \mathbb{Z}$ .*

On présente cette proposition comme une conséquence de deux lemmes. Le premier lemme est facile à prouver.

**Lemme 5.26.** *Soit  $X$  et  $Y$  des suites symétriques de modules gradués, tels que le niveau  $n$  est  $\Sigma_n$ -libre. Soit  $I_m$  une  $\Sigma_m$ -base de  $X(m)$ ,  $m \geq 0$ , et  $J_n$  une  $\Sigma_n$ -base de  $Y(n)$ ,  $n \geq 0$ . Dans cette situation on a que*

$$\{x \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m \mid x \in I_m, y_1 \in J_{n_1}, \dots, y_m \in J_{n_m}, n_1 + \dots + n_m = n\}$$

est une  $\Sigma_n$ -base de  $(X \circ Y)(n)$ .

Pour le deuxième lemme, on a besoin de la définition suivante.

**Définition 5.8.** *Soit  $A$  une suite symétrique de modules gradués  $\Sigma_n$ -libre en niveau  $n$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Dans cette situation il existe évidemment une  $\Sigma_n$ -base  $\mathcal{B}_n$  de  $A(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

est appelé une base de  $A$ .

**Lemme 5.27.** *Soit  $A$  une suite symétrique de modules gradués  $\Sigma_n$ -libre en niveau  $n$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Dans cette situation, on a que l'opérade libre  $FA$  est encore  $\Sigma_n$ -libre en niveau  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, il existe une base  $\mathcal{B}_{FA}$  de  $FA$ .*

*De plus, si  $S$  est une sous-suite symétrique de  $FA$  telle qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{B}_S$  de  $\mathcal{B}_{FA}$  qui est une base de  $S$ , alors la suite symétrique sous-jacente de l'opérade  $FA / \langle S \rangle$  est  $\Sigma_n$ -libre en niveau  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Preuve :** (i) En fait on peut même faire mieux que ce qui est annoncé. En effet, on peut construire explicitement une base pour  $FA$  en fonction d'une base  $\mathcal{B}_A$  de  $A$ . C'est une conséquence de la construction de l'opérade libre présentée dans l'annexe de [Rez96], et que l'on rappelle maintenant. L'opérade libre  $FA$  est, comme suite symétrique, la colimite de la suite suivante :

- $F_0A = \mathbb{Z}$
- $F_1A = \mathbb{Z} \coprod A$
- ...
- $F_nA = \mathbb{Z} \coprod (A \circ F_{n-1}A)$
- ...

$F_nA$  étant une sous-suite symétrique de  $F_{n+1}A$ , pour  $n \geq 0$ . En utilisant le lemme ci-dessus, on en tire que la colimite  $\mathcal{B}_{FA}$  de la suite d'ensembles

- $F_0 = \{1\} \cup \mathcal{B}_A$
- ...
- $F_n = \{1\} \cup \{a \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \mid a \in \mathcal{B}_A, a_1, \dots, a_m \in F_{n-1}\}$
- ...

est une base de  $FA$ . En particulier,  $FA(n)$  est  $\Sigma_n$ -libre en niveau  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) Déterminons une base de l'idéal opéradique  $\langle S \rangle$  engendré par  $S$ . Considérons la colimite  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$  de la suite d'ensembles

- $S_0 = \mathcal{B}_S$
- ...
- $S_n = \{a \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_m \mid a \in \mathcal{B}_S, a_1, \dots, a_m \in F_{n-1} \text{ ou } a \in \mathcal{B}_A, a_1, \dots, a_m \in F_{n-1}, \text{ avec au moins un } 1 \leq i \leq m \text{ tel que } a_i \in S_{n-1}\}$
- ...

Vérifions que cette colimite est une base de  $\langle S \rangle$ . Par définition d'un idéal opéradique (définition 2.6) on a que  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$  est contenu dans  $\langle S \rangle$ . Ce qui entraîne  $\langle \mathcal{B}_{\langle S \rangle} \rangle \subset \langle S \rangle$ . On a aussi que  $S \subset \mathcal{B}_{\langle S \rangle}$ , et donc  $\langle S \rangle = \langle \mathcal{B}_{\langle S \rangle} \rangle$ . Mais par construction de  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$  on a que  $\text{vect}(\mathcal{B}_{\langle S \rangle})$ , la suite symétrique engendrée par  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$ , est un idéal. Donc  $\text{vect}(\mathcal{B}_{\langle S \rangle}) = \langle \mathcal{B}_{\langle S \rangle} \rangle$ . Finalement, comme  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle} \subset \mathcal{B}_{FA}$  à nouveau par construction de  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$ , on a que  $\mathcal{B}_{\langle S \rangle}$  est une base de  $\text{vect}(\mathcal{B}_{\langle S \rangle}) = \langle S \rangle$ .

Il est alors évident que  $FA / \langle S \rangle$  admet  $\mathcal{B}_{FA} \setminus \mathcal{B}_{\langle S \rangle}$  comme base, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Preuve de la proposition 5.25** : Il reste à appliquer le lemme ci-dessus au cas de l'opérade d'Alexander-Whitney. Dans ce cas précis, il y a une différence avec la situation traitée ci-dessus, puisque la suite symétrique  $R$  qui engendre l'idéal par lequel on quotiente l'opérade libre  $F\overline{X}$  est engendrée par  $\gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0) - \gamma(x_0 \otimes x_0 \otimes 1)$ . Et cet élément n'est pas un sous-ensemble de la base évidente de  $F\overline{X}$ . Mais on peut certainement modifier cette base évidente de  $F\overline{X}$  en une autre base de  $F\overline{X}$  en remplaçant  $\gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0)$  par  $\gamma(x_0 \otimes 1 \otimes x_0) - \gamma(x_0 \otimes x_0 \otimes 1)$ . Et maintenant on se retrouve dans la situation traitée ci-dessus : on considère l'opérade  $F\overline{X} / \langle R \rangle$  avec une base  $\mathcal{B}_{F\overline{X}}$  de  $F\overline{X}$  et une base  $\mathcal{B}_{\langle R \rangle}$  de  $\langle R \rangle$  qui est incluse dans  $\mathcal{B}_{F\overline{X}}$ . On en tire que  $\mathcal{AW}$  est  $\Sigma_n$ -libre en

chaque degré du niveau  $n$ ,  $n \geq 1$ .

□



## Chapitre 6

# Modèle minimal pour les coalgèbres d'Alexander-Whitney

Dans ce chapitre on étudie une notion de modèle minimal pour les coalgèbres d'Alexander-Whitney en suivant des idées qui viennent de l'homotopie rationnelle. Comme la catégorie des coalgèbres sur une opérade n'est pas une catégorie agréable à manipuler en raison de l'absence d'une belle description du foncteur co-libre (cf. [Smi03]) et des (co)limites (si tous ces objets existent!), il est préférable de travailler dans une autre catégorie. Le foncteur  $\mathcal{T} : \mathcal{AW} - \mathbf{coalg} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{AW}}$ , dont la définition est rappelée dans la proposition 2.12, permet de voir une coalgèbre d'Alexander-Whitney comme un module à droite sur  $\mathcal{AW}$ , et c'est donc dans le cadre des modules à droite sur une opérade que l'on va développer la notion de modèle minimal.

Comme il ne semble pas y avoir de gain à travailler spécifiquement avec l'opérade d'Alexander-Whitney, on fixe une opérade de chaînes  $(\mathcal{P}, \gamma_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{P}})$  telle que  $\mathcal{P}(0) = 0$ ,  $\mathcal{P}(1) = \mathbb{Z}$ , et telle que  $\mathcal{P}(n)$  est cofibrant pour la structure modèle donnée dans le théorème 1.4, pour tout  $n \geq 0$ . En particulier, le résultat de B. Fresse (cf. théorème 2.16) assurant que  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  est une catégorie modèle s'applique. De plus, on suppose que tous les complexes de chaînes (sur  $\mathbb{Z}$  ou sur  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ ) qui apparaissent dans ce chapitre sont de type fini en chaque degré, et sauf lorsque le contraire est indiqué, les complexes de chaînes sont non-négatifs.

### 6.1 Modèle minimal pour module à droite sur une opérade

Le but dans cette section est de construire explicitement un modèle minimal pour tout module à droite sur  $\mathcal{P}$ . Plus précisément, on veut construire un quasi-isomorphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite de la forme

$$(X \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{\cong} M,$$

avec  $X$  une suite symétrique aussi "petite" que possible, pour chaque module à droite  $M$ . Notons que les modules à droite sont des objets bigradués, ce qui donne l'idée de la preuve : on construit  $X$  niveau par niveau et degré par degré en procédant par récurrence. Imaginons un instant que  $X(i)$  soit construit, pour  $i < n$ . On veut donc construire  $X(n)$ , qui est un complexe de chaîne sur  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ ; cet anneau agissant à droite. De plus, comme cet anneau de groupe est noethérien (cf. la section A.7), on commence par voir la construction d'un modèle minimal pour un complexe de chaînes sur un anneau noethérien.

## Modèle minimal pour les complexes de chaînes

Soit  $R$  un anneau noethérien (parfois il est supposé principal). Supposons que tous les complexes de chaînes sont des  $R$ -complexes de chaînes (avec  $R$  agissant à droite).

**Définition 6.1.** Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de complexes de chaînes. Un modèle de  $f$  est un quasi-isomorphisme  $\bar{f} : (A \oplus Z, d) \xrightarrow{\cong} B$  tel que

- $Z$  est un module gradué  $R$ -libre
- $d$  étend la différentielle de  $A$
- $\bar{f}$  étend  $f$ .

Avec les mêmes notations que ci-dessus, remarquons que  $\bar{f}$  est la colimite d'une suite de morphismes  $f_n : (A \oplus Z_{\leq n}, d_n) \rightarrow B$  qui est telle que

- $Z_{\leq n}$  est isomorphe à  $Z$  jusqu'en degré  $n$  et est nul en degré strictement supérieur à  $n$
- $d_n$  étend  $d_{n-1}$  et  $d_0$  étend la différentielle de  $A$
- $f_n$  étend  $f_{n-1}$  et  $f_0$  étend  $f$
- $f_0$  est tel que  $H_0(f_0)$  est surjectif
- $f_n$  est tel que  $H_j(f_n)$  est un isomorphisme pour tout  $0 \leq j < n$  et est surjectif si  $j = n$ .

En effet, il suffit de tronquer  $Z$  comme indiqué ci-dessus et de prendre la restriction évidente de  $f$  et de  $d$ .

**Définition 6.2.** On dit que  $\bar{f}$  est un modèle minimal pour  $f$  si

- pour tout module libre  $Y_0$  (vu comme un complexe de chaînes concentré en degré 0) qui admet un morphisme de complexes de chaînes  $g_0 : (A \oplus Y_0, d_A) \rightarrow B$  tel que  $H_0(g_0)$  est surjectif, on a que le rang de  $Y_0$  est supérieur au rang de  $Z_0$
- pour tout module libre  $Y_i$  (concentré en degré  $i$ ) qui admet
  - une différentielle  $e_i : A \oplus Z_{<i} \oplus Y_i \rightarrow A \oplus Z_{<i}$  qui étend  $d_{i-1}$ ,
  - un morphisme de complexe de chaînes  $g_i : (A \oplus Z_{<i} \oplus Y_i, e_i) \rightarrow B$  qui étend  $f_{i-1}$  et tel que  $H_j(g_i)$  est un isomorphisme pour tout  $0 \leq j < i$  et est surjectif si  $j = i$ , on a que le rang de  $Y_i$  est supérieur au rang de  $Z_i$ .

Cette définition a un sens car le rang d'un module libre sur un anneau noethérien est bien défini, comme cela est rappelé dans la partie A.7 de l'annexe. D'autre part, notons que si l'on utilise cette définition avec  $R = \mathbb{Q}$ , on retrouve la définition usuelle utilisée en homotopie rationnelle. Et si l'on utilise cette définition avec  $R$  un anneau principal, on obtient la définition donnée dans [Dup92].

**Définition 6.3.** Soit  $(Z, d)$  un complexe de chaînes sur un anneau principal  $R$ . On dit que ce complexe est minimal si pour tout  $i \geq 1$  il existe  $r_i \in R$  non-inversible tel que  $d(Z_i) \subset r_i Z_{i-1}$ .

La proposition suivante, qui assure l'existence d'un modèle minimal pour tout morphisme de complexes de chaînes, est prouvée avec une idée qui se trouve dans [Hal92].

**Proposition 6.1.** *Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de complexes de chaînes. Un modèle minimal  $\bar{f} : (A \oplus Z, d) \xrightarrow{\cong} B$  existe.*

**Preuve :** Commençons par remarquer que  $f : A \rightarrow B$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $B \oplus sA$ , le cône de  $f$ , est acyclique (la différentielle du cône est donnée par  $d(b, sa) = (db + f(a), -sda)$ ). Plus précisément encore, remarquons que  $H_n(B \oplus sA) = 0$  si et seulement si  $H_n(f)$  est surjectif et  $H_{n-1}(f)$  est injectif. Ce qui donne l'idée de la preuve. On construit maintenant la suite des  $f_n : (A \oplus Z_{\leq n}, d_n) \rightarrow B$  par récurrence.

On choisit  $Z_0$  libre de rang minimal tel qu'il existe une surjection  $Z_0 \rightarrow H_0(B \oplus sA)$ . Par la proposition A.24, on sait que  $Z_0$  est de rang fini. On peut décomposer ce morphisme en :

$$Z_0 \xrightarrow{p} \text{Ker}(B_0 \xrightarrow{d} 0) \rightarrow H_0(B \oplus sA).$$

Et on pose  $f_0(z) = p_B p(z)$  et  $d_0(z) = -p_A p(z) = 0$ , où  $p_A$  et  $p_B$  sont les projections évidentes. On vérifie aisément que  $f_0 : (A \oplus Z_0, d_0) \rightarrow B$  est tel que  $H_0(f_0)$  est surjectif. La minimalité de  $Z_0$  se vérifie comme la minimalité de  $Z_i$ , avec  $i > 0$ , ce que l'on fait un peu plus loin.

Supposons que l'on a construit  $f_j : (A \oplus Z_{\leq j}, d_j) \rightarrow B$ ,  $0 \leq j < i$ , avec les propriétés voulues. Il existe donc un morphisme  $f_{i-1} : (A \oplus Z_{\leq i-1}, d_{i-1}) \rightarrow B$  tel que  $H_j(f_{i-1})$  est un isomorphisme pour tout  $j < i-1$  et est surjectif si  $j = i-1$ . On choisit  $Z_i$  comme étant libre de rang minimal tel qu'il existe une surjection  $Z_i \rightarrow H_i(B \oplus s(A \oplus Z_{i-1}))$ . Comme précédemment, on sait que  $Z_i$  est de rang fini. On peut décomposer ce morphisme en :

$$Z_i \xrightarrow{p} \text{Ker}(B_i \oplus A_{i-1} \oplus Z_{i-1} \xrightarrow{d} B_{i-1} \oplus A_{i-2} \oplus Z_{i-2}) \rightarrow H_i(B \oplus s(A \oplus Z_{i-1})).$$

Et on pose  $f_i(z) = p_B p(z)$  et  $d_i(z) = -p_{A \oplus Z_{i-1}} p(z)$ . On vérifie aisément que  $H_*(f_i)$  satisfait les propriétés voulues.

La condition de minimalité vérifiée par  $Z_i$  n'est pas, du moins en apparence, la condition de minimalité telle qu'exigée dans l'énoncé. Il faut donc voir que la condition vérifiée implique la condition voulue. Supposons que  $Y_i$  est un autre module gradué  $R$ -libre en chaque degré avec la propriété qu'il existe une différentielle  $e_i$  qui étend  $d_{i-1}$  et un morphisme  $g_i : (A \oplus Y_i, e_i) \rightarrow B$  qui étend  $f_{i-1}$  et tel que  $H_j(g_i)$  est un isomorphisme pour tout  $j < i$  et est surjectif si  $j = i$ . On définit un morphisme  $p : Y_i \rightarrow H_i(B \oplus s(A \oplus Z_{i-1}))$  en posant  $p(y) = [g_i(y), -e_i(y)]$ . Il reste à voir que  $p$  est une surjection. Soit  $0 \neq [b_i, a_{i-1}] \in H_i(B \oplus s(A \oplus Z_{i-1}))$ . Comme  $H_i(B \oplus s(A \oplus Y_i)) = 0$ , il existe  $(b_{i+1}, a_i, y_i) \in (B \oplus s(A \oplus Y_i))_{i+1}$  tel que  $(b_i, a_{i-1}) = (d(b_{i+1}) + f(a_i) + g_i(y_i), -d(a_i) - e_i(y_i))$ , avec  $y_i \neq 0$ . On en tire que  $[b_i, a_{i-1}] = [g_i(y_i), -e_i(y_i)] = p(y_i)$ .

Finalement, il suffit de prendre la colimite des  $f_i$  pour obtenir le modèle minimal  $\bar{f}$ . □

Cette proposition permet la construction d'un modèle minimal dans la catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Mais avant de présenter cette construction, discutons de l'unicité du modèle minimal que l'on vient de construire dans le cadre des complexes de chaînes.

## Unicité du modèle minimal dans le cadre des complexes de chaînes

Dans [Dup92], il est montré que le modèle minimal d'une algèbre de chaînes associative sur un anneau principal est unique à similarité près. Si on se restreint à un tel anneau, on obtient le même

résultat pour les complexes de chaînes (en fait, c'est même plus simple dans ce cas). Commençons par rappeler la définition de la similarité.

**Définition 6.4.** Soit  $(A \oplus Z_1, d_1)$  et  $(A \oplus Z_2, d_2)$  des complexes de chaînes avec  $Z_1$  et  $Z_2$  des modules gradués libres. De plus on suppose que  $d_1$  et  $d_2$  étendent la différentielle du complexe de chaînes  $A$ . On dit que  $(A \oplus Z_1, d_1)$  et  $(A \oplus Z_2, d_2)$  sont similaires s'il existe un quasi-isomorphisme entre ces deux complexes de chaînes et si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont isomorphes comme modules gradués.

Adaptons maintenant la preuve de [Dup92] au cas des complexes de chaînes.

**Lemme 6.2.** Considérons le diagramme de  $R$ -complexes de chaînes

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow i & & \downarrow \simeq p \\ (A \oplus Y, d) & \xrightarrow{g} & N, \end{array}$$

où  $p$  est un quasi-isomorphisme, où  $d$  est une différentielle qui étend la différentielle de  $A$ , et où  $i$  est l'inclusion. De plus, on suppose que  $Y$  est  $R$ -libre en chaque degré. Dans cette situation il existe un relèvement  $h : (A \oplus Y, d) \rightarrow M$  qui fait commuter le triangle supérieur et qui fait commuter le triangle inférieur à homotopie près.

**Preuve :** La preuve est la même que celle donnée dans le corollaire 6.13.  $\square$

**Lemme 6.3.** ([Dup92]) Soit  $R$  un anneau principal. Soit  $(C, d)$  un  $R$ -complexe de chaînes libre en chaque degré. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- Pour tout entier  $i$  il existe un élément  $r_i \in R$  non-inversible tel que  $d(C_i) \subset r_i C_{i-1}$ ,
- Tout quasi-isomorphisme de la forme  $(C, d) \xrightarrow{\simeq} M$  avec  $M$  un  $R$ -complexe de chaînes libre en chaque degré est injectif.

**Proposition 6.4.** Soit  $R$  un anneau principal. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $R$ -complexes de chaînes. Le modèle minimal pour  $f$  est unique à similarité près.

**Preuve :** Soit  $f_1 : (A \oplus Z_1, d_1) \rightarrow B$  et  $f_2 : (A \oplus Z_2, d_2) \rightarrow B$  des modèles minimaux pour  $f$ . Par le lemme 6.2 il existe un quasi-isomorphisme  $g : (A \oplus Z_1, d_1) \xrightarrow{\simeq} (A \oplus Z_2, d_2)$  qui étend l'identité sur  $A$ . Ce quasi-isomorphisme prend place dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & (A \oplus Z_1, d_1) & \xrightarrow{p} & (Z_1, \bar{d}_1) \\ \downarrow = & & \downarrow g \simeq & & \downarrow \bar{g} \\ A & \xrightarrow{i} & (A \oplus Z_2, d_2) & \xrightarrow{p} & (Z_2, \bar{d}_2). \end{array}$$

Les deux compositions horizontales étant des suites exactes courtes, on obtient que  $\bar{a}$  est un quasi-isomorphisme. Et  $\bar{a}$  est injectif par le lemme précédent. Comme tout le raisonnement peut être répété en échangeant les rôles de  $f_1$  et de  $f_2$ , on obtient que  $Z_1 \cong Z_2$  comme modules gradués.  $\square$

Notons que dans le cadre des algèbres de chaînes associatives sur un anneau principal, N. Dupont donne un contre-exemple à l'unicité à isomorphisme près. Il ne semble pas évident d'adapter ce contre-exemple au cas des complexes de chaînes, et la question de l'unicité à isomorphisme près dans ce cadre reste donc ouverte.

En regard de l'objectif - la construction d'un modèle minimal pour les modules à droite sur une opérade - il faut aussi noter que  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$  n'est pas principal lorsque  $n \geq 2$ . Par conséquent, on ne peut pas utiliser l'argument que l'on vient de voir pour montrer que le modèle minimal est unique à similarité près. Il est pourtant tentant d'essayer d'adapter la définition de minimalité et la preuve de l'unicité du modèle minimal de [Dup92] au cas de  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ . Malheureusement, cela a échoué jusqu'à maintenant. De même, il n'a pas été possible de trouver un contre-exemple à l'unicité à similarité près.

## Modèle minimal pour les modules à droite sur une opérade

Ici,  $X$  une suite symétrique de modules gradués telle que  $X(i)_j$  est  $\Sigma_i$ -libre pour tout  $i, j \geq 0$ .

**Définition 6.5.** *Et soit  $d$  une différentielle sur  $X \circ \mathcal{P}$  telle que  $(X \circ \mathcal{P}, d)$  soit un module à droite sur  $\mathcal{P}$ . On dit que ce module est un  $\mathcal{P}$ -module à droite semi-libre.*

**Définition 6.6.** *Soit  $M$  un module à droite sur  $\mathcal{P}$ . Une résolution semi-libre pour  $M$  est un quasi-isomorphisme  $f : (X \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{\cong} M$  avec  $(X \circ \mathcal{P}, d)$  un  $\mathcal{P}$ -module semi-libre.*

Décortiquons cette définition. En niveau  $n \geq 0$  on a

$$f(n) : \left[ \left( \coprod_{n-1 \geq m \geq 1} X(m) \otimes \mathcal{P}^{\odot m}(n) \right) \coprod X(n), d \right] \xrightarrow{\cong} M(n)$$

car  $\mathcal{P}(1) = \mathbb{Z}$ . Ce qui permet de donner la définition qui suit.

**Définition 6.7.** *Soit  $M$  un  $\mathcal{P}$ -module à droite.*

*Un modèle minimal pour  $M$  est une résolution semi-libre  $f : (X \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{\cong} M$  telle que*

$$f(n) : \left[ \left( \coprod_{n-1 \geq m \geq 1} X(m) \otimes \mathcal{P}^{\odot m}(n) \right) \coprod X(n), d \right] \xrightarrow{\cong} M(n)$$

*est un modèle minimal (au sens des  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -complexes de chaînes) pour la restriction*

$$f(n) : \left( \coprod_{n-1 \geq m \geq 1} X(m) \otimes \mathcal{P}^{\odot m}(n), d \right) \rightarrow M(n), \quad n \geq 0.$$

**Proposition 6.5.** *Soit  $(M, \rho)$  un  $\mathcal{P}$ -module à droite. Un modèle minimal pour  $M$  existe.*

**Preuve :** On construit un modèle minimal par récurrence sur  $n$ . Plus précisément, on construit un triple

- $X_n$ ,
- $d_n : X_n \circ \mathcal{P} \rightarrow X_n \circ \mathcal{P}$ ,
- $f_n : (X_n \circ \mathcal{P}, d_n) \rightarrow M$ ,

par récurrence sur  $n$ . Et le modèle minimal apparaît comme la colimite de cette suite.

(i) Soit  $f_0 : (Z_0, d) \rightarrow M(0)$  un modèle minimal de l'inclusion de 0 dans  $M(0)$ . On pose  $X_0(0) = Z_0 = (Z_0, d)$  et on définit  $X_0$  comme étant nul en niveau strictement supérieur à 0. Le  $\mathcal{P}$ -module à droite  $X_0 \circ \mathcal{P}$  est muni d'une différentielle librement engendrée et notée  $d_0$ . Et il suffit de définir  $f_0 : X_0 \circ \mathcal{P} \rightarrow M$  comme étant le morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules qui étend librement le morphisme de suites symétriques  $f_0 : X_0 \rightarrow M(0)$ .

(ii) Supposons que l'on a construit  $X_n$ ,  $d_n$  et  $f_n$ . Construisons  $X_{n+1}$ ,  $d_{n+1}$  et  $f_{n+1}$ . Pour cela, considérons un modèle minimal de  $f_n(n+1) : (X_n \circ \mathcal{P})(n+1) \rightarrow M(n+1)$ , noté

$f_{n,\infty} : ((X_n \circ \mathcal{P})(n+1) \oplus Z_{n+1}, D) \xrightarrow{\cong} M(n+1)$ . On pose

- $X_{n+1}(i) = X_n(i)$  pour  $i < n+1$ ,
- $X_{n+1}(n+1) = Z_{n+1}$
- $X_{n+1}(i) = 0$  si  $i > n+1$ .

Pour la différentielle, on définit  $d_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_{n+1} \circ \mathcal{P}$  en utilisant  $d_n$  pour les niveaux inférieurs ou égaux à  $n$  et on utilise  $D$  pour le niveau  $n+1$ . Et on obtient la différentielle  $d_{n+1} : X_{n+1} \circ \mathcal{P} \rightarrow X_{n+1} \circ \mathcal{P}$  en utilisant le lemme 2.14. Ce même lemme 2.14 montre que  $d_{n+1}$  est bien une différentielle, puisque  $(d \circ 1_{\mathcal{P}})d = 0$ . En effet, cette égalité est vraie en niveau  $i \leq n$  car  $d_n$  est une différentielle. Et en niveau  $n+1$ , c'est vrai car  $D$  est la différentielle de  $(X_n \circ \mathcal{P})(n+1) \oplus X_{n+1}(n+1)$ .

Pour définir un morphisme de modules à droite  $f_{n+1} : X \circ \mathcal{P} \rightarrow M$ , il suffit d'étendre librement le morphisme  $f_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow M$  qui étend  $f_n : X_n \rightarrow M$  et qui en niveau  $n+1$  coïncide avec  $f_{n,\infty}$ .

Il reste à voir que ce morphisme respecte la différentielle et est un quasi-isomorphisme jusqu'en niveau  $n+1$ . Pour montrer que  $f_{n+1}$  respecte la différentielle, il suffit de montrer que

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & M \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d \\ X_{n+1} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{f_{n+1}} & M \end{array}$$

commute. En niveau  $i < n+1$ , c'est clair puisque  $f_{n+1}(i) = f_n(i)$ . Et en niveau  $n+1$ , le diagramme commute parce que  $f_{n,\infty} : ((X_n \circ \mathcal{P})(n+1) \oplus Z_{n+1}, D) \xrightarrow{\cong} M(n+1)$  est un quasi-isomorphisme de complexe de chaînes. Les mêmes arguments permettent de dire que  $f_{n+1}$  est un quasi-isomorphisme jusqu'en niveau  $n+1$ . Ce qui achève la construction de  $(X_{n+1}, d_{n+1}$  et  $f_{n+1})$ .

(iii) En utilisant le fait que  $(\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})^{\Sigma, \circ, \mathcal{J}})$  est une catégorie monoïdale fermée à droite on obtient que  $X \circ \mathcal{P} \cong \coprod_{n \geq 0} (X_n \circ \mathcal{P})$ , où  $X = \coprod_{n \geq 0} X_n$ . Et comme  $d_{n+1}$  étend  $d_n$ , on obtient une différentielle  $d : X \circ \mathcal{P} \rightarrow X \circ \mathcal{P}$ . De même, comme  $f_{n+1}$  étend  $f_n$ , on obtient un morphisme de  $\mathcal{P}$  modules à droite  $f : (X \circ \mathcal{P}, d) \rightarrow M$ . C'est un quasi-isomorphisme et il vérifie la condition de minimalité par construction.  $\square$

Ce qui précède peut être généralisé.

**Définition 6.8.** Soit  $M$  un  $\mathcal{P}$ -module à droite, et soit  $X$  une suite symétrique de modules gradués telle que  $X(i)_j$  est  $\Sigma_i$ -libre pour tout  $i, j \geq 0$ . De plus, soit  $d$  une différentielle sur  $M \oplus (X \circ \mathcal{P})$  telle que  $(M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  soit un module à droite sur  $\mathcal{P}$  et telle que cette différentielle étend la différentielle sur  $M$ . On dit que ce module à droite est un module à droite semi-libre relativement à  $M$ .

**Définition 6.9.** Soit  $g : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite sur  $\mathcal{P}$ . Une résolution semi-libre pour  $g$  est un quasi-isomorphisme  $f : (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) \xrightarrow{\cong} N$  qui étend  $g$  et tel que  $(M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  soit un module semi-libre relativement à  $M$ .

**Définition 6.10.** Soit  $g : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Un modèle minimal pour

$g$  est un modèle  $f : (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) \xrightarrow{\simeq} N$  tel que

$$f(n) : \left[ M(n) \amalg \left( \coprod_{n-1 \geq m \geq 1} X(m) \otimes \mathcal{P}^{\odot m}(n) \right) \amalg X(n), d \right] \xrightarrow{\simeq} N(n)$$

est un modèle minimal (dans le cadre des  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -complexes de chaînes) pour

$$f(n) : \left[ M(n) \oplus \left( \coprod_{n-1 \geq m \geq 1} X(m) \otimes \mathcal{P}^{\odot m}(n) \right), d \right] \rightarrow N(n), \quad n \geq 0.$$

En utilisant la même preuve que précédemment, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 6.6.** *Soit  $g : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Il existe un modèle minimal pour  $f$ .*

**Remarque 6.1.** *Ce serait certainement le bon endroit pour y intégrer un exemple de modèle minimal. Par exemple pour le  $\mathcal{AW}$ -module à droite  $T\tilde{C}(S^n)$ , pour  $n \geq 0$ . Malheureusement, s'il est possible de faire quelques calculs, il est difficile de déterminer complètement le modèle minimal de  $T\tilde{C}(S^n)$ . Pour convaincre le lecteur que ce n'est effectivement pas une tâche facile, attirons l'attention sur le fait suivant : en niveau  $n \in \mathbb{N}$ , on travaille sur l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ . Cet anneau n'est pas principal, ce qui complique les choses.*

## Unicité du modèle minimal dans le cadre des modules à droite sur une opérade

Ici aussi,  $X$  une suite symétrique de modules gradués telle que  $X(i)_j$  est  $\Sigma_i$ -libre pour tout  $i, j \geq 0$ .

Comme l'unicité du modèle minimal n'est pas assurée au niveau des  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -complexes de chaînes, il est certainement prématuré de vouloir montrer l'unicité du modèle minimal au niveau des  $\mathcal{P}$ -modules à droite. On se contente ici de donner un résultat, familier à tout spécialiste d'homotopie rationnelle, qui pourrait être utile pour montrer l'unicité du modèle minimal pour les  $\mathcal{P}$ -modules à droite dans le futur.

Dans tout ce qui suit,  $i : M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  est l'inclusion d'un  $\mathcal{P}$ -module  $M$  dans un module semi-libre relativement à  $M$ .

**Proposition 6.7.** *Soit*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & N \\ \downarrow i & & \downarrow \varphi \simeq \\ (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) & \xrightarrow{\quad} & O \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Et  $\varphi$  est un quasi-isomorphisme. Il existe alors un relèvement  $h : (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) \rightarrow N$  qui fait commuter le triangle supérieur et qui fait commuter le triangle inférieur à homotopie près.

Pour prouver cette proposition, il faut commencer par voir que l'inclusion de  $\mathcal{P}$ -modules à droite  $M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  est une cofibration dans la catégorie modèle des  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Pour prouver cette affirmation on commence par rappeler trois résultats. D'abord, le lemme suivant, qui est facile à prouver.

**Lemme 6.8.** *Soit*

$$Z_0 \xrightarrow{i_0} Z_1 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} Z_n \xrightarrow{i_n} \dots \rightarrow Z = \operatorname{colim}_j Z_j,$$

un diagramme dans une catégorie modèle  $\mathcal{M}$ . De plus on suppose que  $i_k$  est une cofibration pour tout  $k \geq 0$ . La composition  $i : Z_0 \rightarrow Z$  est alors aussi une cofibration.

Ensuite, un lemme qui est une partie de la proposition 1.2.5 dans [Hov99].

**Lemme 6.9.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie modèle. Et soit  $A$  un objet cofibrant de  $\mathcal{M}$  et  $f : X \xrightarrow{\cong} Y$  une équivalence faible entre objets fibrants. On a une bijection*

$$f_* : \pi(A, X) \xrightarrow{\cong} \pi(A, Y).$$

Finalement on rappelle une proposition qui est tirée de [Fre09].

**Proposition 6.10.** *Un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite  $f : M \rightarrow N$  est une cofibration si et seulement si ce morphisme se décompose en une colimite*

$$M = N_0 \xrightarrow{i_0} N_1 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} N_n \xrightarrow{i_n} \dots \rightarrow N = \operatorname{colim}_j N_j$$

dans laquelle  $i_k$  est une injection dont le conoyau est un retract d'un  $\mathcal{P}$ -module libre  $L_k \circ \mathcal{P}$  avec  $L_k$  une suite symétrique  $\mathbb{Z}[\Sigma_r]$ -libre en chaque degré du niveau  $r \geq 0$  et munie de la différentielle triviale.

Voilà un lemme qui prépare le terrain pour la proposition qui affirme que  $M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  est une cofibration.

**Lemme 6.11.** *Soit  $X_i$  la suite symétrique nulle en niveau strictement supérieur à  $i$  et qui coïncide avec  $X$  en niveau inférieur ou égale à  $i$ . On a que  $(M \oplus (X_{i-1} \circ \mathcal{P}), d) \rightarrow (M \oplus (X_i \circ \mathcal{P}), d)$  est une cofibration,  $i \geq 0$ .*

**Preuve :** On définit le  $\mathbb{Z}[\Sigma_i]$ -module gradué  $Z_k$  comme étant isomorphe au module gradué  $X(i)$  jusqu'en degré  $k$  et comme étant nul en degré strictement supérieur à  $k$ , avec  $k \geq 0$ . On obtient une suite d'inclusions de  $\mathcal{P}$ -modules à droite

$$\begin{aligned} (M \oplus (X_i \circ \mathcal{P}), d) &\xrightarrow{j_0} (M \oplus (X_i \oplus Z_0) \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{j_1} (M \oplus (X_i \oplus Z_1) \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{j_2} \dots \\ &\dots \rightarrow \operatorname{colim}_k (M \oplus (X_i \oplus Z_k) \circ \mathcal{P}, d) = (M \oplus (X_{i+1} \circ \mathcal{P}), d). \end{aligned}$$

Comme le foncteur  $- \circ \mathcal{P}$  commute avec les colimites, il est évident que le conoyau de  $j_r$ ,  $r \geq 0$ , est de la forme donnée dans la proposition ci-dessus. Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Proposition 6.12.** *L'inclusion  $M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  est une cofibration.*

**Preuve :** Soit  $X_i$  comme ci-dessus. Le diagramme

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{j_0} (M \oplus (X_0 \circ \mathcal{P}), d) \xrightarrow{j_1} (M \oplus (X_1 \circ \mathcal{P}), d) \xrightarrow{j_2} \dots \\ &\dots \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) = \operatorname{colim}_k (M \oplus (X_k \circ \mathcal{P}), d) \end{aligned}$$

est tel que  $j_k$  est une cofibration par le lemme précédent, ce qui permet de conclure avec le lemme 6.8.  $\square$



Finalement on obtient le résultat voulu.

**Corollaire 6.13.** *Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g_1} & N \\ \downarrow i & & \downarrow p \simeq \\ (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) & \xrightarrow{g_2} & O \end{array}$$

dans la catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules à droite avec  $p$  une équivalence faible. Il existe alors un relèvement  $h : (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d) \rightarrow U$  qui fait commuter le triangle supérieur et qui fait commuter le diagramme inférieur à homotopie près. De plus,  $h$  est unique à homotopie rel  $(i, g_1)$  près.

**Preuve :** Considérons la catégorie  $(M \downarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}})$  des  $\mathcal{P}$ -modules à droite en-dessous de  $M$ . Comme expliqué dans [Hir03], cette catégorie est une catégorie modèle si l'on choisit comme équivalences faibles (respectivement fibrations et cofibrations) les équivalences faibles (resp. les fibrations et les cofibrations) de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. L'inclusion  $M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  est un objet cofibrant dans cette catégorie. De plus, tous les objets sont fibrants. Il suffit d'appliquer le lemme 6.9 en prenant  $A = M \rightarrow (M \oplus (X \circ \mathcal{P}), d)$  et  $f = p : (M \xrightarrow{\alpha} N) \rightarrow (M \xrightarrow{p\alpha} O)$  pour terminer cette preuve.  $\square$

### Cas particulier des coalgèbres (d'Alexander-Whitney)

Evidemment, tout ce qui précède peut s'appliquer au cas des modules à droite qui proviennent de coalgèbres sur  $\mathcal{P}$  via le foncteur  $\mathcal{T} : \mathcal{P}\text{-coalg} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$  (voir la proposition 2.12). Ce qui permet de définir et construire un modèle minimal pour toute  $\mathcal{P}$ -coalgèbre.

**Corollaire 6.14.** *Soit  $C$  une  $\mathcal{P}$ -coalgèbre. Il existe un modèle minimal de la forme*

$$f : (X \circ \mathcal{P}, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}(C),$$

où  $X$  est une suite symétrique de modules gradués.

Ce modèle est appelé le modèle minimal de  $C$ . En particulier, le corollaire précédent s'applique au cas des coalgèbres d'Alexander-Whitney, puisque l'opérade  $\mathcal{AW}$  satisfait

- $\mathcal{AW}(0) = 0$
  - $\mathcal{AW}(1) = \mathbb{Z}$
  - $\mathcal{AW}(n)$  est cofibrant pour  $n \geq 0$
- par la proposition 5.25.

**Corollaire 6.15.** *Soit  $K$  un ensemble simplicial. Il existe un modèle minimal*

$$f : (X \circ \mathcal{AW}, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}(\tilde{C}(K)),$$

avec  $X$  une suite symétrique de modules gradués.

Ce modèle minimal est appelé le modèle minimal d'Alexander-Whitney de l'ensemble simplicial  $K$ .

## 6.2 Objet chemin dans la catégorie des modules à droite sur une opérade

Dans cette section, on continue à travailler avec l'opérade  $\mathcal{P}$  fixée au début de ce chapitre. De sorte que le théorème 2.16 s'applique.

Comme il semble qu'un objet chemin explicite dans la catégorie modèle des  $\mathcal{P}$ -modules à droite n'est pas encore disponible dans la littérature, on dédie cette section à la construction d'un tel objet. Soit  $(M, \rho_M)$  un module à droite sur  $\mathcal{P}$  avec  $M(0) = 0$ . Il faut trouver une factorisation de la diagonale  $M \rightarrow M \times M$  qui soit de la forme :

$$M \xrightarrow{i} PM \xrightarrow{p} M \times M,$$

avec  $i$  une équivalence faible dans la catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules à droite et  $p$  une fibration dans la même catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Rappelons que la diagonale de  $M$  comme  $\mathcal{P}$ -module coïncide avec la diagonale de  $M$  comme suite symétrique par le théorème 2.15 ; et la structure de  $\mathcal{P}$ -module de  $M \times M$  est définie de manière évidente. Pour construire cet objet chemin, on s'inspire de l'objet chemin construit dans [Tan83] pour la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées.

L'objet chemin construit ici est utile dans la suite de ce chapitre. Et plus généralement, un tel objet chemin explicite est certainement opportun lorsque l'on travaille dans la catégorie modèle des  $\mathcal{P}$ -modules à droite.

On commence par se donner un complexe de chaîne  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathbb{Z}$ -libre en chaque degré, et engendré par  $1$ ,  $t$  et  $s$ , le degré de  $1$  et  $t$  étant  $0$  et le degré de  $s$  étant  $-1$ . La différentielle est nulle sur  $1$  et  $s$  et envoie  $t$  sur  $s$ . On munit  $\mathfrak{C}$  d'une structure de coalgèbre cocommutative en définissant une co-multiplication  $\Delta$  par

- $\Delta(1) = 1 \otimes 1$
- $\Delta(t) = t \otimes t$
- $\Delta(s) = t \otimes s + s \otimes t$ .

Il est clair que  $\Delta$  est coassociative et cocommutative. Et il est clair aussi que  $\Delta$  respecte la différentielle.

**Lemme 6.16.** *Soit  $(N, \rho_N)$  un  $\mathcal{C}$ -module à droite. Alors  $M \otimes N$  est un  $\mathcal{P}$ -module à droite.*

**Preuve** : Le morphisme de structure  $\rho$  de  $M \otimes N$  est donné par

$$(M \otimes N) \circ \mathcal{P} \cong (M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) \xrightarrow{\iota} (M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C}) \xrightarrow{\rho_M \otimes \rho_N} M \otimes N.$$

Il reste à voir que les diagrammes usuels commutent. En particulier, il faut montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes N) \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{1 \circ \gamma} & (M \otimes N) \circ \mathcal{P} \\ \downarrow \rho \circ 1 & & \downarrow \rho \\ (M \otimes N) \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho} & (M \otimes N) \end{array}$$

commute. Ce qui se fait en découpant ce carré en petits carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
(M \otimes N) \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{1 \circ \gamma_{\mathcal{P}}} & (M \otimes N) \circ \mathcal{P} & & \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
(M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) & \xrightarrow{1_{M \otimes N} \circ \iota} & (M \otimes N) \circ ((\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \otimes (\mathcal{C} \circ \mathcal{C})) & \xrightarrow{1 \circ (\gamma_{\mathcal{P}} \otimes \gamma_{\mathcal{C}})} & (M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) \\
\downarrow \iota \circ 1_{\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}} & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
((M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C})) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) & \xrightarrow{\iota} & (M \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C}) & \xrightarrow{(1 \circ \gamma_{\mathcal{P}}) \otimes (1 \circ \gamma_{\mathcal{C}})} & (M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C}) \\
\downarrow \rho_M \otimes \rho_N \circ 1 & & \downarrow (\rho_M \circ 1_{\mathcal{P}}) \otimes (\rho_N \circ 1_{\mathcal{C}}) & & \downarrow \rho_M \otimes \rho_N \\
(M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) & \xrightarrow{\iota} & (M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C}) & \xrightarrow{\rho_M \otimes \rho_N} & (M \otimes N).
\end{array}$$

En effet, il est évident que le diagramme du haut commute. Le petit diagramme à gauche (du point de vue du lecteur) dans la deuxième ligne commute parce que la transformation naturelle  $\iota$  est associative. Le diagramme à droite dans la deuxième ligne et le diagramme en-bas à gauche commutent par naturalité de  $\iota$ . Finalement, le diagramme en-bas à droite commute parce que  $N$  (respectivement  $M$ ) est un  $\mathcal{C}$ -module (resp.  $\mathcal{P}$ -module) à droite. De manière semblable on vérifie que le diagramme d'unité commute :

$$\begin{array}{ccccc}
(M \otimes N) \circ \mathcal{J} & & & & \\
\downarrow 1 \circ \Delta_{\mathcal{J}} & \searrow \cong & & & \\
(M \otimes N) \circ (\mathcal{J} \otimes \mathcal{J}) & \xrightarrow{\iota} & (M \circ \mathcal{J}) \otimes (N \circ \mathcal{J}) & & \\
\downarrow 1 \circ (\eta_{\mathcal{P}} \otimes \eta_{\mathcal{C}}) & & \downarrow (1 \circ \eta_{\mathcal{P}}) \otimes (1 \circ \eta_{\mathcal{C}}) & \searrow \cong & \\
(M \otimes N) \circ (\mathcal{P} \otimes \mathcal{C}) & \xrightarrow{\iota} & (M \circ \mathcal{P}) \otimes (N \circ \mathcal{C}) & \xrightarrow{\rho_M \otimes \rho_N} & M \otimes N,
\end{array}$$

où  $\Delta_{\mathcal{J}}$  est défini par l'isomorphisme  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$  et munit  $\mathcal{J}$  d'une structure d'opérade de Hopf.  $\square$

Ce lemme dit en particulier que  $M \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{C})$  est un  $\mathcal{P}$ -module à droite. On veut maintenant factoriser la diagonale sur  $M$  de la manière suivante :

$$M \xrightarrow{i} M \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{p} M \times M,$$

avec  $i$  une équivalence faible et  $p$  une fibration.

**Proposition 6.17.** *Il existe un objet chemin de la forme*

$$M \xrightarrow{i} M \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{p} M \times M$$

dans la catégorie modèle  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}$ .

**Preuve :** Commençons par définir  $i : M \rightarrow M \otimes T(\mathfrak{C})$ . On définit  $i$  en niveau  $n$  en posant  $i(m) = m \otimes 1^{\otimes n}$ . En utilisant le théorème de Künneth on voit que  $i$  est un quasi-isomorphisme. De plus, il est clair que ce morphisme respecte l'action de  $\Sigma_n$ . Il reste à voir que c'est un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Autrement dit, il faut vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{i \circ 1} & (M \otimes T(\mathfrak{C})) \circ \mathcal{P} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho_{M \otimes T(\mathfrak{C})} \\ M & \xrightarrow{i} & M \otimes T(\mathfrak{C}). \end{array}$$

Mais si  $m \in M(n)$  et  $q_i \in \mathcal{P}(r_i)$ , avec  $r_1 + \dots + r_n = r$ , on a

$$\begin{aligned} \rho_{M \otimes T(\mathfrak{C})}(i \circ 1)(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) &= \rho_{M \otimes T(\mathfrak{C})}(m \otimes 1^{\otimes n} \otimes (q_1 \otimes \dots \otimes q_n)) \\ &= \rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \otimes 1^{\otimes r} \\ &= i \rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n). \end{aligned}$$

Il reste à définir  $p : M \otimes T(\mathfrak{C}) \rightarrow M \times M$ . Un élément typique de  $(M \otimes T(\mathfrak{C}))(n)$  est de la forme  $x = m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , avec  $x_i \in \{1, t, s\}$  et  $m \in M(n)$ . On pose

$$p(x) = \begin{cases} (m, m) & \text{si } x_i = 1 \ \forall i \\ (m, 0) & \text{si } x_i \in \{1, t\} \ \forall i \text{ et il existe } i \text{ tel que } x_i = t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que  $p$  est une surjection (au niveau 0 il faut utiliser le fait que  $M(0) = 0$ ). De même, on vérifie aisément que  $p$  respecte l'action de  $\Sigma_n$ . Il reste à voir que c'est bien un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite. Il faut voir que

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes T(\mathfrak{C})) \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{p \circ 1} & (M \times M) \circ \mathcal{P} \\ \downarrow \rho_{M \otimes T(\mathfrak{C})} & & \downarrow \rho_{M \times M} \\ M \otimes T(\mathfrak{C}) & \xrightarrow{p} & M \times M \end{array}$$

commute. Pour vérifier la commutativité de ce diagramme, il faut faire trois calculs différents, un pour chacun des cas donnés dans la définition de  $p$ . On va suivre le même ordre que dans cette définition. Et dans chacun des trois calculs, on prend  $x = m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , et  $q_1, \dots, q_n$  comme ci-dessus.

(i)

$$\begin{aligned} \rho_{M \times M}(p \circ 1)(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) &= \rho_{M \times M}((m, m) \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \\ &= \left( \rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n), \rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \right) \\ &= p\left( \rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \otimes 1^{\otimes r} \right) \\ &= p \rho_{M \otimes T(\mathfrak{C})}(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\rho_{M \times M}(p \circ 1)(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) &= \rho_{M \times M}\left((m, 0) \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n\right) \\ &= \left(\rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n), 0\right) \\ &= p\left(\rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \otimes \Delta^{(r_1-1)}(x_1) \otimes \dots \otimes \Delta^{(r_n-1)}(x_n)\right) \\ &= p\rho_{M \otimes \mathcal{T}(C)}(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\rho_{M \times M}(p \circ 1)(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) &= 0 \\ &= p\left(\rho_M(m \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n) \otimes \Delta^{(r_1-1)}(x_1) \otimes \dots \otimes \Delta^{(r_n-1)}(x_n)\right) \\ &= p\rho_{M \otimes \mathcal{T}(C)}(x \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n)\end{aligned}$$

□

En fait, ce n'est pas l'objet chemin construit dans la proposition précédente que l'on va utiliser dans la suite de ce chapitre, mais une variante. Pour définir cette variante, on a besoin de modifier le produit tensoriel niveau de deux suites symétriques.

**Définition 6.11.** Soit  $A$  et  $B$  deux suites symétriques. La suite symétrique  $A \otimes_g B$  est la suite symétrique définie par

$$(A \otimes_g B)(n) = A(n) \otimes B(n), \quad n \geq 0,$$

où  $\Sigma_n$  agit sur  $A(n)$  uniquement.

**Lemme 6.18.** Soit  $(N, \rho_N)$  une  $\mathcal{C}$ -module à droite. Alors  $M \otimes_g N$  est un  $\mathcal{P}$ -module à droite.

**Preuve :** Il suffit de vérifier que le morphisme  $\rho : (M \otimes_g N) \circ \mathcal{P} \rightarrow M \otimes_g N$  défini dans le lemme 6.16 fait commuter les diagrammes d'équivariance du lemme 2.4. Soit  $\underline{n} \in I_{k,n}$ ,  $m \in M(k)$ ,  $n \in N(k)$ , et  $p_1 \in \mathcal{P}(n_1), \dots, p_k \in \mathcal{P}(n_k)$ . Alors

$$\begin{aligned}\sigma_{\underline{n}}\rho(1 \otimes \hat{\sigma})(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) &= \sigma_{\underline{n}}\rho(m \otimes n \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \sigma_{\underline{n}}\rho(m \otimes n \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= \sigma_{\underline{n}}\left(\rho_M(m \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma^{-1}(k)}) \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k})\right) \\ &= \rho_M(m \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma^{-1}(k)})\sigma_{\underline{n}} \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho(\sigma \otimes Id)(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) &= \rho(m\sigma \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) \\ &= \rho_M(m\sigma \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k}),\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sigma_{\underline{n}}\rho(1 \otimes \hat{\sigma})(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) = \rho(\sigma \otimes Id)(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k)$$

puisque  $\rho_M$  est un morphisme de suites symétriques. Il reste à vérifier la commutativité du deuxième diagramme. D'une part

$$\begin{aligned} (\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k)\rho(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) &= (\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k)(\rho_M(m \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k})) \\ &= \rho_M(m \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k)(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k) \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k}) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \rho(1 \otimes \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_k)(m \otimes n \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) &= \rho(m \otimes n \otimes p_1 \tau_1 \otimes \dots \otimes p_k \tau_k) \\ &= \rho_M(m \otimes p_1 \tau_1 \otimes \dots \otimes p_k \tau_k) \otimes \rho_N(n \otimes 1^{\otimes k}), \end{aligned}$$

ce qui montre la commutativité du deuxième diagramme.  $\square$

**Proposition 6.19.** *La composition  $M \xrightarrow{i} M \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{p} M \times M$ , où  $i$  et  $p$  sont définis comme dans la proposition 6.17, est un objet chemin.*

**Preuve :** La seule chose à vérifier est que  $i$  et  $p$  respectent l'action de  $\Sigma_n$  au niveau  $n \in \mathbb{N}$ . Mais ceci est trivialement le cas par définition de  $i$  et  $p$ .  $\square$

On a donc un deuxième objet chemin, et c'est celui-là que l'on utilise dans la section suivante.

**Définition 6.12.** *Une homotopie (à droite) entre deux morphismes  $f, g : M_1 \rightarrow M_2$  de  $\mathcal{P}$ -modules à droite est un morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2 \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C})$  qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \uparrow & & \\ & f & & p_1 & \\ N & \nearrow & & & M \\ & \xrightarrow{\Phi} & M \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C}) & & \\ & \searrow & & p_2 & \\ & & & & M \end{array}$$

Dans ce diagramme,  $p_i$  est la composition de  $p$  avec la projection sur le  $i$ -ème facteur.

### 6.3 Information donnée par le modèle minimal

Evidemment, la construction d'un modèle minimal pour les  $\mathcal{P}$ -modules à droite qui est donnée plus haut dans ce chapitre est intéressante seulement si on peut en tirer quelque chose. Dans cette section, on donne une idée de la direction dans laquelle on pourrait aller pour exploiter ce modèle minimal.

En effet, une question importante concernant le foncteur  $\tilde{C} : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathcal{AW} - \mathbf{coalg}$  est de déterminer la relation qu'il peut y avoir entre  $[K, L] = Ho(\mathbf{sSet})(K, L)$  et  $[\tilde{C}(K), \tilde{C}(L)] = Ho(\mathcal{AW} - \mathbf{coalg})(\tilde{C}(K), \tilde{C}(L))$ ,  $K$  et  $L$  étant des ensembles simpliciaux. La première chose à remarquer est que  $[\tilde{C}(K), \tilde{C}(L)]$  n'est pas un objet facile d'accès puisqu'il n'y a (encore?) aucun théorème qui donne l'existence d'une structure de catégorie modèle (ou une autre structure qui permet de faire de l'homotopie agréablement) sur la catégorie  $\mathcal{AW} - \mathbf{coalg}$ . Mais on peut utiliser le foncteur  $\mathcal{T} : \mathcal{AW} - \mathbf{coalg} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{AW}}$ , et il est certainement sensé de poser à nouveau la question posée ci-dessus, mais en remplaçant le foncteur  $\tilde{C}$  par le foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  : quelle est la relation entre  $[K, L]$  et  $[\mathcal{T}\tilde{C}(K), \mathcal{T}\tilde{C}(L)] = Ho(\mathbf{Mod}_{\mathcal{AW}})(\mathcal{T}\tilde{C}(K), \mathcal{T}\tilde{C}(L))$ ? Une première manière d'aborder ce problème est de calculer ces deux objets chacun de leur côté pour certains  $K$  et  $L$  bien choisis et de comparer ce que l'on obtient. Il s'agit donc d'établir une méthode qui permet de calculer, ou au moins de dire quelque chose concernant  $[\mathcal{T}\tilde{C}(K), \mathcal{T}\tilde{C}(L)]$ . Ce qui amène à l'un des résultats les plus spectaculaires de l'homotopie rationnelle.

**Théorème 6.20.** *Soit  $X$  un espace 1-connexe tel que l'homologie  $H_*(X; \mathbb{Q})$  soit de type fini. Et soit  $(\Lambda V, d)$  le modèle minimal de Sullivan de  $X$ . Alors il existe un isomorphisme  $V^n \cong \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$  pour tout  $n \geq 0$ .*

Autrement dit, le modèle minimal d'un espace donne les classes d'homotopie rationnelle d'applications continues  $S^n \rightarrow X$ , pour tout  $n \geq 0$ . On peut donc espérer que le modèle minimal développé dans ce chapitre donne également des informations sur les morphismes entre modules à droite (bien choisis) sur  $\mathcal{AW}$ . On ne va pas, évidemment, donner une preuve du théorème ci-dessus (on peut en trouver une dans [FHT01]), mais il est utile de comprendre pourquoi ce théorème est vrai pour mieux comprendre ce que l'on peut espérer tirer du modèle minimal pour les modules à droite sur  $\mathcal{AW}$ .

Ce que l'on fait maintenant de manière très informelle. On se place dans la catégorie modèle des algèbres de cochaînes commutatives sur  $\mathbb{Q}$  (voir [Hes07] par exemple). Cette catégorie est notée  $\mathbf{CDGA}_{\mathbb{Q}}$ . Remarquons que les algèbres de cochaînes commutatives sur  $\mathbb{Q}$  "les plus simples" (mais non-triviales) sont les algèbres commutatives avec une copie de  $\mathbb{Q}$  en degré 0 et une en degré  $n$ . Chacune de ces algèbres est notée  $C_n$ . Si on fixe  $n \geq 1$ , alors l'algèbre  $C_n$  a la propriété suivante : "testée contre une algèbre de Sullivan minimal  $(\Lambda V, d)$ " elle donne  $V^n$ . Plus précisément, on a  $[(\Lambda V, d), C_n] \cong V^n$ , où  $[(\Lambda V, d), C_n]$  est une notation pour  $Ho(\mathbf{CDGA}_{\mathbb{Q}})((\Lambda V, d), C_n)$ . Mais  $C_n$  est topologique puisqu'elle est réalisée par  $S^n : C_n \cong C(S^n; \mathbb{Q})$ . De plus, il y a une équivalence contravariante  $A$  de catégories entre la catégorie homotopique des algèbres de cochaînes commutatives sur  $\mathbb{Q}$  et la catégorie homotopique rationnelle des espaces topologiques si on se restreint aux objets 1-connexes avec cohomologie de type fini pour chacune de ces deux catégories. Par conséquent on obtient un isomorphisme  $[S^n, X]_{\mathbb{Q}} \cong [A(X), A(S^n)] = [(\Lambda V, d), C(S^n)]$ , où  $[S^n, X]_{\mathbb{Q}}$  désigne les classes d'homotopie rationnelle d'applications continues  $S^n \rightarrow X$ . Ce qui explique  $V^n \cong \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ .

Avant de retourner aux modules à droite sur une opérade  $\mathcal{P}$ , prenons note des deux remarques suivantes.

**Remarque 6.2.** *Plus généralement, supposons que  $(\Lambda V, d)$  soit une algèbre de Sullivan (non-nécessairement minimale). Alors on a  $[(\Lambda V, d), C_n] \cong Ker(d)/Im(d)$ ,  $Ker(d)$  et  $Im(d)$  faisant référence au diagramme*

$$V^{n-1} \xrightarrow{d} V^n \xrightarrow{d} V^{n+1},$$

*$d$  étant la restriction de la différentielle sur  $\Lambda V$ . Ce résultat se prouve sans véritables difficultés avec l'objet chemin explicite disponible dans la catégorie modèle des algèbres de cochaînes commutatives sur  $\mathbb{Q}$  (voir [FHT01] par exemple). En fait, la proposition 6.22 est inspirée du résultat rappelé ici et se prouve de manière semblable.*

**Remarque 6.3.** Soit  $(\mathbb{L}W, e)$  le modèle minimal de Quillen d'un espace 1-connexe  $X$  tel que l'homologie  $H_*(X; \mathbb{Q})$  soit de type fini. Alors on a l'isomorphisme bien connu :  $W^n \cong H^n(X; \mathbb{Q})$ ,  $n \geq 0$ . Ci-dessus on a expliqué conceptuellement pourquoi on peut lire les groupes d'homotopie rationnelle sur le modèle minimal de Sullivan. Un raisonnement tout-à-fait semblable dans le cadre des algèbres de Lie permet d'expliquer pourquoi le modèle minimal de Quillen donne les groupes d'homologie rationnelle.

Revenons maintenant aux modules à droite sur notre opérade  $\mathcal{P}$ . Commençons par définir une famille de modules à droite qui ont la propriété d'être le "plus simple" possible.

**Lemme 6.21.** Soit  $i, j \geq 0$ . Et soit  $Y_{i,j}$  la suite symétrique définie par

$$Y_{i,j}(k)_l = \begin{cases} \mathbb{Z}\alpha & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'action de  $\Sigma_i$  étant triviale. On peut munir  $Y_{i,j}$  d'une structure de  $\mathcal{P}$ -module à droite.

**Preuve :** Pour définir l'action de  $\mathcal{P}$ ,  $\rho$ , il suffit de définir des morphismes de la forme

$$Y_{i,j}(i) \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes i} \cong Y_{i,j}(i) \rightarrow Y_{i,j}(i),$$

puisque  $\mathcal{P}(0) = 0$  et  $\mathcal{P}(1) = \mathbb{Z}$ . Evidemment, on choisit de prendre l'identité. Il reste à voir que cela définit bien une structure de module à droite. Il faut voir que

$$\begin{array}{ccc} Y_{i,j} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho \circ 1} & Y_{i,j} \circ \mathcal{P} \\ \downarrow 1 \circ \gamma_{\mathcal{P}} & & \downarrow \rho \\ Y_{i,j} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho} & Y_{i,j} \end{array}$$

commute. En niveau différent du niveau  $i$  il est évident que ce diagramme commute. Et en niveau  $i$  ce diagramme devient

$$\begin{array}{ccc} Y_{i,j} \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes i} \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes i} & \xrightarrow{\cong} & Y_{i,j} \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes i} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ Y_{i,j} \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes i} & \xrightarrow{\cong} & Y_{i,j} \end{array}$$

tous les isomorphismes étant les isomorphismes évidents. Donc ce diagramme commute également. De manière semblable on montre que

$$\begin{array}{ccc} Y_{i,j} & & \\ \downarrow 1 \circ \eta_{\mathcal{P}} & \searrow \cong & \\ Y_{i,j} \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho} & Y_{i,j} \end{array}$$

commute. Donc  $Y_{i,j}$  est un  $\mathcal{P}$ -module à droite. □

Maintenant, considérons un module à droite semi-libre  $(X \circ \mathcal{P}, d)$ . Ce module est cofibrant par un résultat vu plus haut. On veut essayer de déterminer  $[(X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j}] = Ho(\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}})((X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j})$ ; la proposition suivante n'étant pas une surprise si l'on se souvient de la remarque 6.2.



**Proposition 6.22.** *La différentielle  $d$  induit une différentielle sur  $X$ . En particulier, si on fixe  $i \geq 1$  et  $j \geq 0$  on a le diagramme*

$$X(i)_{j+1} \xrightarrow{d} X(i)_j \xrightarrow{d} X(i)_{j-1}$$

que l'on peut dualiser pour obtenir un diagramme de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[\Sigma_i]}(X(i)_{j-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^*} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[\Sigma_i]}(X(i)_j, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^*} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}[\Sigma_i]}(X(i)_{j+1}, \mathbb{Z}).$$

Alors il existe une surjection de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\text{Ker}(d^*)/\text{Im}(d^*) \rightarrow [(X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j}].$$

**Preuve :** Commençons par remarquer que  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}((X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j})$  est en bijection avec les morphismes de suites symétriques  $X \xrightarrow{f} Y_{i,j}$  qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y_{i,j} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & Y_{i,j}. \end{array}$$

(Dans ce diagramme, par abus de notation, on note de la même manière le morphisme  $X \rightarrow Y_{i,j}$  et le morphisme  $X \circ \mathcal{P} \rightarrow Y_{i,j}$  que l'on obtient par définition du foncteur libre. Cet abus de notation sera utilisé plus loin dans des situations similaires.) Par définition de  $Y_{i,j}$ , ce diagramme commute si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X(i)_{j+1} & \xrightarrow{f} & 0 \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ (X \circ \mathcal{P})(i)_j & \xrightarrow{f} & Y_{i,j}(i)_j. \end{array}$$

Mais

$$(X \circ \mathcal{P})(i) = \coprod_{i \geq m \geq 1} X(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \coprod_{i \in I_{m,i}} \mathcal{P}(i_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(i_m) \otimes_{\Sigma_i} \mathbb{Z}[\Sigma_i] \right),$$

et le morphisme  $f : X \circ \mathcal{P} \rightarrow Y_{i,j}$  est nul sur

$$\coprod_{i > m \geq 1} X(m) \otimes_{\Sigma_m} \left( \coprod_{i \in I_{m,i}} \mathcal{P}(i_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(i_m) \otimes_{\Sigma_i} \mathbb{Z}[\Sigma_i] \right)$$

par construction. Ce qui entraîne l'existence d'une bijection entre  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}((X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j})$  et l'ensemble des morphismes de  $\mathbb{Z}[\Sigma_i]$ -modules  $X(i)_j \xrightarrow{f} Y_{i,j}(i)_j$  qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X(i)_{j+1} & \xrightarrow{f} & 0 \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X(i)_j & \xrightarrow{f} & Y_{i,j}(i)_j. \end{array}$$

Autrement dit,  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}((X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j}) \cong \text{Ker}(d^*)$  comme  $\mathbb{Z}$ -modules, où  $d : X(i)_{j+1} \rightarrow X(i)_j$ . On a donc établi une surjection  $S : \text{Ker}(d^*) \rightarrow [(X \circ \mathcal{P}, d), Y_{i,j}]$  de  $\mathbb{Z}$ -modules. Il reste, pour terminer cette preuve, à montrer que le noyau  $\text{Ker}(S)$  contient  $\text{Im}(d^*)$ ,  $d$  étant cette fois le morphisme

$d : X(i)_j \rightarrow X(i)_{j-1}$ . Pour cela prenons  $f \in \text{Im}(d^*)$ , ce qui signifie que  $f$  se factorise de la manière suivante :

$$f : X(i)_j \xrightarrow{d} X(i)_{j-1} \xrightarrow{\tilde{f}} Y_{i,j}(i)_j.$$

A partir de cette donnée on construit une homotopie à droite entre l'application nulle et  $f$ , vu comme morphisme de  $\mathcal{P}$ -modules à droite  $(X \circ \mathcal{P}, d) \rightarrow Y_{i,j}$ . Pour cela, établissons la notation. Soit  $e_k$  un élément d'une  $\mathbb{Z}[\Sigma_i]$ -base choisie de  $X(i)_j$  et soit  $\varepsilon_l$  un élément d'une  $\mathbb{Z}[\Sigma_i]$ -base choisie de  $X(i)_{j-1}$ . Supposons que  $f(e_k) = \lambda_k \alpha$  et que  $f(\varepsilon_l) = \mu_l \alpha$ , avec  $\lambda_k, \mu_l \in \mathbb{Z}$ . De plus, posons  $d(e_k) = \sum_{l=1}^m \varepsilon_l \gamma_l^k$ , avec  $\gamma_l^k \in \mathbb{Z}[\Sigma_i]$  pour tout  $k, l$ .

On tire profit de l'objet chemin défini dans la section précédente et on définit l'homotopie

$$\Phi : (X \circ \mathcal{P}, d) \rightarrow Y_{i,j} \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C})$$

entre 0 et  $f$  en posant  $\Phi(e_k) = \lambda_k \alpha \otimes (t \otimes 1^{i-1})$  et  $\Phi(\varepsilon_l) = (-1)^j \mu_l \alpha \otimes s \otimes 1^{i-1}$ . Partout ailleurs, on définit  $\Phi$  comme étant nulle. Il faut vérifier que le diagramme habituel commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & Y_{i,j} \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C}) \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X \circ \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi} & Y_{i,j} \otimes_g \mathcal{T}(\mathfrak{C}). \end{array}$$

Par définition, le diagramme ci-dessus commute si et seulement si il commute en niveau  $i$ . Et en niveau  $i$ , ce diagramme commute trivialement sauf dans les trois cas suivants :

$$\begin{array}{ccc} X(i)_{j+1} & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_{j+1} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X(i)_j & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_j, \\ \\ X(i)_j & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_j \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X(i)_{j-1} & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_{j-1}, \\ \\ X(i)_{j-1} & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_{j-1} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ X(i)_{j-2} & \xrightarrow{\Phi} & (Y_{i,j}(i) \otimes_g \mathfrak{C}^{\otimes i})_{j-2}. \end{array}$$

Le premier (depuis le haut) de ces trois diagrammes commute car si  $x \in X(i)_{j+1}$  et que l'on note  $d(x) = \sum_k e_k \beta_k$ ,  $\beta_k \in \mathbb{Z}[\Sigma_i]$  pour tout  $k$ , alors

$$\begin{aligned} \Phi d(x) &= \Phi\left(\sum_k e_k \beta_k\right) \\ &= \sum_k (\lambda_k \alpha \otimes (t \otimes 1^{i-1})) \beta_k \end{aligned}$$

$$= \sum_k (\lambda_k \alpha \beta_k \otimes (t \otimes 1^{i-1}))$$

Mais  $f \in \text{Im}(d^*) \subset \text{Ker}(d^*)$ . Et donc

$$\begin{aligned} 0 &= fd(x) \\ &= f\left(\sum_k e_k \beta_k\right) \\ &= \sum_k \lambda_k \alpha \beta_k. \end{aligned}$$

Le troisième diagramme commute car

$$\begin{aligned} d\Phi(\varepsilon_l) &= d((-1)^j \mu_l \alpha \otimes s \otimes 1^{\otimes i-1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

par définition de  $\Phi$  et  $d$ . Enfin, le deuxième diagramme commute car

$$\begin{aligned} d\Phi(e_k) &= d(\lambda_k \alpha \otimes (t \otimes 1^{\otimes i-1})) \\ &= (-1)^j \lambda_k \alpha \otimes (s \otimes 1^{\otimes i-1}) \\ &\stackrel{(*)}{=} (-1)^j \sum_l (\mu_l \alpha \gamma_l \otimes s \otimes 1^{\otimes i-1}) \\ &= (-1)^j \sum_l (\mu_l \alpha \otimes s \otimes 1^{\otimes i-1}) \gamma_l \\ &= \Phi\left(\sum_l \varepsilon_l \gamma_l^k\right) \\ &= \Phi d(e_k), \end{aligned}$$

l'égalité (\*) étant vraie car  $f = \tilde{f}d$  entraîne

$$\begin{aligned} \lambda_k \alpha &= f(e_k) \\ &= \tilde{f}d(e_k) \\ &= \tilde{f}\left(\sum_l \varepsilon_l \gamma_l\right) \\ &= \sum_l \mu_l \alpha \gamma_l. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Retournons au cas où  $\mathcal{P} = \mathcal{AW}$ . On peut tout de suite remarquer deux choses.

- Comme le foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  est covariant, on peut essayer de comparer le modèle pour  $\mathcal{T}\tilde{C}(K)$  avec  $[K, S^n]$  (plutôt qu'à  $[S^n, K]$  comme dans le cas du modèle de Sullivan),  $K$  étant un ensemble simplicial et  $S^n$  étant une sphère simpliciale de dimension  $n$ .

• Il y a une deuxième différence avec le cas de l'homotopie rationnelle : la famille des modules à droite sur  $\mathcal{AW}$  qui ont la propriété d'être aussi "simples" que possible n'est pas une famille de modules réalisables par un ensemble simplicial. Plus précisément, il n'existe aucun quasi-isomorphisme entre  $\mathcal{TC}(K)$  et  $Y_{i,j}$ , quel que soit l'ensemble simplicial  $K$  et quel que soient  $i, j \in \mathbb{N}$ . Ce qu'il reste à faire est donc de considérer le  $\mathcal{AW}$ -module à droite topologique le plus simple, à savoir  $\mathcal{TC}(S^n)$ , et de déterminer quelles informations sur  $[(X \circ \mathcal{AW}, d), \mathcal{TC}(S^n)]$  on peut tirer de  $(X \circ \mathcal{AW}, d)$ .

# Chapitre 7

## Problèmes ouverts

En plus des problèmes abordés dans ce travail, il y a beaucoup d'autres questions au sujet de l'opérade d'Alexander-Whitney et au sujet des coalgèbres d'Alexander-Whitney auxquelles il serait très intéressant de pouvoir répondre. Ce dernier chapitre en présente quelques-unes qui semblent particulièrement brûlantes. La première section discute de la théorie de l'homotopie des coalgèbres d'Alexander-Whitney, et les trois sections suivantes traitent de questions opéradiques.

### 7.1 Théorie de l'homotopie des coalgèbres d'Alexander-Whitney

Pour la catégorie des algèbres sur une opérade, il existe différents résultats (voir [BM03] par exemple) qui donnent des conditions permettant de garantir l'existence d'une structure de catégorie modèle. Pour la catégorie des coalgèbres sur une opérade la situation est tout-à-fait différente. Il ne semble pas du tout facile de montrer que (sous certaines conditions) la catégorie des coalgèbres sur une opérade puisse être munie d'une structure de catégorie modèle.

Pour illustrer la différence entre coalgèbres et algèbres sur une opérade, attirons l'attention sur [Smi03]. Cet article montre comment construire la coalgèbre co-libre sur un complexe de chaînes  $V$  qui est  $R$ -libre en chaque degré ;  $R$  étant un anneau fixé. Mais cette construction est sensiblement plus compliquée que dans le cas des algèbres. De plus, J.R. Smith explique (voir [Smia]) que le complexe de chaînes sous-jacent à la coalgèbre co-libre sur  $V$  n'est, semble-t-il, pas nécessairement libre en chaque degré. En conséquence on n'obtient pas un couple adjoint (oubli, colibre), alors que le résultat dual est bien connu dans le cas des algèbres sur une opérade.

Le cas des (co)limites n'est pas facile non plus. L'article [Smib] peut être un point de départ pour étudier les colimites et surtout les limites dans la catégorie des coalgèbres sur une opérade. Là aussi, la situation semble être plus compliquée que dans le cas des algèbres (voir [GJ]), illustrant le fait que la catégorie des algèbres sur une opérade  $\mathcal{P}$  et la catégorie des coalgèbres sur  $\mathcal{P}$  ne sont pas des catégories duales l'une de l'autre.

Pour éviter ces difficultés, la stratégie qui a été choisie dans ce travail est de regarder les coalgèbres sur une opérade comme étant des modules à droite sur cette même opérade ; cette catégorie ayant des propriétés agréables (et utilisées dans le chapitre précédent). Il faudrait évidemment étudier cette idée plus en profondeur. Une première question que l'on peut se poser est la suivante : est-ce que le foncteur  $\mathcal{T}\hat{C}$  est membre d'un couple de Quillen ?

**Proposition 7.1.** *Le foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  n'est pas membre d'un couple de Quillen.*

**Preuve :** Le foncteur  $C$  des chaînes normalisées sur un ensemble simplicial ne préserve pas les limites. Par conséquent  $\mathcal{T}\tilde{C}$  ne préserve pas les limites non plus.

D'autre part,  $\mathcal{T}\tilde{C}$  ne préserve pas les cofibrations. En effet, considérons la cofibration  $\Lambda^1[2] \xrightarrow{i} \Delta[2]$ , où  $\Lambda^1[2]$  est la première corne du 2-simplexe standard  $\Delta[2]$ . On peut appliquer  $\mathcal{T}\tilde{C}$  à cette cofibration et l'intégrer dans le diagramme de  $\mathcal{AW}$ -modules à droite suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}\tilde{C}(\Lambda^1[2]) & \xrightarrow{=} & \mathcal{T}\tilde{C}(\Lambda^1[2]) \\ \downarrow \mathcal{T}\tilde{C}(i) & & \downarrow \\ \mathcal{T}\tilde{C}(\Delta[2]) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Il est clair (voir la proposition ci-dessous) que  $\mathcal{T}\tilde{C}(i)$  est une équivalence faible, de même qu'il est clair que  $\mathcal{T}\tilde{C}(\Lambda^1[2]) \rightarrow 0$  est une fibration, puisque c'est une surjection. Il suffit donc de montrer que le diagramme ci-dessus n'admet aucun relèvement dans  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{AW}}$  pour montrer que  $\mathcal{T}C$  ne préserve pas les cofibrations.

Les  $n$ -simplexes de  $\Delta[2]$  sont notés  $x_{i_0, \dots, i_n}$ . On a que  $\partial_j(x_{i_0, \dots, i_n}) = x_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_n}$  (dans la suite on n'intercale pas de virgules). Au niveau 1, le carré commutatif ci-dessus devient

$$\begin{array}{ccc} C(\Lambda^1[2]) & \xrightarrow{=} & C(\Lambda^1[2]) \\ \downarrow C(i) & & \downarrow \\ C(\Delta[2]) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On a

$$C(\Lambda^1[2]) = 0 \rightarrow \mathbb{Z}x_{01} \oplus \mathbb{Z}x_{12} \rightarrow \mathbb{Z}x_0 \oplus \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2$$

et

$$C(\Delta[2]) = 0 \rightarrow \mathbb{Z}x_{012} \rightarrow \mathbb{Z}x_{02} \oplus \mathbb{Z}x_{01} \oplus \mathbb{Z}x_{12} \rightarrow \mathbb{Z}x_0 \oplus \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2.$$

Et il faut trouver une retraction  $r : C(\Delta[2]) \rightarrow C(\Lambda^1[2])$ . Il reste à étudier le comportement possible de  $r$  sur le simplexe  $x_{02}$ , puisqu'il n'y a pas de choix sur les autres simplexes. Mais il faut que  $r$  commute avec la différentielle, et on doit donc avoir  $dr(x_{012}) = rd(x_{012})$ . Cette égalité s'écrit

$$0 = x_{12} + x_{01} - r(x_{02}).$$

Ce qui force  $r(x_{02}) = x_{01} + x_{12}$ . Mais pour que  $r$  préserve la structure de  $\mathcal{AW}$ -module, il faut en particulier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
C(\Delta[2]) \otimes \mathcal{AW}(2) & \xrightarrow{r^{\otimes 1}} & C(\Lambda^1[2]) \otimes \mathcal{AAW}(2) \\
\downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_1 \\
C(\Delta[2]) & \xrightarrow{r^{\otimes 2}} & C(\Lambda^1[2]),
\end{array}$$

où  $\psi_1$  est la co-multiplication. D'une part on a

$$\begin{aligned}
(\psi_1 \circ (r \otimes 1))(x_{02} \otimes Id) &= \psi_1((x_{01} + x_{12}) \otimes Id) \\
&= \Delta(x_{01} + x_{12}) \\
&= x_0 \otimes x_{01} + x_{01} \otimes x_1 + x_1 \otimes x_{12} + x_{12} \otimes x_2
\end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
(r^{\otimes 2} \circ \psi_1)(x_{02} \otimes Id) &= r^{\otimes 2}(x_0 \otimes x_{02} + x_{02} \otimes x_2) \\
&= x_0 \otimes (x_{01} + x_{12}) + (x_{01} + x_{12}) \otimes x_2 \\
&= x_0 \otimes x_{01} + x_0 \otimes x_{12} + x_{01} \otimes x_2 + x_{12} \otimes x_2.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $r$  ne peut pas être le niveau 1 d'un morphisme de  $\mathcal{AW}$ -modules à droite.  $\square$

Mais on a la proposition suivante.

**Proposition 7.2.** *Le foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  préserve les équivalences faibles.*

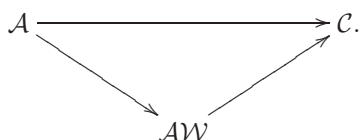
**Preuve** : C'est une conséquence du théorème de Künneth.  $\square$

Par conséquent, le foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  peut tout de même être utilisé pour comparer la catégorie homotopique de  $\mathbf{sSet}$  avec la catégorie homotopique de  $\mathbf{Mod}_{\mathcal{AW}}$ . Le chapitre 6 présente l'ébauche d'une telle comparaison, puisqu'on y développe des outils pour déterminer si  $\mathcal{T}\tilde{C}$  est plein ou fidèle au niveau de la catégorie homotopique (on peut aussi se demander comment  $\mathcal{T}\tilde{C}$  se comporte au niveau de la localisation en hamac (voir [DK80])).

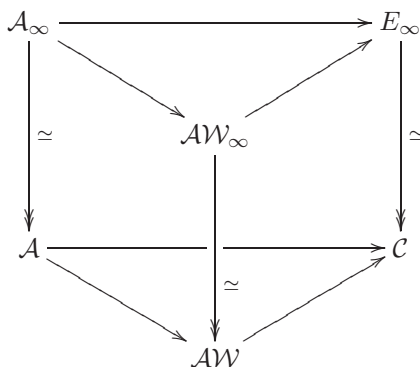
L'étude du foncteur  $\mathcal{T}\tilde{C}$  est certainement intéressante, mais nous éloigne de l'objectif initial qui est de comprendre le foncteur  $\tilde{C}$ . Pour se rapprocher de cet objectif, il semble intéressant d'étudier le foncteur  $\mathcal{T}$ . Ce foncteur est plein et fidèle, et l'on peut se demander ce qu'il se passe au niveau des catégories homotopiques (ou des localisations en hamac). Ici, on définit la catégorie homotopique des coalgèbres d'Alexander-Whitney comme étant la localisation de  $\mathcal{AW} - \mathbf{coalg}$  par rapport aux morphismes qui sont des quasi-isomorphismes.

## 7.2 Relation entre l'opérade d'Alexander-Whitney et les opérades associative et commutative

Par définition de l'opérade d'Alexander-Whitney, il existe un diagramme d'opérades



Comme la catégorie des opérades qui sont nulles en niveau 0 forme une catégorie modèle (voir le théorème 2.11), on obtient le diagramme suivant :



où les flèches verticales sont des remplacements cofibrants. Tous les carrés et les triangles commutent, sauf éventuellement le triangle du haut qui commute au moins à homotopie près. De plus, il est "bien connu" que le morphisme  $\mathcal{A}_\infty \rightarrow E_\infty$  est filtré par les opérades de chaînes des petits  $n$ -cubes :

$$\mathcal{A}_\infty = E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_\infty.$$

Il est donc naturel de se demander si  $\mathcal{A}_\infty \rightarrow \mathcal{AW}_\infty$  et  $\mathcal{AW}_\infty \rightarrow E_\infty$  se factorisent par  $E_n$  pour un certain  $n$ . Et de manière plus générale, il est certainement intéressant d'étudier les relations qui relient les opérades présentes dans le diagramme ci-dessus. Pour attaquer ce problème, il serait bien d'avoir une description explicite de  $\mathcal{AW}_\infty$ .

## 7.3 Remplacement cofibrant de l'opérade d'Alexander-Whitney

Une manière d'aborder ce deuxième problème est de répondre à une autre question. A savoir, déterminer si  $\mathcal{AW}$  est une opérade de Koszul ou non. La première chose à remarquer est qu'il n'est pas clair (du moins pour l'auteur) si cette question a un sens. En effet, la notion de "Koszulité" (voir [LV] qui présente une généralisation de [GK94] due à B. Fresse ([Fre04])) est définie pour des opérades quadratiques. Et s'il est clair que  $\mathcal{AW}$  est quadratique lorsque l'on oublie la différentielle, il n'est au contraire pas évident que  $\mathcal{AW}$  est quadratique lorsqu'elle est munie de sa différentielle non-triviale.



Un autre angle d'attaque possible est de remarquer que si on oublie la différentielle sur  $\mathcal{AW}$ , alors

$$\mathcal{AW} = F(X \oplus Y) / \langle R \rangle,$$

où  $X$  est la suite symétrique (usuelle) qui engendre  $\mathcal{A}$  et où  $R$  est la suite symétrique définie par la relation d'associativité. Comme le foncteur libre commute avec les colimites, on obtient que

$$\mathcal{AW} = \mathcal{A} \coprod FY.$$

Il est tentant (mais certainement naïf!) d'essayer de construire un remplacement cofibrant à partir de

$$\mathcal{A}_\infty \coprod FY.$$

Et terminons par une dernière question concernant  $\mathcal{AW}_\infty$ . En effet, rappelons que si  $C$  est une coalgèbre d'Alexander-Whitney qui satisfait une condition supplémentaire de finitude locale, alors  $\Omega C$  est munie d'une structure d'algèbre de Hopf (non-coassociative). On peut se demander, dans le cas où  $C$  est une  $\mathcal{AW}_\infty$ -coalgèbre (qui satisfait une condition de finitude local), si  $\Omega C$  est encore une algèbre de Hopf. Dans cette situation, on considère  $\Omega C$  avec la différentielle induite par la structure de  $\mathcal{A}_\infty$ -coalgèbre sur  $C$ . Pour répondre à cette question, il faut avoir une définition explicite des  $\mathcal{AW}_\infty$ -coalgèbres, ce qui renforce encore la motivation pour déterminer explicitement un remplacement cofibrant de  $\mathcal{AW}$ .

## 7.4 Le SDR d'Eilenberg-Zilber topologique

Rappelons que si  $K$  et  $L$  sont des ensembles simpliciaux, alors on a le SDR d'Eilenberg-Zilber suivant :

$$C(K) \otimes C(L) \begin{array}{c} \xleftarrow{\nabla_{K,L}} \\ \xrightarrow{f_{K,L}} \end{array} C(K \times L) \circlearrowleft \varphi_{K,L},$$

où  $f_{K,L}$ ,  $\nabla_{K,L}$ , et  $\varphi_{K,L}$  sont la transformation naturelle d'Alexander-Whitney, la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber, et l'homotopie d'Eilenberg-MacLane respectivement. Comme l'opérade d'Alexander-Whitney est une opérade de Hopf, autant  $C(K) \otimes C(L)$  que  $C(K \times L)$  sont munis d'une structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney. La question naturelle que l'on peut se poser est la suivante : est-ce que ces deux coalgèbres d'Alexander-Whitney sont équivalentes dans un sens raisonnable ? Une réponse positive permettrait d'utiliser la "petite" coalgèbre  $C(K) \otimes C(L)$  au lieu de la "grande" coalgèbre  $C(K \times L)$ .

La première chose que l'on peut noter est le contre-exemple suivant.

**Proposition 7.3.** *Ni  $f_{K,L}$ , ni  $\nabla_{K,L}$  ne respectent la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney.*

**Preuve :** Il est évident que  $f_{K,L}$  ne respecte pas la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney, puisque cette application ne respecte pas la co-multiplication. Au contraire,  $\nabla_{K,L}$  respecte la co-multiplication, et il faut aller chercher un contre-exemple plus compliqué, qui est donné dans l'annexe sous forme de la proposition A.20.  $\square$

Cette proposition signifie que  $f_{K,L}$  et  $\nabla_{K,L}$  ne sont pas bien adaptés pour comparer la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K) \otimes C(L)$  avec la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K \times L)$ .

Comme il est tout de même désirable de déterminer si la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K) \otimes C(L)$  et celle de  $C(K \times L)$  sont équivalentes, on peut essayer de résoudre cette question dans la catégorie des  $\mathcal{AW}_\infty$ -coalgèbres. Comme  $\mathcal{AW}_\infty$  est cofibrante par définition, les coalgèbres sur cette opérade devraient avoir de jolies propriétés homotopiques. En particulier, il devrait être possible de transférer la structure de  $\mathcal{AW}$ -coalgèbre (vue comme une structure de  $\mathcal{AW}_\infty$ -coalgèbre) de  $C(K \times L)$  sur  $C(K) \otimes C(L)$  à travers le SDR donné ci-dessus. De cette façon,  $C(K) \otimes C(L)$  serait muni d'une structure de  $\mathcal{AW}_\infty$ -coalgèbre, et il s'agirait alors de comparer cette structure avec la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de  $C(K) \otimes C(L)$  qui provient de la structure d'opérade de Hopf de l'opérade  $\mathcal{AW}$ .

# Annexe A

## Annexe

### A.1 Règle de Koszul

La règle de Koszul dit qu'un signe apparaît lorsque l'on permute deux symboles qui représentent des éléments d'un complexe de chaînes et/ou des morphismes de modules gradués d'un certain degré. Ici, on rappelle l'origine et quelques énoncés précis de cette règle, dans le cadre de  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ . Commençons par donner l'énoncé exact de cette règle.

**Règle de Koszul.** *Si  $a$  et  $b$  sont des symboles qui représentent des objets de degré  $m$  et  $n$  respectivement, et que l'on permute ces deux symboles, alors le signe  $(-1)^{mn}$  apparaît.*

En fait, l'origine de cette règle se trouve dans la définition de la structure monoïdale de  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ . Commençons par rappeler la définition du produit tensoriel de deux complexes de chaînes.

**Définition A.1.** *Soit  $(A, d_A)$  et  $(B, d_B)$  deux complexes de chaînes. Alors  $(A \otimes B, d_{A \otimes B}) = (A, d_A) \otimes (B, d_B)$  est défini par*

$$(A \otimes B)_n = \coprod_{i+j=n} A_i \otimes B_j$$

et

$$d_{A \otimes B}(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B(b),$$

où  $a$  est un élément homogène de  $A$  et  $b$  un élément homogène de  $B$ . Evidemment,  $|a|$  est une notation pour indiquer le degré de  $a$ .

On peut vérifier facilement que la différentielle définie ci-dessus est bien une différentielle, tout comme il est évident que la formule  $d(a \otimes b) = d(a) \otimes b + a \otimes d(b)$  ne définit pas une différentielle. Ensuite, l'isomorphisme de symétrie de la catégorie monoïdale des complexes de chaînes fait également intervenir un signe.

**Définition A.2.** *L'isomorphisme naturel  $\tau_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  est défini par  $\tau_{A,B}(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$ .*

A nouveau, il n'est pas difficile de vérifier que  $\tau$  respecte la différentielle, alors que le morphisme défini par  $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$  ne respecte pas la différentielle. La structure monoïdale de la catégorie des complexes de chaînes est fermée, et là aussi un signe intervient nécessairement.

**Lemme A.1.** Le couple de foncteurs  $\left((- \otimes A), \text{Hom}(A, -)\right)$  est adjoint. Ici,  $\text{Hom}(A, B)$  est le complexe de chaînes dont les éléments de degré  $n$  sont les morphismes de modules gradués de degré  $n$ . Et la différentielle est donnée par

$$d_{\text{Hom}(A,B)}(f) = d_B \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_A,$$

où  $f : A \rightarrow B$  est de degré  $|f|$ .

La plupart des autres signes qui peuvent (et doivent!) apparaître sont des conséquences des définitions et du lemme ci-dessus. Les deux lemmes ci-dessous en sont des exemples.

**Lemme A.2.** L'isomorphisme naturel  $\mathbf{Ch}(\mathbb{Z})(A \otimes B, A \otimes B) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})(B, \text{Hom}(A, A \otimes B))$  donné par le couple adjoint  $\left((- \otimes A), \text{Hom}(A, -)\right)$  envoie l'identité sur le morphisme de complexe de chaînes  $f : B \rightarrow \text{Hom}(A, A \otimes B)$  défini par  $f(b) = - \otimes b$ , pour  $b$  un élément homogène de  $B$ . Sachant que  $(- \otimes b) \in \text{Hom}(A, A \otimes B)$  est défini par  $(- \otimes b)(a) = (-1)^{|a||b|} a \otimes b$ , où  $a \in A$  est un élément homogène de  $A$ .

**Lemme A.3.** Soit  $C$  une coalgèbre sur une opérade  $\mathcal{P}$ , les morphismes de structure étant notés  $\theta_n : C \otimes \mathcal{P}(n) \rightarrow C^{\otimes n}$ . On a alors que  $\theta_n(c \otimes p) = (-1)^{|p||c|} \theta(p)(c)$  où  $\theta : \mathcal{P} \rightarrow \text{CoEnd}(C)$  est (aussi!) la structure de  $\mathcal{P}$ -coalgèbre de  $C$ .

Enfin, notons la remarque ci-dessous.

**Remarque A.1.** Le complexe de chaîne  $sA$  est défini par  $(sA)_n = A_{n-1}$  comme module gradué. Et sa différentielle est définie par  $d(sa) = -sda$ , en parfaite conformité avec la règle de Koszul, puisque  $d$  est de degré  $-1$  et puisque  $s$  est de degré  $1$ . On définit le complexe de chaîne  $s^{-1}A$  de manière similaire.

On peut remarquer que le signe n'est pas nécessaire pour que  $d$  soit une différentielle, et trouver une raison qui force la différentielle à être comme définie ci-dessus ne semble pas évident. C'est tout de même cette définition qui est utilisée tout au long de ce travail.

## A.2 La transformation naturelle d'Alexander-Whitney, la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber, et l'homotopie d'Eilenberg-MacLane

Soit  $K$  et  $L$  des ensembles simpliciaux. Les faces d'un ensemble simplicial sont notées  $d_i$  et les dégénérescences sont notées  $s_j$ . Considérons le diagramme suivant :

$$C(K) \otimes C(L) \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla_{K,L}} \\ \xleftarrow{f_{K,L}} \end{array} C(K \times L) \circlearrowleft \varphi_{K,L}$$

où  $f_{K,L}$  est la transformation naturelle d'Alexander-Whitney, et où  $\nabla_{K,L}$  est la transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber. Ces deux transformations naturelles sont définies par

$$f_{K,L}(k, l) = \sum_{i=0}^n d_{i+1} \dots d_n k \otimes d_0^i l,$$

avec  $(k, l) \in (K \times L)_n$ , et par

$$\nabla_{K,L}(k \otimes l) = \sum_{(\mu, \nu) \in \mathcal{S}_{p,q}} (-1)^{\text{sgn}(\mu)} (s_{\nu_q} \dots s_{\nu_1} k, s_{\mu_p} \dots s_{\mu_1} l),$$

où  $\mathcal{S}_{p,q}$  est l'ensemble des  $(p, q)$ -battements (shuffles en anglais), où  $\text{sgn}(\mu)$  est la signature de  $\mu$ , et où  $k \in K_p, l \in L_q$ .

Ces deux transformations naturelles sont bien connues (cf. [Lan63], par exemple), alors que l'homotopie  $\varphi_{K,L}$  l'est moins. Pourtant, une description explicite pour cette homotopie existe également, même si elle est sensiblement moins pratique à utiliser que celles existants pour  $f_{K,L}$  et  $\nabla_{K,L}$ . L'objet principal de cette section est de rappeler la définition explicite de  $\varphi_{K,L}$  donnée dans [EM54], et de calculer cette homotopie en dimension 2.

Pour définir  $\varphi_{K,L}$ , qui est appelée l'homotopie d'Eilenberg-MacLane dans ce travail, il faut commencer par expliquer ce qu'est un opérateur dérivé. Ceci est fait dans [EM53] avec tous les détails, mais on va brièvement rappeler ici ce qui est nécessaire pour définir  $\varphi_{K,L}$ .

**Définition A.3.**

• Soit

$$f = s_{j_t} \dots s_{j_1} d_{i_s} \dots d_{i_1} : K_n \rightarrow K_m,$$

avec

$$0 \leq i_s < \dots < i_1 \leq n$$

et

$$0 \leq j_1 < \dots < j_t \leq m.$$

Alors

$$f' : K_{n+1} \rightarrow K_{m+1}$$

est défini par  $f'(k_{n+1}) = (s_{j_t+1} \dots s_{j_1+1} d_{i_s+1} \dots d_{i_1+1})(k_{n+1})$ , pour tout  $k_{n+1} \in K_{n+1}$ .

Evidemment, on peut étendre  $f$  en un morphisme de groupe abélien  $F : C_n(K) \rightarrow C_m(K)$ . On définit  $F' : C_{n+1}(K) \rightarrow C_{m+1}(K)$  comme étant l'unique extension linéaire de  $f'$ .

• Soit  $g : L_n \rightarrow L_m$  de la même forme que  $f$ . Alors  $(f \times g) : K_{n+1} \times L_{n+1} \rightarrow K_{m+1} \times L_{m+1}$  est défini par  $(f \times g)'(k_{n+1}, l_{n+1}) = (f'(k_{n+1}), g'(l_{n+1}))$ .

De manière analogue à ce qui a été fait ci-dessus, on peut définir l'extension

$F \times G : C_n(K \times L) \rightarrow C_m(K \times L)$  et l'opérateur dérivé  $(F \times G)' : C_{n+1}(K \times L) \rightarrow C_{m+1}(K \times L)$ .

• Finalement, si  $f_1, \dots, f_r : K_n \rightarrow K_m$  sont des applications de la même forme que  $f$ , et si  $g_1, \dots, g_r : L_n \rightarrow L_m$  sont des applications de la même forme que  $g$ , alors  $(F_1 + \dots + F_r)' := F'_1 + \dots + F'_r$  et  $(F_1 \times G_1 + \dots + F_r \times G_r)' := (F_1 \times G_1)' + \dots + (F_r \times G_r)'$ , où  $F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_r$  sont les extensions linéaires évidentes.

On peut maintenant donner une définition explicite de l'homotopie d'Eilenberg-MacLane .

**Définition A.4.** On définit  $\varphi_{K,L}$  par récurrence :

$$\varphi_{K,L}(k_n, l_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -\varphi'_{K,L}(k_n, l_n) + (\nabla_{K,L} f_{K,L})' s_0(k_n, l_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Lemme A.4.** Soit  $k_2$  un 2-simplexe de  $K$  et  $l_2$  un 2-simplexe de  $L$ . Alors

$$\varphi_{K,K}(k_2, l_2) = -(s_1 k_2, s_2 l_2) + (s_2 s_0 d_2 k_2, s_1 l_2) - (s_1 s_0 d_2 k_2, s_2 l_2) + (s_0 k_2, s_2 s_1 d_1 l_2).$$

**Preuve :** On écrit  $\varphi = \varphi_{K,L}$ ,  $f = f_{K,L}$ , et  $\nabla = \nabla_{K,L}$ .

Par définition, on sait que  $\varphi(k_2, l_2) = -\varphi'(k_2, l_2) + (\nabla f)' s_0(k_2, l_2)$ . Mais on sait par [EM54] que  $\varphi(k_1, l_1) = (s_1 s_0 d_1 k_1, s_0 l_1) + (s_0 k_1, s_1 l_1)$ . Donc  $\varphi'(k_2, l_2) = (s_2 s_1 d_2 k_2, s_1 l_2) + (s_1 k_2, s_2 l_2)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \nabla f(k_2, l_2) &= \nabla(d_1 d_2 k_2 \otimes l_2 + d_2 k_2 \otimes d_0 l_2 + k_2 \otimes d_0 d_0 l_2) \\ &= (s_1 s_0 d_1 d_2 k_2, l_2) + (s_1 d_2 k_2, s_0 d_0 l_2) - (s_0 d_2 k_2, s_1 d_0 l_2) + (k_2, s_1 s_0 d_0 d_0 l_2). \end{aligned}$$

Donc

$$(\nabla f)'(k_3, l_3) = (s_2 s_1 d_2 d_3 k_3, l_3) + (s_2 d_3 k_3, s_1 d_1 l_3) - (s_1 d_3 k_3, s_2 d_1 l_3) + (k_3, s_2 s_1 d_1 d_1 l_3).$$

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\nabla f)'(s_0 k_2, s_0 l_2) \\ &= (s_2 s_1 d_2 d_3 s_0 k_2, s_0 l_2) + (s_2 d_3 s_0 k_2, s_1 d_1 s_0 l_2) - (s_1 d_3 s_0 k_2, s_2 d_1 s_0 l_2) + (s_0 k_2, s_2 s_1 d_1 d_1 s_0 l_2) \\ &= (s_2 s_1 s_0 d_1 d_2 k_2, s_0 l_2) + (s_2 s_0 d_2 k_2, s_1 l_2) - (s_1 s_0 d_2 k_2, s_2 l_2) + (s_0 k_2, s_2 s_1 d_1 l_2). \end{aligned}$$

On en tire que

$$\begin{aligned} & \varphi(k_2, l_2) \\ &= -\varphi'(k_2, l_2) + (\nabla f)'s_0(k_2, l_2) \\ &= -(s_2 s_1 d_2 k_2, s_1 l_2) - (s_1 k_2, s_2 l_2) + (s_2 s_1 s_0 d_1 d_2 k_2, s_0 l_2) + (s_2 s_0 d_2 k_2, s_1 l_2) - (s_1 s_0 d_2 k_2, s_2 l_2) \\ & \quad + (s_0 k_2, s_2 s_1 d_1 l_2) \\ & \stackrel{(*)}{=} -(s_1 k_2, s_2 l_2) + (s_2 s_0 d_2 k_2, s_1 l_2) - (s_1 s_0 d_2 k_2, s_2 l_2) + (s_0 k_2, s_2 s_1 d_1 l_2). \end{aligned}$$

L'égalité (\*) est justifiée par le fait que  $s_2 s_1 = s_1 s_1$  et que  $s_2 s_1 s_0 = s_0 s_0 s_0$ , ce qui montre que  $(s_2 s_1 d_2 k_2, s_1 l_2)$  et  $(s_2 s_1 s_0 d_1 d_2 k_2, s_0 l_2)$  sont dégénérés.  $\square$

## A.3 Calculs utiles dans le chapitre 2

### Morphismes DCSH "classiques"

Un lemme préliminaire est utile pour prouver le résultat principal de ce paragraphe ; commençons avec lui.

**Lemme A.5.** *Soit  $C$  un complexe de chaînes et  $n \geq 1$ . Alors*

$$d_{(s^{-1}C)^{\otimes n}} = (-1)^{\sum(n)} (s^{-1})^{\otimes n} d_{C^{\otimes n}} s^{\otimes n},$$

avec  $\sum(n) := \sum_{i=1}^n i$ .

**Preuve** : On procède par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , cette égalité est vraie par la définition de la différentielle de  $s^{-1}C$  (voir la remarque A.1). Pour  $n \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sum(n)} (s^{-1})^{\otimes n} d_{C^{\otimes n}} s^{\otimes n} \\ &= (-1)^{\sum(n)} (s^{-1})^{\otimes n} \left( (d_C \otimes 1^{\otimes n-1}) + (1 \otimes d_{C^{\otimes n-1}}) \right) s^{\otimes n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\Sigma(n)}(s^{-1})^{\otimes n}(d_C \otimes 1^{\otimes n-1})s^{\otimes n} + (-1)^{\Sigma(n)}(s^{-1})^{\otimes n}(1 \otimes d_{C^{\otimes n-1}})s^{\otimes n} \\
&= (-1)^{\Sigma(n)}(s^{-1})^{\otimes n}(d_C s \otimes s^{\otimes n-1}) + (-1)^{\Sigma(n)}(s^{-1} \otimes (s^{-1})^{\otimes n-1}d_{C^{\otimes n-1}})s^{\otimes n} \\
&= (-1)^{\Sigma(n)+\Sigma(n-2)}(s^{-1}d_C s \otimes (s^{-1}s)^{\otimes n-1}) + (-1)^{\Sigma(n)+n}(s^{-1}s \otimes (s^{-1})^{\otimes n-1}d_{C^{\otimes n-1}}s^{\otimes n-1}) \\
&= -(s^{-1}d_C s \otimes 1^{\otimes n-1}) + (-1)^{\Sigma(n-1)}(1 \otimes (s^{-1})^{\otimes n-1}d_{C^{\otimes n-1}}s^{\otimes n-1}) \\
&= (d_{s^{-1}C} \otimes 1^{\otimes n-1}) + (1 \otimes d_{(s^{-1}C)^{\otimes n-1}}) \\
&= d_{(s^{-1}C)^{\otimes n}}.
\end{aligned}$$

□

**Lemme A.6.** *Il existe une bijection entre  $\mathcal{A}\text{-alg}(\Omega C, \Omega D)$  et l'ensemble des suites de la forme*

$$\{g_n : JC \rightarrow (JD)^{\otimes n}\}_{n \geq 1}$$

et qui sont telles que  $g_n$  est de degré  $n - 1$  et telles que

$$1. \quad \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(g_j \otimes g_{n-j})\Delta_{JC} - (Id^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes Id^{\otimes n-j-1})g_{n-1}] = g_n d_{JC} + (-1)^n d_{JD^{\otimes n}} g_n$$

soit satisfaite pour tout  $n \geq 1$ ,

2.  $\sum_{i \geq 1} g_i$  soit localement fini (autrement dit, cette somme est finie quel que soit l'élément de  $JC$  sur lequel on l'évalue).

**Preuve :** Soit  $F : \Omega C \rightarrow \Omega D$  un morphisme d'algèbres. Ceci est équivalent à se donner un morphisme  $f : s^{-1}JC \rightarrow \Omega D$  de degré 0 qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc}
s^{-1}JC & \xrightarrow{f} & \Omega D \\
\downarrow d_{\Omega C} & & \downarrow d_{\Omega D} \\
\Omega C & \xrightarrow{F} & \Omega D,
\end{array}$$

où  $F$  est le morphisme d'algèbres graduées induit par  $f$ . Calculons  $\pi_n d_{\Omega D} f$  et  $\pi_n F d_{\Omega C}$ , où  $\pi_n : \Omega D \rightarrow (s^{-1}JD)^{\otimes n}$  est la projection évidente. Pour cela, commençons par décomposer  $f$  en  $f = \sum_{i \geq 1} f_i$ , avec  $f_n = \pi_n f : s^{-1}JC \rightarrow (s^{-1}JD)^{\otimes n}$  (il n'est pas difficile de voir que  $f_0$  est nécessairement nul, car dans le cas contraire le diagramme ci-dessus ne commute pas). On obtient

$$\begin{aligned}
&\pi_n d_{\Omega D} f \\
&= \pi_n d_{\Omega D} \sum_{i \geq 1} f_i \\
&= \pi_n d_{\Omega D} (f_n + f_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{=} (-1)^{\Sigma(n)} (s^{-1})^{\otimes n} d_{(JD)^{\otimes n}} s^{\otimes n} f_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left( 1^{\otimes j-1} \otimes (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JD} s \otimes 1^{\otimes n-j-1} \right) f_{n-1},$$

l'égalité (\*) étant justifiée par le lemme précédent. D'autre part

$$\begin{aligned} \pi_n F d_{\Omega C} &= \pi_n F \left( -s^{-1} d_{JC} s + (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JC} s \right) \\ &= \pi_n \left( -f s^{-1} d_{JC} s + (f \otimes f) (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JC} s \right) \\ &= \pi_n \left( -\sum_{i \geq 1} f_i s^{-1} d_{JC} s + \left( \sum_{i \geq 1} f_i \otimes \sum_{i \geq 1} f_i \right) (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JC} s \right) \\ &= -f_n s^{-1} d_{JC} s + \left( \sum_{i=1}^{n-1} f_i \otimes f_{n-i} \right) (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JC} s. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} s^{\otimes n} \pi_n d_{\Omega D} f s^{-1} &= (-1)^{\Sigma(n)} s^{\otimes n} (s^{-1})^{\otimes n} d_{(JD)^{\otimes n}} s^{\otimes n} f_n s^{-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} s^{\otimes n} \left( 1^{\otimes j-1} \otimes (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JD} s \otimes 1^{\otimes n-j-1} \right) f_{n-1} s^{-1} \\ &= (-1)^n d_{(JD)^{\otimes n}} s^{\otimes n} f_n s^{-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left( 1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes 1^{\otimes n-j-1} \right) s^{\otimes n-1} f_{n-1} s^{-1} \end{aligned}$$

puisque  $(-1)^{\Sigma(n)+\Sigma(n-1)} = (-1)^n$ . Et

$$\begin{aligned} s^{\otimes n} \pi_n F d_{\Omega C} s^{-1} &= -s^{\otimes n} f_n s^{-1} d_{JC} + \sum_{i=1}^{n-1} (s^{\otimes i} \otimes s^{\otimes n-i}) (f_i \otimes f_{n-i}) (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{JC}. \\ &= -s^{\otimes n} f_n s^{-1} d_{JC} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (s^{\otimes i} f_i s^{-1} \otimes s^{\otimes n-i} f_{n-i} s^{-1}) \Delta_{JC}. \end{aligned}$$

En posant  $g_n = s^{\otimes n} f_n s^{-1}$ , pour tout  $n \geq 1$ , on obtient

$$s^{\otimes n} \pi_n d_{\Omega D} f s^{-1} = (-1)^n d_{(JD)^{\otimes n}} g_n + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left( 1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes 1^{\otimes n-j-1} \right) g_{n-1}$$

et

$$s^{\otimes n} \pi_n F d_{\Omega C} s^{-1} = -g_n d_{JC} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (g_i \otimes g_{n-i}) \Delta_{JC}.$$



Finalement, on obtient l'égalité

$$g_n d_{JC} + (-1)^n d_{(JD)^{\otimes n}} g_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left( (g_j \otimes g_{n-j}) \Delta_{JC} - (1^{\otimes j-1} \otimes \Delta_{JD} \otimes 1^{\otimes n-j-1}) g_{n-1} \right).$$

Enfin,  $\sum_{i \geq 1} g_i$  est localement fini puisque  $\sum_{i \geq 1} f_i$  est localement fini par définition de la construction cobar.  $\square$

## A.4 Calculs utiles dans le chapitre 4

### Théorème de Gugenheim-Munkholm

**Théorème A.7.** *Soit*

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla} \\ \xleftarrow{f} \end{array} Y \circ \varphi$$

un SDR d'Eilenberg-Zilber, et soit  $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$f_1 = f$$

et

$$f_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i+1} (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta \varphi, \text{ pour } n \geq 2.$$

Alors  $F$  est un morphisme **DCSH**.

**Preuve :** Dans cette preuve, on utilise la notation  $f_0 = 0$ . Il est évident que  $f_n$  est de degré  $n-1$ , il reste à montrer (par récurrence) que

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{n+1-j} [(f_j \otimes f_{n+1-j}) \Delta_C - (Id^{\otimes j-1} \otimes \Delta_D \otimes Id^{\otimes n-j}) f_n] = f_{n+1} d_C + (-1)^{n+1} d_{D^{\otimes n+1}} f_{n+1}.$$

Pour  $n=1$  et  $n=2$ , c'est évident, et pour  $n \geq 3$ , on a

$$\begin{aligned} & f_{n+1} d + (-1)^{n+1} f_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \varphi d + (-1)^{n+1} d \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \varphi \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \varphi d + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (df_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \varphi \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} (f_i \otimes df_{n+1-i}) \Delta \varphi \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \varphi d \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{1-i} \left( [(-1)^{i+1} f_i d + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k [(f_k \otimes f_{i-k})\Delta - (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes i-k-1})f_{i-1}] \otimes f_{n+1-i} \Big) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n (f_i \otimes [(-1)^{n-i} f_{n+1-i} d \\
& + \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k [(f_k \otimes f_{n+1-i-k})\Delta - (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i-k})f_{n-i}]) \Delta\varphi \\
= & \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta\varphi d \\
& + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} ((-1)^{n+1} f_i d \otimes f_{n+1-i}) \Delta\varphi \\
& + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \left( \left[ \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k (f_k \otimes f_{i-k}) \Delta \right] \otimes f_{n+1-i} \right) \Delta\varphi \\
& + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \left( \left[ \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k-1} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes i-k-1}) f_{i-1} \right] \otimes f_{n+1-i} \right) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n (f_i \otimes [(-1)^{n-i} f_{n+1-i} d]) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n \left( f_i \otimes \left[ \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k (f_k \otimes f_{n+1-i-k}) \Delta \right] \right) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n \left( f_i \otimes \left[ \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^{k-1} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i-k}) f_{n-i} \right] \right) \Delta\varphi \\
= & \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta\varphi d \\
& + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) (d \otimes 1) \Delta\varphi \\
& + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{n-i+k} (f_k \otimes f_{i-k} \otimes f_{n+1-i}) \Delta^{(2)}\varphi \\
& + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{n+1-i+k} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-k}) (f_{i-1} \otimes f_{n+1-i}) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) (1 \otimes d) \Delta\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k (f_i \otimes f_k \otimes f_{n+1-i-k}) \Delta^{(2)}\varphi \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^{k-1} (Id^{\otimes i+k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i-k}) (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta(\varphi d + d\varphi) \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{n-i+k} (f_k \otimes f_{i-k} \otimes f_{n+1-i}) \Delta^{(2)}\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k (f_i \otimes f_k \otimes f_{n+1-i-k}) \Delta^{(2)}\varphi \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{n+1-i+k} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-k}) (f_{i-1} \otimes f_{n+1-i}) \Delta\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^{k-1} (Id^{\otimes i+k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i-k}) (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta\varphi \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta(\nabla f - 1) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{j+1} (f_k \otimes f_j \otimes f_{n+1-j-k}) \Delta^{(2)}\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^k (f_i \otimes f_k \otimes f_{n+1-i-k}) \Delta^{(2)}\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i (-1)^{-i+k-1} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-k}) (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (-1)^{k-1} (Id^{\otimes i+k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i-k}) (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta\varphi \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-k}) \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} (f_i \otimes f_{n-i}) \Delta\varphi \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (Id^{\otimes k-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-k}) f_n \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \left[ (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta - (Id^{\otimes i-1} \otimes \Delta \otimes Id^{\otimes n-i}) f_n \right].
\end{aligned}$$

L'égalité (\*) est vraie car

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) \Delta \nabla f &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (f_i \otimes f_{n+1-i}) (\nabla \otimes \nabla) \Delta f \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque  $n \geq 3$  implique  $i \geq 2$  ou  $n + 1 - i \geq 2$ . Et  $f_k \nabla = 0$  si  $k \geq 3$  car  $\varphi \nabla = 0$  par définition d'un SDR d'Eilenberg-Zilber.  $\square$

## Coalgèbres d'Alexander-Whitney fortes : contre-exemple

Ici,  $K$  est un ensemble simplicial, et  $\tilde{C}(K) = (C(K), \psi)$  est la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney sur les chaînes normalisées de  $K$ . Les faces de  $K$  sont notées  $d_i$  et les dégénérescences de  $K$  sont notées  $s_j$ .

Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

**Proposition A.8.** *Soit  $x_{012}$  l'unique 2-simplexe non-dégénéré de l'ensemble simplicial  $\Delta[2]$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \alpha(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(x_{012}) + \left( (1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1) \right) \psi_2(x_{012}) \\ & \neq \beta(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(x_{012}) + \left( (\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1) \right) \psi_2(x_{012}). \end{aligned}$$

(Comme d'habitude,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les permutations qui placent les facteurs dans le "bon" ordre. Et c'est aussi leur travail dans la preuve ci-dessous.)

Mais pour prouver cette proposition, on a d'abord besoin de deux lemmes préliminaires.

**Lemme A.9.** *Soit  $k_1$  un 1-simplexe de  $K$ . Alors*

$$\psi_2(k_1) = d_1 k_1 \otimes k_1 \otimes k_1 \otimes d_0 k_1.$$

**Preuve :** La deuxième égalité du calcul ci-dessous est justifiée par la formule pour  $\varphi(k_1, k_1)$  rappelée dans la preuve du lemme A.4 et par le fait que  $(s_1 s_0 d_1 k_1, s_0 k_1) = s_0(s_0 d_1 k_1, k_1) = 0$  puisque l'on travaille avec les chaînes normalisées.

$$\begin{aligned} & \psi_2(k_1) \\ &= (f \otimes f) \Delta_{K \times K} \varphi(k_1, k_1) \\ &= (f \otimes f) \Delta_{K \times K}(s_0 k_1, s_1 k_1) \\ &= (f \otimes f) f_{K \times K}(s_0 k_1, s_1 k_1, s_0 k_1, s_1 k_1) \\ &= (f \otimes f)[d_1 d_2(s_0 k_1, s_1 k_1) \otimes (s_0 k_1, s_1 k_1)] + (f \otimes f)[d_2(s_0 k_1, s_1 k_1) \otimes d_0(s_0 k_1, s_1 k_1)] \\ & \quad + (f \otimes f)[(s_0 k_1, s_1 k_1) \otimes d_0 d_0(s_0 k_1, s_1 k_1)] \\ &= (f \otimes f)[(d_1 k_1, d_1 k_1) \otimes (s_0 k_1, s_1 k_1) + (s_0 d_1 k_1, k_1) \otimes (k_1, s_0 d_0 k_1) + (s_0 k_1, s_1 k_1) \otimes (d_0 k_1, d_0 k_1)] \\ &= (d_1 k_1 \otimes d_1 k_1) \otimes [d_1 d_2 s_0 k_1 \otimes s_1 k_1 + d_2 s_0 k_1 \otimes d_0 s_1 k_1 + s_0 k_1 \otimes d_0 d_0 s_1 k_1] \\ & \quad + [d_1 s_0 d_1 k_1 \otimes k_1 + s_0 d_1 k_1 \otimes d_0 k_1] \otimes [d_1 k_1 \otimes s_0 d_0 k_1 + k_1 \otimes d_0 s_0 d_0 k_1] \\ & \quad + [d_1 d_2 s_0 k_1 \otimes s_1 k_1 + d_2 s_0 k_1 \otimes d_0 s_1 k_1 + s_0 k_1 \otimes d_0 d_0 s_1 k_1] \otimes (d_0 k_1 \otimes d_0 k_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(d_1k_1 \otimes d_1k_1) \otimes [d_1k_1 \otimes s_1k_1 + s_0d_1k_1 \otimes s_0d_0k_1 + s_0k_1 \otimes d_0k_1]] \\
&\quad + [d_1k_1 \otimes k_1 + s_0d_1k_1 \otimes d_0k_1] \otimes [d_1k_1 \otimes s_0d_0k_1 + k_1 \otimes d_0k_1] \\
&\quad + [d_1k_1 \otimes s_1k_1 + s_0d_1k_1 \otimes s_0d_0k_1 + s_0k_1 \otimes d_0k_1] \otimes (d_0k_1 \otimes d_0k_1) \\
&= d_1k_1 \otimes k_1 \otimes k_1 \otimes d_0k_1.
\end{aligned}$$

□

**Lemme A.10.** *Soit  $k_2$  un 2-simplexe de  $K$ . Alors*

$$\begin{aligned}
\psi_2(k_2) &= -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2.
\end{aligned}$$

**Preuve** : Dans ce qui suit, on note  $f = f_{K,K}$ ,  $\varphi = \varphi_{K,K}$ , et  $\Delta = \Delta_{C(K \times K)}$ .  
En utilisant le lemme A.4 pour la dernière égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\psi_2(k_2) &= (f \otimes f)\Delta_{C(K \times K)}\varphi C(\Delta_K)(k_2) \\
&= (f \otimes f)\Delta_{C(K \times K)}\varphi(k_2, k_2) \\
&= (f \otimes f)\Delta_{C(K \times K)}\left(- (s_1k_2, s_2k_2) + (s_2s_0d_2k_2, s_1k_2) - (s_1s_0d_2k_2, s_2k_2) + (s_0k_2, s_2s_1d_1k_2)\right).
\end{aligned}$$

Pour terminer, il reste à calculer  $f^{\otimes 2}\Delta_{C(K \times K)}(k_3, l_3)$ , où  $k_3$  et  $l_3$  sont des 3-simplexes de  $K$ .  
En fait, on a

$$\begin{aligned}
&(f \otimes f)\Delta_{C(K \times K)}(k_3, l_3) \\
&= (f \otimes f)f_{K \times K, K \times K}[(k_3, l_3), (k_3, l_3)] \\
&= (f \otimes f)\left(d_1d_2d_3(k_3, l_3) \otimes (k_3, l_3) + d_2d_3(k_3, l_3) \otimes d_0(k_3, l_3) + d_3(k_3, l_3) \otimes d_0d_0(k_3, l_3) \right. \\
&\quad \left. + (k_3, l_3) \otimes d_0d_0d_0(k_3, l_3)\right) \\
&= (f \otimes f)\left((d_1d_2d_3k_3, d_1d_2d_3l_3) \otimes (k_3, l_3) + (d_2d_3k_3, d_2d_3l_3) \otimes (d_0k_3, d_0l_3) \right. \\
&\quad \left. + (d_3k_3, d_3l_3) \otimes (d_0d_0k_3, d_0d_0l_3) + (k_3, l_3) \otimes (d_0d_0d_0k_3, d_0d_0d_0l_3)\right) \\
&= (d_1d_2d_3k_3 \otimes d_1d_2d_3l_3) \otimes [d_1d_2d_3k_3 \otimes l_3 + d_2d_3k_3 \otimes d_0l_3 + d_3k_3 \otimes d_0d_0l_3 + k_3 \otimes d_0d_0d_0l_3] \\
&\quad + [d_1d_2d_3k_3 \otimes d_2d_3l_3 + d_2d_3k_3 \otimes d_0d_2d_3l_3] \\
&\quad \quad \otimes [d_1d_2d_0k_3 \otimes d_0l_3 + d_2d_0k_3 \otimes d_0d_0l_3 + d_0k_3 \otimes d_0d_0d_0l_3] \\
&\quad + [d_1d_2d_3k_3 \otimes d_3l_3 + d_2d_3k_3 \otimes d_0d_3l_3 + d_3k_3 \otimes d_0d_0d_3l_3] \\
&\quad \quad \otimes [d_1d_0d_0k_3 \otimes d_0d_0l_3 + d_0d_0k_3 \otimes d_0d_0d_0l_3]
\end{aligned}$$

$$+[d_1d_2d_3k_3 \otimes l_3 + d_2d_3k_3 \otimes d_0l_3 + d_3k_3 \otimes d_0d_0l_3 + k_3 \otimes d_0d_0d_0l_3] \otimes d_0d_0d_0k_3 \otimes d_0d_0d_0l_3.$$

De sorte à simplifier un peu le calcul qui va suivre, on peut remarquer que si  $k_3 \in \{s_1k_2, s_2s_0d_2k_2, s_1s_0d_2k_2, s_0k_2\}$  et si  $l_3 \in \{s_2k_2, s_1k_2, s_2k_2, s_2s_1d_1k_2\}$ , alors  $k_3, l_3, d_3k_3$ , et  $d_0l_3$  sont dégénérés. Donc

$$\begin{aligned} & \psi_2(k_2) \\ &= 0 - \left[ d_1d_2d_3s_1k_2 \otimes d_2d_3s_2k_2 + d_2d_3s_1k_2 \otimes d_0d_2d_3s_2k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_2d_0s_1k_2 \otimes d_0s_2k_2 + d_2d_0s_1k_2 \otimes d_0d_0s_2k_2 + d_0s_1k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2k_2 \right] \\ & - \left[ d_1d_2d_3s_1k_2 \otimes d_3s_2k_2 + d_2d_3s_1k_2 \otimes d_0d_3s_2k_2 + d_3s_1k_2 \otimes d_0d_0d_3s_2k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_0d_0s_1k_2 \otimes d_0d_0s_2k_2 + d_0d_0s_1k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2k_2 \right] + 0 \\ & + 0 + \left[ d_1d_2d_3s_2s_0d_2k_2 \otimes d_2d_3s_1k_2 + d_2d_3s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_2d_3s_1k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_2d_0s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0s_1k_2 + d_2d_0s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0s_1k_2 + d_0s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_0s_1k_2 \right] \\ & + \left[ d_1d_2d_3s_2s_0d_2k_2 \otimes d_3s_1k_2 + d_2d_3s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_3s_1k_2 + d_3s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_3s_1k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_0d_0s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0s_1k_2 + d_0d_0s_2s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_0s_1k_2 \right] + 0 \\ & + 0 - \left[ d_1d_2d_3s_1s_0d_2k_2 \otimes d_2d_3s_2k_2 + d_2d_3s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_2d_3s_2k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_2d_0s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0s_2k_2 + d_2d_0s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0s_2k_2 + d_0s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2k_2 \right] \\ & - \left[ d_1d_2d_3s_1s_0d_2k_2 \otimes d_3s_2k_2 + d_2d_3s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_3s_2k_2 + d_3s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_3s_2k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_0d_0s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0s_2k_2 + d_0d_0s_1s_0d_2k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2k_2 \right] + 0 \\ & + 0 + \left[ d_1d_2d_3s_0k_2 \otimes d_2d_3s_2s_1d_1k_2 + d_2d_3s_0k_2 \otimes d_0d_2d_3s_2s_1d_1k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_2d_0s_0k_2 \otimes d_0s_2s_1d_1k_2 + d_2d_0s_0k_2 \otimes d_0d_0s_2s_1d_1k_2 + d_0s_0k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2s_1d_1k_2 \right] \\ & + \left[ d_1d_2d_3s_0k_2 \otimes d_3s_2s_1d_1k_2 + d_2d_3s_0k_2 \otimes d_0d_3s_2s_1d_1k_2 + d_3s_0k_2 \otimes d_0d_0d_3s_2s_1d_1k_2 \right] \otimes \\ & \quad \left[ d_1d_0d_0s_0k_2 \otimes d_0d_0s_2s_1d_1k_2 + d_0d_0s_0k_2 \otimes d_0d_0d_0s_2s_1d_1k_2 \right] + 0 \\ & = - \left[ d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \right] \\ & \quad \otimes \left[ d_1d_0k_2 \otimes s_1d_0k_2 + s_0d_1d_0k_2 \otimes s_0d_0d_0k_2 + s_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right] \\ & - \left[ d_1d_2k_2 \otimes k_2 + d_2k_2 \otimes d_0k_2 + s_1d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right] \otimes \left[ d_1d_0k_2 \otimes s_0d_0d_0k_2 + d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes d_2 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_2 k_2] \\
& \quad \otimes [d_1 d_2 k_2 \otimes s_0 d_0 k_2 + d_2 k_2 \otimes d_0 k_2 + s_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 s_1 k_2] \\
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes s_1 d_2 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes s_0 d_0 d_2 k_2 + s_0 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 d_3 s_1 k_2] \\
& \quad \otimes [d_0 d_2 k_2 \otimes d_0 k_2 + s_0 d_0 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 k_2] \\
& - [d_1 d_2 k_2 \otimes d_2 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_2 k_2] \\
& \quad \otimes [d_1 d_2 k_2 \otimes s_1 d_0 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 s_2 k_2 + s_0 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 d_0 s_2 k_2] \\
& - [d_1 d_2 k_2 \otimes k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_3 s_2 k_2 + s_1 s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 k_2] \\
& \quad \otimes [d_1 d_2 k_2 \otimes s_0 d_0 d_0 k_2 + d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 k_2] \\
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes d_1 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes d_0 d_1 k_2] \\
& \quad \otimes [d_1 d_2 k_2 \otimes s_1 s_0 d_0 d_1 k_2 + d_2 k_2 \otimes s_0 d_0 d_1 k_2 + k_2 \otimes d_0 d_1 k_2] \\
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes s_1 d_1 k_2 + s_0 d_1 d_2 k_2 \otimes s_0 d_0 d_1 k_2 + s_0 d_2 k_2 \otimes d_0 d_1 k_2] \\
& \quad \otimes [d_1 d_0 k_2 \otimes s_0 d_0 d_1 k_2 + d_0 k_2 \otimes d_0 d_1 k_2] \\
= & - [d_1 d_2 k_2 \otimes d_2 k_2 + d_2 k_2 \otimes d_0 d_2 k_2] \otimes [0 + 0 + 0] \\
& - [d_1 d_2 k_2 \otimes k_2 + d_2 k_2 \otimes d_0 k_2 + 0] \otimes [0 + d_0 k_2 \otimes d_0 d_0 k_2] \\
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes d_2 k_2 + 0] \otimes [0 + d_2 k_2 \otimes d_0 k_2 + 0] \\
& + [0 + 0 + 0] \otimes [d_0 d_2 k_2 \otimes d_0 k_2 + 0] \\
& - [d_1 d_2 k_2 \otimes d_2 k_2 + 0] \otimes [0 + 0 + 0] \\
& - [d_1 d_2 k_2 \otimes k_2 + 0 + 0] \otimes [0 + d_2 k_2 \otimes d_0 d_0 k_2] \\
& + [d_1 d_2 k_2 \otimes d_1 k_2 + 0] \otimes [0 + 0 + k_2 \otimes d_0 d_1 k_2] \\
& + [0 + 0 + 0] \otimes [0 + d_0 k_2 \otimes d_0 d_1 k_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2.
\end{aligned}$$

□

Et maintenant on a tout ce qu'il faut pour prouver la proposition énoncée plus haut.

**Preuve de la proposition A.8** : Malheureusement, on a l'égalité

$$\alpha(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(k_1) + \left( (1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1) \right) \psi_2(k_1) = \beta(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(k_1) + \left( (\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1) \right) \psi_2(k_1)$$

pour tout 1-simplexe  $k_1 \in K$ , et il faut donc aller chercher un contre-exemple en dimension 2.

Sachant que par le lemme A.10 on a

$$\begin{aligned}
\bullet \psi_2(k_2) &= -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2
\end{aligned}$$

et que par le lemme A.9 on a

$$\bullet \psi_2(k_1) = d_1k_1 \otimes k_1 \otimes k_1 \otimes d_0k_1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(k_2) \\
&= (\Delta \otimes \psi_2)(d_1d_2k_2 \otimes k_2 + d_2k_2 \otimes d_0k_2 + k_2 \otimes d_0d_0k_2) \\
&= \Delta(d_1d_2k_2) \otimes \psi_2(k_2) - \Delta(d_2k_2) \otimes \psi_2(d_0k_2) \\
&= d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes \left[ -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right. \\
&\quad \left. + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \right] \\
&\quad - [d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2] \otimes [d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2] \\
&= -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(k_2) = -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2$$



$$\begin{aligned}
& -d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
& -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
& -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& -d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& \left( (1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1) \right) \psi_2(k_2) = \\
& \left( (1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1) \right) \left[ -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right. \\
& \quad \left. +d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right. \\
& \quad \left. +d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \right] \\
& = -d_1d_2k_2 \otimes \psi_1(k_2) \otimes d_0k_2 \otimes \psi_1(d_0d_0k_2) - d_2k_2 \otimes \psi_1(d_0k_2) \otimes d_0k_2 \otimes \psi_1(d_0d_0k_2) \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes \psi_1(d_2k_2) \otimes d_2k_2 \otimes \psi_1(d_0k_2) - d_1d_2k_2 \otimes \psi_1(k_2) \otimes d_2k_2 \otimes \psi_1(d_0d_0k_2) \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes \psi_1(d_1k_2) \otimes k_2 \otimes \psi_1(d_0d_1k_2) \\
& = -d_1d_2k_2 \otimes [d_1d_2k_2 \otimes k_2 + d_2k_2 \otimes d_0k_2 + k_2 \otimes d_0d_0k_2] \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_2k_2 \otimes [d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 + d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2] \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes [d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2] \otimes d_2k_2 \otimes [d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 + d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2] \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes [d_1d_2k_2 \otimes k_2 + d_2k_2 \otimes d_0k_2 + k_2 \otimes d_0d_0k_2] \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes [d_1d_1k_2 \otimes d_1k_2 + d_1k_2 \otimes d_0d_1k_2] \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
& = -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_1k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
& \quad +d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes d_0d_1k_2.
\end{aligned}$$

De manière analogue on a

$$(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(k_2) = (\psi_2 \otimes \Delta)(d_1d_2k_2 \otimes k_2 + d_2k_2 \otimes d_0k_2 + k_2 \otimes d_0d_0k_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_2(d_2k_2) \otimes \Delta(d_0k_2) + \psi_2(k_2) \otimes \Delta(d_0d_0k_2) \\
&= d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
\beta(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(k_2) &= d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \otimes d_0d_0k_2.
\end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned}
&\left( (\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1) \right) \psi_2(k_2) = \\
&\quad \left( (\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1) \right) \left[ -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \right. \\
&\quad \left. -d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 + d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \right. \\
&\quad \left. -d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 + d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \right] \\
&= -\psi_1(d_1d_2k_2) \otimes k_2 \otimes \psi_1(d_0k_2) \otimes d_0d_0k_2 - \psi_1(d_2k_2) \otimes d_0k_2 \otimes \psi_1(d_0k_2) \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + \psi_1(d_1d_2k_2) \otimes d_2k_2 \otimes \psi_1(d_2k_2) \otimes d_0k_2 - \psi_1(d_1d_2k_2) \otimes k_2 \otimes \psi_1(d_2k_2) \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + \psi_1(d_1d_2k_2) \otimes d_1k_2 \otimes \psi_1(k_2) \otimes d_0d_1k_2 \\
&= -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes [d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 + d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2] \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - [d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2] \otimes d_0k_2 \otimes [d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 + d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2] \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes [d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2] \otimes d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes [d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 + d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2] \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad + d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes \psi_1(k_2) \otimes d_0d_1k_2 \\
&= -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
&\quad - d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_1d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0k_2 \\
& -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& -d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0d_2k_2 \otimes d_0d_0k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes d_2k_2 \otimes d_0k_2 \otimes d_0d_1k_2 \\
& +d_1d_2k_2 \otimes d_1d_2k_2 \otimes d_1k_2 \otimes k_2 \otimes d_0d_0k_2 \otimes d_0d_1k_2.
\end{aligned}$$

Maintenant, prenons  $k_2 = x_{012}$ . Il est clair qu'aucun des simplexes suivants n'est dégénéré :  $x_{012}, d_jx_{012}, d_id_jx_{012}, \forall 0 \leq j \leq 2$  et  $\forall 0 \leq i \leq 1$ . Il suffit de constater que  $\alpha(\Delta \otimes \psi_2)\psi_1(x_{012}) + \left((1 \otimes \psi_1) \otimes (1 \otimes \psi_1)\right)\psi_2(x_{012})$  est une combinaison linéaire (avec tous les coefficients égaux à 1 ou à -1) de 21 éléments de la base évidente de  $(C(\Delta[2])^{\otimes 6})_3$ , et que  $\beta(\psi_2 \otimes \Delta)\psi_1(x_{012}) + \left((\psi_1 \otimes 1) \otimes (\psi_1 \otimes 1)\right)\psi_2(x_{012})$  est une combinaison linéaire (avec tous les coefficients égaux à 1 ou à -1) de 20 éléments de la même base, pour conclure.  $\square$

## A.5 Lemmes utiles pour la construction de l'opérade d'Alexander-Whitney

On regroupe ici un certain nombre de lemmes utilisés dans la construction de l'opérade d'Alexander-Whitney. Tous ces lemmes sont élémentaires ; mais dans le souci de ne pas utiliser trop souvent des phrases du type "il est évident que ..." on intègre tout de même ces résultats dans cette annexe.

**Lemme A.11.** *Soit  $G \xrightarrow{\gamma} H$  un morphisme de groupes. Soit encore  $A$  un  $G$ -complexe de chaînes à droite,  $B$  un  $G$ -complexe de chaînes à gauche,  $C$  un  $H$ -complexe de chaînes à droite et finalement, soit  $D$  un  $H$ -complexe de chaînes à gauche. De plus, soit  $\alpha : A \rightarrow C$  et  $\beta : B \rightarrow D$  des morphismes de complexes de chaînes qui respectent l'action des groupes  $H$  et  $G$ . Autrement dit, les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{g} & A \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
C & \xrightarrow{\gamma(g)} & C
\end{array}$$

pour tout  $g \in G$ , et

$$\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{g} & B \\
\downarrow \beta & & \downarrow \beta \\
D & \xrightarrow{\gamma(g)} & D
\end{array}$$

pour tout  $g \in G$ .

Alors le morphisme  $\alpha \otimes \beta : A \otimes B \rightarrow C \otimes D$  s'étend en un morphisme  $\alpha \otimes \beta : A \otimes_G B \rightarrow C \otimes_H D$ .

**Preuve :** Il faut voir que  $(\alpha \otimes \beta)(ag \otimes b) = (\alpha \otimes \beta)(a \otimes gb)$ , pour  $a \in A, b \in B$  et  $g \in G$ . Mais ceci est évident.  $\square$

**Lemme A.12.** Soit  $A$  un  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -complexe de chaînes (à droite) et  $B$  un  $\mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]$ -complexe de chaînes (à droite). Alors on a une bijection

$$\mathbf{Ch}(\mathbb{Z}[\Sigma_n])(A, B) \stackrel{\xi_2}{\cong} \mathbf{Ch}(\mathbb{Z}[\Sigma_{2n}])(\bar{A}, B),$$

sachant que  $\bar{A} = A \otimes_{\Sigma_n} \mathbb{Z}[\Sigma_{2n}]$  et sachant que l'action de  $\Sigma_n$  sur  $B$  est donnée par l'inclusion  $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_{2n}$  qui envoie une permutation sur la permutation qui permute les éléments de  $\{1, \dots, 2n\}$  par blocs de deux éléments.

**Preuve :** Ce lemme est un cas particulier de la proposition de "changement de l'anneau de base" (cf. [BK00] par exemple), qui est aisée à prouver.  $\square$

**Lemme A.13.** Soit  $A$  et  $B$  des suites symétriques. Alors la donnée d'un morphisme de suites symétriques  $\bar{A} \rightarrow B$  est équivalente à la donnée d'une suite de morphismes

$$\{f_n : A(n) \rightarrow B(2n) \mid f_n \text{ est } \Sigma_n \text{ - équivariant}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

De plus, considérons l'ensemble  $\{g_n : C(n) \rightarrow D(2n) \mid g_n \text{ est } \Sigma_n \text{ - équivariant}\}_{n \in \mathbb{N}}$  et deux morphismes de suites symétriques  $\alpha : A \rightarrow C$  et  $\beta : B \rightarrow D$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(n) & \xrightarrow{f_n} & B(2n) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ C(n) & \xrightarrow{g_n} & D(2n) \end{array}$$

commute si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}(2n) & \xrightarrow{f^{(2n)}} & B(2n) \\ \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow \beta \\ \bar{C}(2n) & \xrightarrow{g^{(2n)}} & D(2n) \end{array}$$

commute.

**Preuve :** La première affirmation est évidente avec le lemme précédent. Et il n'y a aucune difficulté pour prouver la deuxième affirmation.  $\square$

**Lemme A.14.** Fixons  $n \geq 1$  et soit  $A, B$  et  $C$  des suites symétriques. De plus, soit

$$A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) \xrightarrow{f_n} C(2n)$$

un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -complexes de chaînes pour  $\underline{n} \in I_{m,n}$ . Enfin, supposons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) & \xrightarrow{1 \otimes \hat{\sigma}} & A(m) \otimes B(n_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \dots \otimes B(n_{\sigma^{-1}(m)}) \\ \downarrow \sigma \otimes 1 & & \downarrow f_{\sigma \underline{n}} \\ & & C(2n) \\ & & \downarrow \sigma_{\underline{n}} \\ A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) & \xrightarrow{f_n} & C(2n) \end{array}$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & C(2n) \\
\downarrow 1 \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_m & & \downarrow \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m \\
A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) & \xrightarrow{f_{\underline{n}}} & C(2n)
\end{array}$$

commutent, sachant que  $\sigma \in \Sigma_m$  et  $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$ . La famille des morphismes  $f_{\underline{n}}$  s'étend alors de manière unique en un morphisme de  $\Sigma_{2n}$ -modules  $\overline{A \circ B}(2n) \xrightarrow{f} C(2n)$ .

**Preuve** : On peut assembler et étendre la famille  $\{f_{\underline{n}}\}_{\underline{n} \in I_{m,n}}$  en un morphisme de  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -modules

$$\coprod_{m \geq 0} \coprod_{\underline{n} \in I_{m,n}} A(m) \otimes B(n_1) \otimes \dots \otimes B(n_m) \otimes \mathbb{Z}[\Sigma_n] \rightarrow C(2n).$$

Et comme les deux diagrammes donnés ci-dessus commutent, on peut passer à la colimite et obtenir un morphisme de  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ -modules

$$(A \circ B)(n) \xrightarrow{f_n} C(2n).$$

Le lemme A.13 permet de conclure.  $\square$

**Lemme A.15.** Soit  $A$  et  $B$  des  $\Sigma_n$ -modules (à droite). Et soit  $C$  un  $\Sigma_{2n}$ -module (à droite) que l'on peut aussi voir comme un  $\Sigma_n$ -module via l'inclusion  $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_{2n}$  donnée dans le lemme A.12. Soit  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow C$  des morphismes de  $\Sigma_n$ -modules gradués et soit  $d_A : A \rightarrow B$  et  $d_C : C \rightarrow C$  des morphismes de modules gradués de degré  $-1$  sur  $\Sigma_n$  et  $\Sigma_{2n}$  respectivement. Dans cette situation, on a que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & C \\
\downarrow d_A & & \downarrow d_C \\
B & \xrightarrow{g} & C
\end{array}$$

commute si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\overline{A} & \xrightarrow{\overline{f}} & C \\
\downarrow \overline{d}_A & & \downarrow d_C \\
\overline{B} & \xrightarrow{\overline{g}} & C
\end{array}$$

commute,  $\overline{\phantom{x}}$  étant défini comme dans le lemme A.12.

**Preuve** : La preuve est une vérification aisée.  $\square$

**Lemme A.16.** Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  des modules gradués avec  $B \subset D$ . Soit aussi  $f : A \otimes B \rightarrow C$  et  $g : A \otimes D \rightarrow C$  des morphismes de modules gradués tels que  $g$  est une extension de  $f$ . Finalement, soit  $d_A : A \rightarrow A$ ,  $d_B : B \rightarrow D$  et  $d_C : C \rightarrow C$  des morphismes de degré  $-1$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes B & \xrightarrow{f} & C \\
\downarrow d_{A \otimes B} & & \downarrow d_C \\
A \otimes D & \xrightarrow{g} & C
\end{array}$$

commute si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^\#} & \text{Hom}(A, C) \\ \downarrow d_B & & \downarrow d_{\text{Hom}(A, C)} \\ D & \xrightarrow{g^\#} & \text{Hom}(A, C); \end{array}$$

$d_{A \otimes B}$  et  $d_{\text{Hom}(A, C)}$  étant définis de manière usuelle. De plus,  $\#$  fait référence à l'adjonction évidente.

**Preuve :** A nouveau, la preuve est une vérification aisée : le premier des diagrammes ci-dessus commute si et seulement si  $d_C f(a \otimes b) = g(d_A(a) \otimes b) + (-1)^a g(a \otimes d_B(b))$ ,  $\forall a \in A, \forall b \in B$ . Et le deuxième de ces deux diagrammes commute si et seulement si  $(-1)^{a(b-1)} g(a \otimes d_B(b)) = (-1)^{ab} d_C f(a \otimes b) - (-1)^{ab} f(d_A(a) \otimes b)$ ,  $\forall a \in A, \forall b \in B$ , ce qui donne le résultat annoncé.  $\square$

**Lemme A.17.** Soit  $(n_1, \dots, n_m)$  une partition de  $n$ . Et soit

•  $\sigma \in \Sigma_m$ ,

•  $\tau_i \in \Sigma_{2n_i}, m \geq i \geq 1$ .

Alors  $(\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{\sigma^{-1}(m)}^{-1})(\sigma_{\underline{n}})^{(2)} = (\sigma^{(2)})_{2\underline{n}}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})$ .

**Preuve :** Commençons par remarquer que  $(\sigma_{\underline{n}})^{(2)} = (\sigma^{(2)})_{2\underline{n}}$ . Plus précisément, chacune de ces deux permutations permute les éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$  en partitionnant cet ensemble en

$$\{\{1, 2, \dots, 2n_1-1, 2n_1\}, \dots, \{2(n_1 + \dots + n_{m-1}) + 1, 2(n_1 + \dots + n_{m-1}) + 2, \dots, 2n-1, 2n\}\}$$

et en permutant les blocs de cette partition.

D'autre part, chacune des permutations  $\tau_i$  est définie pour agir sur le bloc

$$\{2(n_1 + \dots + n_{i-1}) + 1, 2(n_1 + \dots + n_{i-1}) + 2, \dots, 2(n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i) - 1, 2(n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i)\}.$$

Finalement, comparer la permutation  $(\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{\sigma^{-1}(m)}^{-1})(\sigma_{\underline{n}})^{(2)}$  avec la permutation

$(\sigma^{(2)})_{2\underline{n}}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_m^{-1})$  revient à comparer

- la permutation qui permute d'abord les  $m$  blocs par  $\sigma$  et qui agit ensuite sur chaque bloc par le "bon"  $\tau_i^{-1}$ ,

avec

- la permutation qui permute d'abord chaque bloc avec le "bon"  $\tau_i^{-1}$  et qui ensuite permute les  $m$  blocs par  $\sigma$ .

Il est évident que ces deux permutations sont les mêmes.  $\square$

**Lemme A.18.** Soit  $(n_1, \dots, n_m)$  une partition de  $n$ . Et soit

•  $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$ ,

•  $\tau_i \in \Sigma_{2n_i}$  défini comme dans la définition 5.3. Alors

•  $(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)^{(2)} = (\sigma_1^{(2)} \oplus \dots \oplus \sigma_m^{(2)})$

et

•  $\tau_i^{-1} \sigma_i^{(2)} = (\sigma_i \oplus \sigma_i) \tau_i^{-1}$ .

**Preuve** : La première égalité est évidente. Pour la deuxième égalité, au lieu de faire un calcul formel pas nécessairement très parlant, on donne une preuve "par dessin". Pour cela, on utilise la bijection entre l'ensemble

$$\mathbb{N}_{2n_i} = \{1, 2, \dots, 2n_i - 1, 2n_i\}$$

et l'ensemble

$$E_n = \{1_{\text{noir}}, 1_{\text{bleu}}, 2_{\text{noir}}, 2_{\text{bleu}}, \dots, (n_i)_{\text{noir}}, (n_i)_{\text{bleu}}\}$$

donnée par l'ordre dans lequel les éléments apparaissent. Par exemple, cette bijection fait correspondre 2 avec  $1_{\text{bleu}}$ . Considérons d'abord la permutation  $(\sigma_i \oplus \sigma_i)\tau_i^{-1}$ . La situation de départ est la ligne **A** de la page 126. Faire agir  $\tau_i^{-1}$  sur cet ensemble ordonné produit l'ensemble ordonné exposé dans la ligne **B**. Finalement, faire agir  $(\sigma_i \oplus \sigma_i)$  produit l'ensemble ordonné donné dans la ligne **C**, sachant que  $k_j := \sigma_i^{-1}$ . Et on étudie la permutation  $\tau_i^{-1}\sigma_i^{(2)}$  de la même manière dans la figure donnée en-dessous de celle que l'on vient de considérer. Il est alors clair que ces deux permutations sont les mêmes. □

**Lemme A.19.** Soit  $t_i \in \Sigma_{2n_i}$ ,  $\tau_j \in \Sigma_{2r_j}$  et  $s_k \in \Sigma_{2(r_{n_{k-1}+1}+r_{n_{k-1}+2}+\dots+r_{n_k})}$  les permutations définies dans le lemme 5.7. Alors

$$(t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1})_{2r}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1}) = s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1}.$$

**Preuve** : Les permutations  $(t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1})_{2r}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1})$  et  $s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1}$  sont des permutations dans  $\Sigma_{2r}$ , où  $r = r_1 + \dots + r_n$  et où  $n = n_1 + \dots + n_m$ . Par définition, la permutation  $s_1^{-1} \oplus \dots \oplus s_m^{-1}$  découpe l'ensemble

$$\{1, 2, \dots, 2r\}$$

en  $m$  blocs,

$$\{1, 2, \dots, 2r_{n_1}\} \amalg \{2r_{n_1} + 1, 2r_{n_1} + 2, \dots, 2(r_{n_1} + r_{n_2})\} \amalg \dots \amalg \{2(r_1 + \dots + r_{n_{m-1}}) + 1, \dots, 2r\},$$

et agit sur le  $i$ -ème bloc avec  $s_i$ . Il suffit de montrer l'égalité que ce lemme énonce sur chaque bloc pour que cette égalité soit prouvée. Mais la situation de chaque bloc est semblable, et il suffit donc de montrer l'égalité sur un seul bloc. Pour faciliter la notation, on choisit de considérer le premier bloc :  $\{1, 2, \dots, 2r_{n_1}\}$ . On utilise une bijection analogue à celle utilisée dans le lemme précédent, et la figure A.1 (page 127) donne l'effet de  $s_1^{-1}$  sur ce premier bloc. D'un autre côté, la figure A.2 (qui utilise la notation  $R_1 = 2(\sum_{i=1}^{n_1} r_i)$ ) décrit en deux temps l'effet de  $(t_1^{-1} \oplus \dots \oplus t_m^{-1})_{2r}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_n^{-1})$  sur le premier bloc, et la comparaison des deux "dessins" montre que l'égalité considérée ici est vraie. □



La permutation  $(\sigma_i \oplus \sigma_i)\tau_i^{-1}$



La permutation  $\tau_i^{-1}\sigma_i^{(2)}$



FIG. A.1 – La permutation  $s_1^{-1}$ .

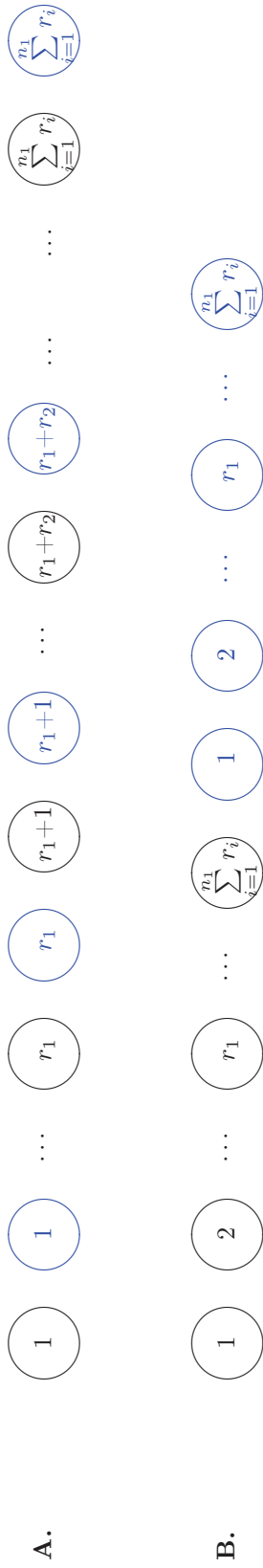
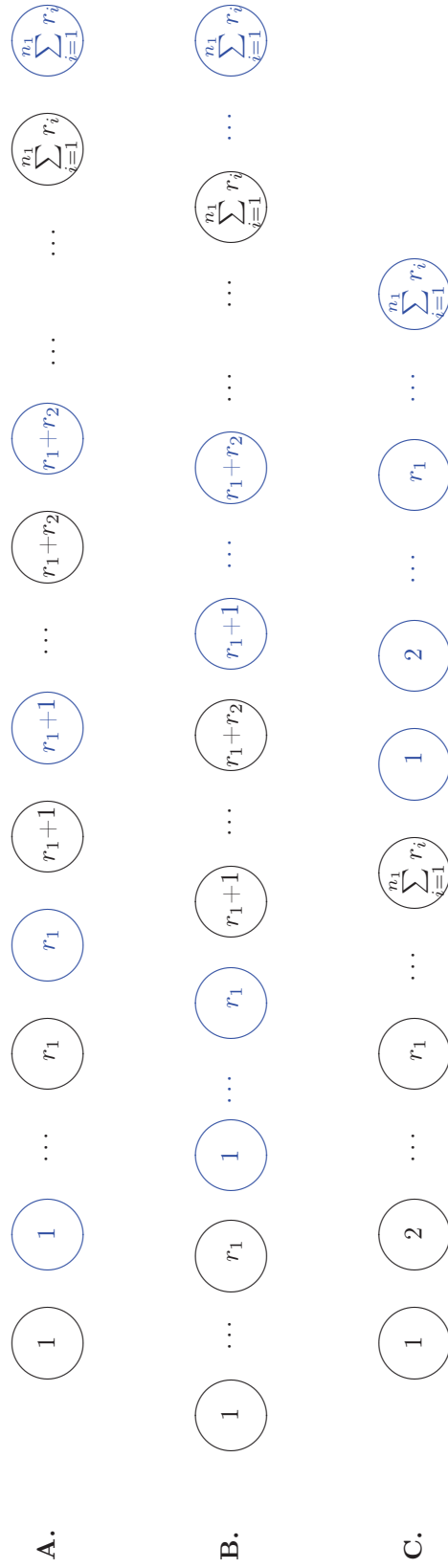


FIG. A.2 – La permutation  $(t_1^{-1})_{2R_1}(\tau_1^{-1} \oplus \dots \oplus \tau_{n_1}^{-1})$  sur le premier bloc.



## A.6 Calculs utiles dans le chapitre 7

**Proposition A.20.** *La transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber ne respecte pas la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney.*

**Preuve :** Dans cette preuve, on note  $\psi = \{\psi_i\}_{i \geq 1}$  la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney de toutes les coalgèbres de ce type qui apparaissent. De plus, on note  $\nabla$  au lieu de  $\nabla_{K,L}$  et les faces sont notées  $d_i$ .

On choisit le 1-simplexe non-dégénéré  $x_{01} \in \Delta[1]$  et on montre que

$$\psi_2 \nabla(x_{01} \otimes x_{01}) \neq (\nabla^{\otimes 4})\psi_2(x_{01} \otimes x_{01}).$$

D'abord calculons

$$\begin{aligned} \psi_2 \nabla(x_{01} \otimes x_{01}) &\stackrel{(*)}{=} -(x_{001}, x_{011}) + (x_{011}, x_{001}) \\ &\stackrel{(**)}{=} +d_1 d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes d_0(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0 d_0(x_{001}, x_{011}) \\ &\quad +d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0 d_0(x_{001}, x_{011}) \\ &\quad -d_1 d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0(x_{001}, x_{011}) \\ &\quad +d_1 d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_0 d_0(x_{001}, x_{011}) \\ &\quad -d_1 d_2(x_{001}, x_{011}) \otimes d_1(x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes d_0 d_1(x_{001}, x_{011}) \\ &\quad -d_1 d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes d_0(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0 d_0(x_{011}, x_{001}) \\ &\quad -d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0 d_0(x_{011}, x_{001}) \\ &\quad +d_1 d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0(x_{011}, x_{001}) \\ &\quad -d_1 d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_0 d_0(x_{011}, x_{001}) \\ &\quad +d_1 d_2(x_{011}, x_{001}) \otimes d_1(x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes d_0 d_1(x_{011}, x_{001}) \\ &= + (x_0, x_0) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad + (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad - (x_0, x_0) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \\ &\quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad - (x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{01}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad - (x_0, x_0) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad - (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \\ &\quad - (x_0, x_0) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_1, x_1) \\ &\quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{01}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_1, x_1). \end{aligned}$$

L'égalité (\*) étant vraie par définition de  $\nabla$  et l'égalité (\*\*) étant vraie par le lemme A.10. D'autre part, on obtient

$$(\nabla^{\otimes 4})\psi_2(x_{01} \otimes x_{01})$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{=} (\nabla^{\otimes 4})\alpha \left[ \left( (1 \otimes \tau \otimes 1)(\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1 \right) \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \left( (\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1 \right) \right] (x_{01} \otimes x_{01}) \\
& = (\nabla^{\otimes 4})\alpha \left[ - \left( (1 \otimes \tau \otimes 1)(\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1 \right) (x_{01}) \otimes \psi_2(x_{01}) + \psi_2(x_{01}) \otimes \left( (\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1 \right) (x_{01}) \right] \\
& \stackrel{(**)}{=} -(\nabla^{\otimes 4})\alpha \left[ \left( x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_1 + x_0 \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \right) \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right] \\
& \quad + (\nabla^{\otimes 4})\alpha \left[ x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes \left( x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} + x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 + x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \right) \right] \\
& = -(\nabla^{\otimes 4})\alpha \left( x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right) \\
& \quad + (\nabla^{\otimes 4})\alpha \left( x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \right) \\
& = -(\nabla^{\otimes 4})\alpha \left( x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. - x_0 \otimes x_0 \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_{01} \otimes x_0 \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \right) \\
& \quad + (\nabla^{\otimes 4})\alpha \left( x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_1 \otimes x_{01} \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. - x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \right. \\
& \quad \left. + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \right) \\
& = -(x_0, x_0) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{01}, x_1) \\
& \quad - (x_0, x_0) \otimes [(x_{011}, x_{001}) - (x_{001}, x_{011})] \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes [(x_{011}, x_{001}) - (x_{001}, x_{011})] \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad - (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \\
& \quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes [(x_{011}, x_{001}) - (x_{001}, x_{011})] \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad - (x_0, x_0) \otimes [(x_{011}, x_{001}) - (x_{001}, x_{011})] \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad + (x_{00} \otimes x_{01}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad = -(x_0, x_0) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \\
& \quad - (x_0, x_0) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\
& \quad + (x_0, x_0) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{00}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(x_0, x_0) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_1, x_1) \\
& -(x_0, x_0) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_1, x_1) \\
& -(x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \otimes (x_1, x_1) \\
& +(x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{11}, x_{01}) \\
& +(x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_1, x_1) \\
& -(x_0, x_0) \otimes (x_{01}, x_{00}) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_1, x_1) \\
& -(x_0, x_0) \otimes (x_{011}, x_{001}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\
& +(x_0, x_0) \otimes (x_{001}, x_{011}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1) \\
& +(x_{00}, x_{01}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_{01}, x_{11}) \otimes (x_1, x_1).
\end{aligned}$$

Ci-dessus, l'égalité (\*) est justifiée par le corollaire 5.24 qui donne la structure d'opérade de Hopf de  $\mathcal{AW}$ ; cette structure d'opérade de Hopf définissant la structure de coalgèbre d'Alexander-Whitney du produit tensoriel de deux coalgèbres d'Alexander-Whitney. L'isomorphisme  $\alpha$  est l'isomorphisme de permutation qui ordonne les facteurs dans le "bon" ordre. Et l'égalité (\*\*) est vraie par le lemme A.9 et parce que

$$\begin{aligned}
& (\psi_1 \otimes \psi_1)\psi_1 x_{01} \\
& = (\psi_1 \otimes \psi_1)(x_0 \otimes x_{01} + x_{01} \otimes x_1) \\
& = x_0 \otimes x_0 \otimes [x_0 \otimes x_{01} + x_{01} \otimes x_1] + [x_0 \otimes x_{01} + x_{01} \otimes x_1] \otimes x_1 \otimes x_1 \\
& = x_0 \otimes x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} + x_0 \otimes x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 + x_0 \otimes x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 + x_{01} \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1.
\end{aligned}$$

Il suffit de comparer les deux résultats obtenus pour voir que  $\nabla$  ne respecte pas  $\psi_2$ . □

## A.7 Quelques propriétés de $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$

Dans cette section, on "rappelle" que l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$  est noethérien. De plus, on explique qu'il y a une notion de rang pour tout  $\Sigma_n$ -module libre de type fini, ce qui n'est pas évident pour les anneaux non-commutatifs.

Commençons par rappeler la définition d'un module noethérien. Pour cela on a besoin de la proposition suivante.

**Proposition A.21.** *Soit  $M$  un module sur un anneau  $R$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Toute suite de sous-modules*

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$$

*se stabilise. Autrement dit, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $M_i = M_n$  pour tout  $i \geq n$ .*

(b) *Toute famille non-vide de sous-modules de  $M$  admet un élément maximal (pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion).*

(c) *Tout sous-module de  $M$  admet un système de générateurs fini.*

Cette proposition (élémentaire) et bien d'autres résultats et définitions concernant les anneaux et modules noethériens sont disponibles dans [GW04].

**Définition A.5.** Un module  $M$  sur un anneau  $R$  est noethérien si l'une des trois conditions données dans la proposition ci-dessus est satisfaite.

**Définition A.6.** Un anneau  $R$  est noethérien à gauche (respectivement à droite) si  $R$  est noethérien comme  $R$ -module à gauche (resp. à droite). Un anneau  $R$  est noethérien s'il est noethérien à gauche et à droite.

La proposition suivante assure que  $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$  est noethérien pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition A.22.**

- (a) Tout anneau principal est noethérien.
- (b) L'anneau de groupe  $R[\Sigma_n]$  est noethérien si  $R$  est un anneau principal.

**Preuve :** L'affirmation (a) est évidente. Et l'affirmation (b) est vraie car si  $N$  est un  $R[\Sigma_n]$ -sous-module à gauche (respectivement à droite) de  $R[\Sigma_n]$  alors  $N$  est également un  $R$ -sous-module de  $R[\Sigma_n]$  vu comme  $R$ -module via le morphisme d'anneau  $R \rightarrow R[\Sigma_n]$ . Autrement dit,  $N$  est un sous-module d'un  $R$ -module libre de type fini. Comme  $R$  est principal, on en tire que  $N$  est engendré, comme  $R$ -module, par une partie finie. Mais une partie  $R$ -génératrice est certainement aussi une partie  $R[\Sigma_n]$ -génératrice, ce qui montre que  $N$  est de type fini comme  $R[\Sigma_n]$ -module.  $\square$

La proposition suivante est donnée en exercice dans le chapitre 0 de [Coh85].

**Proposition A.23.** Soit  $R$  un anneau noethérien. Alors le rang de tout  $R$ -module libre de type fini est bien défini. Autrement dit, si  $R^n \cong R^m$ , alors  $n = m$ .

**Proposition A.24.** Soit  $R$  un anneau principal. Soit  $M$  un  $R[\Sigma_n]$ -module de type fini. Et soit  $N$  un sous- $R[\Sigma_n]$ -module de  $M$ . Alors  $N$  est de type fini.

**Preuve :** Via l'inclusion d'anneaux  $R \rightarrow R[\Sigma_n]$ , on peut voir  $M$  comme un  $R$ -module. Comme  $R$ -module,  $M$  est encore de type fini. Et comme  $N$  est aussi un sous- $R$ -module de  $M$ , il est de type fini comme  $R$ -module. Mais toute partie génératrice de  $N$  comme  $R$ -module est aussi une partie génératrice de  $N$  comme  $R[\Sigma_n]$ -module.  $\square$



# Bibliographie

- [BM03] C. Berger et I. Moerdijk. Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.*, 78(4) :805–831, 2003.
- [BK00] A. J. Berrick et M. E. Keating. *Categories and Modules*. Number 67. Cambridge university press, 2000.
- [Boy08] M. Boyle. *An algebraic model for the chains on a mapping space out of a closed surface*. Ph.d. thesis, University of Aberdeen, 2008.
- [Coh85] P. M. Cohn. *Free Rings and their Relations*, volume 19. Academic Press, 1985.
- [Dup92] N. Dupont. Minimalité des algèbres de chaînes et modèle d’Adams-Hilton. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(8) :949–952, 1992.
- [Dwy] W. G. Dwyer. Homotopy theory and classifying spaces. Disponible à [www.nd.edu/~wgd/drafts/CopenhagenNotes.pdf](http://www.nd.edu/~wgd/drafts/CopenhagenNotes.pdf) le 19.01.2009.
- [DHKS04] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan, et J. H. Smith. *Homotopy limits on model categories and homotopical categories*, volume 113. American Mathematical Society, 2004.
- [DK80] W. G. Dwyer et D. M. Kan. Function complexes in homotopical algebra. *Topology*, 19 :427–440, 1980.
- [DS95] W. G. Dwyer et J. Spalinski. *Handbook of algebraic topology*, chapter Homotopy theories and model categories, pages 73–126. North-Holland, 1995.
- [EM53] S. Eilenberg et S. MacLane. On the groups  $H(\Pi, n)$ , I. *Ann. of Math.*, 58 :55–106, 1953.
- [EM54] S. Eilenberg et S. MacLane. On the groups  $H(\Pi, n)$ , II : Methods of computation. *Ann. of Math.*, 60 :49–139, 1954.
- [FHT01] Y. Felix, S. Halperin, et J.-C. Thomas. *Rational homotopy theory*. Springer-Verlag, New-York, 2001.
- [Fre04] B. Fresse. Koszul duality of operads and homology of partition posets. In "*Homotopy theory and its applications (Evanston, 2002)*", volume 346 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., 2004.
- [Fre09] B. Fresse. *Modules over operads and functors*. Lecture Notes in Mathematics **1967**. Springer-Verlag, 2009.
- [GJ] E. Getzler et J. D. S. Jones. Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces. arXiv :hep-th/9403055.
- [GK94] V. Ginzburg et M. Kapranov. Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76 :203–272, 1994.
- [GW04] K. R. Goodearl et R. B. Warfield. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press, 2004.

- [GM74] V. K. A. M. Gugenheim et H. J. Munkholm. On the extended functoriality of Tor and Cotor. *J. Pure Appl. Algebra*, 4(9-29), 1974.
- [Hal92] S. Halperin. Universal enveloping algebras and loop space homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 83(3) :237–282, 1992.
- [HS70] S. Halperin et J. Stasheff. Differential algebra in its own rite. *Proceedings of the Advanced Study Institute on Algebraic Topology*, III(13) :567–577, 1970.
- [Hes00] K. Hess. Model categories in algebraic topology. *Appl. Categ. Structures*, 10(3) :195–220, 2000.
- [Hes07] K. Hess. Rational homotopy theory : a brief introduction. *Contemp. Math.*, 436 :175–202, 2007.
- [HL07] K. Hess et R. Levi. An algebraic model for the loop space homology of a homotopy fiber. *Algebr. Geom. Topol.*, 7 :1699–1765, 2007.
- [HPSa] K. Hess, P.-E. Parent, et J. Scott. Co-rings over operads characterize morphisms. arXiv :math/0505559.
- [HPSb] K. Hess, P.-E. Parent, et J. Scott. Cohochschild homology of chain coalgebras. arXiv :0711.1023v3, à paraître dans *J. Pure Appl. Algebra*.
- [HPS07] K. Hess, P.-E. Parent, et J. Scott. A chain coalgebra model for the James map. *Homology, Homotopy Appl.*, 9(2) :209–231, 2007.
- [HPST06] K. Hess, P.-E. Parent, J. Scott, et A. Tonks. A canonical enriched Adams-Hilton model for simplicial sets. *Adv. Math*, 207(2) :847–875, 2006.
- [HR] K. Hess et J. Rognes. Power maps in algebra and topology. En préparation.
- [Hir03] P. S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 96. American Mathematical Society, 2003.
- [Hov99] M. Hovey. *Model Categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1999.
- [Jun04] F. Junod. Théorie et application des ensembles simpliciaux. Travail de diplôme, EPFL, 2004.
- [LV] J.-L. Loday et B. Vallette. Algebraic operads. En préparation.
- [Lan63] S. Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.
- [MSS02] M. Markl, S. Shnider, et J. Stasheff. *Operads in Algebra, Topology and Physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, Providence, RI, 2002.
- [May67] P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. D. Van Nostrand Co., 1967.
- [May97] P. May. Definitions : operads, algebras and modules. In *Operads : Proceedings of Renaissance Conferences*, volume 202 of *Contemp. Math.*, 1997.
- [Mun74] H. Munkholm. The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps. *J. Pure Appl. Algebra*, 5 :1–50, 1974.
- [Qui67] D. G. Quillen. *Homotopical algebra*. Number 43 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1967.
- [Rez96] C. Rezk. *Spaces of algebra structures and cohomology of operads*. PhD thesis, MIT, 1996.
- [Smia] J. R. Smith. Cofree coalgebras over operads II. homology invariance. [arxiv.org/abs/math/0404470](http://arxiv.org/abs/math/0404470).
- [Smib] J. R. Smith. Homotopy theory of coalgebras over operads. [arxiv.org/abs/math/0305317](http://arxiv.org/abs/math/0305317).



- [Smi03] J. R. Smith. Cofree coalgebras over operads. *Topology and its Applications*, 133(2) :105–138, 2003.
- [Sta63] J. Stasheff. Homotopy associativity of  $H$ -spaces. I, II. *Trans. Amer. Soc.*, 108 :275–292, 293–312, 1963.
- [Str72] A. Strom. The homotopy category is a homotopy category. *Arch. Math.*, 23 :435–441, 1972.
- [Sul77] D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, (47) :269–331, 1977.
- [Szc61] R. H. Szczarba. The homology of twisted cartesian products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 100 :197–216, 1961.
- [Tan83] D. Tanré. *Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, volume 1025 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1983.

## Index des notations

$(X, d, i)$ -**coalg**, 65  
 $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ -**coalg**, 28  
 $CoEnd(-)$ , 18  
 $End(-)$ , 18  
 $F$ , 20, 23  
 $Hom(-, -)$ , 15, 106  
 $I[\Sigma_n]$ , 16  
 $I_{m,n}$ , 16  
 $\Sigma_n$ , 15  
 $\Sigma_n$ , 16  
 $\bar{-}$ , 48, 122  
 $\circ$ , 16  
 $\delta$ , 21  
 $\epsilon$ , 48  
 $\hat{\sigma}$ , 17, 51  
 $\iota$ , 24  
 $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ , 16  
**Bimod**( $\mathcal{J}, 0$ ), 47  
**Bimod**( $\mathcal{J}, 0, \Delta_{\mathcal{J}}$ ), 48  
**DCSH**, 27, 29, 33, 35  
**HopfOp**, 24  
**Mod** $_{\mathcal{P}}$ , 22  
**Mod** $_{(A, \mathcal{F})}$ , 27  
**Op**, 18  
**Top**, 12  
 $AW$ -**coalg**, 39  
 $\mathcal{P}$ -**alg**, 19  
 $\mathcal{P}$ -**coalg**, 19  
**sSet**, 13, 41  
 $\mathcal{P}Mod_{\mathcal{Q}}$ , 22  
 $\mathcal{P}Mod$ , 22  
 $\mathcal{A}$ , 20, 21  
 $AW$ , 75  
 $AW_{\infty}$ , 102  
 $\mathcal{C}$ , 15, 20, 21  
 $\mathcal{F}_{AW}$ , 28  
 $\mathcal{J}$ , 16  
 $\mathcal{T}$ , 22  
 $\nabla_{K,L}$ , 106  
 $\odot$ , 16  
 $\sigma_{\underline{n}}$ , 17, 51  
 $\sigma^{(2)}$ , 48  
 $\sigma_{\underline{n}}$ , 17, 20  
 $\tau$ , 15, 105  
 $\tilde{C}$ , 41  
 $\tilde{\circ}$ , 16  
 $\underline{n}$ , 16  
 $\varphi_{K,L}$ , 107  
 $\vartheta$ , 52  
 $\vartheta_1$ , 49  
 $\vartheta_2$ , 50  
 $f_{K,L}$ , 42, 106  
 ${}_BMod_{(A, \mathcal{F})}$ , 28  
 $\mathcal{M}$ , 15  
 $\mathcal{M}^{\Sigma}$ , 15

## Index

- équivalence de Quillen, 13
- équivalence faible, 11
  
- algèbre (sur une opérade), 18
- anneau noethérien, 131
  
- bimodule (au-dessous d'un bimodule semi-libre), 47
- bimodule (de Hopf au-dessous d'un bimodule semi-libre muni d'une co-multiplication), 47
- bimodule (gouverné par un co-anneau), 28
- bimodule (sur une couple d'opérades), 22
  
- catégorie homotopique, 12
- catégorie modèle, 11
- co-anneau, 27
- co-anneau d'Alexander-Whitney, 28
- coalgèbre (gouvernée par un co-anneau), 28
- coalgèbre (sur une opérade), 19
- coalgèbre d'Alexander-Whitney, 39, 43
- coalgèbre d'Alexander-Whitney faible, 39
- coalgèbre d'Alexander-Whitney forte, 44
- coalgèbre sur un bimodule, 65
- cobar (construction), 33
- cofibration, 11
- composition (produit de), 17
- couple de Quillen, 13
  
- fibration, 11
- foncteur de décalage, 48
  
- homotopie à droite (entre morphismes de modules à droite sur une opérade), 92
- homotopie d'Eilenberg-MacLane, 107
  
- idéal opéradique, 21
  
- localement fini, 34
  
- modèle (d'un morphisme de complexes de chaînes), 80
- modèle minimal (d'un morphisme de complexes de chaînes), 80
- modèle minimal (d'une coalgèbre sur une opérade), 87
- modèle minimal (pour un module à droite semi-libre), 83
  
- modèle minimal d'Alexander-Whitney, 87
- module (gouverné par un co-anneau), 28
- module à droite (sur une opérade), 22
- module à droite (sur une opérade) semi-libre, 83
- module à droite (sur une opérade) semi-libre relativement à un module à droite, 84
- module à gauche (sur une opérade), 22
- module libre, 23
- module noethérien, 131
- module semi-libre, 23
  
- niveau (d'une suite symétrique), 15
- niveau (structure monoïdale), 16
  
- opérade, 18
- opérade associative, 20, 21
- opérade commutative, 20, 21
- opérade d'Alexander-Whitney, 75
- opérade de Hopf, 24
- opérade des co-endomorphismes, 18
- opérade des endomorphismes, 18
- opérade libre, 20
- opérade par générateurs et relations, 21
- opérade semi-libre, 21
  
- résolution semi-libre (pour un module à droite sur une opérade), 83
- résolution semi-libre (pour un morphisme entre modules à droite sur une opérade), 84
  
- règle de Koszul, 105
- remplacement cofibrant, 12
- remplacement fibrant, 12
  
- SDR d'Eilenberg-Zilber, 41
- similaire (complexes de chaînes), 82
- suite symétrique, 15
  
- transformation naturelle d'Alexander-Whitney, 106
- transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber, 106
- transformation naturelle de Milgram, 40
  
- un modèle minimal (pour un morphisme de modules à droite), 84

# CURRICULUM VITAE

Théophile Naïto

theophile.naito@bluewin.ch

**Adresse :** Av. de Riant-Mont 5, 1004 Lausanne, Suisse

**Tél. :** +41 21 652 47 40

**Nationalité :** Suisse (AG) et Japonais.

**Date et lieu de naissance :** 27 juin 1978 à Genève (Suisse)

## Scolarité

**1985-1997** à l'Ecole R. Steiner de Lausanne

**1997-1999** à l'Ecole des Arches (Lausanne), section scientifique

## Etudes

**1999-2004** de Mathématiques à l'Université de Lausanne (UNIL)  
Travail de diplôme : *Structures algébriques de l'homologie et de la cohomologie d'espaces topologiques* sous la direction de Prof. Kathryn Hess

**2004-présent** de doctorat, en Mathématiques à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, sous la direction de Prof. K. Hess ; achèvement prévu pour mars 2009

## Diplômes

**1997** Certificat de culture générale (Ecole R. Steiner de Lausanne)

**1999** Maturité fédérale (section scientifique)

**2004** Diplôme de mathématicien (UNIL)

## Emploi

**2004-présent** Assistant-Doctorant à la section de Mathématiques de l'EPFL

## Service civil

**Avril-Octobre 2004** Aide de cuisine à l'EMS Bois-Gentil (Lausanne)

**Juillet 2006** Aide de cuisine à l'EMS Bois-Gentil (Lausanne)